BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

TÍTULO DE LA TESIS

“ESTUDIO Y APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS PARA LA ASIGNACIÓN DE COSTOS”

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA
EVELYN MORANCHEL GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS
JOSÉ DIONICIO ZACARÍAS FLORES

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE 2017

Agradecimientos

Dedico este trabajo de tesis a mis padres Juan José Moranchel Dávila, Ma. Aurora García Andrade y a mi hermana Marlene Moranchel García quienes siempre me han apoyado incondicionalmente en el transcurso de mi vida y de mi carrera universitaria; a ustedes que han estado presentes siempre, son mi mano derecha, los adoro.

A José Manuel Márquez Camarillo, porque tu ayuda a sido fundamental. Siempre has estado conmigo en los momentos más difíciles. La realización de este trabajo no fue fácil pero siempre estuviste motivándome y brindándome tú ayuda. Te lo agradezco muchísimo. Te quiero.

A mi profesor y director de tesis José Dionicio Zacarías Flores, por haberme tenido paciencia y haberme guiado durante todo el desarrollo de esta tesis; por su aportación, sus consejos y sus observaciones a lo largo mi carrera. Sin su apoyo esto no hubiera sido posible. Gracias.

A todos mis profesores de la Lic. en Actuaría, quienes se han tomado el arduo trabajo de transmitirme sus conocimientos en el campo y demás temas correspondientes a mi profesión. Gracias.

Finalmente, gracias a la vida por este triunfo y gracias a todas las personas que me conocen, me apoyaron y creyeron en mí y en la realización de esta tesis. Gracias a todos por ser parte de mi enseñanza y aprendizaje.

¡Muchas Gracias!

Introducción

Durante siglos, el hombre se ha interesado por los juegos, el juego es una de las principales actividades que realizamos todos y cada uno de nosotros desde nuestra infancia. La Teoría de Juegos ha demostrado una gran versatilidad para la resolución de problemas actuales. Partió de la Teoría Económica y la Teoría Matemática para estudiar la interacción entre los agentes económicos y analizar el resultado que tendrían sobre los participantes.

En los últimos 30 años, la Teoría de Juegos ha experimentado una expansión muy significativa en la investigación y en diversas áreas de estudio, como en la Economía, la Psicología, la Política, o la Computación. En términos generales, podemos decir que la Teoría de Juegos estudia los dilemas que se le presentan al hombre en la vida cotidiana.

Este trabajo tiene como objetivos principales, servir como una ayuda de inducción a la Teoría de Juegos Cooperativos y en particular, a su aplicación para la resolución de problemas de asignación de costos, consolidar ciertos conceptos que son de gran importancia para entender la Teoría de Juegos Cooperativos; mostrar un ejemplo práctico de interés personal y hacer ver que la Teoría de Juegos nos ayuda a generar soluciones factibles y justas que brindan una mejor asignación que los métodos de solución clásicos, que son a los que generalmente estamos acostumbrados, además de reforzar esta idea desarrollando un programa en VBA Excel.

A continuación, se describirá brevemente el contenido de este trabajo: el Capítulo 1 tiene un carácter meramente introductorio; en él, se presentan de forma extensiva los antecedentes históricos de la Teoría de Juegos, brindando un espacio para narrar la historia y vida de uno de los personajes más importantes que contribuyeron al nacimiento de la Teoría de Juegos al publicar el libro “Theory of Games and Economic Behavior” en el año de 1944, el matemático John von Neumann (1903-1957); de igual manera se hace hincapié en mostrar mediante el “dilema del prisionero” el concepto clave creado por von Neumann conocido como el Teorema Minimax y finalmente se hace referencia de aquellos conceptos básicos e imprescindibles para la comprensión de este trabajo.

En el Capítulo 2 y el Capitulo 3 se presentan la introducción y el desarrollo de los juegos cooperativos. El primero de ellos introduce a esta idea trabajando los juegos de suma cero entre dos personas con y sin punto de equilibrio, dando paso a la utilización de diversas estrategias y la definición y aplicación del teorema Minimax de von Neumann. El siguiente capítulo brinda los conceptos más importantes de la Teoría de Juegos de manera coalicional o cooperativa y en particular, se estudiarán los conceptos más significativos: el Core, el Nucleolus y el Valor de Shapley.

El Capítulo 4 introduce al concepto de asignación de costos que es la idea principal de este trabajo, comenzando por saber qué es un costo desde el punto de vista económico, su clasificación y los métodos de costeo contables y económicos tradicionales. Al final se hace referencia a la utilización del método de Teoría de Juegos.

En el Capítulo 5 se analiza el artículo "AN APPLICATION OF GAME THEORY: COST ALLOCATION" de Jean Lemaire (Harry J. Loman) [16] profesor en seguros y gestión de riesgos en la Universidad Wharton; ya que el problema de la asignación de costos es uno de los más difíciles en las economías pequeñas y de gran escala, este artículo ejemplifica esta situación de manera intuitiva, además de estudiar dos variaciones adicionales al concepto de Nucleolus como son el Nucleolus Proporcional y el Nucleolus Disruptivo.

En el Capítulo 6 se da paso a la generación de un problema de asignación de costos de interés personal denominado "Seguro de Vida Grupo". En él, se estudia cómo un empresario puede llegar a sufrir pérdidas mayores por comisión al momento de asegurar a sus empleados y cómo la Teoría de Juegos brinda una solución más factible que la utilización de los métodos de asignación de costos tradicionales. Además, se pretende mostrar la solución al mismo problema mediante la realización de un programa creado en VBA Excel.

Con respecto a la presentación de conceptos y de ideas en este trabajo, cada uno de ellos se elaboró de la manera más minuciosa posible, además de brindar una serie de ejemplos para mejorar su comprensión.

ÍNDICE GENERAL

“ESTUDIO Y APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS PARA LA ASIGNACIÓN DE COSTOS”

EVELYN MORANCHEL GARCÍA

Diciembre 2017

CAPÍTULO 1. TEORÍA DE JUEGOS

1.1 Introducción

El juego es una de las principales actividades que realiza el ser humano desde su niñez; como lo indica la psicología, activa procesos físicos, educativos, sociales o emocionales que permiten que el hombre se desarrolle en su entorno y adopte una conducta que le permita responder ante situaciones conflictivas que se le presenten en la vida real [2].

Un juego es una situación en la que compiten dos o más jugadores que emplean su imaginación o ciertas herramientas y que además, siguen un determinado número de reglas con el fin proporcionar entretenimiento, diversión o cumplir algún objetivo, tomando en cuenta que se puede ganar como se puede perder. Dentro de un juego, se supone que todos los participantes son racionales. Algunos ejemplos de ello son: el ajedrez, el póker, los juegos de mesa, los juegos deportivos o incluso en el ámbito de los negocios, lanzar un producto al mercado.

Como es de esperarse, cada jugador intentará maximizar su utilidad o ganancia, pero hay que tomar en cuenta que el resultado no sólo dependerá de lo que un solo jugador elija, sino que también, dependerá de las estrategias que utilicen los demás jugadores.

Durante siglos, el hombre se ha interesado por los juegos, Luca Paccioli (siglo XV), Tartaglia (siglo XVI) y Cardano (siglo XVI) comenzaron a resolver problemas de juegos de azar abordando juegos con apuestas, mientras que Pierre Fermat y Blaise Pascal (siglo XVII) por mencionar algunos, se interesaron por resolver situaciones que involucraban juegos de azar matemáticamente, dando así el inicio a la Teoría de la Probabilidad [14]. La Teoría de la Probabilidad estuvo limitada algún tiempo a los juegos de azar. Durante el siglo XVIII comenzó un auge en la Estadística (aunque surgió desde los inicios de la humanidad) que complementó las bases teóricas de las probabilidades de juegos de azar, permitiendo el estudio de los datos obtenidos probabilísticamente e interpretando esa información para tomar decisiones y afrontar riesgos ante situaciones impredecibles [13].

Sin embargo, la Teoría de Juegos no se basa en estudiar la probabilidad de un juego ni estudiar los datos obtenidos de él, sino que su objetivo principal, es estudiar el comportamiento estratégico entre los contrincantes dentro de un mismo juego.

Un comportamiento estratégico comienza por la formulación de un juego que, cómo ya se sabe, consta de un número de jugadores, de acciones posibles para cada jugador y un conjunto de reglas. Más aún, el comportamiento estratégico nació como un concepto económico que representa a un conjunto de estrategias que toma una empresa en torno al mercado con la única finalidad de maximizar sus beneficios [1].

En la actualidad, la Teoría de Juegos tiene bastantes aplicaciones, por ejemplo: en la Economía, ayuda a la distribución de recursos entre oferentes y demandantes para que exista una competencia perfecta; en la política, se puede ver reflejada en las campañas que utilizan los diferentes partidos políticos para llegar al poder en las elecciones; en la Biología, se ha utilizado para comprender y predecir algunos resultados evolutivos; en la Sociología, se utiliza para estudiar el comportamiento de grupos delincuentes y ejemplificar el modo en el que pueden llegar a operar, etc. Todas las aplicaciones mencionadas anteriormente tienen algo común, el resultado de estas situaciones dependerá de las decisiones que tomen los jugadores.

La Teoría de Juegos ha demostrado una gran versatilidad para la resolución de problemas actuales. Partió de la Teoría Económica y la Matemática para estudiar la interacción entre los agentes económicos y analizar el resultado que tendrían sobre los participantes. De manera general, brinda a la Teoría Económica una nueva visión sobre el análisis de diversas situaciones a nivel teórico y práctico.

> *"Pero sin duda, su principal aplicación la encontramos en las ciencias económicas porque intenta encontrar estrategias racionales en situaciones donde el resultado depende no solamente de la estrategia de un participante y de las condiciones del mercado, sino también de las estrategias elegidas por otros jugadores, con objetivos distintos o coincidentes" [2].*

1.2 Antecedentes históricos

La Teoría de Juegos tiene sus inicios comenzando por James Waldegrave en el año de 1713. Waldegrave escribió en una carta una solución mínima de estrategias mixtas de un juego de cartas entre dos personas muy importante de la época conocido como “Le Her”; sin embargo, no tuvo el análisis teórico necesario hasta el trabajo que presentaría Cournot más adelante [20].

Antoine Augustin Cournot, matemático, filósofo y economista francés (1801-1877), fue el primero en estudiar los aspectos estratégicos al momento en que interactuaban los agentes económicos, en su obra “Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la Teoría de las riquezas” publicada en el año de 1838. En ésta, se analizan las diferentes formas de competencia en el mercado entre vendedores y productores, es decir, entre la oferta y la demanda [18].

Posteriormente, el economista y abogado ingles Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) se apoyó en la idea de Cournot para desarrollar el mismo concepto basado en una economía sin producción dentro de su publicación “Matemáticas psíquicas: Un ensayo sobre la aplicación de las matemáticas a las ciencias morales” en el año de 1881.

Edgeworth introdujo una herramienta de representación de interacción entre agentes sin producción llamada “la caja de Edgeworth” que permite analizar todas las posibilidades de asignación de recursos entre entidades y observar si esa asignación es una asignación óptima [18].

El matemático alemán Ernest Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) brindó el primer teorema formal de la Teoría de Juegos. El teorema consiste en determinar las estrategias óptimas de los jugadores desde la última jugada retrocediendo hasta la primera, siendo un teorema que sería recuperado por varios autores posteriormente. Su teorema recoge a la vez varios enunciados importantes que afirman que:

> *"En todo juego finalizado –cuyo número de partidas sea conocido de antemano- con la información perfecta –cada jugador conoce, además de las suyas todas las estrategias y las funciones de ganancia del resto de los jugadores- existe un equilibrio" [18]*.

Las contribuciones anteriores permiten resolver juegos con estrategias puras. Más adelante, el matemático francés Emile Borel (1871-1956) en el volumen IV de su obra titulada "Tratado del cálculo de sus probabilidades y aplicaciones" publicada en 1924, en donde introduce probabilidades en los juegos de azar y enuncia un teorema para juegos de suma cero en donde se expresa que en un juego la ganancia de un jugador corresponde a la pérdida de otro. También clasificó a los juegos de azar en dos: los juegos donde la personalidad y habilidad de un jugador no intervienen y los juegos donde la personalidad y habilidad del jugador sí intervienen [18].

La Teoría de Juegos nace propiamente en el año de 1944 con el matemático estadounidense John von Neumann (1903-1957) y el economista alemán Oskar Morgenstern (1902-1977) con la publicación de su libro "Theory of Games and Economic Behavior" en el año de 1944, en donde se muestra la importancia de esta disciplina aplicada a las relaciones humanas [18]; ambos proponen una relación de equilibrio en un juego de suma cero mediante el famoso teorema Minimax introduciendo dos conceptos clave de la Teoría de Juegos: los juegos cooperativos y los juegos no cooperativos.

Prácticamente, en el primer tipo, los jugadores no tienen comunicación, no hay acuerdo y cada uno elige independientemente su estrategia sin importarle lo que suceda; en los juegos cooperativos ocurre todo lo contrario, siempre se asume que los jugadores son personas razonables que pueden establecer acuerdos entre sí acerca de las estrategias más apropiadas para obtener un beneficio conjunto [10].

Para el año de 1950, aparecieron las primeras discusiones acerca del "dilema del prisionero". Éste, es uno de los ejemplos más representativos del teorema de equilibrio entre dos jugadores y en él, se analizan los incentivos que tienen dos presos encarcelados por un delito para delatar al otro a la policía y así, poder acceder a sus beneficios penitenciarios.

Este experimento se realizó en la corporación RAND dedicada a la formación de fuerzas armadas en Estados Unidos. Enfatizaremos en él un poco más adelante.

El economista y matemático estadounidense John Forbes Nash (1928-2015) fue quién consolidó las bases de la Teoría de Juegos. Se basó en los trabajos del economista Cournot proponiendo una Teoría de Equilibrio no cooperativo para juegos de suma variable denominado "Equilibrio de Nash", generalizando la propuesta hecha anteriormente por von Neumann y Morgenstern y mostrando que, la elección de la estrategia de cada jugador es una respuesta óptima a las elecciones de las estrategias de otros jugadores. Nash quizá es el apellido más conocido en el tema de la Teoría de Juegos [18].

Curiosamente, la obra de Antoine Augustin Cournot fue ignorada hasta que salió a la luz gracias a los trabajos de Forbes. En años posteriores, Nash publicó escritos con originales soluciones para algunos problemas de la Teoría de Juegos, para juegos bipersonales cooperativos y para la reducción de juegos cooperativos a un marco no cooperativo [2].

Reinhard Selten (1930-2016) en el año de 1965 aportó a la teoría de Nash introduciendo el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos, aportando al teorema de equilibrio de Nash. En 1967 John Harsanyi (1920-2000) desarrolló los conceptos de información completa en donde los jugadores conocen perfectamente la estructura de un juego, logrando junto con Nash y Selten, ganar el Premio Nobel de Economía en el año de 1994 [3].

Una de las últimas aportaciones importantes a la Teoría de Juegos fue de Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling (1921-2016), por la que obtuvieron el Premio Nobel de Economía en el año 2005 con la publicación "The Strategy of Conflict" aplicada a la Teoría de Juegos en las ciencias sociales mediante el análisis de juegos con sucesos repetidos [2].

