BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN ACTUARÍA

CONDICIONES MÍNIMAS PARA GARANTIZAR LA SOLVENCIA DE UNA ASEGURADORA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA:

KAREN ABIGAIL BRAVO CARVAJAL

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA

PUEBLA, PUE. 27 DE JUNIO DE 2018

A mis padres, por su apoyo en todo momento.

Agradecimientos

A mis padres por siempre guiarme con amor y cariño, por sus consejos y por su apoyo incondicional en cada una de mis decisiones pero sobre todo en los momentos difíciles, todo lo que soy y he logrado es gracias a su esfuerzo.

A mis hermanos, Itzel y Carlos, por ser parte importante de mi vida y siempre estar a mi lado apoyandome.

A mi director de tesis, Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, por su tiempo, paciencia, consejos y conocimientos transmitidos no solo durante la realización de este trabajo, sino también en los cursos impartidos.

A mis sinodales, M.C. Brenda Zavala López, por ser excelente maestra, a la que admiro por sus enseñanzas, sus clases fueron esenciales en mi desarrollo profesional. Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes, por su paciencia y la manera en la transmite sus conocimientos, siempre motivándonos a ser mejor. Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, por aceptar ser parte de mi jurado, por su tiempo, por sus comentarios y observaciones que ayudaron a mejorar este trabajo.

A los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y de la Facultad de Economía, con los que tuve la oportunidad de coincidir, por todos los conocimientos que me compartieron.

A mis amigos con los que compartí largas horas de estudio pero también agradables momentos a lo largo de la licenciatura.

Introducción

Todos los días nos enfrentamos a la ocurrencia de riesgos, al estar presentes en cualquier actividad que se realice. El riesgo es una amenaza por la incertidumbre que implica, ya que no se sabe en qué momento se presentará ni las consecuencias que puede generar, provocando incluso un desequilibrio económico. Como medida para protegerse de los riesgos surge el seguro, por medio del cual las empresas o personas transfieren sus riesgos a una aseguradora a cambio del pago de cierta cantidad que es llamada prima, la compañía de seguros pagará la cantidad acordada en caso de la ocurrencia del evento. Es indispensable que estas empresas de seguros cuenten con la suficiente solvencia para poder hacer frente a los compromisos que se presenten.

Sin embargo, existen diversos factores que ponen en peligro la estabilidad de la aseguradora, algunos de estos factores son, riesgo del seguro, que se refiere al riesgo de suscripción, riesgo catastrófico, riesgo de deterioro de las reservas técnicas o riesgo de fluctuaciones de siniestros. Otro de los factores es el riesgo del mercado que afecta los activos y las inversiones. La inflación es otro elemento que interviene en casi todos los aspectos económicos de la solvencia de la aseguradora, finalmente, entre los factores que afectan la solvencia está el riesgo operativo el cual incluye gastos.

Históricamente el desarrollo de la solvencia se ha dividido principalmente en dos etapas, en la primera el enfoque fue clásico mientras que en la segunda fue económico; en el enfoque económico se consideran los activos y pasivos al mismo tiempo, aquí el principal problema que surge es la interacción entre ellos. Se han logrado desarrollar teorías clásicas como lo son la teoría de riesgo colectivo y la teoría de probabilidades de ruina. Antes de que se usara el término solvencia se utilizaban términos como reservas legales y reservas de estabilización, conceptos que se han profundizado a través de los años y que sirven como garantía adicional.

El riesgo representa el elemento fundamental del seguro y es la base de las aseguradoras, ya que sin riesgo no existirían. La necesidad de asegurarse surge al estar frente a la posibilidad de que ocurra un evento que cause daño. Las aseguradoras deberán contar con cierto capital que les permita hacer frente a las situaciones que pongan en riesgo su solvencia, ese capital debe ser suficiente para cubrir los gastos de administración y las reservas para cumplir con las obligaciones futuras, en ocasiones esto es muy difícil ya que existen diversos factores que la afectan y tratar de controlarlos es complicado.

Debido a que analizar y controlar todos los factores que afectan la solvencia de una compañía de seguros resulta muy complicado, es importante encontrar condiciones mínimas que hagan más fácil mantener en equilibrio la solvencia en la aseguradora.

Cuando ocurren demasiadas reclamaciones y la aseguradora no cuenta con suficientes reservas, esto provoca la insolvencia, por eso es importante crear un modelo que permita estimar las reservas necesarias para no llegar a esta situación. En el caso de los seguros contra terremotos, al no ocurrir reclamaciones todos los años se tienen que generar reservas para poder cubrir las reclamaciones cuando ocurre un terremoto, lo importante es saber como ir generando poco a poco esta reserva.

El principal objetivo que se persigue en esta tesis es presentar una estructura que permita mantener la solvencia en aseguradoras, monitoreando y controlando condiciones mínimas, que permitan seguir con su actividad.

Para ello se recurrió al uso de medidas de riesgo, ya que si se modelan riesgos solo con variables aleatorias y sus respectivas funciones de distribución no siempre es posible compararlos por su complejidad a menos que se tenga dominancia estocástica que tiene como desventaja trabajar con un número reducido de variables para su comparación. Cuando las variables aleatorias no tienen dominancia estocástica, significa que no se comparan con sus valores esperados por lo que su uso no incluye toda la información necesaria para evaluar riesgos, en cambio trabajar con medidas de riesgo permite contemplar todo la información necesaria, debido a que estas medidas de riesgo deben cumplir con ciertas propiedades para ser consideradas buena medida, por eso es importante su uso.

Se lograron seleccionar las condiciones, en términos de medidas de riesgo, con las que se garantiza que los activos cubran los pasivos no solo en la actualidad sino también en el futuro, es decir, que las reservas sean suficientes para los pasivos pendientes y en caso de que esto no se logre, emplear las medidas de solución para restablecer la estabilidad de la aseguradora.

Mediante la definición de solvencia con una medida de riesgo se establecieron las condiciones mínimas de solvencia y para poder comparar los activos y los pasivos se recurrió a un sistema consistente, llamado Valoración del Portafolio, que hace posible expresar los pasivos en base a un deflactor para que esté en los mismos términos que los activos y sea sencillo compararlos y con ayuda de un plan de negocios poder generar ingresos que permitan cubrir las responsabilidades futuras. Además, se utilizaron filtraciones para describir la información del mercado financiero y los riesgos técnicos que acumula esta colección.

Este trabajo se estructura con tres capítulos, que se describen brevemente a continuación. En el primer capítulo se establecen los términos básicos relacionados con la solvencia; como el concepto, tipos, formas clásicas de mantener control de la solvencia, análisis de los riesgos que la afectan y elementos que emplean las aseguradoras para conseguir continuidad. Se presentan estos conceptos para que se aprecie la importancia de centrarse en trabajar sólo con algunos factores de riesgo de la solvencia, ya que como podrá verse cada factor de riesgo requiere estudios más profundos.

El segundo capítulo abarca el marco teórico, en el cual se incluyen algunos resultados de la teoría de riesgo para el análisis de la estabilidad de las aseguradoras, y necesario para el estudio de los principales problemas a los que se enfrenta durante la realización de sus actividades. Además, se incluyo esta información para mostrar los dos enfoques, el clásico y el económico, en este capítulo se presenta el enfoque clásico que ha sido de gran importancia.

En el tercer capítulo se desarrolla el enfoque económico y se plantean los conceptos necesarios de medidas de riesgo coherentes los cuales permiten analizar el modelo que controla las condiciones mínimas de solvencia. Estas condiciones son mencionadas en el capítulo 1 pero al ser varios factores los que perjudican la estabilidad de una empresa aseguradora, fue necesario centrarse solo en algunos de estos factores. En el modelo se analiza la condición contable y la condición del contrato del seguro. Finalmente, se encuentran las conclusiones y la bibliografía.

Índice general

Condiciones mínimas para garantizar la solvencia de una aseguradora

Karen Abigail Bravo Carvajal

27 de junio de 2018

Capítulo 1

Solvencia en una aseguradora

En el artículo 1º de la ley sobre el contrato de seguro se estipula que, un seguro es un contrato con el cual una de las partes (el asegurador) se obliga, mediante el cobro de una prima de la otra parte (el asegurado), a resarcir un daño si ocurre el evento previsto. Los seguros se clasifican en seguros sobre personas y seguros contra daños. Los **seguros sobre personas** son aquellos que cubren todos los riesgos que afectan la existencia, integridad física o salud del asegurado, artículo 80 de la ley sobre el contrato de seguro. Se dividen en tres ramas: ramo de vida, ramo de accidentes y ramo de enfermedad. Los **seguros contra daños** también conocidos como seguros de no vida, constituyen un instrumento muy importante de protección económica a favor de personas y empresas por los acontecimientos desfavorables que puedan ocurrir [12]. La principal diferencia entre las clases de seguros es que en los primeros el evento (fallecer) tendrá probabilidad de ocurrencia de uno, mientras que, en los seguros de no vida dicha probabilidad se encuentra entre cero y uno, es decir, cero cuando no hay siniestro y uno cuando hay siniestro total.

Las instituciones de seguros al tener como propósito asumir riesgos, deben contar con una adecuada capacidad financiera que les permita afrontar la cobertura de sus riesgos, es por ello, que siempre han mantenido un control sobre los fondos de reservas, suscripción de riesgos, selección de riesgos, reaseguro, etc. Pero al resultar estas medidas insuficientes y con la necesidad de tener un control legislativo para la supervisión pública se comienza a dar mayor importancia al concepto de solvencia, que es tan antiguo como el concepto de seguro, sin embargo, es en las últimas décadas que se empezó a dar más atención por el avance de conocimientos empíricos y teóricos.

1.1. Concepto y tipos de solvencia

La **Solvencia** es la capacidad para hacer frente a los compromisos adquiridos. Una aseguradora es solvente si tiene suficientes activos para satisfacer sus pasivos. Para mantener un nivel óptimo de solvencia es necesario tener monitoreadas las variables que afectan la probabilidad de ruina. La solvencia se ve afectada por casi todas las actividades económicas, entre los riesgos que la afectan se encuentran la evaluación de reservas, selección de riesgos, reaseguros, el riesgo de inversión, riesgo de suscripción, la supervisión inadecuada y por factores externos como el riesgo de inflación, fluctuaciones en las reclamaciones.

Solvencia Estática y Dinámica

La *solvencia estática* se entiende como la capacidad para hacer frente a los compromisos en un momento determinado, sin tomar en cuenta antecedentes ni la situación del futuro. Mientras que la *solvencia dinámica* es la capacidad para cumplir no solo con los compromisos actuales sino también con las nuevas pólizas suscritas, busca garantizar el futuro de la aseguradora.

1.2. Control de la solvencia

La Primera Conferencia Internacional sobre Solvencia de Seguros se celebró en la Wharton School, Universidad de Pensilvania, en Filadelfia del 18 de junio al 20 de junio de 1986, dicha conferencia se llevo a cabo por la falta de una visión universal de la solvencia y porque no existían los conceptos teóricos y prácticos relevantes para su análisis. De la conferencia surgieron dos temas principales que los llamaron, clásico y financiero o de mercado. Posterior a la conferencia se han reunido en dos volúmenes los documentos presentados en la conferencia más algunos documentos importantes preparados después, en dichos documentos se incluyeron los modelos para control de solvencia que se presentan en seguida.

Modelo Básico

La relación entre los riesgos que afectan la solvencia se modela con un algoritmo de simulación, que refleja el comportamiento de la gestión de la solvencia. Se presenta el desarrollo anual de la posición económica de un asegurador por la siguiente ecuación:

$$B(t) + I(t) = X(t) + C(t) + D(t) + \Delta U(t). \tag{1.1}$$

Donde

B = Ingreso de primas.
I = Rendimiento neto de las inversiones.
X = Reclamaciones pagadas y el incremento de los saldos.
C = Gastos.
D = Dividendos y bonos.
$\Delta U = U(t) - U(t-1)$ = Incremento del margen de solvencia.
t = Año fiscal.

El incremento del margen de solvencia es la diferencia de activos A y pasivos L, es decir, $U = A - L$. Si el margen de solvencia es mayor que cero la empresa es solvente. Se usa para obtener la reserva de riesgo U para el año t cuando se conoce su valor para el año $t-1$.

La expresión (1.1) muestra un resumen de la información que se presenta en los estados financieros, además, es la base para la formulación de modelos.

Transformar el algoritmo anterior sustituyendo $\Delta U(t)$ por $U(t)-U(t-1)$ y dividiendo la ecuación (1.1) por $B(t)$, lo cual reexpresa el modelo en términos porcentuales:

$$u(t) = r_{igp}u(t-1) + 1 + i_i w(t) - x(t) - c(t) - d(t). \tag{1.2}$$

Los símbolos en minúscula representan las relaciones correspondientes a las letras mayúsculas, pero como proporción de las primas pagadas. El uso de proporciones es una estrategia útil para encontrar valores de las razones desconocidas a partir de las conocidas, además, facilita ver el comportamiento de las variables al relacionarse.

Donde

$$u(t) = \frac{U(t)}{B(t)} \text{ Coeficiente de solvencia.} \tag{1.3}$$

$$x(t) = \frac{X(t)}{B(t)} \text{ Índice de siniestralidad.} \tag{1.4}$$

Factor de acumulación de interés generalizado $r_i = 1 + i_i$.
Con i_i= Tasa de interés nominal.

$$r_{igp} = \frac{r_i}{r_{gp}}. \tag{1.5}$$

La expresión (1.5) muestra la relación del interés, inflación y la carga de seguridad. Si esta proporción es menor que la unidad, significa que ocurrió una disminución en el margen de solvencia en relación con el volumen de las inversiones, situación que es compensada con una carga de seguridad que se obtiene del resto de las expresiones de (1.2), es decir, de una disminución de las reclamaciones, gastos y utilidades de bonos.

El crecimiento relativo del volumen de ingresos de primas se descompone en dos factores, r_p el componente causado por la inflación y r_g que indica el crecimiento real.

$$r_{gp} = \frac{B(t)}{B(t-1)} = r_g r_p. \tag{1.6}$$

Por otro lado, el rendimiento de las inversiones $I(t)$ es repartido entre las reservas técnicas $w(t)$ y el margen de solvencia.

$U(0)$ es el margen de solvencia inicial en el momento $t = 0$, para más detalles consultar [19].

Análisis estadístico

Otra manera de controlar la solvencia es por medio del análisis estadístico y se logra entendiendo el comportamiento que presentan los seguros a través de un análisis de los datos observados en ejercicios anteriores, entre estos datos podemos encontrar las fluctuaciones de siniestros, margen de solvencia, etc.

Lo que se busca es calcular las primas en base a la frecuencia de siniestros y los costos que en promedio generarón las coberturas de reclamaciones en años anteriores, analizar estos datos también permite obtener las desviaciones de los gastos reales contra los previstos.

Un ejemplo de control de solvencia con análisis estadístico, es la **prueba de solvencia dinámica**. La aplicación de esta prueba esta estipulada en la ley de instituciones de seguros y de fianzas, y nos dice que las instituciones deberán realizar al menos una prueba anualmente para evaluar la suficiencia de fondos propios para cubrir el requerimiento de capital de solvencia. Se basa en la simulación del comportamiento de las variables de riesgo de la cartera de pólizas de una compañía de seguros y en la proyección de los elementos de los estados financieros [1].

La manera en la que se utiliza el análisis estadístico en la prueba es cuando se considera la información estadística de todas las aseguradoras que conforman los diferentes ramos de seguros en el mercado mexicano de los últimos cinco años de operación, para ajustar las funciones de densidad del monto de las reclamaciones, además, se realizan proyecciones tomando en cuenta el comportamiento histórico de la variable; las variables más relevantes que se proyectan son la prima emitida, prima retenida, reserva de primas, incremento de reserva de primas, costo de adquisición, costo de operación y productos financieros.

1.3. Factores que comprometen la solvencia de la aseguradora

En esta sección se presentan algunos elementos que tienen influencia en la solvencia de una aseguradora y fueron motivados por la consulta en [6].

1.3.1. Fluctuaciones de siniestros

La siniestralidad es aleatoria, así como el costo que genera a la empresa, por ello una fluctuación desfavorable en la siniestralidad es un riesgo para la aseguradora.

La distribución Poisson compuesta generalmente se usa en la literatura para medir las fluctuaciones de las reclamaciones. El número de reclamaciones sigue una distribución Poisson y el de las reclamaciones individuales sigue una distribución $F(x)$ dada.

Para tener control sobre el nivel de retención máxima del reaseguro es necesario incluir en el modelo las variables correspondientes al tamaño de cada reclamación y otras variables importantes.

Las reclamaciones X y el ingreso de primas B presentan variaciones que influyen en el índice de siniestralidad y el coeficiente de solvencia.

1.3.2. Riesgo de activos

El valor de los activos se ve influenciado por los cambios en las tasas de interés y los valores de mercado para las inversiones, cambios que se ven reflejados en el término $I(t)$ del algoritmo (1.1), ya que el no obtener los rendimientos esperados de los activos afecta los ingresos destinados a cubrir obligaciones futuras; y se componen de la tendencia exponencial, fluctuación aleatoria y variaciones que se presentan en intervalos largos de tiempo. Un componente clave que hay que evaluar es el efecto que provoca la inflación en los activos, dicho componente se conoce como relación de inflación y se denota a continuación

$$r_{ip} = 1 + i_{ip} = \frac{(1 + i_i)}{(1 + i_p)}. \tag{1.7}$$

Donde:

r_{ip} = Factor de acumulación que depende del interés e inflación.
i_{ip} = Tasa real de interés.
i_i = Tasa nominal.
i_p = Tasa de inflación de las primas.

El uso de este componente permitiría construir un modelo de riesgo de activos, incorporando la tasa de interés y la inflación para poder evaluar el flujo del negocio. En dicho modelo si la tasa de inflación y la tasa de interés aumentan después de determinado tiempo disminuye el rendimiento promedio.

1.3.3. Liquidez

La liquidez es la facilidad con la que un activo se convierte en dinero en efectivo, mide la capacidad que tiene una empresa para obtener efectivo y hacer frente a sus obligaciones a corto plazo sin tener que vender algún activo a un precio más barato. Así se sabe si la aseguradora es solvente y tiene capacidad para cubrir cualquier imprevisto.

La falta de liquidez implica pérdida por la imposibilidad de adquirir nuevas pólizas y pérdida por la venta anticipada o forzada de activos para cubrir obligaciones a corto plazo. Un alto grado de liquidez permite al asegurador enfrentar obligaciones inesperadas sin necesidad de vender activos, pero debe ser analizado con cuidado ya que si la empresa cuenta con demasiados medios disponibles significa que se están desaprovechando activos que se podrían invertir para generar mayores rendimientos.

Para mantener una inversión adecuada es necesario que la aseguradora tenga en todo momento dinero líquido que le permita responder a las reclamaciones y otros compromisos.

1.3.4. Inversiones

Empleando aspectos de riesgo de activos se trata de compensar el riesgo de pérdidas de inversiones con los rendimientos esperados. Pero el principal problema es que hay que encontrar una relación entre la inflación y los ciclos de la economía nacional, ya que estos afectan la suscripción de pólizas. Los riesgos relacionados con las inversiones se miden en términos de desviaciones estándar.

1.3.5. Gastos

Inicialmente los gastos administrativos y de operaciones de las aseguradoras no eran contemplados en la teoría de riesgo, a pesar de influir en la solvencia, afectando la carga de seguridad, que es una variable clave en el análisis de teoría de riesgo. Es por eso, que cambios en esta variable afectan los gastos en el modelo, razón por la que deben ser incluidos.

Al incorporarlos podemos tener un control en los negocios y en la rentabilidad, para que de esta forma se pueda mejorar la solvencia. Pero se debe considerar la rápidez con la que cambia la relación de gastos $c(t)$ en (1.2), por ejemplo, cuando se presentan dificultades y la empresa tiene que recurrir a un ahorro de gastos, se llega a reducir algunos como los generados de las inversiones que se hacen en instalaciones de oficina, o reducción del personal de operación. Un riesgo en el control de gastos es cuando estos crecen más rápidamente que los ingresos debido a la inflación.

Los movimientos en los gastos son una pieza clave en la planificación estratégica de las aseguradoras siempre y cuando estas se encuentren en buena situación económica.

1.3.6. Inflación

La inflación es un aumento en el nivel de precios de bienes y servicios durante cierto periodo de tiempo. Cuando el nivel de precios sube con cada unidad monetaria se adquieren menos bienes y servicios, lo que refleja una caída en el poder adquisitivo. Los efectos de la inflación en la economía son positivos y negativos, entre los efectos negativos tenemos una disminución de las inversiones y el ahorro, o una escasez de bienes ya que los consumidores comienzan a adquirir más por el temor a un aumento mayor después de un tiempo, otro aspecto que se ve afectado es el tipo de cambio. Uno de los efectos positivos es que los bancos se ven obligados a ajustar los tipos de interés para motivar la inversión. Los efectos de inflación para unos representan un beneficio mientras que para otros es un problema.

La inflación interviene en casi todos los sectores económicos de la aseguradora como en las reclamaciones, en los gastos, inversiones y primas, afectando las pérdidas y ganancias de la aseguradora, y estas a su vez interviniendo en el margen de solvencia. Por ejemplo, si la inflación crece la prioridad del consumidor de seguros, no será el seguro.

La solvencia esta sujeta a considerables variaciones que se denominan ciclos económicos, cada fase de este ciclo dura varios años consecutivos. Si la fase del ciclo se encuentra en auge se provoca inflación pero si se está en recesión, la inflación se amortigua, en el sector asegurador este aspecto ocasiona cambios en la tasa de inflación que impacta en las reclamaciones.

Diferencia en los efectos de la inflación

Al analizar los cambios que genera la inflación hay que centrarse en las variables que se ven afectadas de acuerdo a la clase de negocio, como en el caso de las empresas aseguradoras que les interesa estudiar los cambios en las primas, reclamaciones, gastos, etc. Para entender esta idea veamos el caso de la inflación de reclamaciones, la cual es relacionada con la inflación social, ya que ésta no solo depende de la inflación general sino también de la cantidad de pólizas de seguros adquiridas. A su vez, es necesario entender que no es lo mismo la inflación de primas que la inflación de reclamaciones ya que tienen entre ellas intervalos de tiempo que provocan fluctuaciones.

Modelo de inflación

El modelo se define de la siguiente forma:

$$i(t) - i_m = a \cdot [i(t-1) - i_m] + \sigma \cdot \epsilon(t) + s(t). \tag{1.8}$$

$i(t) \geq i_{min}$.

Donde:

$i(t)$ = Tasa de inflación.
i_m = Tasa media.
i_{min} = Tasa mínima.
a = Primer momento del tamaño de la reclamación.

Un ruido estocástico es introducido con el término $\sigma\epsilon$, que para facilidad en la teoría sigue una distribución normal [5].

Por otro lado, el coeficiente σ es un parámetro que representa la desviación estándar del ruido, además, ϵ esta estandarizado para tener una media cero y desviación estándar uno. El término $s(t)$ proporciona un aumento de la tasa de inflación para algunos años específicos.

Una manera sencilla de introducir la inflación en los cálculos de reclamaciones es considerando que se cambia solo la media de la variable de la reclamación en relación con la inflación.

1.4. Elementos de solvencia

Esta sección trata de la carga de seguridad en el ingreso de primas y el concepto de importancia es el margen de solvencia.

1.4.1. Carga de seguridad en ingreso de primas

La carga de seguridad es una cantidad incluida en el costo del seguro, es decir, en la prima básica. Dicha cantidad cubre el costo de operación del asegurador, las pérdidas que pudieran ser mayores de lo esperado en un determinado periodo, así como los cambios generados en las inversiones del asegurador.

La carga de seguridad es una de las variables de control con mayor importancia que influye en la solvencia a largo plazo y varía de manera considerable de un año a otro por el efecto de los ciclos económicos y otras razones, su cálculo es parte del proceso del cálculo de primas.

El ingreso de primas es calculado primordialmente para cada grupo de riesgo y para cada clase de seguro, aunque es el total de ingresos el que resulta más esencial que las cargas individuales para calcular las estructuras de solvencia.

Notación

La prima de riesgo con carga de seguridad, P_λ, es la reclamación promedio más un porcentaje para carga de gastos, es la manera en la que se descompone el ingreso de la prima, $B(t)$, lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$B(t) = P_\lambda(t) + c(t)B(t). \tag{1.9}$$

Donde:

$$\begin{aligned} c(t) &= \text{Coeficiente de carga de gastos.} \\ P_\lambda(t) &= [1+\lambda(t)] \cdot E[X(t)]. \\ \lambda(t) &= \text{Coeficiente de carga de seguridad.} \end{aligned}$$

El coeficiente promedio de carga de seguridad resulta de la relación entre el ingreso de seguridad total y el ingreso total de primas. El problema es repartir la carga de seguridad entre el asegurador y el reasegurador.

El valor actual del ingreso de primas para usos a corto plazo debe ser calculado con alguna estimación estadística directa de $B(t)$, dicha estimación podría ser una regresión y se realiza respecto al efecto de inflación, la etapa del ciclo económico, la situación de la cartera, etc.

Ejemplo 1.1. *Consideremos los ingresos de primas con cifras en millones de pesos, de los últimos 10 años de la aseguradora Axa México que se presentan enseguida y la correspondiente inflación*

Año	***Inflación***	***Primas***
2008	*6.53*	*10745*
2009	*3.57*	*11559*
2010	*4.40*	*12210*
2011	*3.82*	*13959*
2012	*3.57*	*14106*
2013	*3.97*	*14613*
2014	*4.08*	*13451*
2015	*2.13*	*13450*
2016	*3.36*	*15055*
2017	*6.77*	*14803*

Se requiere estimar el valor actual del ingreso de primas. Para ello se realizó una regresión lineal respecto a la inflación, está regresión se hizo utilizando el paquete estadístico Stata.

Se encontró una expresión para la regresión lineal y la recta es

$$\hat{y} = \beta_1 + \beta_2 x_i$$

Primero debemos ver si se cumplen los supuestos de regresión lineal, para ello graficamos los datos, para ver si existe una posible relación.

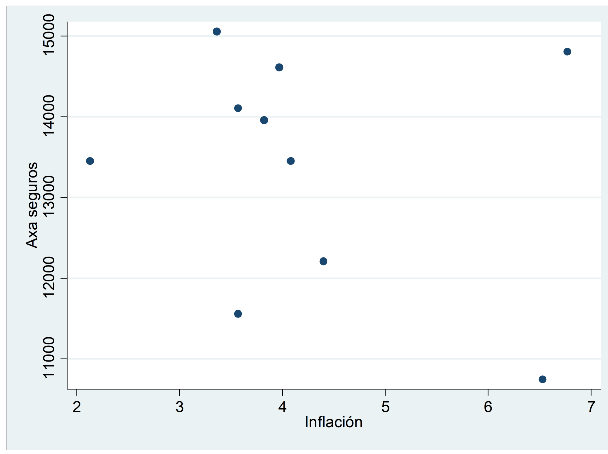

Figura 1.1: Relación entre ingreso de primas e inflación 2008-2017

En la gráfica de la Figura 1.1 se observa que si existe relación entre las variables, ahora se verá si se cumple la linealidad, para ello se realizó la gráfica de la Figura 1.2 en la que se nota que si tiene comportamiento lineal.

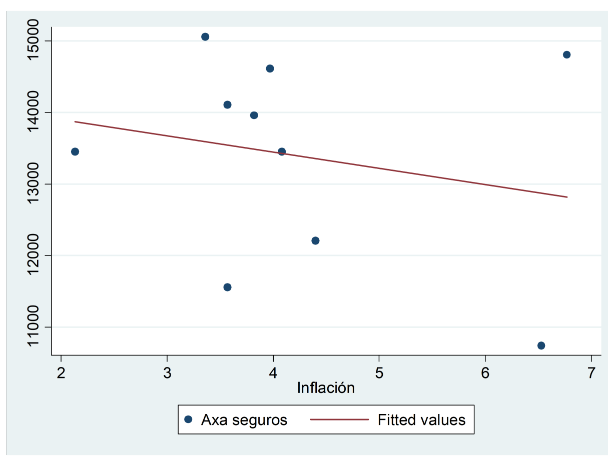

Figura 1.2: Linealidad

Por medio de los residuales comprobaremos la normalidad, para ello fue necesario primero calcular la regresión, posteriormente se obtuvieron los residuales y finalmente se realizó el histograma dado por la Figura 1.3 que se muestra enseguida.