1.3 Utilidad del Teorema Minimax de von Neumann

En muchos ámbitos, el hombre está sujeto a resolver dilemas. Como lo indica la Filosofía, un dilema es una situación problemática que se puede resolver mediante alternativas distintas y que, además, ninguna de éllas es completamente aceptable. Los dilemas reales son aquellos que vivimos en nuestra vida cotidiana y surgen de situaciones propias, de nuestros intereses o de la sociedad [11].

Todo el tiempo debemos tomar una decisión, difícil o no, pero sin duda con resultados diferentes a los que teníamos pensado. Una pregunta surge muy claramente, ¿Realmente, el ser humano se comporta de manera racional cuando se le presenta alguna situación?

Uno de los ejemplos más representativos de cómo el ser humano responde a estos dilemas de la vida cotidiana es "El dilema del prisionero". Este dilema en un claro ejemplo de la Teoría de Juegos que supone que cada uno de los jugadores de manera independiente intenta maximizar su ganancia sin que le importe lo que sucede con el otro jugador. Su enunciado dice lo siguiente:

> *"La policía arresta a dos sospechosos, pero no existen suficientes pruebas para condenarlos. Se cree que han participado en el robo de un banco, delito penado con diez años de cárcel. Tan sólo puede culparles de un cargo menor, tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de solo un año. Detenidos y encerrados en celdas separadas de forma que no pueden comunicarse entre sí, la policía les visita de forma independiente ofreciéndoles el mismo trato:*
>
> *Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el que confiesa será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, éste será quien salga libre y el primero recibirá una pena de diez años. Si ambos confiesan, los dos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, tan solo podrán encerrarlos durante un año por un cargo menor" [9].*

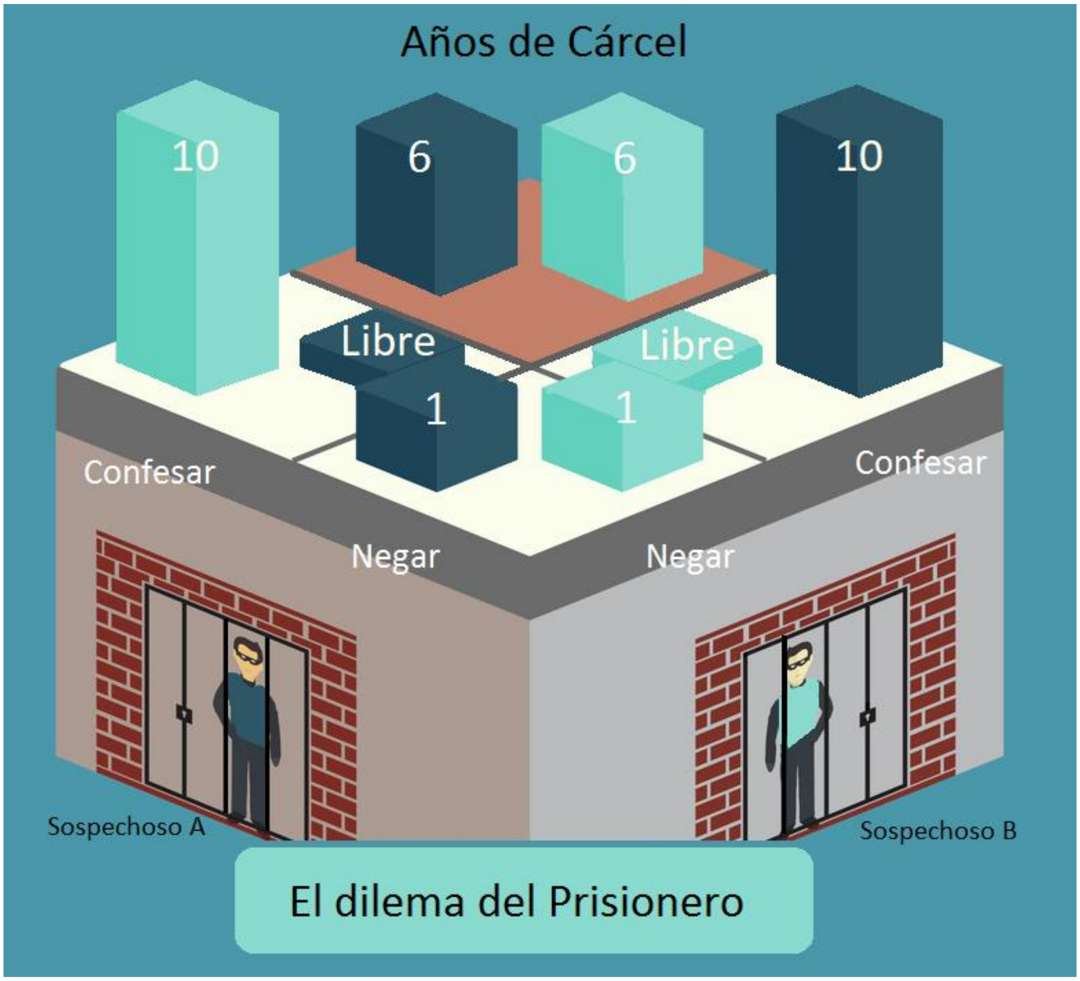


Figura 1. Diagrama "El dilema del prisionero".

Cada preso puede optar por colaborar con el otro diciendo que el compañero no tendría por qué estar en la cárcel o acusarlo de haber cometido el delito. Podemos ver una matriz que representa las opciones de este problema y sus posibles soluciones en la Figura 1 y 2.

	Sospechoso B niega	Sospechoso B confiesa
Sospechoso A niega	Ambos se condenan por 1 año	A es condenado a 10 años y B queda libre
Sospechoso A confiesa	B es condenado a 10 años y A queda libre	Ambos se condenan por 6 años

Figura 2. Matriz "El dilema del prisionero".

Ahora, analizando lo anterior, supongamos que la única meta entre ambos sospechosos es minimizar su condena. Cada uno tiene dos opciones, callar o confesar. El resultado final dependerá de la elección del cómplice, por lo que no puede esperar a ver qué contesta el otro acusado, es decir, cada uno contestará sin saber que elegirá el otro cómplice [6].

Si uno de ellos confía en que el otro cooperará y se queda callado, la opción más egoísta podría ser confesar, porque entonces el sospechoso que confesó saldría libre mientras que el cómplice tendría que cumplir la pena máxima. Pero si espera que el cómplice confiese, su mejor opción es confesar para que ambos eviten la pena máxima y paguen una pena por 6 años. Por otro lado, si ambos cooperaran, cumplirían una pena mínima [6].

Como se observa, confesar es una estrategia que domina para ambos acusados porque cualquiera que sea la elección del otro cómplice se reducirá la pena al momento de que confiesen, pero no sería la mejor opción porque ambos recibirían una condena larga. Allí radica el punto cumbre de éste [6].

Viéndolo como un interés en conjunto de ambos sospechosos, la elección más racional es que ambos cooperen quedándose callados y así, ambos cumplan una pena mínima; esto sería un resultado óptimo para ellos como equipo y cualquier otra elección que hubiesen tomado empeoraría este resultado en conjunto. Y esto es claro dado que, si ambos cómplices tuvieran intereses individuales o egoístas recibirían una condena larga [6].

Otro ejemplo basado en el "dilema del prisionero" puede ser ubicado en la docencia.

Figura 3. “El dilema del prisionero” aplicado a la docencia.

Supongamos que un maestro, al iniciar su curso, propone hacer la realización de una evaluación continua mediante la entrega de ejercicios en grupos; si la mayoría de los ejercicios que entregue cada grupo están bien hechos y muestran interés al momento de trabajar, entonces no habrá examen final, pero si los alumnos no muestran interés y los ejercicios están mal hechos tendrán que hacer un examen final para acreditar la materia [6].

Los alumnos deben entregar los ejercicios semanalmente y se considera que han estado trabajando continuamente; además supongamos que la cantidad de alumnos que debe realizar los ejercicios con interés para evitar presentar el examen debe ser mayor o igual al 80%. La matriz que representa las posibles opciones de los alumnos se ven representadas en la Figura 4.

	80% trabaja con interés los ejercicios	**80% no trabaja con interés los ejercicios**
20% trabaja con interés los ejercicios	Nadie hace examen final habiendo mostrado interés todos	Todos presentan examen final habiendo mostrado interés en su minoría
20% no trabaja con interés los ejercicios	Nadie hace examen final habiendo mostrado interés la mayoría	Todos presentan examen final sin haber mostrado interés en su mayoría

Figura 4. Matriz de la "forma de evaluación del maestro".

Los alumnos tienen dos opciones para esta forma de evaluación del profesor: que todos se esfuercen y no presenten examen final o que no se esfuercen y dependan de lo que hagan sus compañeros de grupo. En general, los alumnos intentan pasar una materia haciendo el mínimo esfuerzo y pensando que los demás se esforzarían por ellos (beneficiándose de esa acción). El dilema aquí es que no se sabe si todos piensan igual [6].

Para ver qué sucede, tomaremos un grupo de entre todos al que llamaremos grupo A. Este grupo A podría pensar que los demás grupos se van a esforzar con los ejercicios para no hacer examen y por tanto para este grupo, la mejor opción sería no hacer ningún esfuerzo. Serían los "únicos" en no entregar bien sus ejercicios, pero aun así pasarían la materia sin hacer examen mientras que el resto de sus compañeros se esforzaron durante todo el periodo escolar [6].

Pero si el grupo A piensa que los demás no se van a esforzar, lo mejor sería que se esforzaran lo mínimo posible porque tendrían que hacer el examen final, pero al menos se habrían esforzado menos en el periodo. Sin embargo, si todos los grupos se deciden esforzar, todos habrán trabajado y no presentarían el examen final [6].

La estrategia que domina aquí para todos los grupos es no esforzarse, sea la estrategia que sea para los demás, siempre conseguirían no trabajar durante el curso. El problema es que esa estrategia no lleva a un resultado óptimo, porque si ninguno se esfuerza demasiado, tendrán que hacer examen final. Si todos los grupos pensaran en el beneficio general, lo mejor sería que todos se esforzaran al realizar sus ejercicios para no hacer el examen final.

Por tanto, al igual que en el "dilema del prisionero", la estrategia dominante no conlleva a una solución óptima y si los estudiantes buscan el interés propio, pueden llegar a un resultado que sea perjudicial para ellos [6].

El dilema del prisionero es complicado porque desafía el sentido común; es un dilema con el que todos hemos de convivir. La parte esencial, como ya se vio en los ejemplos anteriores, radica en mejorar los intereses propios, de forma que, si todas las personas hicieran esto, la toma de decisiones nos llevaría al caos total; por eso, muchos han interpretado este problema como un problema fundamental que ocurre en nuestra sociedad; ciertamente, muchas de las más grandes tragedias sufridas por la humanidad fueron causadas por el ser humano.

Von Neumann adquirió una alta reputación en su carrera por el gran dominio que mostró hacia la matemática pura y la física matemática. Cabe señalar que fue un hombre al que le gustaba el juego; el póker en particular, y se interesaba por los diferentes aspectos al momento de jugar, el engaño, los movimientos falsos que hacían los jugadores para distraer al oponente y no violar las reglas del juego, entre otros.

Desde mediados de 1920, von Neumann se dedicó a estudiar la estructura matemática de juegos como naipes, dados o el póker. A medida en que fue avanzando, se dio cuenta de que sus estudios podían aplicarse a diversos ámbitos en donde se ve reflejado el juego, como fue la Economía y la Política, lo que lo llevó junto con el apoyo de Oskar Morgenstern a publicar "Theory of Games and Economic Behavior".

> *"En palabras de los autores el objetivo de la obra es mostrar adecuadamente que los problemas típicos de comportamiento económico son rigurosamente idénticos a las soluciones matemáticas de determinados juegos de estrategias" [12].*

La publicación de John von Neumann no se refiere a jugar, sino que nos enseña cómo la Teoría de Juegos estudia los dilemas o conflictos entre personas racionales; von Neumann presenta esto de manera teórica y matemática desde un punto de vista razonable.

Básicamente, la Teoría de Juegos estudia la rivalidad entre jugadores que piensan y que pueden ser capaces de engañar al otro, y como se supone que los jugadores son racionales, se puede llevar a cabo un análisis preciso de las estrategias.

Aunque la publicación presentó la teoría enfocada a problemas económicos, más tarde, su contenido y terminología resultó de uso común para investigadores en ciencias, economistas, filósofos, militares, etc. y se fue adaptando a diversas necesidades.

Sabemos a ciencia cierta que algunos juegos son simples de analizar, pero otros no. Lo que von Neumann buscó fue encontrar siempre una respuesta racional al momento de jugar, sobre todo, en aquellos casos en donde existen inconformidades.

La idea clave de la Teoría de Juegos es aquella que indique una solución óptima de un conflicto estableciendo un equilibrio entre los jugadores; en el año de 1926, von Neumann formuló el **"Teorema Minimax".** Este principio estableció una solución racional para una competencia, definido de tal manera que ambas partes no podrían hacer nada mejor, en otras palabras, el resultado "Minimax" minimiza el daño máximo para los jugadores [17].

Además, para quienes tienen escasa formación en esta disciplina, la idea de la Teoría de Juegos y del "teorema Minimax" de von Neumann es fácil de entender. A grandes rasgos, dicho teorema nos dice que, para todos los juegos finitos, entre dos jugadores y de suma cero, siempre existirá un valor V que representará la cantidad media que espera ganar el jugador 1 de parte del jugador 2 [17].

> *"Von Neumann, intuyó que este resultado era plausible por tres motivos fundamentales:*
>
> *1. La existencia de una estrategia para el primer jugador que es la mejor para sus intereses, que le permitirá obtener unas ganancias determinadas, el valor medio del juego, y contra la cual nada puede hacer el segundo jugador.*
> *2. La existencia de una estrategia para el segundo jugador que es la mejor para sus intereses, es decir, que le garantiza que no perderá como media más de un valor determinado, el valor medio del juego, y contra la cual nada puede hacer el primer jugador.*

3. *El hecho de que el juego sea de suma cero, esto es, lo que gana el primer jugador debe perderlo el segundo, o que implica que existe un valor medio del juego tanto el primer jugador como el segundo aceptan esa ganancia o pérdida respectivamente, ya que cualquier otra estrategia les aleja de este valor en detrimento de sus intereses" [17]*.

Un ejemplo que puede ilustrar la idea que fundamenta el teorema Minimax puede ser el momento de cortar un pastel. No importa que tan cuidadoso sea uno, al momento de cortarlo, uno, dos o más niños, se quejará de que su pedazo fue más pequeño que el de otro.

Figura 5. Ejemplo para ilustrar el "Teorema Minimax" al momento de cortar un pastel.

La solución para este problema consiste en que el primero de ellos corte el pastel, y que todos los demás escojan el pedazo que quieran. Sería una repartición justa. El primer niño no podría quejarse de que la partición está mal hecha porque él la hizo. Los demás no podrían protestar, porque cada uno de ellos eligió el pedazo que quería. El problema del pastel es un conflicto de intereses (un dilema) y la solución pasa por ser un resultado óptimo [12].

Mediante ejemplos de aplicación del “dilema del prisionero” se puede observar cómo influye el teorema Minimax y cómo influye la Teoría de Juegos en la vida diaria, por este motivo es tan estudiado. En particular, hemos visto en los ejemplos anteriores cómo se presentan situaciones en donde siempre se obtendría una estrategia óptima si los jugadores buscan un beneficio en grupo y no beneficio propio. Sin embargo, como ocurre en la sociedad y en la mayoría de las situaciones, los participantes de un juego actúan de manera egoísta y se perjudican a ellos mismos y a sus contrincantes [6].