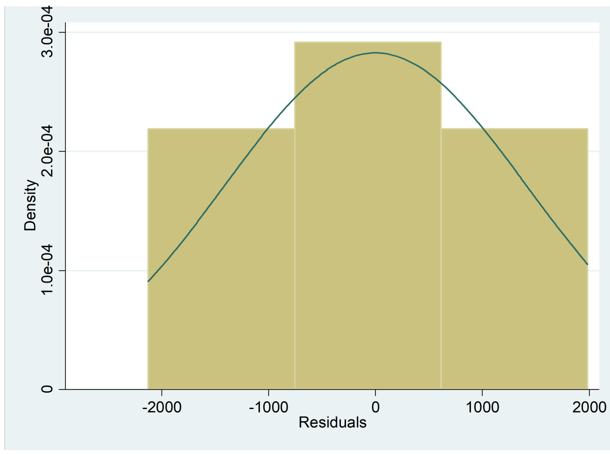

Figura 1.3: Normalidad

En el histograma se ve que si siguen una distribución normal, ahora procederemos a comprobar la igualdad de varianzas

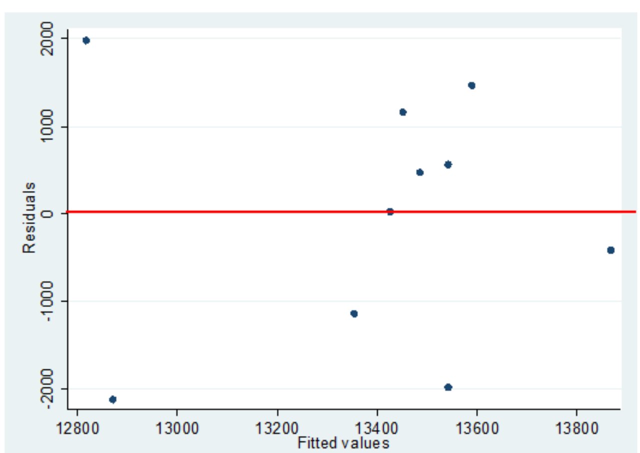

Figura 1.4: Igualdad de varianzas

En la Figura 1.4 se ve que casi hay igual cantidad de valores por abajo y *por arriba del 0, por lo tanto, si se cumple la igualdad de varianzas.*

Después de realizar la regresión en Stata, se obtuvieron los siguientes resultados

```
. regress prima inflación

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      10
-------------+------------------------------           F(  1,     8) =    0.41
       Model |  927602.899     1  927602.899           Prob > F      =  0.5379
    Residual |    17921384     8     2240173           R-squared     =  0.0492
-------------+------------------------------           Adj R-squared = -0.0696
       Total |  18848986.9     9  2094331.88           Root MSE      =  1496.7

------------------------------------------------------------------------------
       prima |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
   inflación |  -226.5961   352.1374    -0.64   0.538    -1038.626    585.4342
       _cons |   14351.34   1559.574     9.20   0.000     10754.95    17947.72
------------------------------------------------------------------------------
```

Con los valores de los coeficientes la línea de regresión se expresa de siguiente forma

$$Prima = 14351{,}34 - 226{,}59x_i$$

Al evaluar para el periodo número 11 obtenemos el valor del ingreso de primas para el año 2018, el cual es igual a \$11858,78.

Pero para usos a largo plazo, es decir, cuando se usa la teoría de riesgo es necesario utilizar (1.9), al utilizarla se nota que la principal dificultad es encontrar la estimación adecuada para $\lambda(t)$. Para solucionar este problema se recomienda fijar un rango de incertidumbre al usar estimaciones óptimas [5].

1.4.2. Determinación del ingreso de primas

En la teoría de riesgo se utilizan diversas formas para encontrar $B(t)$, entre las más sencillas esta la que se basa en la observación del algoritmo (1.2), ya que en la práctica frecuentemente el coeficiente r es menor a la unidad. Esto quiere decir que la tasa del rendimiento ganado en las inversiones es menor que la tasa de crecimiento, debido a la inflación y al crecimiento real de las carteras.

Se debe manejar un nivel mínimo de solvencia que permita hacer frente a los compromisos de la empresa cuando se encuentre en ruina. Para esta condición se tiene la siguiente desigualdad [5]:

$$\lambda \geq (1 - r_{igp})R. \tag{1.10}$$

Donde:

R= Nivel medio de razón de solvencia.
λ = Variable de control.

Usar este enfoque tradicional implica que con alguna probabilidad aceptable se encuentren las condiciones mínimas que garanticen la continuidad de la empresa, es decir, el cálculo de las probabilidades de ruina y los rangos de variación.

El intervalo de variación R se expresa en términos de la varianza de la variable de siniestralidad X o en términos del margen de solvencia U. Tenemos que con una probabilidad de ruina ϵ, $T = 1$ podemos definir el rango R de fluctuaciones de las reclamaciones de la siguiente forma

$$Pr[X > R] = \epsilon. \tag{1.11}$$

El valor de R se define a continuación [5]

$$R = y\sigma + \sigma\gamma(y^2 - 1)/6. \tag{1.12}$$

Donde
σ = Desviación estándar.
γ = Asimetría de X.
y = Coeficiente para determinar nivel de confianza.

Pero la desviación estándar se obtiene de la ecuación que se muestra a continuación

$$\sigma^2 = na_2 + [E(X)]^2\sigma_q^2. \tag{1.13}$$

Donde

n = Número esperado de reclamaciones.
a_2 = Segundo momento del tamaño de la reclamación.
σ_q = Desviación estándar de la variable aleatoria.

Si los valores de la reclamación X y la relación con los años consecutivos son estocásticamente independientes, la ecuación anterior se expresa con periodos de tiempo T finitos.

Si la variación de estructura, ciclos y tendencias se incluyen como series de tiempo autorregresivas [5], entonces las covarianzas entre los años del periodo T resultan como en la siguiente expresión

$$\sigma_T^2 = \sum_t \sigma_1^2(t) + 2\sum_{t>u} \mathrm{Cov}[X(t), X(u)], \ t \in [1, T]. \tag{1.14}$$

Los subíndices 1 y T indican el intervalo de tiempo, donde T es el horizonte temporal, debe determinarse para ser lo suficientemente largo como para permitir la intervención efectiva del supervisor en el caso de cualquier adversidad en la situación de la aseguradora; usualmente $T = 12$ meses, $T = 18$ meses, $T = 24$ meses, etc., [5]. La elección de T tiene influencia en el nivel del margen de solvencia mínimo.

Una manera de obtener grandes grupos de reclamaciones colectivas es por medio de simulaciones, ya que esta es una poderosa herramienta para sistemas complicados, lo cual se logra usando una función de distribución $F(x)$ aproximada de la reclamación agregada, mediante una transformación adecuada.

Para dicha transformación se usa el método de la transformada inversa que consiste en primer lugar, en definir la función de densidad $f(x)$, que representa la variable a modelar. Después, se calcula la función acumulada. Posteriormente se despeja la variable aleatoria X y se obtiene la función acumulada inversa $F^{-1}(x)$, que solo puede ser invertida si es estrictamente creciente y continua. Finalmente, se generan variables aleatorias $X's$, sustituyendo valores con números $r \sim U(0,1)$ en la función acumulada inversa, para la generación de variables aleatorias se consulto [10].

Sea

$$X = v(y). \tag{1.15}$$

Donde

$v =$ Función auxiliar para transformación $X => y$

y es simétrica con media 0 y desviación estándar 1, es decir, esta variable tiene distribución normal estándar.

Transformación generalizada:

$$z = (X/EX)^h. \tag{1.16}$$

$$y = (z - m_z)/\sigma_z. \tag{1.17}$$

El parámetro h se obtiene del hecho de que la variable y es simétrica, lo que significa que los valores de la distribución se disponen simétricamente alrededor de la media, esta variable estandarizada se aproxima con la distribución normal utilizando la ecuación:

$$F(X) \approx N(y). \tag{1.18}$$

De esta forma queda una expresión que resulta ser práctica para simular variables aleatorias con una media, desviación estándar y asimetría dada. Lo primero que se debe hacer es generar un número aleatorio que siga una distribución normal con media 0 y desviación estándar 1 al que denotamos con r. Posteriormente, la transformada se define como se muestra a continuación pero es mas recomendable usar $v(y)$

$$X = v^{-1}(r). \tag{1.19}$$

Al sistema de simulación también se incorporan otros elementos como lo es la simulación de la inflación y de la tasa de interés.

El crear un modelo que permita incluir todos los riesgos mencionados anteriormente requiere de un arduo trabajo, ya que surge el problema de encontrar distribuciones conjuntas. Además, algunos factores como la inflación afectan a varios elementos del modelo, razón por la que las variables no son consideradas independientes.

1.4.3. Reaseguro y otros factores

Con la finalidad de protegerse contra fluctuaciones elevadas se recurre a la utilización del reaseguro, no obstante, también es importante considerar la solvencia de las reaseguradoras.

Para analizar el efecto que producen los elementos que afectan las fluctuaciones mencionadas anteriormente se debe suponer que los números de reclamaciones son variables aleatorias y las otras variables son fijas. Posteriormente los tamaños de reclamación también se hacen aleatorios.

1.4.4. Margen de Solvencia

El margen de solvencia es una reserva complementaria que es representada por el capital no comprometido, cuya finalidad es cubrir en cualquier momento todos los riesgos que afectan la solvencia de la aseguradora.

El margen de solvencia es el indicador más importante de una aseguradora, ya que el resultado de este cálculo representa la condición financiera de la compañía. Si este es positivo indica que la aseguradora es solvente, pero si resulta negativo indica que la aseguradora es insolvente y es necesario tomar medidas para mejorarla.

La manera en la que se representa el margen de solvencia es con el capital no comprometido y con una cuantía mínima de este capital, la cuál se calcula en función del volumen del negocio. La comparación entre ambas indica una situación de superávit o déficit. Además, se debe considerar el fondo de garantía, que es un porcentaje del margen de solvencia; esta cifra mínima es prefijada en relación con las actividades de la compañía. Esta representación se observa en la Figura 1.5, que fue consultada en [7]; donde

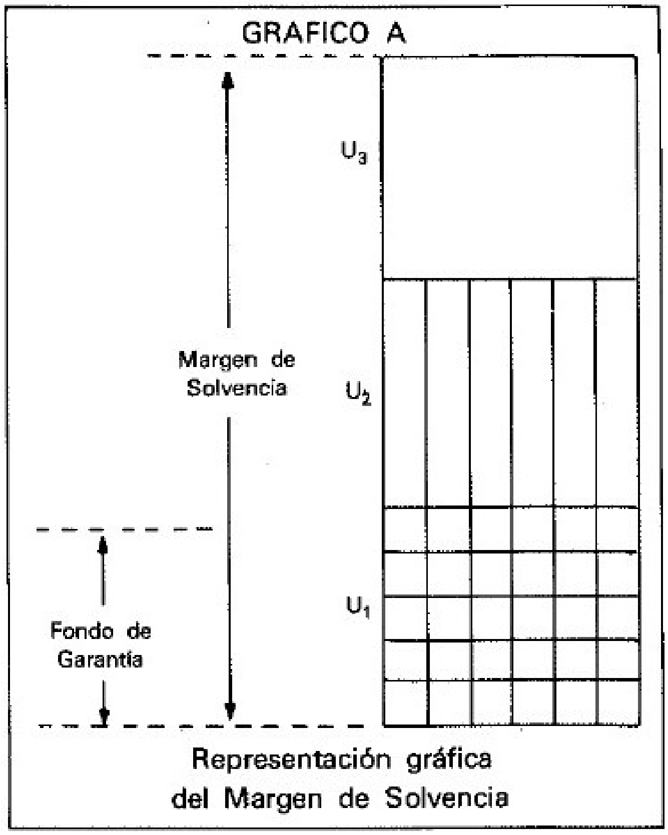

Figura 1.5: Representación del Margen de Solvencia.

$U = U_1 + U_2 + U_3$, con U_1 igual a los fondos propios, U_2 representa las plusvalías de la subestimación de elementos de activos y U_3 es la plusvalía que resulta de la sobreestimación de las obligaciones.

Capítulo 2

Teoría de riesgo

La teoría de riesgo se encarga de modelar el negocio asegurador usando variables aleatorias para el número y monto de siniestros durante ciertos periodos. Su objetivo es proporcionar un análisis de las fluctuaciones aleatorias de las pólizas de seguros y construir modelos de protección contra los efectos desfavorables. Una de las principales situaciones de interés en la teoría de riesgo es el problema de la ruina, en este capítulo se proporcionan los conceptos necesarios para entender la fórmula para calcular la probabilidad de ruina; además, se incluyen resultados generales de la teoría de riesgo, que fueron consultados en [8, 14, 15].

2.1. Modelos de reclamación

Para representar el flujo de reclamaciones generado por una cartera de pólizas en un periodo determinado se utilizan dos enfoques, conocidos como modelo individual y modelo colectivo, los cuales son de utilidad en la valoración de seguros, reservas y aplicaciones de reaseguros. Estos modelos se explican a continuación.

2.1.1. Modelo individual de riesgo

Esté modelo se construye considerando pólizas individuales y las reclamaciones que se generan por cada póliza, para después obtener las reclamaciones agregadas al sumar todas las pólizas del portafolio. Así, se define

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \tag{2.1}$$

Donde

$$\begin{aligned} S &= \text{Variable aleatoria de la pérdida de las } n \text{ unidades aseguradas.} \\ X_i &= \text{Pérdida de la unidad } i \text{ asegurada.} \\ n &= \text{Número de unidades de riesgo aseguradas.} \end{aligned}$$

Para analizar este modelo es necesario entender algunos conceptos básicos del seguro de vida para un solo periodo. El asegurador paga una cantidad b si el asegurado muere durante el periodo de emisión de la póliza y no paga si sobrevive en ese periodo.

Función de distribución de X
Para presentar la función de distribución de X, primero hay que tener presente lo siguiente.

X : Variable aleatoria del monto de reclamación.
q : Probabilidad de una reclamación durante el periodo.
b : Cantidad que paga el asegurador si el asegurado muere durante el periodo de emisión de la póliza.

La función de probabilidad y su función de distribución se presentan enseguida:

$$f_X(x) = Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - q, & \text{si } x = 0, \\ q, & \text{si } x = b, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - q, & \text{si } 0 \leq x < b, \\ 1, & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Esperanza y Varianza de X
A partir de la función de probabilidad y de la definición de momentos tenemos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i f(x_i) \\ &= 0 \cdot (1 - q) + b \cdot q = bq. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E[X] = bq. \tag{2.2}$$

Para calcular la varianza, por definición tenemos

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$$

ó

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

De la definición de momentos se obtiene $E[X^2]$ como se muestra enseguida

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 f(x_i) \\ &= 0^2 \cdot (1-q) + b^2 \cdot q = b^2 q. \end{aligned}$$

Así,

$$E[X^2] = b^2 q. \tag{2.3}$$

Regresando a la definición de varianza, se sustituye como se presenta a continuación

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= b^2 q - (bq)^2 = b^2 q(1-q). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la varianza es

$$\mathrm{Var}[X] = b^2 q(1-q). \tag{2.4}$$

2.1.2. Modelo de riesgo colectivo para un solo periodo

En este modelo de riesgo el concepto básico es el de proceso aleatorio que genera reclamaciones para un portafolio de pólizas, el cual se fórmula de la siguiente manera:

N = Número de reclamaciones producidas mediante un portafolio de pólizas en cierto periodo de tiempo, variable aleatoria asociada a la frecuencia de la reclamación.