CAPÍTULO 2. JUEGOS DE SUMA CERO

2.1 Introducción

Como ya se mencionó anteriormente el enfoque de la Teoría de Juegos es analizar las posibilidades de que algunos o todos los jugadores, lleguen a un acuerdo sobre las decisiones que va a tomar cada uno de éllos. Es decir, el juego se vuelve una competición entre jugadores que no sólo buscan sus intereses individuales. Los jugadores escogerán estrategias mediante un proceso en donde la mayoría de los participantes, si no es que todos, alcancen un beneficio satisfactorio. Los casos que se analizarán a continuación son los juegos de suma cero entre dos personas con punto de equilibrio y sin punto de equilibrio.

2.2 Juegos de suma cero entre dos personas con punto de equilibrio

En un juego entre dos personas se considerarán sólo a dos jugadores a los cuales los llamaremos jugador I y jugador II (racionales, claro está). Cada jugador tendrá un número finito de elecciones llamadas **estrategias**. Es decir, el jugador I, tendrá n estrategias en total, así que él decidirá con qué estrategia i jugará, con $i = 1,2, \dots, n$ y el jugador II tendrá m estrategias en total, así que él decidirá con qué estrategia j jugará, con $j = 1,2, \dots, m$. Por notación, cada pago o recompensa que puede recibir el jugador I por parte del jugador II cuando el jugador I eligió la estrategia i mientras que el jugador II eligió la estrategia j, se representará mediante un valor a_{ij}, por tanto, un valor $-a_{ij}$ representará que el jugador II obtuvo una recompensa del jugador I cuando el jugador I eligió la estrategia i mientras que el jugador II eligió la estrategia j.

En este juego, consideraremos que la ganancia de cualquiera de los dos jugadores representará la pérdida del otro; a esto le llamaremos **juego de suma cero entre dos personas** [5]. Generalmente para representar este tipo de juegos, podemos expresar los resultados mediante una matriz de juego (A_{nxm}) con $A = \{a_{ij}\}$, como se muestra a continuación.

JUGADOR I		JUGADOR II			
		ESTRATEGIA 1	**ESTRATEGIA 2**	**…**	**ESTRATEGIA m**
	ESTRATEGIA1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
	ESTRATEGIA 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	ESTRATEGIA n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Figura 6. Matriz suma cero entre dos personas

Como se puede observar, las filas representan las estrategias de jugador I y las columnas, las estrategias del jugador II. Por notación, para una matriz de juego A_{nxm}:

$$_iA = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \text{ es el vector de estrategias para el jugador } I$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{ es el vector de estrategias para el jugador } II.$$

Es fácil notar que, cualquiera de los dos jugadores intentará maximizar sus beneficios individuales. Si todo el tiempo las personas jugaran de la misma manera, es decir, usando las mismas estrategias, se volvería un juego predecible. Por tanto, debemos suponer que los juegos serán jugados usando estrategias al azar.

Entonces, lo que desea hacer el jugador I es elegir una fila i que maximice su ganancia sobre las estrategias j del jugador II. A este concepto se le conoce como **el más bajo valor de juego** y se denota como sigue: $v^- = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij}$.

Por otro lado, el jugador II, suponiendo que juegue de la mejor manera, intentará elegir una columna j que minimice su pérdida sobre las estrategias i del jugador I. A esto se le llama **el más alto valor de juego** y se denota como: $v^+ = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}$.

En una matriz de juego, como lo muestra la Figura 7, podemos ver representado al más alto y más bajo valor de juego.

		JUGADOR II				
		ESTRATEGIA 1	**ESTRATEGIA 2**	**…**	**ESTRATEGIA m**	
JUGADOR I	**ESTRATEGIA1**	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	$\min_j a_{1j}$
	ESTRATEGIA 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	$\min_j a_{2j}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	ESTRATEGIA n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	$\min_j a_{nj}$
		$\max_i a_{i1}$	$\max_i a_{i2}$	… …	$\max_i a_{im}$	$v^- = más\ grade\ de\ los\ mínimos$ $v^+ = más\ pequeño\ de\ los\ máximos$

Figura 7. Representación del más bajo valor de juego y el más alto valor de juego en una matriz de suma cero entre dos personas.

Note que v^- representa la cantidad minima que podría obtener el jugador I mientras que v^+ representa la cantidad máxima que podría llegar a perder el jugador II. Esta descripción deja en claro que $v^- \leq v^+$ [5] .

Si se tiene una matriz de suma cero entre dos jugadores y además se cumple la condición de que $v^- = v^+$, entonces se dice que el juego tiene un punto silla. Un **punto silla** es una condición necesaria y suficiente para encontrar un equilibrio entre las estrategias puras de cada jugador, es decir, una estrategia óptima para cada uno de ellos y se representa:

$$v^- = v(A)^- = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij} = v^+ = v(A)^+ = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}.$$

Además, a ese punto silla obtenido se le conoce como $v(A)$ o **valor de juego**. Por tanto, $v(A)$ es un pago determinado que se obtiene al tomar simultáneamente una estrategia minima y una estrategia máxima entre los dos jugadores.

Definición 2.2.1. En particular, si se considera a una fila i^* y una columna j^* cualesquiera tal que existe $a_{i^*j^*}$, un punto silla de estrategias puras en un juego ocurre si:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \text{ para cualquier fila } i = 1, \dots, n \text{ y columna } j = 1, \dots, m.$$

Es claro que, si existe un punto silla o un valor de juego óptimo para los dos jugadores y alguno de ellos decide jugar otra estrategia, el otro jugador puede tomar ventaja de ello y mejorar su ganancia.

Ejemplo 2.2.1

Considere el siguiente juego: hay dos jugadores (I y II) y cada uno decide mostrar 1, 2 o 3 dedos al mismo tiempo. Si el número total de dedos mostrados suma un numero par el jugador II pierde -\$1 y el jugador I gana +\$1, si el número de dedos mostrados suma un número impar ocurre lo contrario. La matriz de juego está representada en la Figura 8.

		JUGADOR II		
		ESTRATEGIA 1	**ESTRATEGIA 2**	**ESTRATEGIA 3**
JUGADOR I	**ESTRATEGIA1**	**1**	**-1**	**1**
	ESTRATEGIA 2	**-1**	**1**	**-1**
	ESTRATEGIA 3	**1**	**-1**	**1**

Figura 8. Matriz que representa las posibles estrategias de los jugadores I y II.

Si calculamos el valor más bajo y más alto de juego se obtiene:

$$v^- = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij} = -1 \quad y \quad v^+ = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij} = 1$$

Ahora, si no existe una estrategia óptima pura, ¿de qué manera se tendría que jugar un juego? Existe una forma que permite hallar un valor óptimo $v(A)$ mediante estrategias mixtas.

2.3 Estrategias mixtas para juegos de suma cero entre dos personas sin punto de equilibrio

Ahora, supongamos que cada jugador elige una estrategia al azar con cierto nivel de probabilidad que especifica la posibilidad de que cada estrategia sea jugada. A estas posibles estrategias se les conoce como **estrategias mixtas** y se representan mediante vectores de probabilidad.

Es decir, una estrategia mixta es aquella en la que el jugador asigna una probabilidad estrictamente positiva a cada estrategia pura (aquella que tiene probabilidad de 1 de ser elegida) y es una generalización del tema anterior.

El jugador I tendrá un vector de estrategias mixtas denotado por: X, mientras que el vector de estrategias del jugador II se denotará por Y. Al ser vectores de probabilidad deben cumplir que:

$$\text{Para el jugador I: } X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad con \;\; x_i > 0, \;\; \text{y además } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\text{Para el jugador II: } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad con\; y_j > 0, \;\; \text{y además } \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

Los componentes x_i representan la probabilidad de que la fila i sea utilizada por el jugador I mientras que los componentes y_j representan la probabilidad de que la columna j sea utilizada por el jugador II. Además, al conjunto de las estrategias mixtas con k componentes se le denotará como:

$$S_k = (z_1, z_2, \dots, z_k) \;\; con\; z_i > 0, \;\; \text{y además } \textstyle\sum_{i=1}^{k} z_i = 1.$$

Ahora, si suponemos que los jugadores juegan varias veces este mismo juego, en promedio, existirá una recompensa media que esperan recibir, a esto se reconoce como **el pago esperado** [5].

Los jugadores I y II elegirán sus estrategias al azar y de manera independiente, lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.3.1 Dado que los jugadores I y II eligen estrategias independientemente, el pago esperado para ambos jugadores se denota como:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, P(\, I \; usa \;\; i \; mientras \; II \; usa \;\; j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, P(\, I \; usa \;\; i)\, P(\, II \; usa \; j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ia_{ij}y_j$$

$$= X\,A\,Y^T = \;(x_1, x_2, \dots, x_n)\;A_{nxm}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Entonces, **el más bajo valor de juego** y **el más alto valor de juego** en estrategias mixtas se denota como sigue:

$$v_m{}^- = \max_X \min_Y X\,A\,Y^T$$

$$v_m{}^+ = \min_Y \max_X X\,A\,Y^T$$

Definición 2.3.2 Un punto silla de estrategias mixtas $v_m(A)$, es un par de vectores de probabilidad X^* y Y^*, con $X^* \in S_n \;\; y \;\; Y^* \in S_m$ que satisfacen:

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) = v_m(A) \leq E(X^*, Y), \text{ para cada } X^* \in S_n \text{ y } Y^* \in S_m$$

En esta terminología, una estrategia mixta para el jugador I es cualquier elemento $\mathrm{X} \in \mathrm{S_n}$ y una estrategia mixta para el jugador II es cualquier elemento $\mathrm{Y}^* \in \mathrm{S_m}$. Por tanto, una estrategia pura para el jugador I, es un elemento de la forma $\mathrm{X} = (0,0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)$ que indica que el jugador I siempre jugará la fila correspondiente a la posición de 1 en el vector X, ocurre lo mismo para el jugador II en el vector Y.

Imaginando el caso en que el jugador I decide usar una **estrategia pura**, es decir, una estrategia i que jugará todo el tiempo, y el jugador II decide jugar con una estrategia mixta, entonces, el pago esperado se simplificará como:

$$E(i, Y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j = \;{}_iA\,Y^T = \;(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})\;\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

En el caso que ocurra lo contrario:

$$\mathrm{E}(X,j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = XA_j = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Existe una lista de propiedades que nos ayudan a encontrar el valor de un juego de estrategias mixtas y se describirán a continuación.

Propiedades para estrategias mixtas

Teorema 2.3.1 Dada una matriz de juego $(\mathrm{A}_{\mathrm{nxm}}) = a_{ij}$ con un valor de juego $E(X^*, Y^*)$. Sea w un número real con $i = 1,2, \ldots, n$ y $j = 1,2, \ldots, m$ respectivamente.

a) Si $w \leq E(X^*, j) = X^* A_j$ entonces $\mathrm{w} \leq v_m(A)$
b) Si $w \geq E(i, Y^*) = {}_iA\, Y^{*T}$ entonces $\mathrm{w} \geq v_m(A)$
c) Si $E(i, Y^*) = {}_iA\, Y^{*T} \leq w \leq E(X^*, j) = X^* A_j$ para cada $i = 1,2, \ldots, n$ y $j = 1,2, \ldots, m,$ entonces $w = v_m(A)$ y (X^*, Y^*) es un punto silla de juego.
d) Si $v_m(A) \leq E(X^*, j)$ entonces X^* es un punto óptimo para el jugador I para cada $j = 1,2, \ldots, m$ y si $v_m(A) \geq E(i, Y^*)$ para cada $i = 1,2, \ldots, n,$ entonces Y^* es un punto óptimo para el jugador II.
e) Una estrategia X^* para el jugador I es óptima si y solo si $v_m(A) = \min_j E(X^*, j)$ además una estrategia Y^* es optima para el jugador II si y solo si $v_m(A) = \max_i E(i, Y^*)$.

Demostración

a) *Supongamos que:*

$$w \leq E(X^*, j) = X^* A_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}, \quad para\ j = 1, \ldots, m.$$

Sea $Y^0 = (y_j) \in S_m$ una estrategia mixta óptima para el jugador II. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por y_j y se suma sobre todas las columnas j se obtiene:

$$w = \sum_j y_j w \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j = X^* A \, Y^{0T} = E(X^*, Y^0) \leq v_m(A)$$

$Y \sum_j y_j = 1$ *entonces* $E(X^*, Y^0) \leq v_m(A)$ *para cualquier* $X \in S_n$. □

b) *Para probar esta parte se utiliza lo mismo que en a).* □

c) *Si* $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* \leq w \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^* a_{ij}$ *se tiene que:*

$$E(X^*, Y^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* \leq \sum_i x_i^* w = w \leq \sum_i a_{ij} x_i^*$$

$$E(X^*, Y^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* \geq \sum_j y_j^* w = w \geq E(X^*, Y^*).$$

Esto dice que $w = E(X^*, Y^*)$.*Y nosotros tenemos que por la definición 2.3.2*

$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$ *Con* $X^* \in S_n$ *y* $Y^* \in S_m$, *entonces*

$v_m(A) = E(X^*, Y^*)$ *Y es un punto silla con* $w = E(X^*, Y^*)$. □

d) *Sea* $Y^0 = (y_j) \in S_m$ *una estrategia mixta óptima para el jugador II. Si:*

$$E(i, Y^0) \leq v_m(A) \leq E(X^*, j).$$

Para todas las columnas j *y filas* i, *donde la primera parte de la inecuación viene de la definición de un óptimo para el jugador II. Usando la parte c) podemos notar que* X^* *es un óptimo para el jugador I. La segunda parte para d) se hace de manera análoga.* □

e) *Comenzamos por establecer la definición como sigue:*

$$\min_{Y \in S_m} E(X, Y) = \min_{j=1,\dots,m} E(X, j).$$

Para cualquier estrategia mixta X. *Esto es, desde que cada estrategia pura se convierte en una estrategia mixta ocurre que:*

$$\min_{Y \in S_m} E(X, Y) \leq \min_{j=1,\dots,m} E(X, j).$$

Ahora definimos $a = \min_{j=1,\dots,m} E(X, j)$. *Entonces:*

$$0 \leq \min_{Y \in S_m} \sum_{j=1}^{m} (E(X, j) - a) \, y_j = \min_{Y \in S_m} E(X, Y) - a.$$

Con $E(X,j) \geq a$ *para cada* $j = 1,2,\dots,m$. *En consecuencia,* $\min_{Y\in S_m} E(X,Y) \geq a$, *y juntando las inecuaciones, se concluye que* $E(X,Y) = \min_{j=1,\dots,m} E(X,j)$.