Para el número de reclamaciones se asume la distribución Binomial, Poisson, Binomial Negativa o la Geométrica. En literatura refieren a la distribución Poisson como la más común.

X_i = Monto de la reclamación i, variable aleatoria que mide la severidad de las reclamaciones.

En este modelo se tienen dos supuestos fundamentales

1. $X_1, X_2, ...$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

2. Las variables aleatorias $N, X_1, X_2, ...$, son mutuamente independientes.

Sea $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$.

Con este modelo se ignora el de pólizas individuales y el portafolio es considerado como un todo. Así, solo se requiere modelar S, que es la cantidad que paga la aseguradora en el período y representa las reclamaciones agregadas generadas por el portafolio.

Función de distribución de S

Para obtener la función de distribución de S se considera el número de reclamaciones y mediante el Teorema de Probabilidad Total se calcula la distribución de los siniestros acumulados

$$\begin{aligned} F(x) &= Pr(S \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr(S \leq x | N = n) \cdot Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x) \cdot Pr(N = n). \end{aligned}$$

Por otro lado, sea

$$p^{*(0)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$p^{*(n)}(x) = p^* p^* \dots p^*(x) = Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x).$$

Lo anterior define la distribución de la suma de n variables aleatorias independientes con la misma distribución y se le conoce como la n-ésima convolución, de esta forma de tiene que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*(n)}(x) \cdot Pr(N = n). \tag{2.5}$$

Función Generadora de Momentos de S

Para obtener la función generadora de momentos del total de reclamos se sigue el procedimiento que se explica a continuación.

Por definición de la función generadora de momentos tenemos que

$$M_S(t) = E[e^{tS}],\ t \in \mathbb{R}.$$

Ahora, por una propiedad de la esperanza condicional se tiene que

$$E[e^{tS}] = E[E(e^{tS}|N)].$$

Así tenemos,

$$E[E(e^{tS}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \cdot Pr(N = n),$$

por la propiedad $M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = [M_X(t)]^n$ para variables aleatorias y dado que $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas.

$$\begin{aligned} E[E(e^{tS}|N)] &= \sum_{n=0}^{\infty} [M_X(t)]^n \cdot Pr(N = n) = E[M_X(t)^N] \\ &= E[e^{\ln[M_X(t)^N]}] = E[e^{N \cdot \ln(M_X(t)}] \\ &= M_N(\ln(M_X(t))). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Donde:

M_N : Generadora de momentos del número de reclamaciones.

M_X : Generadora de momentos de los montos.

Esperanza y Varianza de S

A partir de la función generadora de momentos podemos obtener la esperanza y varianza de la distribución de reclamaciones agregadas como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M_S(t)|_0 &= \frac{d}{dt}[M_N(\ln(M_X(t)))]|_0 \\
&= M_N'(\ln(M_X(t))) \cdot \left.\frac{M_X'(t)}{M_X(t)}\right|_0 \\
&= M_N'(\ln(M_X(0))) \cdot \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} \\
&= M_N'(\ln(1)) \cdot \frac{M_X'(0)}{1} = M_N'(0)M_X'(0) \\
&= E[N]E[X] = E[S]. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

El cálculo de la varianza se presenta a continuación, calculando primero el segundo momento

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d^2t}\, M_S(t)\big|_0 \; &= \frac{d}{dt}\left.\left[M_N'(\ln(M_X(t))) \cdot \frac{M_X'(t)}{M_X(t)}\right]\right|_0 \\
&= M_N''(\ln(M_X(t))) \cdot \left[\frac{M_X'(t)}{M_X(t)}\right]^2 \\
&\quad + M_N'(\ln(M_X(t))) \cdot \left.\left[\frac{M_X''(t)}{M_X(t)} - \left(\frac{M_X'(t)}{M_X(t)}\right)^2\right]\right|_0 \\
&= M_N''(0)(M_X'(0))^2 + M_N'(0)[M_X''(0) - (M'(0))^2] \\
&= E[N^2]E^2[X] + E[N]\mathrm{Var}(X) = E[S^2].
\end{aligned}$$

Con la definición de varianza

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= E[S^2] - E[S]^2 \\
&= E[N^2]E^2[X] + E[N]\mathrm{Var}[X] - E^2[X]E^2[N] \\
&= E^2[X](E[N^2] - E^2[N]) + E[N]\mathrm{Var}[X] \\
&= E^2[X]\mathrm{Var}[N] + E[N]\mathrm{Var}[X]. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

2.1.3. Distribución del número de siniestros

Distribución Poisson

Para seleccionar la distribución de N se sigue un determinado proceso, que podemos ver en [4]. Para contar el número de éxitos que ocurren en intervalos de tiempo frecuentemente se utiliza la distribución de Poisson, cuya función de probabilidad es

$$Pr(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.9}$$

Con $\lambda > 0$ constante, se sabe que $E[N] = \lambda$ y la $\mathrm{Var}[N] = \lambda$. Al tomar la distribución Poisson como distribución de N, la distribución de S resulta una distribución Poisson compuesta. Cuya esperanza y varianza se calcula utilizando (2.7) y (2.8), respectivamente.

$$E[S] = \lambda E[X]. \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= E^2[X]\mathrm{Var}[N] + E[N]\mathrm{Var}[X] \\
&= \lambda \mathrm{Var}[X] + E^2[X]\lambda \\
&= \lambda(E[X^2] - E^2[X] + E^2[X]) \\
&= \lambda E[X^2]. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Ahora se obtiene la función generadora de momentos de S a partir de M_N

$$\begin{aligned}
M_N(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda(1-e^t)}.
\end{aligned}$$

La función generadora de S

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= M_N(\ln(M_X(t))) \\
&= e^{-\lambda(1-e^{\ln(M_X(t))})} \\
&= e^{\lambda(M_X(t)-1)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Esta distribución se emplea cuando el número de reclamaciones cumple las siguientes condiciones:

- **Incrementos independientes.** La ocurrencia de los eventos en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

- **Incrementos estacionarios.** El número de eventos en un intervalo de tiempo solamente depende de la longitud del intervalo.

- **Exclusión de eventos múltiples.** La probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos en un mismo instante de tiempo y la probabilidad de que ocurran infinitos eventos en un intervalo finito es cero.

Distribución binomial negativa

La distribución Poisson deja de ser apropiada cuando la varianza del número de reclamaciones excede la media, ver [4]; esto sucede porque el portafolio se forma de riesgos de diferente naturaleza con diferente frecuencia, así como fluctuaciones aleatorias. En dicho caso se recurre al uso de la distribución binomial negativa, cuya función de probabilidad puntual es

$$Pr(N = n) = \binom{r+n-1}{n} p^r q^n, \; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.13}$$

con parámetros $r > 0$; $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Además, se sabe que

$$E[N] = \frac{rq}{p}.$$

$$\text{Var}[N] = \frac{rq}{p^2}.$$

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^r.$$

Al tomar la distribución binomial negativa como distribución de N, la distribución de S resulta ser una distribución binomial compuesta negativa, cuya esperanza y varianza se calculan utilizando (2.7) y (2.8), respectivamente.

$$E[S] = \frac{rq}{p} E[X]. \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= E[X]^2\frac{rq}{p^2} + \frac{rq}{p}\mathrm{Var}[X] \\
&= E[X]^2\frac{rq}{p^2} + \frac{rq}{p}\left(E[X^2] - E[X]^2\right) \\
&= \frac{rq}{p}E[X^2] + E[X]^2\left(\frac{rq}{p^2} - \frac{rq}{p}\right) \\
&= \frac{rq}{p}E[X^2] + E[X]^2\left(\frac{rq(1-p)}{p^2}\right) \\
&= \frac{rq}{p}E[X^2] + \frac{rq^2}{p^2}E[X]^2. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Ahora se obtiene la función generadora de momentos de S con M_N

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= M_N(\ln(M_X(t))) \\
&= \left(\frac{p}{1-qe^{\ln M_X(t)}}\right)^r \\
&= \left(\frac{p}{1-qM_X(t)}\right)^r. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

2.1.4. Distribución del tamaño de reclamación

Para la distribución del monto de las reclamaciones resulta necesario el uso de convoluciones, razón por la que conviene utilizar funciones que tengan fácil manejo de convoluciones de manera analítica o de manera numérica, como es el caso de la distribución Normal, Gamma o Exponencial, a pesar de utilizar distribuciones simples, la distribución de las reclamaciones acumuladas en ocasiones no resulta una distribución simple. Por lo anterior es conveniente emplear una distribución discreta y calcular las convoluciones numéricamente.

Distribución Exponencial

La distribución Exponencial en ocasiones es seleccionada como distribución del tamaño de reclamación, ver [3], ya que tiene las mismas características que tienen algunos tipos de seguro, un ejemplo es el seguro de vida, dichas características son; que la variable aleatoria del monto de reclamaciones sólo es positiva y su distribución es sesgada a la derecha.

La n-ésima convolución de la distribución Exponencial con parámetro λ es una distribución Hiperexponencial pero con parámetro $\lambda_j = \text{mín}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, la demostración puede consultarse en [16].

El uso de una función Exponencial como modelo para la distribución del tamaño de la reclamación solo es ocasionalmente útil, ya que esta función es una aproximación a la verdad y casi nunca se aplica si el reaseguro cubre los principales riesgos. Sin embargo, el uso de la distribución Exponencial se extiende si la distribución del tamaño de la reclamación se construye como una suma de exponenciales que tienen diferentes parámetros como se sugiere en [2].

Distribución Normal

Cuando el monto de reclamaciones tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, su n-ésima convolución es una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$; como puede verse en [4].

La distribución normal es cerrada respecto a la convolución, ya que decimos que una clase de distribuciones es cerrada con respecto a la convolución si para dos distribuciones cualquiera, F y G, de la clase, la convolución $F * G$ pertenece a esta clase; lo cual cumple la distribución normal [18].

2.2. Procesos estocásticos

Para poder realizar el estudio de fenómenos probabilísticos es necesario estudiar modelos que describan la evolución y estructura de un sistema a lo largo del tiempo, esto se logra mediante una colección de variables aleatorias la cual se denomina proceso estocástico. En esta sección se explica el concepto, algunas propiedades y casos de procesos estocásticos.

Definición 2.1. *Dado el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, un proceso estocástico es una sucesión o colección de variables aleatorias* $\{X(t) : t \in T\}$*, con un espacio parametral formado por el conjunto* T*, en el que las variables aleatorias toman valores en un conjunto* $\mathscr{L}$ *llamado espacio de estados.*

Por lo tanto, t es el parámetro que se asocia al tiempo, mientras que X_t representa el estado del proceso en el instante t. El conjunto de tiempos T al tomarse como un conjunto discreto $T = \{0, 1, 2, ...\}$, se dice que el proceso es a tiempo discreto; o se toma como un conjunto continuo con $T = [0, \infty)$, entonces se dice que el proceso es a tiempo continuo, todo lo anterior se puede revisar en [14].

2.2.1. Procesos de conteo

El proceso de conteo es de estados discretos, sin embargo, los cambios de estado ocurren en cualquier instante de tiempo, es decir, en tiempo continuo.

Definición 2.2. *Un proceso estocástico $\{N(t) : t \geq 0\}$, es un proceso de conteo si representa el número de eventos ocurridos hasta el tiempo t y cumple*

I) $N(0) \geq 0$, *casi seguramente.*

II) $N(t)$ *toma valores enteros positivos para todo* t, *es decir,* $N(t) > 0$ *casi seguramente.*

III) *Es no decreciente, es decir,* $0 < t_1 < t_2 \Rightarrow N(t_1) \leq N(t_2)$, *casi seguramente.*

IV) *Para* $t_1 < t_2, N(t_2) - N(t_1)$ *es el número de eventos ocurridos en el intervalo* $(t_1, t_2]$.

2.2.2. Proceso Poisson

El proceso Poisson es un caso particular de un proceso de conteo, sirve para contar eventos en un intervalo de tiempo y resulta de utilidad para modelar muchos fenómenos; una importante aplicación de dicho proceso es en el cálculo de la probabilidad de ruina de una compañía de seguros.

Definición 2.3. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *con espacio de estados* $\mathscr{L} = \{0, 1, ...\}$, *es un proceso de Poisson con parámetro* $\lambda > 0$ *si cumple las siguientes propiedades:*

a) $N(0) = 0$, *casi seguramente.*

b) Incrementos independientes.

Es decir, que para $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,

Se tiene que $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$,..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ *son independientes.*

c) Incrementos estacionarios.

Para cualesquiera $0 \leq s < t : N(t+s) - N(s) \sim Poi(\lambda t)$.

Definición 2.4. *Sea* $T_1, T_2, ...$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) cada una con distribución exponencial y parámetro* λ. *El proceso de Poisson con parámetro* λ *es el proceso a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *y se define a continuación*

$$X(t) = máx\{n \geq 1 : T_1 + \cdots + T_n \leq t\}.$$

Proposición 2.5. *Para cualquier* $t > 0$ *y para* $n = 0, 1, ...,$ *la variable* $X(t)$ *tiene distribución Poisson con parámetro* λt, *es decir,*

$$P(X(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Demostración. Suponga que las variables aleatorias $T_1, T_2 ...$ representan los tiempos de espera entre la ocurrencia del evento y la siguiente ocurrencia, además, estos tiempos son independientes cada uno con distribución $exp(\lambda)$. De esta forma, la variable $W_n = T_1 + \cdots + T_n$ tiene distribución $gamma(n, \lambda)$. W_n representa el tiempo real en el que se observa la ocurrencia del n-ésimo evento. Al observar la igualdad $(X_t \geq n) = (W_n \leq t)$ notamos que equivale a decir que al tiempo t han ocurrido al menos n eventos si y sólo si, el n-ésimo evento ocurrió antes de t.

Para $t > 0$, si W_n tiene distribución $gamma(n, \lambda)$ su función de distribución es

$$P(W_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Para cualquier $t > 0$ y para cada $n = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned}
P(X(t) = n) &= P(X(t) \geq n) - P(X(t) \geq n+1) \\
&= P(W_n \leq t) - P(W_{n+1} \leq t) \\
&= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - (1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.6. *El proceso $X(t)$ que modela el número de reclamaciones que llegan a una aseguradora hasta el tiempo t, tiene las siguientes características*

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= \lambda t, \\
Var[X(t)] &= \lambda t.
\end{aligned}$$

2.2.3. Procesos de Poisson compuesto

El proceso de Poisson compuesto es una generalización del proceso Poisson, la definición se presenta a continuación

Definición 2.7. *Sea el proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ con parámetro λ y sean $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de v.a.i.i.d. Además, sea $Y_0 = 0$ entonces el proceso de Poisson compuesto se define como*

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n. \tag{2.17}$$

Observamos que la variable $X(t)$ es una suma de variables aleatorias con el número de sumandos aleatorio. Este proceso se aplica en diversas circunstancias; por ejemplo, en el ámbito de seguros esta variable es interpretada como el monto total de reclamaciones que recibe una aseguradora al tiempo t y la variable Y_n representa el monto de la n-ésima reclamación [15].

El proceso de Poisson compuesto cumple las propiedades presentadas a continuación

1. Tiene incrementos estacionarios e independientes.
2. $E[X(t)] = \lambda t E[Y]$.
3. $\text{Var}[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$.
4. $\text{Cov}[X(t), X(s)] = \lambda E[Y^2] \text{mín}\{s, t\}$, $s < t$.
5. Función generadora de momentos
   $M_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}] = \exp[\lambda t(M_Y(u) - 1)]$.

2.3. Proceso de riesgo

Existen modelos matemáticos que representan lo mejor posible el comportamiento y evolución temporal del nivel de reservas de una aseguradora para el pago de siniestros. El contar con estos modelos permite analizar la forma en que interactúan las variables implicadas e investigar como afectan la solvencia de la empresa.

A continuación se presenta un proceso estocástico que permite modelar de manera simplificada la evolución a lo largo del tiempo del capital de una compañía de seguros, ver [14].

Definición 2.8. *El proceso de riesgo a tiempo discreto* $\{C_n : n \geq 0\}$ *se define como*

$$C_n = u + n - \sum_{j=1}^{n} Y_j. \tag{2.18}$$

Suponga que $u \in \{0, 1, 2, ...\}$ y que en cada unidad de tiempo la compañía aseguradora recibe una unidad monetaria por concepto de primas.

Donde
C_n= Capital de la compañía aseguradora al tiempo $n \geq 1$.
u= Capital inicial de la aseguradora.
n= Ingreso por primas.
$Y_1, Y_2, ...$= Montos de las reclamaciones en periodos sucesivos.

Además, supongamos

- $u \geq 0$.
- Y_j Son independientes e idénticamente distribuidas.
- Y_j Toman valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- $E[Y] < 1$ En promedio se gaste menos en reclamaciones de lo que ingresa de primas, condición de ganancia neta.

Para los montos de reclamación, Y_j, se denota

$F(y)$ es la función de distribución de Y.
$f(y)$ es la función de densidad de probabilidad de Y, continua o discreta según sea el caso.
$P(Y > y) = 1 - F(y) = \bar{F}(y)$.

La variable Y es discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, ...\}$ y su esperanza se obtiene de la siguiente forma

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{F}(y),$$

los detalles se pueden consultar en [14].

2.4. Tiempo de ruina

La probabilidad de ruina originalmente se introdujo como una medida de riesgo que contempla un aspecto temporal de la compañía de seguros en un horizonte temporal finito o infinito. En esta sección se presenta el modelo de ruina de Cramér recordando las nociones básicas de proceso de riesgo y la condición de ganancia neta que se vieron en las secciones anteriores.

El proceso del monto de reclamación (2.18) o cantidad total de reclamaciones se representa como $S(t)$ y es

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0.$$

Los tamaños de reclamación X_i son positivos y con función de distribución común F, además, son independientes de la sucesión de llegada de las reclamaciones T_n, que es la sucesión de renovación

$$T_0 = 0,\ T_n = W_1 + \cdots + W_n,\ n \geq 1.$$

Los tiempos son positivos entre las llegadas W_n son independientes e idénticamente distribuidos. El proceso del número de reclamos es un proceso de renovación que es independiente del tamaño de la reclamación X_i.

Para entender como funciona un proceso de renovación tomaremos como ejemplo el comportamiento de cierto componente o artículo cuya duración de vida útil sera modelada con una variable aleatoria a la que se le llamará T_1, cuando el componente falla es reemplazado con otro componente que tiene una vida útil T_2, así sucesivamente. La sucesión de tiempos T_1, T_2,... es el tiempo de vida de los componentes que son puestos en operación uno tras otro, esto se observa en la Figura 2.1 que fue tomada de [15]. Estas variables que modelan los tiempos son no negativas, independientes y con la misma distribución de probabilidad. Al proceso que cuenta estas variables aleatorias se le conoce como proceso de renovación y para más detalle de este tema también se sugiere revisar [17].

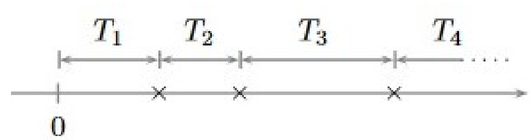

Figura 2.1: Sucesión de tiempos de vida de componentes.

Definición 2.9. ***Proceso de renovación.*** *Un proceso de renovación es una sucesión infinita de variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots$ no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.*

Se conoce otra forma alternativa para describir el proceso de conteo de renovaciones que se lleva a cabo durante cierto tiempo, dicha forma consiste en el registro de los tiempos en los que se presentan las renovaciones. Lo anterior se presenta enseguida.

Dado un proceso de renovación $\{T_1, T_2, ...\}$, se definen los tiempos reales de renovación como $W_0 = 0$ y $W_n = T_1 + \cdots + T_n$, para $n \geq 1$. El proceso de conteo de renovaciones es

$$N(t) = \text{máx}\{n \geq 0 : W_n \leq t\}, \text{ para cada } t \geq 0.$$

La variable aleatoria W_n representa el tiempo real en el que se realiza la $n-$ ésima renovación y $N(t)$ es el número de renovaciones realizadas hasta el momento t. Otro ejemplo de proceso de renovación es cuando la distribución del número de renovaciones es una distribución Poisson y las variables aleatorias de los tiempos de vida tienen distribución exponencial.

Retomando el proceso de riesgo, el ingreso por primas lo expresaremos como $p(t)$, en la cartera homogénea que es representado con el modelo de renovación. Además, suponemos que p es una función determinista y lineal, la cual con una tasa de prima constante $c > 0$ se define como

$$p(t) = ct.$$

El proceso de riesgo es un proceso estocástico que también se conoce como proceso de superávit, conforme a los términos presentados se expresa como se aprecia a continuación

$$U(t) = u + p(t) - S(t), \; t \geq 0.$$

Donde $U(t)$ representa el capital de la aseguradora al tiempo t, mientras que el proceso $U = (U(t))_{t \geq 0}$ describe el flujo de efectivo a lo largo del tiempo. La función $p(t)$ es el ingreso de capital en el momento t y $S(t)$ es la salida de capital por los reclamos ocurridos en el intervalo $[0, t]$. Si $U(t)$ es positivo, significa que la aseguradora ha ganado capital, pero si $U(t)$ es negativo ha perdido capital. Para expresar el capital inicial se utiliza el valor constante $U(0) = u > 0$.

En la Figura 2.2 se aprecia un ejemplo del proceso de riesgo U, el cual como se mencionó anteriormente empieza con un capital inicial u. El proceso aumenta linealmente con una pendiente c hasta el momento $T_1 = W_1$, es decir, cuando ocurre la primera reclamación que es de tamaño X_1. Pero el proceso vuelve a aumentar con una pendiente c durante el intervalo $[T_1, T_2)$ hasta el momento T_2 donde se produce la segunda reclamación X_2, de esta

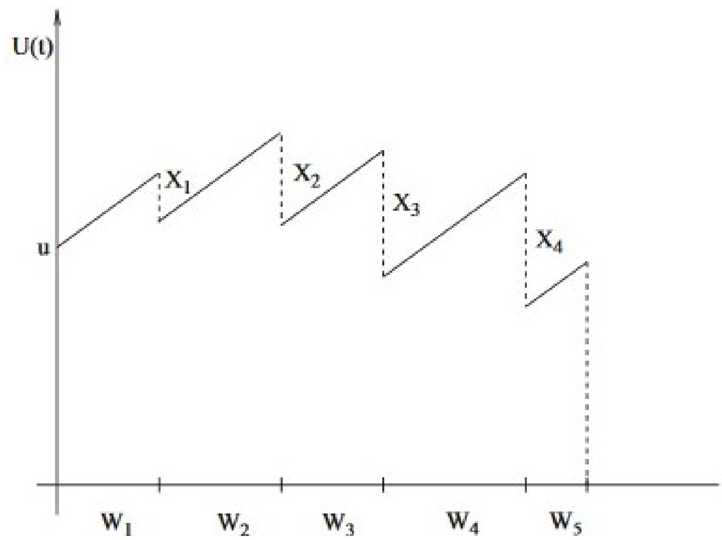

Figura 2.2: Una realización idealizada del proceso de riesgo U.

misma manera en repetidas ocasiones. También se observa que el capital $U(t)$ toma valores negativos si existe una reclamación X_i lo suficientemente grande para provocar que la trayectoria de U este por debajo del cero, al evento en el que U esta por debajo de cero se le llama **ruina**. A continuación se muestra un gráfico en el que no se presenta la ruina, Figura 2.3, el cual fue tomado de [11] y muestra algunas realizaciones del proceso de riesgo U para tamaños exponenciales de reclamaciones y un proceso Poisson homogéneo para el número de reclamaciones.

Para analizar las reservas de la aseguradora cuando son negativas es necesario estudiar la variable aleatoria *Tiempo de ruina*, que se refiere al momento en el que la aseguradora llega a la ruina, es decir, cuando las reservas no son suficientes para cubrir sus compromisos. La ruina se presenta cuando la aseguradora tiene pérdidas inesperadas causadas por el tamaño de los siniestros.

Definición 2.10. ***Ruina.*** *Al evento en el que U cae por debajo de cero se le llama ruina*

$$Ruina = \{U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0\}.$$

Definición 2.11. ***Tiempo de ruina.*** *La variable aleatoria T que representa el tiempo cuando el proceso de riesgo cae por debajo de cero por primera vez,*

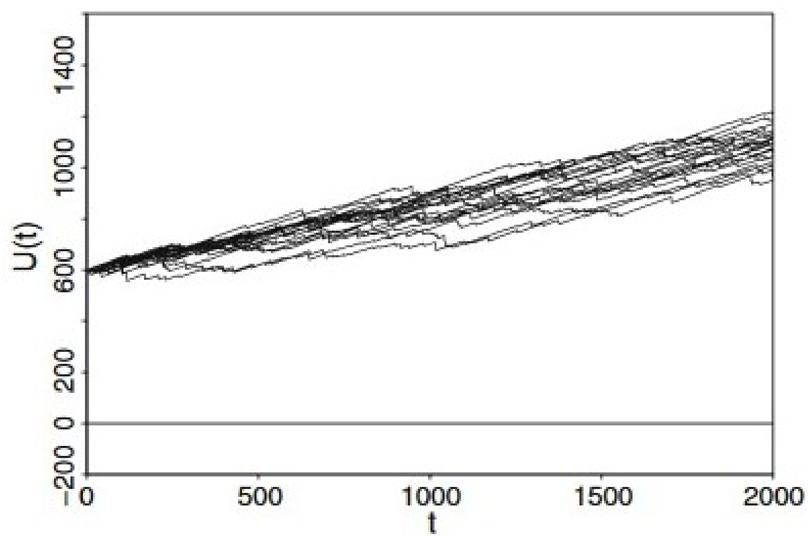

Figura 2.3: Una realización del proceso de riesgo U para tamaños exponenciales de reclamaciones y un proceso Poisson homogéneo para el número de reclamaciones.

se le llama tiempo de ruina y esta dado por

$$T = \text{ínf}\{t > 0 : U(t) < 0\}.$$

Se observa que $U(T)$ es el nivel de reservas negativas en el momento de la ruina, $U(T) < 0$, que en algunos casos no significa que la aseguradora vaya a quebrar, a esto generalmente se le llama ruina técnica.

Definición 2.12. ***Probabilidad de ruina.*** *La probabilidad de ruina es dada por*

$$\psi(u) = P(Ruina|U(0) = u) = P(T < \infty),\ u > 0. \qquad (2.19)$$

En la definición se usa el hecho de que

$$Ruina = \bigcup_{t\geq 0}\{U(t) < 0\} = \left\{\inf_{t\geq 0} U(t) < 0\right\} = \{T < \infty\}.$$

Tanto el evento de ruina como el tiempo de ruina dependen del capital inicial u, que usualmente no se considera en la notación. La condición $U(0) = u$ en la probabilidad de ruina (2.19) es una constante.

En el proceso de riesgo U la ruina sucede solo en los tiempos $t = T_n$ para $n \geq 1$, ya que U aumenta linealmente en los intervalos $[T_n, T_{n+1})$. Utilizando el proceso $(U(T_n))$, se expresa la ruina en términos de los tiempos de inter-arribo W_n, los tamaños de reclamación X_n y la tasa de prima c.

$$\begin{aligned} Ruina &= \left\{\inf_{t>0} U(t) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} U(T_n) < 0\right\} \\ &= \left\{\inf_{n\geq 1}[u + p(T_n) - S(T_n)] < 0\right\} \\ &= \left\{\inf_{n\geq 1}[u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i] < 0\right\}. \end{aligned}$$

Recordando el proceso de renovación dado al principio de esta sección, para el último paso tomamos en cuenta el hecho de que $N(T_n) = \{i \geq 1 : T_i \leq T_n\} = n$.

Por otro lado, asumimos que $W_j > 0$ casi seguramente para $j \geq 1$

$$Z_n = X_n - cW_n,\ S_n = Z_1 + \cdots + Z_n,\ n \geq 1,\ S_0 = 0.$$

Con lo anterior podemos llegar a la siguiente expresión alternativa para la probabilidad de ruina $\psi(u)$, con un capital inicial u

$$\psi(u) = P\left(\inf_{n\geq 1}(-S_n) < -u\right) = P\left(\sup_{n\geq 1} S_n > u\right). \qquad (2.20)$$

Esta probabilidad no se evalúa de forma fácil ya que requiere estudiar una función complicada, que surge de un proceso aleatorio sofisticado. Conforme pasa el tiempo la cantidad $\psi(u)$ se vuelve una cantidad más compleja dentro del comportamiento de la cartera de seguros, y su principal objetivo es evitar la ruina con probabilidad 1. En consideraciones prácticas la ruina no se considera si el capital inicial u es suficientemente grande en relación a sus compromisos y actividades. La probabilidad de ruina (2.20) la podemos encontrar en [2, 11].

Capítulo 3

Solvencia con medidas de riesgo

Entre los diferentes métodos que existen para determinar la situación actual de una compañía de seguros, esta el método de valoración del balance completo, con el cual se combinan todas las posiciones financieras disponibles. Con este enfoque la principal cantidad de importancia es la diferencia entre los valores de activos y pasivos en el momento que se realiza el balance; sin embargo, para consideraciones de solvencia es necesario saber que los pasivos están cubiertos por los valores de los activos en el futuro.