Usando la definición de $v_m(A)$*, sabemos que:*

$$v_m(A) = \max_{X\in S_n} \min_{Y\in S_m} E(X,Y) = \max_{X\in S_n} \min_{j=1,\dots,m} E(X,j).$$

De manera similar podemos ver que:

$$v_m(A) = min_{Y\in S_m}\, max_{X\in S_n}\, E(X,Y) = min_{Y\in S_m}\, max_{i=1,\dots,n} E(i,Y).$$

En consecuencia

$$v_m(A) = \max_{X\in S_n} \min_{j=1,\dots,m} E(X,j) = \min_{Y\in S_m} \max_{i=1,\dots,n} E(i,Y).$$

Y si X^* *es un punto óptimo para el jugador I, entonces:*

$$v_m(A) = \max_{X\in S_n} \min_{Y\in S_m} E(X,Y) \leq \min_{Y\in S_m} E(X^*,Y) = \min_{j=1,\dots,m} E(X^*,j).$$

Por otro lado, si $v_m(A) \leq min_{j=1,\dots,m} E(X^*,j)$ *entonces,* $v_m(A) \leq E(X^*,j)$ *para todas las columnas* j *y* $v_m(A) \leq E(X^*,Y)$ *para toda* Y*, lo cual implica que* X^**, es una estrategia mixta para el jugador I.* □

Ejemplo 2.3.1

Sea A una matriz de juego representada por $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

El primer paso es verificar si existe o no un punto silla de estrategias puras. Se tiene que:

$$v^- = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij} = -1 \quad y \quad v^+ = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij} = 3$$

Como $v^+ \neq v^-$, se debe encontrar una estrategia óptima para el jugador I mientras el jugador II utiliza una estrategia j, entonces, I tendrá un vector de estrategias mixtas denotado por $X = (x, 1-x)$ y un valor de juego $v_m(A) = v$. Entonces:

$$v \leq \mathrm{E}(X,1) = XA_1 = (x, 1-x)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } v \leq \mathrm{E}(X,2) = XA_2 = (x, 1-x)\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$v \leq 4x - 1 \; y \; v \leq -10x + 9.$$

Volvemos las inecuaciones igualdades y resolviendo para v y para x se obtiene:

$$x = \frac{10}{14} \text{ y } v_m(A) = \frac{26}{14}.$$

Similarmente, para encontrar una estrategia óptima para el jugador II mientras I utiliza una estrategia i, suponemos que utilizará un vector de estrategias mixtas denotado por $Y = (y, 1 - y)$ y un valor de juego $v_m(A) = v$. Entonces:

$$v \geq \mathrm{E}(1, Y) = {}_1A\, Y^T = (3, -1)\begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} \text{ y } v \geq \mathrm{E}(2, Y) = {}_2A\, Y^T = (-1{,}9)\begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix},$$

$$v \geq 4y - 1 \text{ y } v \geq -10y + 9.$$

Y resolviendo para v y para y se obtiene:

$$y = \frac{10}{14} \text{ y } v_m(A) = \frac{26}{14}.$$

Entonces, $X^* = \left(\frac{10}{14}, \frac{4}{14}\right)$ es una estrategia óptima para I y $Y^* = \left(\frac{10}{14}, \frac{4}{14}\right)$ es una estrategia óptima para II, ambos con un valor de juego $v_m(A) = \frac{26}{14}$.

Lema 2.3.1 Si X es una estrategia mixta para el jugador I y existe un número $v_m(A)$ tal que $\mathrm{E}(X, j) \geq v_m(A)$ para cada j, entonces para cualquier estrategia Y, $\mathrm{E}(X, Y) \geq v_m(A)$.

Lo anterior nos indica básicamente que si la estrategia X que eligió el jugador I, es una buena estrategia aun cuando el jugador II utilizó cualquier otra estrategia pura, entonces, seguirá siendo una buena estrategia para el jugador I y viceversa.

Ejemplo 2.3.2

Continuando con el ejemplo 2.3.1, se verifica el Lema anterior.

Para el jugador 1:

$$\mathrm{E}(X, j) \geq \frac{26}{14} \text{ y } \mathrm{E}(X, Y) = X\, A\, Y^T = \left(\frac{10}{14}, \frac{4}{14}\right)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{10}{14} \\ \frac{4}{14} \end{pmatrix} = \frac{26}{14}.$$

Para el jugador 2:

$$\mathrm{E}(i, Y) \leq \frac{26}{14} \text{ y } \mathrm{E}(X, Y) = X\, A\, Y^T = (\frac{10}{14}, \frac{4}{14}) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{14} \\ \frac{4}{14} \end{pmatrix} = \frac{26}{14}.$$

Como podemos observar, existe un valor de juego $v_m(A) = \frac{26}{14}$, de tal manera que el jugador I obtendrá un pago esperado mayor o igual a $\frac{26}{14}$ suponiendo que él juega de la mejor manera posible sin importar que estrategia utilice el jugador II. De manera similar, el jugador II obtendrá un pago esperado menor o igual a $\frac{26}{14}$, suponiendo que él juega de la mejor manera posible sin importar que estrategia utilice el jugador I.

Observación 2.3.1

Los supuestos de existencia de un valor mínimo y un máximo son justificables ya que en:

$$v_m{}^+(A) = \max_{i=1,\ldots,n} X\, A\, Y^T \leq \max_{i=1,\ldots,n} X\, A\, Y^{*T},$$

$$v_m{}^-(A) = \min_{j=1,\ldots,m} X^*\, A\, Y^T \geq \min_{j=1,\ldots,m} X\, A\, Y^T.$$

Las expresiones que se muestran arriba, se desarrollan de manera lineal y por lo tanto de manera continua, además los valores sobre los cuales se trata de encontrar un valor optimo, ya sea X^* o Y^*, son conjuntos cerrados y acotados.

Teorema 2.3.2 En cualquier matriz de juego ($\mathrm{A}_{\mathrm{nxm}}$), a cualquiera de los jugadores se les permite usar estrategias mixtas que cumplan con las siguientes propiedades:

1. El valor de juego para cada jugador es único
2. Existe al menos una estrategia pura para cada jugador
3. El valor de juego para cada jugador de estrategias puras y mixtas satisfacen:

$$v^-(A) \leq v_m{}^-(A) \leq v_m{}^+(A) \leq v^+(A) \qquad (1)$$

Demostración

Para 1. La unicidad de $v_m{}^-$ deriva directamente de su definición:

$$v_m{}^- = \max_{i=1,\ldots,n} \min_{j=1,\ldots,m} X\, A\, Y^T = \max_{i=1,\ldots,n} \min_{j=1,\ldots,m} a_{ij},$$

$$v_m{}^+ = \min_{j=1,\ldots,m} \max_{i=1,\ldots,n} X\, A\, Y^T = \min_{j=1,\ldots,m} \max_{i=1,\ldots,n} a_{ij}.$$

Por tanto, son únicos. □

Para 2. La cantidad $min_{j=1,\dots,m} X\,A\,Y^T$ *es una función continua de* y *en* Y. *Pero* Y *es vector con valores finitos y el mínimo de esa función se alcanza en* Y, *demostrando que existe una estrategia segura para el jugador I. Para el jugador II se comprueba análogamente.* □

Para 3. El valor de juego se deduce al razonar que el máximo valor que se puede perder en un juego no puede ser menor que lo mínimo que se puede ganar en un juego. Las desigualdades se siguen, ya que el valor más bajo y el valor más alto de juego de estrategias puras están incluidas en el espacio de estrategias mixtas, lo que denota que en una matriz de juego A, *el valor más bajo y el valor más alto de estrategias mixtas se denota como:*

$$v_m{}^{-}(A) = max_{i=1,\dots,n}\, min_{j=1,\dots,m}\, X\,A\,Y^T \tag{2}$$

$$v_m{}^{+}(A) = min_{j=1,\dots,m}\, max_{i=1,\dots,n}\, X\,A\,Y^T \tag{3}$$

Y además sabiendo por una de las definiciones más importantes de la Teoría de Juegos de suma cero es que el valor más bajo y más alto de juego son iguales $v^- = v^+$. □

Lema 2.3.2 Dada una matriz de juego (A_{nxm}), ocurre que:

i) Exista un vector $Y \epsilon R^m \leq 0$ tal que $AY^T \leq 0$

ii) Exista un vector $X \epsilon R^n \geq 0$ tal que $XA \geq 0$

Teorema 2.3.3 (Teorema Minimax de von Neumann)

Dada una matriz de juego $(A_{nxm}) = a_{ij}$ existen vectores de probabilidad de estrategias $X \in R^n$ y $Y \in R^m$, en promedio, después de jugar repetidamente, los niveles más bajo y más alto de juego coinciden, es decir:

$$v^- = \max_{x\epsilon X} \min_{y\epsilon Y} X\,A\,Y^T = \min_{y\epsilon Y} \max_{x\epsilon X} X\,A\,Y^T = v^+$$

Demostración.

Aplicando la alternativa i) del Lema 2.3.2, dada una matriz de juego A, al menos una de las desigualdades siguientes se cumple:

$$i)\ v^- \geq 0$$

$$ii)\ v^+ \leq 0$$

Asumiendo que la primera alternativa del Lema 2.3.2 es válida, entonces existe otro vector por ejemplo y° *en el vector* Y *tal que* $AY^T \leq 0$ *lo cual equivale a* $X\,A\,Y^T \leq 0$ *para toda x en vector* X. *Esto equivale a decir que* $max_x\,X\,A\,Y^T \leq 0$. *Lo cual implica por (2) en el Teorema 2.3.2 que* $v_m{}^+ = \ min_y\, max_x\, X\,A\,Y^T \ \leq 0.$

Ahora, Tomando la alternativa ii) del Lema 2.3.2, supongamos que existe otro vector por ejemplo x° *en el vector* X *tal que* $XA \geq 0$ *lo cual equivale a* $X\,A\,Y^T \geq 0$ *para toda y en vector* Y. *Esto equivale a decir que* $min_y\,X\,A\,Y^T \geq 0$. *Lo cual implica por (3) en el Teorema 2.3.2 que* $v_m{}^- \ = \ max_x\, min_y\, X\,A\,Y^T \geq 0.$

Así, bajo la alternativa i) del Lema 2.3.2, la desigualdad se mantiene y bajo la alternativa ii) del Lema 2.3.2, la segunda desigualdad se satisface.

Ahora, considere una nueva matriz B_{nxm}, *tal que* $B = b_{ij}$, *de tal manera que desplaza todas las entradas de la matriz A con una constante* $-c$ *de tal manera que:* $b_{ij} = a_{ij} - c$, *lo que afecta a ambas desigualdades de* $v_m{}^-$ *y* $v_m{}^+$, *siendo ahora:*

$$v_m{}^-(B) = v_m{}^-(A) - c \qquad (I)$$

$$v_m{}^+(B) = v_m{}^+(A) - c \qquad (II)$$

Y como la matriz A *es arbitraria en* (I) *y* (II), *si reemplazamos* A *con* B, *para una matriz de juego A y una constante c, al menos una de estas desigualdades se cumple:*

$$v_m{}^-(A) \leq c \qquad (III)$$

$$v_m{}^+(A) \geq c \qquad (IV)$$

Ahora, para que se cumpla esta condición para algún valor c*, es necesario que* $v^{-}(A) = v^{+}(A)$*; Por contradicción, la única posibilidad es que* $v^{+}(A) = v^{-}(A) + k$ *en vista de la desigualdad media de (I) en el Teorema 2.3.2 con* $k > 0$ *y tomando* $c = v^{-}(A) + \frac{1}{2}k$*. Se deduce que ni (III) ni (IV) se cumplen, lo que concluye la demostración del Teorema.* □

2.4 Estrategias dominadas

Normalmente trabajar con matrices pequeñas es mejor y menos tardado que con matrices muy grandes. En particular, se puede reducir el tamaño de una matriz de juego (A_{nxm}), eliminando filas o columnas que quizá nunca se utilicen porque en el caso de cada jugador, siempre habrá alguna estrategia mejor que utilizar, a esto se le conoce como **eliminación por dominancia**.

Así que antes de comenzar a resolver un juego de suma cero, primero debemos verificar si se puede reducir la matriz (A_{nxm}) a una de tamaño $(A_{2x2}), (A_{2xm})$ o (A_{nx2}). Para poder utilizar el método de eliminación por dominancia se deben cumplir alguna o todas las condiciones de la siguiente definición. Recordemos que las estrategias para el jugador I se representan por las filas y las estrategias del jugador II se representan por las columnas de la matriz de juego (A_{nxm}).

Definición 2.4.1 Si una fila i domina a una fila k, entonces podemos remover la fila k para $i, k = 1,2, \dots, n$. Si una columna j domina a una columna k podemos remover la columna k, para $j, k = 1,2, \dots, m$. Si una fila i o una columna j son redundantes, podemos eliminarlas y así reducir el tamaño de la matriz.

Formalmente, el proceso de reducir el tamaño de una matriz de juego se realiza mediante la **combinación convexa** de filas o columnas.

Definición 2.4.2 Si una fila k es dominada por una combinación convexa de otras dos filas p y q, se puede eliminar k si se cumple lo siguiente:

$$a_{kj} \leq \lambda a_{pj} + (1-\lambda) a_{qj} \qquad para\ j = 1,2, \dots, m\ y\ \lambda \epsilon (0,1).$$

Si una columna k es dominada por una combinación convexa de otras dos columnas p y q, se puede eliminar k si se cumple lo siguiente:

$$a_{ik} \geq \lambda a_{ip} + (1-\lambda) a_{iq} \qquad para\ i = 1,2,\ldots,n\ y\ \lambda \epsilon (0,1).$$

Al aplicar el concepto de estrategias mixtas podemos apoyarnos utilizando un gráfico; este gráfico puede incluso revelarnos conceptos acerca de cómo mira cada jugador sus jugadas.

En general se pueden eliminar filas o columnas que gráficamente no se intersecten en un punto óptimo al que llamamos valor de juego; a menudo se cumple, pero no siempre es cierto. Por eso es más recomendable realizar el análisis matemático además de apoyarnos del gráfico, veamos los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.4.2 Sea A una matriz de juego representada por $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

Se calcula el valor más bajo de juego (v^-) y el valor más alto de juego (v^+). En efecto, se tiene que $v^- = -5\ y\ v^+ = 2$, así que no existe un punto silla de estrategias puras. Ahora, procedemos a hacer su análisis gráfico para el jugador II como se muestra en la Figura 9.

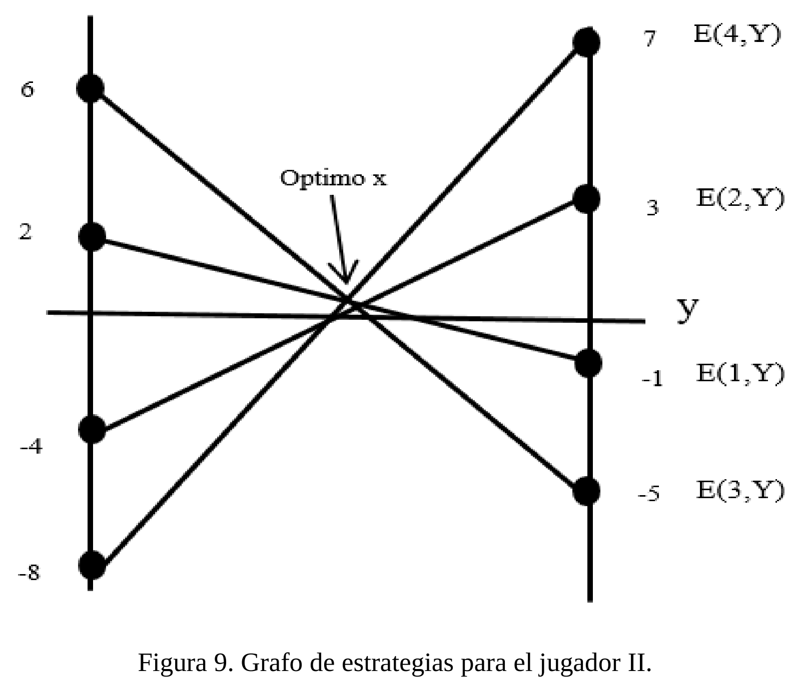


Figura 9. Grafo de estrategias para el jugador II.