Los activos y pasivos deben ser considerados simultáneamente para poder analizar la solidez financiera de una empresa, esto es un acuerdo general en la medición del riesgo; con este enfoque del balance completo utilizamos los valores de mercado cuando están disponibles y los valores compatibles con el cuando no hay valores de mercado disponibles, de modo que todo el sistema de valoración sea consistente. En este capítulo se busca incluir bases sólidas de medición del riesgo que permitan lograr una buena gestión de riesgos y regulación de la solvencia, estas bases fueron consultadas principalmente en [21].

3.1. Medidas de riesgo

Actualmente los intermediarios financieros cada vez se enfrentan con mayores retos originados por la incertidumbre y riesgo, por ello las autoridades regulatorias exigen cada vez más requisitos de administración de riesgos, entre estos requisitos se encuentran mejores sistemas de medición y control de riesgo. Esto genera la necesidad de manejar bases sólidas con las que se puedan crear modelos para cuantificar la incertidumbre, en este capítulo se utilizarán estas bases para analizar un modelo que cuente con condiciones mínimas de solvencia.

Una medida de riesgo se entiende como la función de una variable aleatoria que representa el posible cambio en el valor de un portafolio en una fecha futura, lo anterior se explica con mayor detalle y con base en una medida de probabilidad a continuación.

Supongamos que X y Y son dos variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Estas dos variables aleatorias, X y Y, modelan dos riesgos financieros diferentes; las pérdidas se modelarán con signo positivo. Estos riesgos serán descritos completamente con sus funciones de distribución F_X y F_Y de X y Y, respectivamente. Estas funciones no siempre nos permiten comparar los riesgos debido a su complejidad, solo cuando se tiene dominancia estocástica (de primer orden) entre X y Y, es decir,

Definición 3.1. *Se dice que Y domina estocásticamente a X, esto es*

$$X \leq_{st} Y \text{ si y sólo si } F_X(x) \leq F_Y(x) \text{ para toda } x \in \mathbb{R}.$$

La dominancia estocástica se usa con el objetivo de tener criterios de comparación y clasificación de variables aleatorias, para saber si una variable se prefiere en lugar de otra en una determinada clase, en este caso la clase se forma de riesgos financieros. Su finalidad es elegir el activo que tenga mayor utilidad esperada, no obstante, una dificultad es que al ser una clasificación exigente sólo va a considerar un número reducido de variables aleatorias.

Cuando no se tiene dominancia estocástica, las variables aleatorias X y Y se comparan con otras cifras, que frecuentemente consisten en un solo número, mientras que cuando hay dominancia estocástica se comparan sus valores esperados; lo que indica que no se contempla toda la información al momento de evaluar riesgos. Por lo cual, lo más conveniente es usar medidas de riesgo. En [21] establece que para la solvencia de una aseguradora la medida de riesgo debe ser coherente.

Sea $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ el conjunto de funciones en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y $\mathscr{M} \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ representa el conjunto de riesgos financieros de interés. Se considera que $\mathscr{M}$ es un cono convexo que contiene constantes y satisface lo siguiente

(1) $c \in \mathscr{M}$ para toda $c \in \mathbb{R}$,

(2) $X + Y \in \mathscr{M}$ para toda $X, Y \in \mathscr{M}$,

(3) $\lambda X \in \mathscr{M}$ para toda $X \in \mathscr{M}$, $\lambda > 0$ constante.

El supuesto (1) indica que los riesgos determinísticos c también están en $\mathscr{M}$, y desempeñarán el papel de posiciones de efectivo. Mientras que los supuestos (2) y (3) forman un cono convexo $\mathscr{M}$, para más detalles en [9].

Definición 3.2. ***Medida de riesgo.*** *Supongamos que $\mathscr{M}$ satisface la propiedad* (1)*. Una medida de riesgo ρ en $\mathscr{M}$ es un mapeo $\rho : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\rho(c) < \infty$ para toda $c \in \mathbb{R}$.*

Para que una medida de riesgo ρ sea útil y permita incluir varias características para evaluar riesgos, debe cumplir con algunas propiedades básicas o deseables. En dichas propiedades se supone que ρ es una medida de riesgo en un cono convexo $\mathscr{M}$ el cual contiene todas las constantes $c \in \mathbb{R}$.

Axioma 0. Normalización: $\rho(0) = 0$.

La normalización es el origen y significa que el riesgo de no tener activos es cero [21].

Axioma 1. Monotonicidad: Para X, $Y \in \mathscr{M}$ con $X \leq Y$, tenemos que $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

Este axioma nos quiere decir que si la pérdida X está dominada por la pérdida de Y, la medida de riesgo de X es menor que la medida de riesgo de Y.

Axioma 2. Invarianza bajo traslaciones: Para toda $X \in \mathscr{M}$ y cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos que $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.

En este axioma tenemos que el riesgo X aumenta un monto de pérdida determinista c (que se expresa de manera positiva) y significa que la medida de riesgo X aumenta exactamente la cantidad c.

Axioma 3. Homogeneidad positiva: Para toda $X \in \mathscr{M}$ y para cada $\lambda > 0$ tenemos que $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.

Este axioma significa que el tamaño del portafolio interfiere directamente en el riesgo. Ya que no es lo mismo invertir en una sola unidad de activos que invertir en más unidades de activos financieros, el invertir en más unidades provocaría un riesgo mayor.

Axioma 4. Subaditividad: Para toda $X, Y \in \mathscr{M}$ tenemos que $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Lo que este axioma quiere decir es que la suma de dos riesgos no produce riesgo adicional. En portafolios de inversión esto significa que la diversificación reduce el riesgo. El cumplimiento de esta propiedad permite una administración de riesgos más eficiente.

Axioma 5. Convexidad: Para toda $X, Y \in \mathscr{M}$ y $\lambda \in [0,1]$ tenemos que $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Una medida de riesgo coherente se considera una buena medida de riesgo, aunque en la práctica difícilmente se usa una medida de este tipo, ya que frecuentemente las medidas de riesgo no cumplen la subaditividad, por eso se recurre al VaR que es de las medidas no coherentes que tiene más ventajas y podría ser utilizada para la solvencia al ser una medida que cumple la invarianza. A continuación se presenta la definición de medida de riesgo coherente.

Definición 3.3. ***Medida de riesgo coherente.*** *Una medida de riesgo ρ en el cono convexo $\mathscr{M}$ se dice que es una medida coherente si cumple los axiomas del* 1 *al* 4*.*

Definición 3.4. ***Medida de riesgo convexa.*** *Una medida de riesgo ρ en el cono convexo $\mathscr{M}$ se dice que es una medida convexa si cumple los axiomas* 1*,* 2 *y* 5*.*

La medida de riesgo coherente, además de ser una buena medida tiene una relación directa con una medida de riesgo convexa, a continuación se presenta un teorema que demuestra esta relación.

Teorema 3.5. *Una medida de riesgo coherente es una medida de riesgo convexa.*

Demostración. Para probar que una medida de riesgo coherente es una medida convexa es necesario probar que los Axiomas 3 y 4 implican el Axioma 5.

Partiendo del lado izquierdo del Axioma 5 y aplicando el Axioma 4 se tiene que

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y).$$

Ahora usando el Axioma 3 del lado derecho de la desigualdad anterior, tenemos que para $\lambda \in [0,1]$

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

Así el teorema queda probado. $\square$

Para poder entender los conceptos que se presentan enseguida primero es necesario mostrar algunas definiciones.

Definición 3.6. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(E, \mathcal{B})$ un espacio medible, es decir, un conjunto E con una σ- álgebra fija de sus subconjuntos. Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, con espacio de estados $(E, \mathcal{B})$, es una familia de variables aleatorias $X_t : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \mathcal{B})$.*

Definición 3.7. *Se denomina σ- álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ a la mínima σ-álgebra generada por la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) de $\mathbb{R}$, con $a \leq b$ y se expresa como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}.$$

A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les conoce como conjuntos de Borel y con ellos se asocia la σ- álgebra al conjunto de números reales para obtener el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Si no se indica explícitamente el espacio de estados E significa que se considera $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Los procesos estocásticos son modelos matemáticos que describen fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo. Los sucesos que ocurren hasta un instante fijo t forman una σ- álgebra contenida en la σ- álgebra de todos los sucesos.

Definición 3.8. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es una colección de σ- álgebras contenidas en $\mathscr{F}$. Esta colección es una* ***filtración*** *si para $0 \leq s \leq t$ se cumple que $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$. Al espacio $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ se le llama* ***espacio de probabilidad filtrado****.*

La filtración $\mathbb{F}$ se interpreta como la información acumulada al tiempo t, ya que contiene todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido.

Definición 3.9. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con valores en $(E, \mathcal{B})$, se dice que el proceso es* ***adaptado*** *a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ cuando la variable aleatoria X_t es $\mathscr{F}_t$- medible para toda $t \geq 0$.*

La filtración $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in\mathbb{N}}$ se llama filtración generada por X y se define como

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s;\ s \leq t).$$

Suponga que $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ es un espacio de probabilidad filtrado e interesa medir cómo cambia la evaluación del riesgo con el tiempo al pasar de $\mathscr{F}_t$ a $\mathscr{F}_{t+1}$. Esto es posible ya que $\mathscr{F}_t$ se interpreta como la historia del proceso al tiempo t, pues en ella se encuentran todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido hasta ese momento.

Suponemos que $\mathscr{M}_t \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un cono convexo que contiene todas las variables aleatorias c_t, $\mathscr{F}_t$ medibles:

(1) $c_t \in \mathscr{M}_t$ para toda $\mathscr{F}_t$ medible,

(2) $X + Y \in \mathscr{M}_t$ para toda $X, Y \in \mathscr{M}_t$,

(3) $\lambda_t X \in \mathscr{M}_t$ para toda $X \in \mathscr{M}_t$ y $\lambda_t > 0$, medibles.

Definición 3.10. ***Medida de riesgo condicional.*** *Una medida de riesgo condicional ρ_t en el cono convexo $\mathscr{M}_t$ es una función $\rho_t : \mathscr{M}_t \to L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ que es casi seguramente finita sobre las variables aleatorias c_t, $\mathscr{F}_t$ medibles.*

Ejemplo 3.11. ***Medida de riesgo.*** *El valor en riesgo (VaR) es una de las medidas de riesgo más populares para la estimación de pérdidas potenciales de un portafolio por las fluctuaciones que se presentan en el mercado, en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dado de $1 - p \in (0, 1)$.*

Sea $F_X(x) = P(X \leq x)$ la distribución de $X \in \mathscr{M}$ y su distribución inversa $F_X^{-1}(u) = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}$. El VaR de X con un nivel de confianza de $1 - p \in (0, 1)$ se define:

$$VaR_{1-p}(X) = F_X^{-1}(1 - p).$$

Esta medida de riesgo describe todos los posibles escenarios adversos cuya probabilidad es menor que p. En [20] se analiza el argumento que demuestra que el VaR es monótono, invariante y homogéneo positivo, pero no es subaditivo, por lo tanto, no es una medida de riesgo coherente.

Se presentó este ejemplo ya que el VaR es una medida de riesgo ampliamente utilizada en la gestión del riesgo financiero para evaluar carteras de inversiones.

La razón por la que esta medida es ampliamente utilizada, es porque tiene muchas ventajas comparada con otros métodos para cuantificar riesgos ya que no es tan limitada, se aplica a cualquier tipo de portafolio, permite agregar diferentes riesgos, toma en cuenta varios factores, se expresa en pérdida de dinero que es una unidad de medida más simple y fácil de entender, sin embargo, no es la mejor medida de riesgo coherete posible pero es la menos mala.

3.2. Definición de Solvencia y Aceptabilidad

En esta sección se trata con los conceptos necesarios para entender la definición de solvencia con una medida de riesgo, esta definición contempla condiciones mínimas para garantizar la solvencia no solo en un momento determinado, sino también en el futuro.

Otro concepto importante que se incluye en esta sección es la aceptabilidad, que al contemplar solo una condición de solvencia lo hace un concepto más débil, no obstante, es necesario para entender al capital libre.

Primero, es necesario considerar que se cumplen las siguientes suposiciones:

Suposición 1. *Separación independiente de filtraciones:* Asumimos que tenemos tres filtraciones $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathscr{J}}$, $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\in\mathscr{J}}$ y $\mathbb{T} = (\mathscr{T}_t)_{t\in\mathscr{J}}$ en el espacio de probabilidad dado $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y

(1) $\mathscr{F}_t$ es generado por $\mathscr{A}_t$ y $\mathscr{T}_t$ para toda $t \in \mathscr{J}$,

(2) $\mathbb{A}$ y $\mathbb{T}$ son independientes con respecto a la medida de probabilidad P.

Definición 3.12. ***Deflactor de precios.*** *Supongamos que $\varphi = (\varphi_0, ..., \varphi_n) \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ es un vector aleatorio estrictamente positivo con normalización $\varphi_0 \equiv 1$, entonces φ y sus componentes φ_k, $k \in \mathscr{J}$ se denominan deflactor de precios.*

El componente de deflactor de precios φ_k transporta montos de efectivo aleatorios X_k en el tiempo k a valores en el tiempo 0. Este transporte es un transporte estocástico y significa que φ_k realiza la función de un factor de descuento estocástico que describe los riesgos del mercado financiero.

Observación 3.13. *Sea el deflactor de precios $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$, donde L^1_{n+1} es el espacio dimensional e integrable de $(n+1)$ flujos de efectivo X, $\mathbb{F}$-adaptados. El conjunto de flujos de efectivo, $\mathbb{F}$-adaptados, tiene un precio relativo X al deflactor de precios φ y esta dado por*

$$\mathscr{L}_\varphi = \left\{ X \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F}); \mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathscr{J}} \varphi_k \left|X_k\right| \middle| \mathscr{F}_0 \right] < \infty \right\}. \tag{3.1}$$

Suposición 2. Para el cálculo de los procesos de precios de los flujos de efectivo $X \in \mathscr{L}_\varphi$ consideramos una estructura de producto, para el deflactor de precios φ y para el flujo de efectivo X.

Otro aspecto de importancia en este trabajo, es el concepto de martingala, el cual se presenta enseguida.

Definición 3.14. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *una filtración en ese espacio. A la colección de variables aleatorias* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *se le denomina* ***martingala*** *con respecto a la filtración* $\mathbb{F}$ *si cumple las siguientes condiciones*

1. $E[|X_t|] < \infty$ *para toda* $t \geq 0$,
2. $(X_t)_{t\geq 0}$ *es un proceso adaptado a la filtración,*
3. $E(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s$, *si* $s < t$.