Ahora, mediante el método gráfico se quiere visualizar las estrategias que tiene el jugador II con respecto al otro jugador (jugador I). Se trazan dos ejes paralelos a una distancia no tan pequeña. Cada uno de los ejes trazados ahora representará las estrategias del jugador I.

Localizamos dentro de la matriz cada una de las *n* estrategias del jugador I que, para el ejemplo dado son 4, definidas por (-1, 2), (3, -4), (-5, 6) y (7, -8). Finalmente se trazan las rectas formadas por la unión de los puntos dados.

Como el jugador II busca minimizar su posible pérdida, la zona factible de soluciones está en la parte inferior de las líneas trazadas y su solución óptima es el vértice máximo.

En ocasiones, los gráficos suelen ser complicados de analizar a simple vista. Sabemos que el punto óptimo se encuentra en el vértice máximo de las rectas formadas por las estrategias, pero no queda suficientemente claro, además, a simple vista no podemos descartar alguna estrategia que no se llegará a usar en el juego. Entonces para resolver este juego, se reducirá el tamaño de la matriz A por medio de estrategias dominadas.

Primero se tomará la fila 2 y se verificará si es una combinación convexa de las filas 4 y 1:

$$3 \leq 7\lambda - (1-\lambda) \quad y \; -4 \leq -8\lambda + 2(1-\lambda).$$

Resolviendo para λ, encontramos un intervalo donde se encuentra con $\frac{1}{3} \leq \lambda \leq \frac{3}{5}$, por tanto, podemos eliminar la fila 2 obteniendo la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

Se tomará la fila 2 de la nueva matriz y se verificará si es una combinación convexa de las filas 3 y 1:

$$-5 \leq 7\lambda - (1-\lambda) \quad y \; 6 \leq -8\lambda + 2(1-\lambda).$$

Resolviendo para λ, encontramos un intervalo donde se encuentra con $\frac{4}{10} \leq \lambda \leq \frac{4}{8}$, por tanto, podemos eliminar la fila 2 obteniendo la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

Y resolvemos para el jugador I, con un vector de estrategias mixtas denotado por $X = (x, 1-x)$ y un valor de juego $v_m(A) = v$. Entonces:

$$v \leq \mathrm{E}(X,1) = XA_1 \; = \; -x + 7(1-x) \text{ y } v \leq \mathrm{E}(X,2) = XA_2 \; = \; 2x - 8(1-x).$$

Volvemos las inecuaciones igualdades y resolviendo para v y para x se obtiene:

$$x = \frac{5}{6} \;\; y \;\; v_m(A) = \frac{1}{3}.$$

Similarmente, resolvemos para el jugador II con un vector de estrategias mixtas denotado por $Y = (y, 1-y)$ y un valor de juego $v_m(A) = v$. Entonces:

$$v \geq \mathrm{E}(1,Y) = \; {}_1A\,Y^T \; = -y + 2(1-y) \;\; \text{y} \;\; v \geq \mathrm{E}(2,Y) = \; {}_2A\,Y^T \; = \; 7y - 8(1-y).$$

Volvemos las inecuaciones igualdades y resolviendo para v y para y se obtiene:

$$y = \frac{5}{9} \;\; y \;\; v_m(A) = \frac{1}{3}.$$

Entonces, $X^* = \left(\frac{5}{6}, 0,0, \frac{1}{6}\right)$ es una estrategia óptima para I en el juego original y $Y^* = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$ es una estrategia óptima para II, ambos con un valor de juego $v_m(A) = \frac{1}{3}$.

Podemos verificar que en realidad se encontró la mejor estrategia para ambos jugadores si se cumple: $E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) = v_m(A) \leq E(X^*, Y)$. Calculando:

$$E(X^*, Y) = X^* A_j = \left(\frac{5}{6}, 0,0, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$E(X, Y^*) = \;\; {}_iA\,Y^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se puede verificar que al realizar el producto matricial de $E(X^*, Y)$ y de $E(X, Y^*)$, ambos obtienen un valor de juego $v_m(A) = \frac{1}{3}$, por tanto, se obtuvo una estrategia óptima para ambos jugadores.

2.5 La mejor estrategia de respuesta

Supongamos que el jugador I sabe o supone que el jugador II usará una estrategia pura Y, en ese caso, el jugador I debe jugar una estrategia mixta X para que maximice su pago esperado $E(X,Y)$. A este concepto se le conoce como la **mejor estrategia de respuesta** de I ante el jugador II.

Definición 2.5.1 Una estrategia mixta X^* para el jugador I es la mejor estrategia de respuesta ante la estrategia Y del jugador II si satisface:

$$\max_{X \in S_n} E(X,Y) = E(X^*,Y).$$

De igual forma, una estrategia mixta Y^* para el jugador II es la mejor estrategia de respuesta ante la estrategia X del jugador I si satisface:

$$\min_{Y \in S_m} E(X,Y) = E(X,Y^*).$$

Es decir, si la estrategia X^* y la estrategia Y^* son un punto silla en el juego es decir, $v_m(A) = E(X^*,Y^*)$ entonces son la mejor estrategia de respuesta.

En general, si la estrategia Y es conocida entonces:

$$\max_{X \in S_n} E(X,Y) = \max_{1 \le i \le n} E(i,Y).$$

Si la estrategia X es conocida entonces:

$$\min_{Y \in S_m} E(X,Y) = \min_{1 \le j \le m} E(X,j).$$

Ejemplo 2.5.1

Consideremos una matriz de juego $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Además, si se resuelve mediante estrategias mixtas y eliminación por dominancia obtenemos que existe un punto silla de estrategias en $X^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = Y^*$ y además un valor de juego $v_m(A) = 1$. Ahora, suponga que el jugador II por alguna razón piensa que la mejor estrategia que puede usar es $Y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ¿Cuál es la mejor estrategia de respuesta para el jugador I?

Entonces, para encontrar una estrategia óptima para el jugador I mientras el jugador II utiliza la estrategia Y, I tendrá que utilizar un vector de estrategias mixtas denotado por:

$$X = (x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2).$$

Calculando: $\max_{X \in S_n} E(X, Y) = \max_{1 \leq i \leq n} E(i, Y) = X\,A\,Y^T = -\frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{2} + \frac{5}{4}$.

Pero, lo que queremos es tomar la estrategia que maximice, así que para obtener el máximo valor objetivo de esa función resultante en términos de x_1 y x_2, de acuerdo a la noción de optimización, se debe de tomar a cada valor x_i de la función resultante e igualarlos a 0. Este paso permite obtener el valor máximo de la función que es $\frac{5}{4}$ y representa el valor del juego.

Por otro lado al hacer $x_1 = x_2 = 0$, sustituyendo los valores en el vector de estrategias mixtas se obtiene $X = (x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) = (0,0,1)$.

Entonces, la mejor estrategia de respuesta para el jugador I cuando en jugador II usa $Y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, es $X^* = (0,0,1)$. Además, el pago esperado para el jugador I después de maximizar la función es $E(X^*, Y) = \frac{5}{4}$.

En otras palabras, en un juego con dos jugadores, si se conoce una estrategia para algún jugador, existirán expectativas bajo las cuales se puede actuar con una mejor respuesta. La correspondencia de mejor respuesta es, como su nombre lo indica, una regla que asocia un perfil de estrategias mixtas X a un perfil de estrategias Y o viceversa.

Hay que tomar en cuenta que no siempre se cuenta con un solo perfil de posibles estrategias, sino que pueden existir varias, la cuestión es ¿Cuál de ellas se tomará?, la que maximice el beneficio.

CAPÍTULO 3. JUEGOS COOPERATIVOS

3.1 Introducción

En esta parte se estudiará cómo hacer una distribución de pagos entre los jugadores que forman una coalición y han obtenido una ganancia jugando de manera cooperativa. En particular se estudiarán tres conceptos muy importantes; **el Core**, **el Nucleolus** y **el Valor de Shapley** [7].

El Core es un concepto de solución de tipo conjunto, es decir, limita a un conjunto de posibles valores exigiéndole cumplir ciertas propiedades. El Core es un conjunto de distribuciones de pagos que ofrece a cada coalición un beneficio mayor o igual que el que esta coalición puede conseguir por sí misma. Por tanto, lo convierte en un reparto de pagos que satisface a todos los jugadores y a todas las posibles coaliciones. Esta idea fue introducida por Gillies (1953); por otro lado, puede darse el caso de que en un juego el Core sea vacío, por lo tanto, no se podría obtener un vector de pagos con el que todos los jugadores se viesen beneficiados, lo que puede causar descontentos o inconformidades entre ellos.

El concepto de Nucleolus fue introducido por Schneider (1969) y lo que busca es minimizar esos descontentos generados en todas las coaliciones, es decir, lo que se busca es un reparto socialmente más justo en el sentido de que la coalición que resulte más desfavorecida en el reparto de los beneficios, esté lo menos perjudicada posible.

Más adelante surgió el concepto del Valor de Shapley. Fue nombrado en honor de Lloyd Shapley (1967); este método de distribución, asigna un reparto único del beneficio total generado por la coalición a todos los jugadores. La importancia de este concepto es su conFiguración. Imaginemos una coalición de jugadores que coopera y obtiene una cierta ganancia general de la cooperación. Dado que algunos jugadores pueden contribuir más a la coalición que otros, ¿Qué importancia tiene cada jugador para la cooperación y qué recompensa puede esperar de élla? El Valor de Shapley ofrece una posible respuesta a esta pregunta mediante la aplicación de ciertos axiomas como se mostrará más adelante, donde la repartición de los beneficios siempre existe y es óptima.

3.2 Juegos cooperativos

Comenzaremos por definir **un juego en forma coalicional** o también llamado en forma de función característica con utilidades transferibles, éste consiste de:

1. Un conjunto finito de jugadores denotado por $\boldsymbol{J} = \{1,2, \ldots, n\}$.
2. Subconjuntos $\boldsymbol{S}$ de J.
3. Una función característica que asocie a cada subconjunto un número real o valor de la coalición $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$, siendo $v(\emptyset) = 0$.

Así, $G = (J, v)$ es un juego en forma coalicional en forma de función característica con utilidades transferibles con J y $v(S)$ especificados.

Si el beneficio que obtiene un jugador estando en una coalición S es menor o igual al beneficio que obtendría al unirse con otra coalición T; es decir con $S \cap T \neq \emptyset$ con T, $S \subseteq J$, entonces ocurre que $v(S) \leq v(T)$ y a esto se le conoce como un **juego cooperativo monótono**.

Si se tiene un juego en forma coalicional donde ocurre que la suma de los beneficios al jugar dos coaliciones S y T por separado es menor que el pago que obtendrian si se unieran para trabajar en conjunto, es decir $S \cap T = \emptyset$ con $T, S \subseteq J$, entonces $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$; a esto se le llama **juego cooperativo superaditivo.**

Pero generalizando aún más el concepto anterior, si se tienen dos coaliciones con una intersección no necesariamente vacía y se unen, entonces, la suma de los beneficios de la unión e intersección es al menos igual que la suma de los beneficios de las coaliciones que se unieron, es decir, si T, $S \subseteq J$ y ocurre que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ a esto se le conoce como un juego **convexo**. Si ocurre lo contrario en la desigualdad, entonces, el juego es **cóncavo**.

Ejemplo 3.2.1

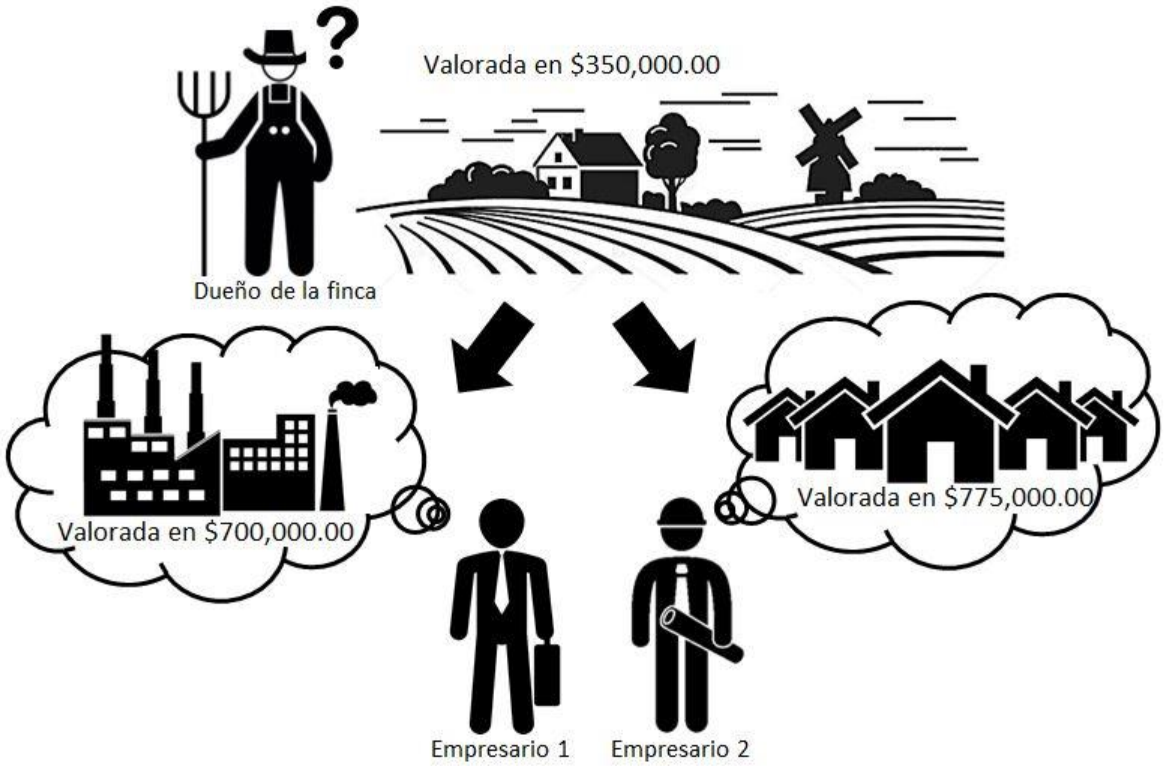


Figura 10. Representación del juego en forma estratégica para los tres jugadores.

Una finca está valorada por su actual propietario en $350,000.00. Un empresario ofrece acondicionarla como un polígono industrial con lo que su valor de mercado podría alcanzar los $700,000.00. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para subdividirla y destinarla a viviendas, con esta urbanización el valor de la finca sería de $775,000.00.

Iniciamos representando el juego de manera coalicional $G = (J, v)$.

Sea $J = \{1,2,3\}$, en donde 1 representa al empresario que ofrece adecuar la finca como polígono industrial, 2 representa a la empresa constructora y 3 representa al actual propietario de la finca.

Notemos que, tanto el jugador 1 como el 2 necesitan llegar a un acuerdo con el jugador 3 para utilizar la finca. Sin la participación del jugador 3 no podrían hacer nada, por tanto:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 0$$

Por otro lado, Si el jugador 3 no coopera con ninguno de los otros dos jugadores, la finca se mantiene con un valor de $350,000.00, lo que es: $v(\{3\})$ = 350,000.

Si el jugador 3 llega a un acuerdo con el jugador 1, entre los dos obtendrían $700,000.00, lo que es: $v(\{1,3\})$ = 700,000.

Si el jugador 3 solo llega a un acuerdo con el jugador 2, entre los dos obtendrían $775,000.00, lo que es: $v(\{2,3\})$ = 775,000.

Si cooperaran los tres jugadores y realizaran conjuntamente el proyecto que les brindara mayor beneficio, entonces entre los tres obtendrían: $v(\{1,2,3\})$ = 775,000.

Y la representación en forma coalicional del juego se vería como:

$$J = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0, v(\{3\}) = 350{,}000,\ v(\{1,3\}) = 700{,}000,$$
$$v(\{2,3\}) = 775{,}000,\ v(\{1,2,3\}) = 775{,}000$$

En donde los valores están expresados en pesos.

Podemos verificar que todas las inecuaciones formadas por la combinación de las coaliciones cumplen que este juego es monótono:

$$v(\{1\}) \leq\ v(\{1,2\}),\quad v(\{1\}) \leq\ v(\{1,3\}),\quad v(\{1\}) \leq\ v(\{1,2,3\}),$$

$$v(\{2\}) \leq\ v(\{1,2\}),\quad v(\{2\}) \leq\ v(\{2,3\}),\quad v(\{2\}) \leq\ v(\{1,2,3\}),$$

$$v(\{3\}) \leq\ v(\{1,3\}),\quad v(\{3\}) \leq\ v(\{2,3\}),\quad v(\{3\}) \leq\ v(\{1,2,3\}).$$

Superaditivo y convexo:

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) \leq\ v(\{1,2\}),\quad v(\{1\}) + v(\{3\}) \leq\ v(\{1,3\}),$$

$$v(\{2\}) + v(\{3\}) \leq\ v(\{2,3\}),\quad v(\{1\}) + v(\{2,3\}) \leq\ v(\{1,2,3\}),$$

$$v(\{2\}) + v(\{1,3\}) \leq\ v(\{1,2,3\}),\quad v(\{3\}) + v(\{1,2\}) \leq\ v(\{1,2,3\}).$$

Ejemplo 3.2.2

Consideremos tres empresas que producen un mismo bien. Dadas las tecnologías aplicadas por cada empresa, la empresa 1 puede producir 0, 8 o 16 unidades al coste unitario de \$2.00, la empresa 2 puede producir 0, 4 o 12 unidades al coste unitario de \$2.00 y la empresa 3 puede producir 0, 8 o 12 unidades al coste unitario de \$2.00. La función de demanda del bien es conocida por las tres empresas y tiene la siguiente forma:

$$p(x) = 35 - 0.75x.$$

En donde x representa la cantidad total de producto en el mercado. Representemos el juego de forma coalicional $G = (J, v)$.

Sea $J = \{1,2,3\}$, en donde 1 representa la empresa 1, 2 representa a la empresa 2 y 3 representa la empresa 3.

Ahora $S_1 = \{0,8,16\}$, $S_2 = \{0,4,12\}$ y $S_3 = \{0,8,12\}$ son los respectivos subconjuntos de las estrategias para las empresas jugadoras.

La cantidad total de producto que llega al mercado es $x = x_1 + x_2 + x_3$ y el pago que obtiene cada empresa i está determinado por la función de beneficio definida por:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = p(x)x_i - 2x_i \text{ para } i = 1,2,3.$$

La representación del juego en forma estratégica para cada jugador se ve en la Figura 11.

Cuando la Empresa 3 utiliza la estrategia 0				
		Empresa 2		
Empresa 1		0	4	12
	0	0,0,0	0,120,0	0,288,0
	8	216,0,0	192,96,0	144,216,0
	16	336,0,0	288,72,0	192,144,0
Cuando la Empresa 3 utiliza la estrategia 8				
		Empresa 2		
Empresa 1		0	4	12
	0	0,0,216	0,96,192	0,216,144
	8	168,0,168	144,72,144	96,144,96
	16	240,0,120	192,48,96	96,72,48
Cuando la Empresa 3 utiliza la estrategia 12				
		Empresa 2		
Empresa 1		0	4	12
	0	0,0,288	0,84,252	0,180,180
	8	144,0,216	120,60,180	72,108,108
	16	192,0,144	144,36,108	48,36,36

Figura 11. Representación del juego en forma estratégica para los tres jugadores.

Ahora se calculará el valor de cada coalición $v(S)$.

Empezando por la empresa 1: Si elige la estrategia 0, no importa que jueguen las demás empresas, su pago será de 0. Si elige la estrategia 8, puede obtener alguna de las siguientes cantidades dependiendo de las combinaciones de estrategias de las otras dos empresas: 216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72. Entonces:

$$\min\{216, 192, 144, 168, 144, 96, 144, 120, 72\} = 72.$$

Si elige la estrategia 16 obtendrá un pago dependiendo de las combinaciones de estrategias de las otras dos empresas y calculando el mínimo se obtiene:

$$\min\ \{336, 288\ ,192, 240, 192, 96, 192, 144, 48\} = 48.$$

Por tanto, la empresa 1 debe elegir aquella estrategia que le asegure el máximo de los posibles beneficios, así el max $\{0, 72, 48\}\} = 72$. Finalmente $v(\{1\}) = 72$.

Para la empresa 2 y para la empresa 3 los cálculos se realizan de manera análoga obteniendo $v(\{2\}) = 36$ y $v(\{3\}) = 48$ respectivamente. Ahora, para la coalición $\{1,2\}$, se obtendría un pago resultante del pago de la suma de ambas empresas. Y de igual manera, lo que busca la coalición es asegurar un beneficio máximo así que: $\max\ \{0, 84, 180, 144, 180, 180, 192, 180, 84\} = 192$ y $v(\{1,2\}) = 192$ como se observa en la Figura 12.

x1	**x2**	**Pago para la coalición {1, 2}**
0	0	min {0, 0, 0} = 0
0	4	min {120, 96, 84} = 84
0	12	min {288, 216, 180} = 180
8	0	min {216, 168, 144} = 144
8	4	min {288, 216, 180} = 180
8	12	min {360, 240, 180} = 180
16	0	min {336, 240, 192} = 192
16	4	min {360, 240, 180} = 180
16	12	min {336, 184, 84} = 84
x1	**x2**	**Pago para la coalición {1, 3}**
0	0	min {0, 0, 0} = 0
0	8	min {216, 192, 144} = 144
0	12	min {288, 252, 180} = 180
8	0	min {216, 192, 144} = 144
8	8	min {336, 288, 192} = 192
8	12	min {360, 300, 180} = 180
16	0	min {336, 288, 192} = 192
16	8	min {360, 288, 144} = 144
16	12	min {336, 252, 84} = 84
x1	**x2**	**Pago para la coalición {2, 3}**
0	0	min {0, 0, 0} = 0
0	8	min {216, 168, 120} = 120
0	12	min {288, 216, 144} = 144
4	0	min {120, 96, 72} = 72
4	8	min {288, 216, 144} = 144
4	12	min {336, 240, 144} = 144
12	0	min {288, 216, 144} = 144
12	8	min {360, 240, 120} = 120
12	12	min {360, 216, 72} = 72

Figura 12. Representación del juego en forma estratégica para las coaliciones {1, 2}, {1, 3} y {2, 3}.

Para la coalición {1,3} y {2,3} se trabajó de manera análoga y se obtuvieron los valores $v(\{1,3\}) = 192$ y $v(\{2,3\}) = 144$ respectivamente.

Por último, se calcula el valor de la coalición formada por las 3 empresas calculando la suma de los pagos como se observa en la Figura 13.

	Cuando la Empresa 3 utiliza la estrategia 0			
	Empresa 2			
Empresa 1		0	4	12
	0	0	120	288
	8	216	288	360
	16	336	360	336
	Cuando la Empresa 3 utiliza la estrategia 8			
	Empresa 2			
Empresa 1		0	4	12
	0	216	288	360
	8	336	360	336
	16	360	336	216
	Cuando la Empresa 3 utiliza la estrategia 12			
	Empresa 2			
Empresa 1		0	4	12
	0	288	336	360
	8	360	360	288
	16	336	288	120

Figura 13. Representación del juego en forma estratégica para la coalición {1, 2, 3}.

Y como se quiere maximizar el beneficio se obtiene:

$$\max \left\{ \begin{matrix} 0, 120, 288, 216, 288, 360, 336, 360, 336, \\ 216, 288, 360, 336, 360, 336, 360, 336, 216, \\ 288, 336, 360, 360, 360, 288, 336, 288, 120 \end{matrix} \right\} = 360. \text{ Con } v(\{1,2,3\}) = 360.$$

Por tanto, la representación del juego de manera coalicional es:

$$G = (J, v), \qquad J = \{1,2,3\},$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 72, v(\{2\}) = 36, v(\{1,2\}) = 192, v(\{3\}) = 48, v(\{1,3\}) = 192,$$
$$v(\{2,3\}) = 144, v(\{1,2,3\}) = 360.$$

De igual manera, este juego es monótono, superaditivo y convexo.

Definición 3.2.1 Un juego de manera coalicional se dice que es **0-normalizado** si cumple $v(\{i\}) = 0,$ para todo $i \in J$. Si no es normalizado, para obtener la 0-normalización de un juego se debe definir la función característica:

$$v_0(s) = v(s) - \sum_{i \in S} v(\{i\}) \text{ , para toda } S \subseteq J.$$

Definición 3.2.2 Un juego de manera coalicional se dice que es **(0,1)-normalizado** si cumple que $v(\{i\}) = 0,$ para toda $i \in J$ y además $v(J) = 1.$

Ejemplo 3.2.3 Si analizamos el juego del **Ejemplo 3.2.1**, resulta que no es 0-normalizado ya que $v(\{3\}) = 350{,}000$. Por consiguiente, tampoco es un juego (0,1)-normalizado.

Para 0-normalización tenemos que:

$$v_0(s) = v(s) - \sum_{i \in S} v(\{i\})$$

Por ejemplo, para $v_0(3) = v(3) - v(3) = 350{,}000 - 350{,}000 = 0$, y haciendo este proceso para todas las coaliciones, el juego normalizado queda de la siguiente manera:

$$J = \{1,2,3\}$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{1,3\}) = 350{,}000,$$
$$v(\{2,3\}) = 425{,}000, v(\{1,2,3\}) = 425{,}000.$$

3.3 Conjunto de imputaciones

Ahora, ya sabemos que $G = (J, v)$ es un juego en su forma coalicional o de función característica en donde $J = \{1,2, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores que deciden trabajar conjuntamente para ganar el mayor beneficio. Pero el problema se presenta al no saber cómo repartir el valor $v(J)$ entre todos los jugadores.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ **un vector de distribución** de pagos, en donde para cada jugador x_i representa el pago que recibe el jugador i. Para cualquier coalición se utiliza la siguiente notación: $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ y $x(J) = \sum_i x_i$. Además es claro que $v(\emptyset) = 0$.

Definición 3.3.1 Un **conjunto de pre-imputaciones** de un juego G, es un conjunto de vectores de pagos definidos como:

$$PI(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \colon x(J) = v(J)\}.$$

Lo anterior nos dice que los vectores de pagos que pertenecen a un conjunto de pre-imputaciones de un juego son tales que la suma del beneficio de cada jugador o coalición es igual al de la coalición total, a esto se le conoce como el **principio de eficiencia.**

Resulta natural, puesto que ningún jugador aceptaría una ganancia más baja en una coalición de lo que podría haber ganado si jugaba solo, por tanto, se genera la siguiente definición.

Definición 3.3.2 Un **conjunto de imputaciones** de un juego G, es un conjunto de vectores de pagos definidos como:

$$I(J, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(J, v) \colon x_i \geq v(\{i\}), \text{ para cada } i = 1,2, \dots, n\}.$$

A la condición anterior se le conoce como el **principio de racionalidad individual**.

Ejemplo 3.3.3 Considere un juego con tres jugadores de manera coalicional tal que:

$$G = (J, v), \qquad J = \{1,2,3\},$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 2,\ v(\{2\}) = 0, v(\{1,2\}) = 3, v(\{3\}) = 1,\ v(\{1,3\}) = 3\ v(\{2,3\}) = 2,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 5.$$

En este caso, si calculamos $I(J, v)$

$$I(J, v) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \colon x_i \geq v(\{i\}), \text{ para } i = 1,2,3\}.$$

Por definición, $x(S) = x_1 + x_2 + x_3 = 5, x_1 \geq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1.$

Para representar el conjunto, se grafica la intersección del plano donde $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. Después se añaden las restricciones $x_1 \geq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1$, como se observa en la Figura 14.

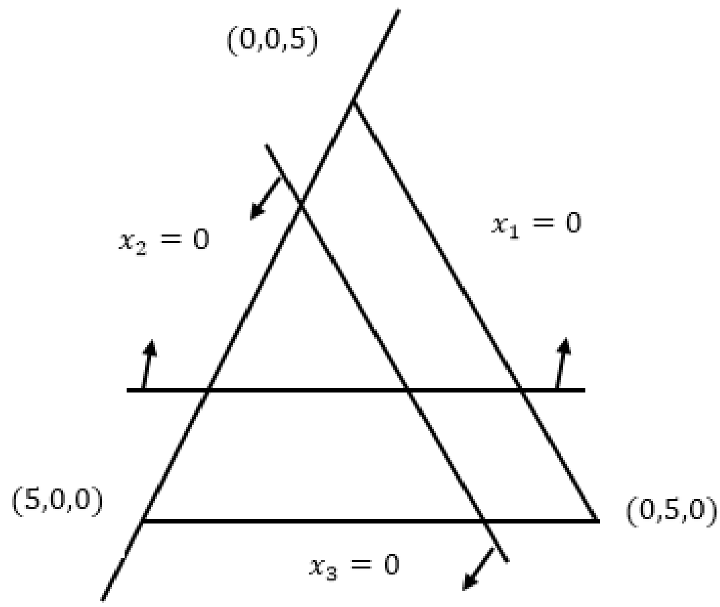


Figura 14. Conjunto de imputaciones del juego.

Finalmente, la Figura que representa $I(J, v)$ queda representada en la Figura 15.

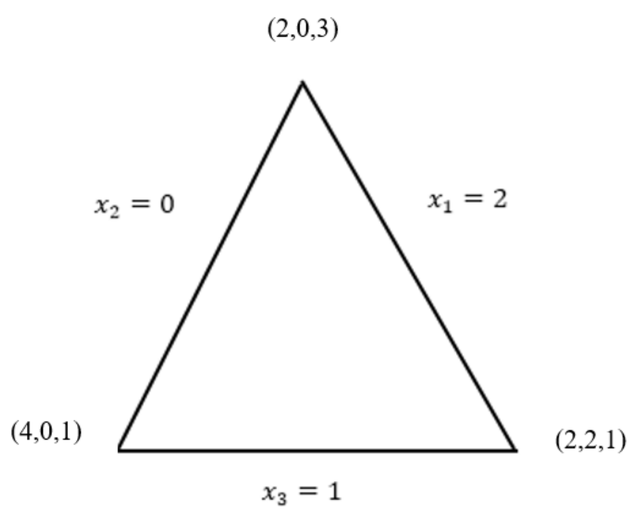


Figura 15. Conjunto de imputaciones del juego añadidas las restricciones.

Hay una proposición importante que da una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de imputaciones de un juego no sea vacío y se presenta a continuación.

Proposición 3.3.1 Sea $G = (J, v)$ un juego en su forma característica.

$$I(J, v) \neq \emptyset \leftrightarrow \sum_{i \in J} v(\{i\}) \leq v(J)$$

El juego que cumple esta condición se le conoce como **esencial**.