Es necesario separar todos los factores de riesgo que no se explican por los movimientos del mercado financiero, esto requiere dividir el deflactor de precios, $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$, en deflactor financiero φ^A y en distorsión de probabilidad técnica del seguro φ^T. Además, se contemplan las siguientes tres propiedades deseables:

(1) El deflactor de precios φ debe tener una estructura de producto, esto es, para todo $t \in \mathscr{J}$

$$\varphi_t = \varphi_t^A \varphi_t^T. \tag{3.2}$$

(2) El deflactor financiero $\varphi^A = (\varphi_t^A)_{t\in\mathscr{J}}$ debe ser $\mathbb{A}$-adaptado.

(3) La probabilidad de distorsión $\varphi^T = (\varphi_t^T)_{t\in\mathscr{J}}$ debe ser normalizada y martingala.

El deflactor financiero φ^A expresa la fijación de precios en el mercado financiero, mientras que φ^T representa un proceso de densidad que proporciona un margen de riesgo para los riesgos técnicos de seguros o no asegurables, ambos son integrables y estrictamente positivos.

Definición 3.15. *Sea el deflactor de precios* $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$. *El proceso de precios* $(A_t^{(i)})_{t\in\mathscr{J}} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ *se llama consistente con respecto a* φ *o* φ*-consistente si* $(\varphi_t A_t^{(i)})_{t\in\mathscr{J}}$ *es una martingala [21].*

Suposición 3. *Modelo actuarial básico:* Las tres filtraciones $\mathbb{F}$, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{T}$ cumplen con la Suposición (1). El deflactor de precios $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ tiene la estructura del producto (Suposición 2) con un deflactor financiero φ^A, $\mathbb{A}$-adaptado y una distorsión de probabilidad φ^T, $\mathbb{T}$-adaptada, la cual es normalizada y martingala. Los procesos de precios $(A_t^{(i)})_{t\in\mathscr{J}}$ de todos los instrumentos financieros de base $\mathfrak{A}^{(i)}$, $i \in \mathscr{J}$ son adaptados, integrables y φ consistente.

Los instrumentos financieros de base $\mathfrak{A}^{(i)}$, $i \in \mathscr{J}$, se seleccionan como cualquier activo negociable, ya sean acciones, bonos, etc.

Se tiene un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$, donde la filtración $\mathbb{F}$ se divide de forma independiente en una filtración financiera $\mathbb{A}$ y una filtración técnica de seguros $\mathbb{T}$ bajo P. La parte financiera modelará la información económica y financiera disponible para el público, mientras que la parte técnica del seguro modelará las variables relacionadas con la responsabilidad del seguro que abarca factores globales como peligros naturales, condiciones climáticas, cambios legales, etc. Siempre que no influyan en $\mathbb{A}$ y en pagos de seguros.

Observación 3.16. *Que la filtración financiera y la filtración técnica de seguros sean independientes no implica que los pasivos de seguros sean independientes de las variables económicas y financieras, los pasivos de seguro son una función de las variables de ambas filtraciones.*

También se considera un deflactor de precios $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$, que factoriza el deflactor financiero φ^A, $\mathbb{A}$-adaptado y la distorsión de probabilidad φ^T, $\mathbb{T}$-adaptada, la cual es normalizada y martingala. La elección más simple de la distorsión de probabilidad que cumple la Suposición 3 es $\varphi^T \equiv 1$, esta será la elección adecuada para la llamada prima de riesgo pura y para la mejor estimación de reservas.

Además, es necesario suponer que el mercado financiero $\mathscr{J}$ es suficientemente rico, que contiene por lo menos bonos cupón cero (ZCBs por sus siglas en inglés) para todos los vencimientos $m \in \mathscr{J}$ y describe los instrumentos financieros disponibles. Estos instrumentos se utilizan para la cobertura de los flujos de efectivo del pasivo de seguro. Con estas consideraciones se calcula la VaPo (Valuation portfolio) y la VaPo protegida de los flujos de efectivo del pasivo de seguros.

La Valoración del Portafolio o VaPo es un enfoque sistemático que separa los pasivos de seguros en el componente que es replicado por los instrumentos del mercado financiero y en el componente técnico del seguro. Cubre los pasivos de seguro esperados y conduce a la mejor estimación de reservas para los pasivos pendientes. Esto proporciona una compresión clara de los pasivos de seguro y los hace comparables al lado de los activos del balance.

El enfoque de VaPo será usado para volver comparables los dos lados del balance y se puedan valorar de manera consistente ya que los activos generalmente se miden con valores de mercado, pero la valoración de los pasivos del seguro es más complicada porque no existe un mercado activo donde se negocien los pasivos del seguro. Por lo tanto, no hay precios de mercado para los pasivos del seguro. Por esta razón es conveniente calcular los valores de mercado consistentes para los pasivos del seguro expresandolos en base a instrumentos financieros $\mathfrak{A}^{(k)}$, $k \in \mathscr{J}$, es decir, correlacionando los pasivos del seguro con una VaPo multidimensional en un espacio vectorial. Luego, la VaPo se compara con el portafolio de activos existentes $\mathscr{S}$ al estar expresados en el mismo espacio vectorial.

Para poder realizar la VaPo primero suponemos que los flujos de efectivo del pasivo del seguro X, que describen los pagos al asegurado en términos de la base financiera $\mathfrak{A}^{(k)}$, $k \in \mathscr{J}$, son como se muestra en seguida:

$$X = (\Lambda^{(0)} U_0^{(0)}, ..., \Lambda^{(n)} U_n^{(n)}) \in \mathscr{L}_\varphi. \tag{3.3}$$

Expresar los flujos de efectivo del pasivo de está manera permite analizar las partes susceptibles de cobertura y las no asegurables, ya que consta de de una parte $\mathscr{A}_k$ medible que se puede cubrir, $U_k^{(k)}$, y una parte $\mathscr{T}_k$ medible que no se puede cubrir, $\Lambda^{(k)}$. Donde $\mathscr{A}_k$ y $\mathscr{T}_k$ son las filtraciones que generan a $\mathscr{F}_k$, mientras que $U_k^{(k)}$ y $\Lambda^{(k)}$ se definen a continuación.

Las variables técnicas de seguros $\Lambda = (\Lambda^{(0)}, ..., \Lambda^{(n)})$ son $\mathbb{T}$-adaptadas, y cada variable aleatoria $\Lambda^{(k)}$ describe el número de unidades de dichas carteras financieras $\mathfrak{A}^{(k)}$ que necesitamos adquirir para cumplir con el flujo de efectivo del pasivo de seguro X_k en el momento k.

Mientras que los procesos de precios $(U_t^{(k)})_{t\in\mathscr{J}}$ de los portafolios financieros $\mathfrak{A}^{(k)}$, $k \in \mathscr{J}$ además de ser $\mathbb{A}$-adaptados, son no negativos, integrables y consistentes con respecto a φ; el superíndice k en $U_t^{(k)}$ siempre denota que la cartera financiera $\mathfrak{A}^{(k)}$ soporta el flujo de efectivo X_k y el subíndice t denota el precio de $U^{(k)}$ en el tiempo t. La cartera financiera $\mathfrak{A}^{(k)}$ necesita venderse en el momento k para generar el flujo de efectivo X_k.

De lo anterior tenemos la siguiente suposición.

Suposición 4. El modelo actuarial básico de la Suposición 3 es válido y el mercado financiero $\mathscr{J}$ contiene al menos bonos cupón cero (ZCBs) para todos los vencimientos $m \in \mathscr{J}$. El flujo de efectivo del pasivo del seguro $X \in \mathscr{L}_\varphi$ bajo consideración es de la forma (3.3) con márgenes de mercado no negativos, para todo $t \in \mathscr{J}$ para la distorsión de probabilidad dada φ^T.

La mejor estimación de reservas para los pasivos pendientes en el tiempo $t \in \mathscr{J}$, descritas por el flujo de caja $X_{(t+1)} = (0,..,0, X_{t+1}, ..., X_n) \in \mathscr{L}_\varphi$, se obtienen simplemente reemplazando el componente técnico del seguro por su valor esperado:

$$\mathscr{B}_t^0(X_{(t+1)}) = Q_t^0[X_{(t+1)}] = \sum_{k=t+1}^{n} E[\Lambda^{(k)}|\mathscr{T}_t]U_t^{(k)}.$$

Donde Q_t^0 es el valor no distorsionado de X en el tiempo $t \in \mathscr{J}$, con la elección de la distorsión de probabilidad $\varphi^T \equiv 1$. Con este paso se logra convertir la VaPo a un valor monetario.

Las reservas de riesgo ajustadas se componen de la suma de la mejor estimación de reservas y el margen adicional para liquidar los riesgos técnicos de seguros, no cubribles, que incluye una cantidad para cubrir posibles déficit en su salida, estas reservas se representan por

$$\mathscr{B}_t(X_{(t+1)}) = Q_t[X_{(t+1)}] = \sum_{k=t+1}^{n} \frac{1}{\varphi_t^T} E[\varphi_k^T \Lambda^{(k)}|\mathscr{T}_t]U_t^{(k)}.$$

Con Q_t igual al valor de X en el tiempo $t \in \mathscr{J}$, esta es una función de valoración general, que permite modelar garantías y opciones financieras para el flujo de efectivo del seguro y dado que estas opciones y garantías financieras dependen de los mismos factores de riesgo que el deflactor de precios, generalmente tenemos una correlación entre X y φ.

Las series de tiempo $\mathscr{B}_t^0(X_{(t+1)})$ y $\mathscr{B}_t(X_{(t+1)})$, $t \in \mathscr{J}$, que podemos ver en [21], describen la salida de la mejor estimación de reservas y las reservas de riesgo ajustadas del flujo de efectivo del pasivo X. En la Suposición 4 se menciona un margen de valor de mercado no negativo para todo $t \in \mathscr{J}$. Se necesita comparar la posición del pasivo $X_{(t+1)}$ con el activo del balance que se presenta en la cartera de activos $\mathscr{S}^{(t)}$. Así, supongamos que tenemos en el tiempo $t \in \mathscr{J}$ la cartera de activos como la que se presenta a continuación:

$$\mathscr{S}^{(t)} = \sum_{k=t+1}^{n} \widetilde{w}_k^{(t)} \mathfrak{A}^{(k)} = \sum_{i \in \mathscr{J}} w_i^{(t)} \mathfrak{A}^{(i)}.$$

En la expresión anterior, la cartera de activos se considera en las carteras financieras $\mathfrak{A}^{(k)}$ acompañada del término $\widetilde{w}_k^{(t)}$ que representa el flujo de efectivo, o se expresa con los instrumentos financieros base $\mathfrak{A}^{(i)}$ y el término $w_i^{(t)}$ que representa el instrumento. Sus valores cuando $s = t, t+1$ son

$$S_s^{(t)} = \sum_{k=t+1}^{n} \widetilde{w}_k^{(t)} U_s^{(k)} = \sum_{i \in \mathscr{J}} w_i^{(t)} A_s^{(i)}.$$

Donde $A_s^{(i)}$ como se mencionó en la Suposición 3, es el proceso de precios $(A_s^{(i)})_{s \in \mathscr{J}}$ de todos los instrumentos financieros de base $\mathfrak{A}^{(i)}$, $i \in \mathscr{J}$.

Al comprar la cartera de activos $\mathscr{S}^{(t)}$ en el momento t se paga la cantidad $S_t^{(t)}$ y en el momento $t+1$ se genera el valor $S_{t+1}^{(t)}$. El valor generado debe compararse con el valor de riesgo ajustado proveniente de las obligaciones de seguro en el momento $t+1$. De esta forma surge la necesidad de presentar otra expresión, el **déficit de activos (AD)** en el momento $t+1$, el cuál se define como sigue

$$AD_{t+1} = X_{t+1} + \mathscr{B}_{t+1}(X_{(t+2)}) - S_{t+1}^{(t)}. \tag{3.4}$$

Gráficamente podemos apreciarlo en la Figura 3.1

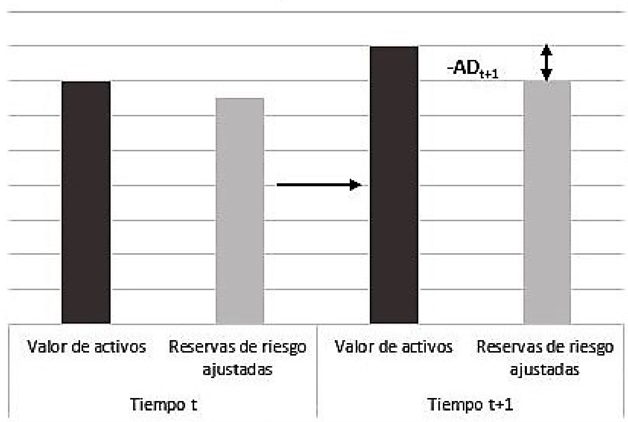

Figura 3.1: a) Condición contable en el momento t y b) Condición del contrato de seguro o déficit de activos AD_{t+1} en el momento $t+1$.

Si el déficit de activos tiene signo negativo, significa que el valor de riesgo ajustado de los pasivos de seguros está cubierto por los activos en el momento $t+1$.

Un plan de negocios en el tiempo t se expresa con la pareja $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$. En la Suposición 4 se define la solvencia de un plan de negocios $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ en el momento $t \in \mathscr{J}$ y para seleccionar la medida de riesgo condicional ρ_t se define a la solvencia de la siguiente manera:

Definición 3.17. ***Solvencia.*** *Se debe elegir una medida de riesgo condicional, invariante y normalizada $\rho_t : \mathscr{M}_t \to L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ en el cono convexo $\mathscr{M}_t$ con todas las variables aleatorias $\mathscr{F}_t$ medibles. Supongamos que la compañía de seguros cuenta con un plan de negocios $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ en el momento $t \in \mathscr{J}$, además, tiene el déficit de activos $AD_{t+1} \in \mathscr{M}_t$. La compañía de seguros es solvente en el tiempo t con respecto a ρ_t si cumple las siguientes condiciones:*

(a) $S_t^{(t)} \geq \mathscr{B}_t(X_{(t+1)})$.

(b) $\rho_t(AD_{t+1}) \leq 0$.

Se utilizará la Suposición 4, incluyendo el deflactor de precios φ. De esta manera, la solvencia se define en relación con el deflactor de precios φ y con la medida de riesgo condicional ρ_t.

Interpretación de la Definición 3.17.

En el momento t se tienen los pasivos pendientes $X_{(t+1)}$, que tienen el valor de riesgo ajustado $\mathscr{B}_t(X_{(t+1)})$, y en el momento $t+1$ el valor de riesgo ajustado es $X_{t+1} + \mathscr{B}_{t+1}(X_{(t+2)})$. Para poder cubrir estos valores de riesgo ajustado, se mantiene la cartera $\mathscr{S}^{(t)}$ en los activos del balance, el cual tiene el valor $S_t^{(t)}$ en el momento t y genera el valor $S_{t+1}^{(t)}$ en el momento $t+1$.