Demostración.

$\rightarrow$) *Suponga que* $I(J, v) \neq \emptyset$, *entonces, existe* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I(J, v)$. *Por tanto se cumple que* $\sum_i x_i = v(J)$. *Ahora, se debe verificar que* $\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq v(J)$.

Por ser $x_i \geq v(\{i\})$, *esto implica que* $\sum_i x_i \geq \sum_{i \in S} v(\{i\})$, *por tanto:*

$\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq \sum_i x_i = v(J)$.

$\leftarrow$) *Supongamos que* $\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq v(J)$. *Verifiquemos que* $I(J, v) \neq \emptyset$. *Es suficiente que consideremos un vector de pagos* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, *con* $x_i = v(\{i\})$, *para toda* $i = 1, 2, \dots, n - 1$ *y:*

$x_n = v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\})$. *Como por hipótesis* $\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq v(J)$, *se verifica que:*

$$v(\{n\}) \leq v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = x_n$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n = \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) + v(J) - \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) = v(J)$$

Se trata de una imputación y por lo tanto $I(J, v) \neq \emptyset$. □

3.4 El Core

El Core es un subconjunto de imputaciones que constituyen un acuerdo estable; en efecto, esto se refiere a que ningún jugador podrá conseguir por sí mismo más de lo que cualquiera de sus acuerdos le permite obtener.

Definición 3.4.1 El **Core** de un juego cooperativo es el siguiente conjunto de vectores de pagos:

$$C(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \colon x(J), x(S) \geq v(S), \qquad S \subseteq J$$

Además el conjunto $C(J,v)$ es cerrado, acotado y convexo [7].

Demostración

1. *Vereficaremos que el Core de un juego (J,v) es cerrado:*

$$C(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \colon x(J), x(S) \geq v(S),\ para\ todo\ S \in P(J)$$

Las condiciones que se supone deben de cumplir los vectores de pago dentro del Core (eficiencia y racionalidad) consisten en pertenecer al plano y a un conjunto finito de semiespacios cerrados. Por tanto, se trata de la intersección finita de conjuntos cerrados que es cerrado. Además, esto se verifica dado que las restricciones que definen al Core son de tipo igual que o mayor o igual que, lo que confirma que se trata de un conjunto cerrado. □

2. *Vereficaremos que el Core de un juego (J,v) es acotado:*

$C(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, *se cumple que cada* $x_i \geq v(\{i\})$ *para todo i. Además,*

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{j \neq i} x_j = v(J) - \sum_{j \neq i} x_j \leq v(J) - v(J - (\{i\}))$$

Por tanto, para cada i = 1, 2,…,n se cumple que:

$$v(\{i\}) \leq x_i \leq v(J) - v(J - (\{i\}))$$

Y por tanto, el Core está acotado. □

3. *Vereficaremos que el Core de un juego* (J, v) *es convexo:*

   Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(J, v)$ *y* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C(J, v)$, $\beta \in$ *[0,1], Se verifica que* $\beta x + (1-\beta)y \in C(J, v)$.

   Como:

$$\beta x + (1-\beta)y = \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-\beta)(y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$= (\beta x_1 + (1-\beta)y_1, \beta x_2 + (1-\beta)y_2, \dots, \beta x_n + (1-\beta)n)$$

   Ocurre que:

$$(\beta x + (1-\beta)y)(J) = \sum_{i=1}^{n}(\beta x + (1-\beta)y) = \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$=\beta v(J) + (1-\beta)v(J) = v(J)$$

   Y para cada coalición S:

$$(\beta x + (1-\beta)y)(S) = \sum_{i\in S}(\beta x + (1-\beta)y) = \beta \sum_{i\in S} x_i + (1-\beta)\sum_{i\in S} y_i$$
$$\geq \beta v(S) + (1-\beta)v(S) = v(S)$$

   Por tanto $C(J, v)$ *es convexo.* □

Ejemplo 3.4.1 Obtener el Core del **Ejemplo 3.2.1**

Si recordamos, el juego se comporta como sigue:

$$J = \{1,2,3\}$$

$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0, v(\{3\})$ = 350,000, $v(\{1,3\})$ = 700,000, $v(\{2,3\})$ = 775,000, $v(\{1,2,3\})$ = 775,000.

(Principio de eficiencia): $x(S) = x_1 + x_2 + x_3 = 775{,}000$.

(Racionalidad individual): $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 350{,}000$.

(Racionalidad para las coaliciones): $x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 700{,}000, x_2 + x_3 \geq 775{,}000$.

Es decir, los elementos del Core son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones de racionalidad para las coaliciones entre los jugadores. Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 775{,}000$ se tiene que:

$$x_1 + x_2 \geq 0 \leftrightarrow 775{,}000 - x_3 \geq 0 \leftrightarrow x_3 \leq 775{,}000,$$

$$x_1 + x_3 \geq 700{,}000 \leftrightarrow 775{,}000 - x_2 \geq 700{,}000 \leftrightarrow x_2 \leq 75{,}000,$$

$$x_2 + x_3 \geq 775{,}000 \leftrightarrow 775{,}000 - x_1 \geq 775{,}000 \leftrightarrow x_1 \leq 0.$$

Así, $C(J, v)$

$$= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 775{,}000, x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75{,}000, \ 350{,}000 \leq x_3 \leq 775{,}000\}$$

$$= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75{,}000, \ 350{,}000 \leq 775{,}000 - x_2 \leq 775{,}000, x_3 = 775{,}000 - x_2\}$$

$$= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75{,}000, 0 \leq x_2 \leq 425{,}000, x_3 = 775 - x_2\}$$

$$= \{(0, x_2, 775{,}000 - x_2) : 0 \leq x_2 \leq 75{,}000\}.$$

Las distribuciones de pagos (x_1, x_2, x_3) que cumplan el principio de eficiencia y no formen parte del Core son inaceptables para cualquier coalición que se pueda formar, ya que se consiguen resultados menos óptimos de los que obtendrían con otra distribución (x_1, x_2, x_3).

Por ejemplo, la distribución $(50{,}000\,, 75{,}000,\ 650{,}000)$ no le interesaría a la coalición $\{2{,}3\}$ ya que puede obtener por si misma $775{,}000$, que es mucho mayor a $75{,}000 + 650{,}000 = 725{,}000$, cantidad que obtiene con la distribución de pagos anterior.

Se puede dar el caso en que algún juego tenga un Core vacío, pero la siguiente definición verifica que esto no ocurra.

Definición 3.4.2 Una familia $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ de subconjuntos distintos de J, distintos entre sí y no vacíos, es equilibrada sobre J si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, denominados **pesos**, tales que para todo $j = 1, 2, \dots, m$ se cumple que $\sum_{j \in S_j} \alpha_j = 1$.

Ejemplo 3.4.2

Sea $J = \{1,2,3\}$. Veamos alguna familias equilibradas sobre J.

Sea $\beta_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. Tenemos que $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{1,3\}, S_3 = \{2,3\}$. Se trata de una familia equilibrada ya que existen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$, verificándose:

$$\text{Para } j = 1,\ \sum_{1 \in S_j} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

$$\text{Para } j = 2,\ \sum_{2 \in S_j} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_3 = 1.$$

$$\text{Para } j = 3,\ \sum_{3 \in S_j} \alpha_j = \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Definición 3.4.3 Se dice que un juego $G = (J, v)$ es equilibrado, si para cualquier familia equilibrada $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ en J, con pesos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ se verifica que:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(J).$$

En consecuencia, todo juego con un Core no vacío es un **juego equilibrado**.

Ejemplo 3.4.3 Utilizando el juego del **Ejemplo 3.2.1**

Sea $\beta_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. Tenemos que $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{1,3\}, S_3 = \{2,3\}$. Se trata de una familia equilibrada ya que existen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ y $\sum_{j \in S_j} \alpha_j = 1$.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(J) = \alpha_1 v(\{1,2\}) + \alpha_2 v(\{1,3\}) + \alpha_3 v(\{2,3\}) \leq v(J)$$

$$= \frac{1}{2}\ (0) + \frac{1}{2}\ (700{,}000) + \frac{1}{2}\ (775{,}000) \leq 775{,}000 = 737{,}500\ \leq 775{,}000$$

Lo que nos prueba que efectivamente que el juego del **Ejemplo 3.2.1** es equilibrado.

3.5 El Nucleolus

El Core, es un concepto de solución que tiene ciertas dificultades ya que en ocasiones los conjuntos pueden ser muy grandes o en otras ocasiones pueden ser vacíos. El Nucleolus, es un concepto que propone una solución que nos dice que siempre que un conjunto de imputaciones no sea vacío, las dificultades anteriormente mencionadas se superan.

Definición 3.5.1 Se tiene un juego cooperativo $G = (J, v)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$. El **exceso o queja de una coalición S** con respecto a una distribución de pagos x, es la diferencia entre el valor de la coalición S y lo que recibe dicha coalición por la distribución x. Es decir:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Esto representa una medida del **grado de insatisfacción de la coalición** S con la distribución x. Entre más grande sea $e(S, x)$, mayor es la insatisfacción.

Ejemplo 3.5.1 Sea el siguiente juego para $J = \{1,2,3\}$, con:

$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 5, v(\{2\}) = 8, v(\{1,2\}) = 15, v(\{3\}) = 4$, $v(\{1,3\}) = 20$, $v(\{2,3\}) = 15$, $v(\{1,2,3\}) = 30$.

Y se consideran los siguientes vectores de la distribución de pagos:

$$x = (10,10,10), \qquad y = (10,12,8), \qquad z = (11,8,11)$$

Para cada uno de los vectores anteriores, se verifica que la suma de sus componentes sea $v(\{1,2,3\}) = 30$. Como podemos observar en la Figura 16, se encuentran las asignaciones y los excesos de cada coalición para cada uno de los valores dados.

	$v(S)$	$x(S)$	$y(S)$	$z(S)$	$e(S,x)$	$e(S,y)$	$e(S,z)$
Ø	0	0	0	0	0	0	0
{1}	5	10	10	11	-5	-5	-6
{2}	8	10	12	8	-2	-4	0
{3}	4	10	8	11	-6	-4	-7
{1,2}	15	20	22	19	-5	-7	-4
{1,3}	20	20	18	22	0	2	-2
{2,3}	15	20	20	19	-5	-5	-4
{1,2,3}	30	30	30	30	0	0	0

Figura 16. Valores y excesos de cada coalición con los vectores dados en el ejemplo 3.4.1.

Para cada vector de distribución de pagos x, se construirá un vector de excesos denotado por $\theta(x)$, de manera que los excesos o quejas vayan ordenados del mayor al menor valor al ir cambiando coaliciones. Así para el ejemplo anterior:

$$\theta(x) = (0, 0, 0, -2, -5, -5, -5, -6),$$

$$\theta(y) = (2, 0, 0, -4, -4, -5, -5, -7),$$

$$\theta(z) = (0, 0, 0, -2, -4, -4, -6, -7),$$

Formalmente, esta idea se presenta en la siguiente definición.

Definición 3.5.2 Para cada $x \in I(J, v)$, el vector de excesos se denota por $\theta(x)$, y es tal que:

$$\theta(x) = \big(e(S, x)\big) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{2^n}(x)).$$

En donde $\theta_k(x) \geq \theta_{k+1}(x), k = 1,2, \dots, 2^n - 1$. Además de debe considerar un orden lexicográfico; esto es, si existen $x, x' \in I(J, v)$, entonces:

a) $\theta(x) <\ _L\theta(x') \leftrightarrow \theta_1(x) < \theta_1(x')$ o bien, para $j > 1, i = 1,2, \dots, j-1$
$\theta_j(x) < \theta_j(x')\ y\ \theta_i(x) = \theta_i(x')$

b) $\theta(x) =\ _L\theta(x') \leftrightarrow \theta_j(x) = \theta_j(x')$, para toda j.

c) $\theta(x) \leq\ _L\theta(x') \leftrightarrow \theta(x) <\ _L\theta(x')$ o bien $\theta(x) =\ _L\theta(x')$.

El subíndice L indica que se trata de orden lexicográfico.

Por tanto, dados dos vectores de excesos, para compararlos de acuerdo a su orden lexicográfico, se observan sólo las primeras componentes; si la primera componente de un vector, es menor que la primera componente del otro vector, el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico anteriormente definido. Si los dos vectores tienen iguales sus primeras componentes, se comparan las segundas siendo menor según el orden lexicográfico, aquel vector cuya segunda componente sea menor y si las segundas componentes son iguales se comparan las terceras y así sucesivamente.

Los excesos son normalmente no positivos y así un exceso puede considerarse como pérdidas o reclamaciones de las coaliciones. El uso del orden lexicográfico es para ordenar los vectores de exceso teniendo en cuenta la reclamación más grande, la segunda reclamación más grande etc. El hecho de que las componentes estén ordenadas de manera no decreciente y que los vectores se comparen por orden lexicográfico indica que se les da mayor importancia a los jugadores con un mayor exceso, es decir, a los jugadores con más peso (aquellos que más perderían si abandonaran la coalición S).

Ejemplo 3.5.2 Para los vectores definidos en el **Ejemplo 3.5.1** x, y, z tenemos:

$$\theta(x) = (0,0,0,-2,-5,-5,-5,-6)$$

$$\theta(y) = (2,0,0,-4,-4,-5,-5,-7)$$

$$\theta(z) = (0,0,0,-2,-4,-4,-6,-7)$$

Entonces:

a) $\theta(x) <\ _L\theta(y)$, ya que el primer componente del vector $\theta(x)$ es 0 es menor que el primer componente del vector $\theta(y)$ que es 2.

b) $\theta(z) <\ _L\theta(y)$, ya que el primer componente del vector $\theta(z)$ es 0 es menor que el primer componente del vector $\theta(y)$ que es 2.

c) $\theta(x) <\ _L\theta(z)$, ya que las primeras cuatro componentes de ambos vectores son iguales pero la quinta componente del vector $\theta(x)$ es -5 es menor que el primer componente del vector $\theta(z)$ que es -4.

   Al cumplirse las desigualdades es claro que:

$$\theta(x) \leq\ _L\theta(y), \theta(z) \leq\ _L\theta(y), \theta(x) \leq\ _L\theta(z).$$

Ahora se puede entender mejor en qué consiste el Nucleolus de un juego.

Definición 3.5.3 El **Nucleolus** de un juego (J, v), es el conjunto $N(J, v)$ definido como:

$$N(J,v) = \{x \in I(J,v) \colon \theta(x) \leq \,_L \theta(x')\}, \text{ Para todas las } x' \in I(J,v)$$

Y, además, una condición suficiente para que el Nucleolus exista y sea único es [7]:

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J)$$

Lo que nos indica esta condición es que, si se tiene un juego esencial, es decir, que el conjunto de imputaciones es no vacío (**Proposición 3.3.1**), el Nucleolus existe y es único. Ese Nucleolus contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones y para las cuales se minimiza el mayor de los grados de satisfacción.

El Nucleolus verifica un conjunto de propiedades, pero antes se debe considerar la siguiente definición.

Definición 3.5.4 Se dice que dos jugadores $\boldsymbol{i,j}$ **son simétricos en un juego** (J, v), si realizan aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para toda $S \subseteq J$. Se dice que un **jugador es pasivo** en el juego si no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores, es decir $v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\})$ para toda $S \subseteq J$.