Las condiciones (a) y (b) de la definición de solvencia se interpretan de la siguiente manera:

(a) La primera condición de solvencia es la *Condición contable*. Está indica que si al realizar la diferencia entre activos y pasivos, el valor del activo resultante excede el valor del pasivo entonces todos los pasivos están cubiertos por los activos. Además, establece que la empresa cuenta con suficiente capital en el momento t; esto significa que las reservas ajustadas por riesgo $\mathscr{B}_t(X_{(t+1)})$ deberían estar cubiertas por los valores de los activos $S_t^{(t)}$ en el momento t.

(b) La segunda condición de solvencia es la *Condición del contrato de seguro*. En esta condición se maneja el déficit de activos, con lo cuál se presentan dos situaciones: que el déficit de activos no sea positivo en el momento $t+1$, $AD_{t+1} \leq 0$, esto significa que tenemos suficientes valores de activos en el momento $t+1$ para transferir los pasivos pendientes $X_{(t+1)}$ al valor de riesgo ajustado $X_{t+1} + \mathscr{B}_{t+1}(X_{(t+2)})$ a un tercero que complete la salida de estos pasivos pendientes $X_{(t+1)}$. La segunda situación que puede ocurrir, es que el déficit de activos sea positivo $AD_{t+1} > 0$, lo que indica una situación grave, ya que el valor de riesgo ajustado es mayor que el valor de los activos disponibles, y por lo tanto, no se encuentra un portador de riesgo que esté dispuesto a hacer la salida de los pasivos. Por lo anterior, se busca asegurar que el déficit de activos AD_{t+1} no sea positivo, razón por la que surge la condición del contrato de seguro. La medida de riesgo ρ_t caracteriza el plan de negocios $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ en el momento t, por lo que no es probable que se tenga un déficit financiero en el momento $t+1$.

Por lo tanto, una compañía de seguros es solvente si cumple tanto la condición contable como la condición del contrato de seguro. Lo que significa que la aseguradora no solo debe tener los suficientes activos para cubrir los pasivos en el momento t (a), si no que también los activos deben cubrir los pasivos en el futuro (b), es decir, la aseguradora debe generar los suficientes ingresos con su plan de negocios para pagar los futuros reclamos.

En [21] se puede revisar un ejemplo de aplicación de este modelo de medición de riesgo, en el que primero se da una descripción de la elección del modelo. Se supone que se cumple la Suposición 3 para lograr la aceptabilidad y la solvencia. Para modelar el deflactor financiero φ^A se elige un modelo financiero llamado Vasicek con parámetros dados. Con el modelo Vasicek se obtiene una estructura para los precios de los bonos cupón cero. Además, como medida de riesgo condicional se utiliza el VaR, con la que se logra la solvencia en el momento I.

Definición 3.18. ***Aceptabilidad.*** *El plan de negocios* $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ *es aceptable en el momento* t *con respecto a la medida de riesgo condicional* ρ_t *si*

$$\rho_t(AD_{t+1}) \leq 0.$$

La aceptabilidad de un plan de negocios $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ es un requisito más débil que la solvencia, ya que solo toma en cuenta la condición del contrato de seguro (b).

También es importante destacar que la definición de solvencia no habla sobre la liquidez. La liquidez es un gran problema especialmente en el sector bancario, y además, de las condiciones de solvencia las instituciones financieras deben asegurarse de que las empresas aseguradoras tengan suficiente liquidez, esto significa que hay restricciones para la asignación de activos $\mathscr{S}^{(t)}$.

Observación 3.19. *La condición contable (a) también implica que*

$$S_t^{(t)} \geq \mathscr{B}_t(X_{(t+1)}) \geq \mathscr{B}_t^0(X_{(t+1)}).$$

Esto significa que suponiendo que se tienen los valores de activos $S_t^{(t)}$*, estos cubren las reservas de riesgo ajustadas* $\mathscr{B}_t(X_{(t+1)})$ *en el tiempo* t*.*

Observación 3.20. *La medida de riesgo condicional más simple es la siguiente*

$$\rho_t(X) = E[X|\mathscr{F}_t]. \tag{3.5}$$

Ya que bajo la medida de riesgo condicional (3.5) siempre es posible la solvencia, es de utilidad para modelos de regulación, aunque realmente esta medida no esta basada en riesgo si no en la ganancia.

3.3. Capital libre

El capital libre es un cantidad que le permite a la aseguradora cumplir con sus compromisos en el futuro, el tener este capital garantiza conservar la aceptabilidad en la aseguradora, por eso es importante reservarlo, lo cual es más conveniente con la ayuda del plan de negocios para no afectar los activos y pasivos de la aseguradora, ya que es mejor sacrificar cierta cantidad para invertir que perjudicar sus actividades, el capital libre para una medida de riesgo ρ_t se define enseguida.

Definición 3.21. ***Capital libre.*** *El capital F_t es llamado capital libre en el momento t y se define como*

$$F_t = -P(t, t+1)\rho_t(AD_{t+1}). \tag{3.6}$$

Donde $P(t, t+1)$ es el precio de bonos cupón cero $\mathfrak{Z}^{(t+1)}$ en el tiempo $t \leq t+1$.

El capital libre es no negativo, es decir, $F_t \geq 0$, si y sólo si el plan de negocios $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ cumple la aceptabilidad en el momento t. Cuando se tiene el caso en que $F_t > 0$, la forma en que se cambia el plan de negocios es restandole el capital libre F_t para que siga conservando la aceptabilidad. El plan de negocios modificado $(\widetilde{\mathscr{S}}^{(t)}, X_{(t+1)})$ se define por

$$\widetilde{\mathscr{S}}^{(t)} = \mathscr{S}^{(t)} + \rho_t(AD_{t+1})\mathfrak{Z}^{(t+1)}. \tag{3.7}$$

Esto significa que restamos $-\rho_t(AD_{t+1}) > 0$ unidades de bonos cupón cero $\mathfrak{Z}^{(t+1)}$ al precio $F_t > 0$ en el tiempo t, de la cartera de activos $\mathscr{S}^{(t)}$. Estos bonos cupón cero generan un valor $\mathscr{F}_t$- medible, $\rho_t(AD_{t+1})$ en el momento $t+1$.

Analizando el caso en el que se tiene un capital libre positivo, $F_t > 0$, se observa que se recupera este monto de la compañía y el plan de negocios ajustado continua siendo aceptable.

El capital libre F_t depende de la elección de la medida de riesgo ρ_t, esto significa que no es invariante con respecto a los cambios de la medida de riesgo. Además, solo se obtiene en términos de bonos cupón cero $\mathfrak{Z}^{(t+1)}$, ya que si usamos otros instrumentos financieros la condición de aceptabilidad cambia. Finalmente, se debe tener presente que si se recupera el capital libre se logra tener un plan de negocios aceptable para la solvencia pero es necesario verificar la condición contable (a).

3.4. Insolvencia

Si la aseguradora no cumple con la condición contable o la condición del contrato del seguro, es decir, es insolvente, se pueden aplicar varias medidas como, restricciones comerciales, o medidas más drásticas como cerrar la empresa y ceder responsabilidades a un tercero.

Si la condición contable (a) no se cumple, la única alternativa que se tiene es inyectar capital adicional. Si se cumple la condición contable (a) pero la condición del contrato de seguro (b) no se cumple, es decir, el plan de negocios $(\mathscr{S}^{(t)}, X_{(t+1)})$ no es aceptable, se pueden tomar dos medidas diferentes:

1. Reestructurar la cartera de activos $\mathscr{S}^{(t)}$ en el tiempo t, es decir, comprar una cartera $\widetilde{\mathscr{S}}^{(t)}$ con un valor $\widetilde{S}_t^{(t)} = S_t^{(t)}$ que genere el valor $\widetilde{S}_{t+1}^{(t)}$ y cuya gestión de activos y pasivos sea lo suficientemente pequeña para obtener solvencia.

2. Inyectar capital adicional. Si se inyectan $\rho_t(AD_{t+1}) > 0$ unidades de bonos cupón cero $\mathfrak{Z}^{(t+1)}$ en el tiempo t con vencimiento al tiempo $t+1$, estos bonos cupón cero valen en el tiempo t la cantidad

$$-F_t = P(t, t+1)\rho_t(AD_{t+1}) > 0.$$

De esta manera, la cartera de activos $\widetilde{\mathscr{S}}^{(t)} = \mathscr{S}^{(t)} + \rho_t(AD_{t+1})\mathfrak{Z}^{(t+1)}$ sigue cumpliendo con la condición contable

$$\widetilde{S}_t^{(t)} = S_t^{(t)} + \rho_t(AD_{t+1})P(t, t+1) > S_t^{(t)} \geq \mathscr{B}_t(X_{(t+1)}).$$

Estas $\rho_t(AD_{t+1})$ unidades de bonos cupón cero $\mathfrak{Z}^{(t+1)}$ generan el valor $\rho_t(AD_{t+1}) > 0$ en el tiempo $t+1$. Así

$$\rho_t(X_{t+1} + \mathscr{B}_{t+1}(X_{(t+2)}) - (S^{(t)}_{t+1} + \rho_t(AD_{t+1}))) = \rho_t(AD_{t+1} - \rho_t(AD_{t+1})) = 0.$$

Lo anterior es posible por el uso del Axioma 2, de la invarianza. Por lo tanto, con esta inyección de capital, se logra la solvencia y el plan de negocios $(\widetilde{\mathscr{S}}^{(t)}, X_{(t+1)})$ es aceptable en el momento t.

Aún existen varios problemas que afectan a la solvencia de las aseguradoras, como riesgos financieros puros y otros riesgos técnicos de seguros. Investigar cada uno de estos problemas requiere más análisis que no fue estudiado en este trabajo.

Conclusiones

En este trabajo se explican algunos de los factores que comprometen el equilibrio de una empresa aseguradora. Para conservar la estabilidad de las aseguradoras resulta complicado analizar al mismo tiempo todos estos factores, por lo que en este trabajo se realizó el estudio y análisis solo considerando el riesgo de activos.

Para analizar el comportamiento de los activos se tomaron en cuenta condiciones mínimas que permitieran tener el control de la solvencia, dichas condiciones fueron la *condición contable* y la *condición del contrato de seguro*.

Se seleccionaron estas condiciones por dos importantes razones, la primera es porque permiten analizar la situación de los activos y pasivos al mismo tiempo. La segunda razón es porque estas condiciones garantizan la solvencia no solo en determinado momento sino que también la garantizan en el futuro. Esto se logrará generando ingresos suficientes con el plan de negocios para pagar futuros reclamos, es decir, que la aseguradora tiene que contar con un plan de negocios aceptable.

Para lograr tener control de estas condiciones fue necesario presentar la definición de solvencia con medidas de riesgo, porque el uso de medidas de riesgo garantiza trabajar con toda la información necesaria para evaluar riesgos, ya que las variables aleatorias no siempre cuentan con dominancia estocástica, que es otra alternativa para comparar variables aleatorias. Además, las medidas de riesgo deben cumplir con ciertas propiedades, que las hace medidas coherentes, para asegurar que sea buena medida y le permita efectuar una correcta gestión de riesgos.

Finalmente, se observa que mediante la definición de solvencia con medidas de riesgo se logra el objetivo principal de esta tesis, mantener la solvencia de una aseguradora, controlando las condiciones mínimas que fueron seleccionadas. Además, se logró plantear alternativas para que la aseguradora recupere su equilibrio cuando se llega a la insolvencia.

Sin embargo, existen otros problemas que afectan la solvencia, como lo son los riesgos financieros puros y otros riesgos técnicos de seguros; estos riesgos requieren de un análisis más profundo igual que la aplicación del modelo de solvencia presentado; su aplicación puede ser tratada en un trabajo futuro.

Bibliografía

[1] AGUILAR, P., (2002), *Modelo de Solvencia Dinámica*, México, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

[2] ASMUSSEN, S. y ALBRECHER, H., (2010), *Ruin probabilities*, Singapur, World Scientific.

[3] BEARD, R.E., (1984), *Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance*, London, Chapman and Hall.

[4] BOWERS, N.L., GERBER, H.U., HICKMAN, J.C., JONES, D.A. y NESBITT, C.J., (1997), *Actuarial Mathematics*, Illinois, The Society of Actuaries.

[5] CUMMINS,J.D., (1988), *Classical Insurance Solvency Theory*, Pennsylvania, USA, Kluwer Academic Publishers.

[6] DEL POZO GARCÍA, E.M. (1997). *Modelos de control de la solvencia en seguro no-vida* (Tesis doctoral). Recuperado 5 de marzo 2017, de http://biblioteca.ucm.es/tesis/19972000/S/2/S2031801.pdf

[7] GONZÁLEZ BUENO, G., (s.f.) *La solvencia de una entidad aseguradora: análisis básico*. Recuperado 26 de enero 2017, de https://www.fundacionmapfre.org/documentacion/publico/pt/catalogo_imagenes/grupo.cmd?path=1008966

[8] HERNÁNDEZ, D., (1998), *Modelos de la Teoría de Riesgo para la Solvencia del Sector Asegurador*. México.

[9] HERNÁNDEZ, M., (2007), *Los conjuntos convexos y sus propiedades*, Murcia, España. Recuperado de http://webs.um.es/mhcifre/apuntes/cap1.pdf

[10] *Método de la transformada inversa.* (s.f.). Recuperado 15 de enero 2018, de http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/leganes/ing_telecomunicacion/estadistica/doc_generica/archivos/apendice_metodo_inversa.pdf

[11] Mikosch, T., (2006), *Non-Life Insurance Mathematics*, New York, Springer.

[12] Minzoni, A., (1998), *Técnica Actuarial de los seguros no-vida*, México, Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias UNAM.

[13] Ortega, J., (2010), *Modelos Estocásticos I.* Guanajuato, México.

[14] Rincón, L., (2012), *Introducción a la teoría del riesgo*, Cd. de México, México.

[15] Rincón, L., (2012), *Introducción a los procesos estocásticos*, Cd. de México, México.

[16] Ross, S., (2010), *Introduction to Probability Models*, San Diego, USA, Elsevier Inc.

[17] Ross, S., (1996), *Stochastic Processes*, USA, John Wiley and Sons, Inc.

[18] Rotar, V.I., (2007), *Actuarial Models: The Mathematics of Insurance*, USA, Taylor and Francis Group, LLC.

[19] Sandström, A., (2011), *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice*, USA, Taylor and Francis Group, LLC.

[20] Venegas, F., (2008), *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, México, Cengage Learning.

[21] Wüthrich, M. V. y Merz, M., (2013), *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance*, New York, Springer.