Propiedades del Nucleolus

Considerando un juego (J, v) con Nucleolus $N(J, v)$ se verifica que:

1. Si el Core del juego es no vacío, entonces el único elemento del Nucleolus pertenece al Core.
2. Si el Core del juego se conforma de un sólo valor, entonces el Core del juego coincide con el Nucleolus.
3. Sea $N(J, v) = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ el Nucleolus. Si i, j son jugadores simétricos, entonces $N_i = N_j$.
4. Sea $N(J, v) = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ el Nucleolus. Si i, j son jugadores pasivos, entonces $N_i = v(\{i\})$.

Demostración

1. *El Core de un juego* (J, v) *se define como:*

$$C(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x(J), x(S) \geq v(S), \qquad S \in J$$

Ahora supongamos que $(J, v) \neq \emptyset$. *Entonces para todo* $x \in (J, v), e(S, x) \leq 0$. *Esto implica que* $\theta(x)$ *tiene todas sus componentes menores o iguales a cero. En particular,* $\theta_1(x) = 0$. *Sea y una imputación del juego que no pertenece al Core. Entonces existirá al menos una coalición,* $S° \in P(J)$ *tal que,* $x(S°) \leq v(S°)$, *entonces,* $e(S°, x) = v(S°), -x(S°) > 0$. *Por tanto,* $\theta(y)$ *tiene al menos una componente positiva, así* $\theta_1(y) > 0$. *Así para toda x que pertenece al Core y para toda y que no pertenece al Core ocurre que* $\theta(x) < \theta(y) \rightarrow N(J, v) \subset C(J, v)$. *Así, como el conjunto de imputaciones es no vacío, al ser el Core no vacío, el Nucleolus existe y es único, por lo que el único elemento del Nucleolus pertenece al Core.*

2. *A partir de la demostración anterior, de inmediato se verifica que si, en particular, el Core se forma de un solo valor se verifica que* $N(J, v) = C(J, v)$.
3. *Se demuestra por medio de reducción al absurdo.*

Sea $N(J, v) = N = \{N_1, \dots, N_J, \dots, N_i, \dots N_n\}$, *donde solo se intercambió el lugar i-ésimo por el lugar j-ésimo. Supongamos que* $N_J \neq N_i$ *siendo j, i jugadores simétricos. Ahora sea* $N'(J, v) = N = \{N_1, \dots, N_j, \dots, N_i, \dots N_n\}$, *donde solo se intercambió i e j. Al ser* N' *y* N *dos conjuntos de imputaciones del juego y jugadores simétricos, ocurre que* $\theta(N')= \theta(N)$ *y como N es el Nucleolus, se cumple que:*

$$\theta(N) <\ _L\theta(y) \text{ Para toda } y \in I(J, v)$$

$$\theta(N') <\ _L\theta(y) \text{ Para toda } y \in I(J, v)$$

Así, N' *y* N *pertenecen al Nucleolus, lo que contradice la unicidad.*

4. *Se verificarán dos casos, primero supongamos que el Core es no vacío; entonces de 1) se tiene que* $N(J, v) \subset C(J, v)$, *por tanto se cumple que* $v(\{i\}) \leq N_i \leq v(j) -$

$v(J-\{i\})$; *si i es un jugador pasivo se cumple que* $v(j)-v(J-\{i\})=v(\{i\})$, *por lo que se deduce que* $N_i = v(\{i\})$.

Para el segundo caso supongamos que el Core es vacío. Supongamos que el jugador i es pasivo. Al ser $N(J,v)$ *el Nucleolus, un conjunto de imputaciones, se cumple que* $N_i \geq v(\{i\})$. *Veamos que por reducción al absurdo, no puede ser que* $N_i > v(\{i\})$. *Supongamos que lo fuera, definimos* $a = N_i - v(\{i\}) > 0$.

Consideremos una imputación $(N'_1, N'_2, \dots, N'_{n)}$ *con* $N'_k = v(\{i\})$ *si* $k = i$ *o* $N'_k = N_k + \frac{a}{n-1}$ *si* $k \neq i$.

Si $S \neq \emptyset$ *o* $S \neq \{i\}$ *entonces* $e(S,N') = 0$.

Si $i \notin S$ *o* $S \neq \emptyset$ *entonces* $e(S,N') = v(S) - N'(S) = v(S) - N(S) - \frac{S}{n-1}a < e(S,N)$; *en donde s es el número de jugadores que componen la coalición S.*

Si $i \in S$ *o* $S \neq \{i\}$ *entonces* $e(S,N') = v(S) - N'(S) = v(S-\{i\}) + v(\{i\}) - N'(S-\{i\}) - N'(\{i\}) = v(S-\{i\}) - N(s-\{i\}) - \frac{S-1}{n-1}a < e(S-[i].N)$.

Como el Core es vacío significa que $max_S\{e(S,N')\} < max_S\{e(S,N)\}$ *resultando que* $\theta(N') <\ _L\theta(y)$, *lo que está en contra de que N sea el Nucleolus.* □

Ejemplo 3.5.3 Considere el siguiente juego con tres jugadores

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{1,2\}) = 3, v(\{3\}) = 1, v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,3\}) = 3,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 4.$$

El jugador 1 es pasivo ya que se cumple que:

$$v(\{1\}) = v(\emptyset) + v(\{1\}), \quad v(\{1,2\}) = v(\{2\}) + v(\{1\}),$$

$$v(\{1,3\}) = v(\{3\}) + v(\{1\}), \quad v(\{1,2,3\}) = v(\{2,3\}) + v(\{1\}),$$

De igual manera se puede verificar que los jugadores 2 y 3 son jugadores pasivos. Ahora calculando el Nucleolus, se cumple la condición suficiente para que el Nucleolus exista y sea único ya que $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(J), 1+2+1 \leq 4$.

Aplicando la propiedad 4 del Nucleolus, se tiene que para $N = \{N_1, N_2, N_3\}$ con $N_1 = v(\{1\}) = 1, N_2 = v(\{2\}) = 2, N_3 = v(\{3\}) = 1$. Por tanto, $N = (1,2,1)$.

No siempre es fácil calcular el Nucleolus de manera manual, entonces uno puede calcularlo mediante el uso de la programación lineal utilizando algún software como LINDO. El programa lineal que se debe resolver es:

$$\min \alpha_1$$

$$v(S) - \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \alpha_1, \text{ Para } S \neq J \neq \emptyset \text{ y } S \in P(J)$$

Siendo α_1 el mínimo en ese problema. Si tal mínimo se alcanza en un punto único x^*, entonces x^* es el Nucleolus y el cálculo está terminado. En caso de que el mínimo no se encuentra en un punto único sino en un conjunto X, existirá una familia F_1 de coaliciones, tales que para todo $S \in F_1$ y $x \in X$, entonces $e(S, x) = \alpha_1$, y entonces se resuelve el programa lineal:

$$\min \alpha_2$$

$$v(S) - \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \alpha_2, \text{ Para } S \neq J \neq \emptyset \text{ y } S \in P(J) - F_1.$$

Siendo α_2 el mínimo. Si se alcanza en un único x, entonces se termina el cálculo, si no, se sigue como antes.

3.6 El Valor de Shapley

En esta parte se trata de estudiar un tipo de solución para juegos cooperativos correspondiente a un análisis que se le conoce como **normativo**, es decir, lo que se trata es buscar una distribución de pagos entre los jugadores de manera que cumplan ciertos axiomas ya establecidos. Mediante 4 axiomas se llegará a una asignación única entre los jugadores y a esto se le conoce como el **Valor de Shapley.** Este método de distribución de pagos, asigna un reparto único del beneficio total de la coalición a todos los jugadores.

Este concepto es muy importante porque ofrece una posible solución a las insatisfacciones generadas entre coaliciones por no obtener el beneficio que consideran adecuado. Es decir, dado que algunos jugadores contribuyeron más a la coalición que otros, mediante este método, la repartición de los beneficios ocurre de la manera más justa posible.

Sea $G = (J, v)$ con $J = \{1,2, \dots, n\}$. Se va a considerar la siguiente **asignación de pagos** para los n jugadores $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \dots, \varphi_n(v)) \in R^n$.

Esta función de pagos $\varphi(v)$ debe cumplir los siguientes axiomas:

1. **Eficiencia**. La función de asignación debe distribuir el pago total del juego, esto es
$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(v) = v(J).$$
2. **Simetría.** Para cualquier par de jugadores que hagan aportaciones equivalentes en cada coalición, ambos recibirán un pago equivalente por ello; es decir:
$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, para toda $S \in P(J)$, con i, j que no se encuentran en S
$$\varphi_i(v) = \varphi_j(v).$$
3. **Tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta un beneficio extra a alguna coalición entonces, ninguno de los demás jugadores deberán recibir un pago extra por ello, es decir, para cada jugador i:
$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\})$, para toda coalición S se tiene que
$$\varphi_i(v) = v(\{i\}).$$
4. **Aditividad.** La función de asignación φ no cambia en una composición de juegos. Es decir, si se tienen dos juegos cualesquiera (J, v_1) y (J, v_2) entonces
$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2).$$

Teorema 3.6.1 Existe una única asignación $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \dots, \varphi_n(v))$ que verifica los axiomas 1, 2, 3 y 4, ésta se llama Valor de Shapley y se define como:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})].$$

En donde $q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, siendo $s = |S|$ el número de jugadores en la coalición S.

Lo anterior se conoce como un cargo razonable para cada uno de los jugadores involucrados. Para entender el significado consideremos el siguiente proceso aleatorio:

- Primero se elige la cantidad de elementos de una coalición S que no contenga al jugador i de acuerdo a una distribución uniforme sobre un conjunto entre 0 y $n - 1$ elementos.

- Después se elige aleatoriamente una coalición S con la cardinalidad dada anteriormente, de acuerdo a la distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.
- Finalmente se le da al jugador i la utilidad que aporta al valor total del juego al incorporarse a la coalición S, es decir $[v(S) - v(S - \{i\})]$.

Entonces $\varphi_i(v)$ se puede interpretar como el pago esperado para el jugador *i* al ocurrir el proceso anterior. Así, el valor que asigna el Valor de Shapley a cada jugador es un promedio de las contribuciones del jugador *i* a las coaliciones a las que se incorpora; $q(s)$ se puede ver como un factor de ponderación o factor relevante que forma una distribución de probabilidad sobre las coaliciones, al escoger de manera equiprobable el número de elementos de una coalición y posteriormente una de esas coaliciones.

Es importante destacar que el Valor de Shapley es un concepto de solución **independiente del Core**, y al no exigirle que cumpla el principio de racionalidad coalicional, no siempre es una solución que pertenezca al Core. Sin embargo, para los juegos convexos, el Valor de Shapley sí pertenece al Core del juego.

Por ejemplo, para n = 2

Demostración. Considere el juego (J, v) *con* $J = \{1,2\}$.

Entonces $P(J) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

La familia de coaliciones a la que pertenece el jugador 1 es: $S(1) = \{\{1\}, \{1,2\}\}$.

La familia de coaliciones a la que pertenece el jugador 2 es: $S(2) = \{\{2\}, \{1,2\}\}$.

Sabemos que $q(s) = \frac{(s-1)!(2-s)!}{n!}$ *luego* $q(1) = \frac{0!1!}{2!} = \frac{1}{2}$ *y* $q(2) = \frac{1!0!}{2!} = \frac{1}{2}$.

En general $\varphi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})]$ *y como* s *es el número de jugadores en la familia de coaliciones* S.

$$\varphi_1(v) = q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})]$$

$$= \tfrac{1}{2}v(\{1\}) + \tfrac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})],$$

$$\varphi_2(v) = q(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})]$$

$$= \tfrac{1}{2}v(\{2\}) + \tfrac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})]. \ \square$$

Ejemplo 3.6.1 Calcule el Valor de Shapley para el juego $J = \{1,2\}$

$$v(\emptyset) = 0, \qquad v(\{1\}) = 5, \qquad v(\{2\}) = 7, \qquad v(\{1,2\}) = 20.$$

De la formula obtenida anteriormente:

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{2}v(\{1\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})]$$

$$= \tfrac{1}{2}[5] + \tfrac{1}{2}[20 - 7] = \tfrac{18}{2} = 9,$$

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{2}v(\{2\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})]$$

$$= \tfrac{1}{2}[7] + \tfrac{1}{2}[20 - 5] = \tfrac{22}{2} = 11.$$

Así, el Valor de Shapley para este juego es $\varphi(v) = (9,11)$.

Prácticamente este valor representa el beneficio esperado para cada jugador dependiendo del nivel de sus contribuciones realizadas en cada coalición. Para el jugador 1 el beneficio que le corresponde es 9 y para el jugador 2 el beneficio que le corresponde es 11. Significa que el jugador 2 aportó más hacia su coalición que el jugador 1.

Por ejemplo, para n = 3

Demostración. Considere el juego (J, v) *con* $J = \{1,2,3\}$.

Entonces $P(J) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

La familia de coaliciones a la que pertenece el jugador 1 es:

$S(1) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

La familia de coaliciones a la que pertenece el jugador 2 es:

$S(2) = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

La familia de coaliciones a la que pertenece el jugador 3 es:

$$S(3) = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Sabemos que $q(s) = \frac{(s-1)!(3-s)!}{n!}$ *luego* $q(1) = \frac{0!2!}{3!} = \frac{1}{3}, q(2) = \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6}$ *y* $q(3) = \frac{2!0!}{3!} = \frac{1}{3}$.

Y las expresiones para Shapley son:

$$\varphi_1(v) = q(1)[v(\{1\}\} - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] +$$

$$q(2)[v(\{1,3\}\ ) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}\ ) - v(\{2,3\})]$$

$$= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})],$$

$$\varphi_2(v) = q(1)[v(\{2\}\} - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] +$$

$$q(2)[v(\{2,3\}\ ) - v(\{3\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}\ ) - v(\{1,3\})]$$

$$= \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})],$$

$$\varphi_3(v) = q(1)[v(\{3\}\} - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] +$$

$$q(2)[v(\{2,3\}\ ) - v(\{2\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}\ ) - v(\{1,2\})]$$

$$= \tfrac{1}{3}v(\{3\}) + \tfrac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \tfrac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + \tfrac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})].\square$$

Ejemplo 3.6.2 Calcule el Valor de Shapley para el juego del **Ejemplo 3.2.1.**

Se tiene:

$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0, v(\{3\})$ = 350,000, $v(\{1,3\})$ = 700,000, $v(\{2,3\})$ = 775,000, $v(\{1,2,3\})$ = 775,000.

Luego:

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] +$$

$$\frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{6}[0-0] + \frac{1}{6}[700-350] + \frac{1}{3}[775-775] = \frac{350}{6}.$$

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] +$$

$$\frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{6}[0-0] + \frac{1}{6}[775-350] + \frac{1}{3}[775-700] = \frac{575}{6}.$$

$$\varphi_3(v) = \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] +$$

$$\frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] = \frac{1}{3}(350) + \frac{1}{6}[700-0] + \frac{1}{6}[775-0] + \frac{1}{3}[775-0] = \frac{3725}{6}.$$

Así, el Valor de Shapley para este juego es

$$\varphi(v) = \left(\frac{350}{6}, \frac{575}{6}, \frac{3725}{6}\right).$$

CAPÍTULO 4. ASIGNACIÓN DE COSTOS

4.1 Introducción

En cualquier empresa, los gastos de capital son necesarios para adquirir los bienes o elementos necesarios para la fabricación o adquisición de sus productos y/o servicios. La asignación de costos es muy importante ya que ayuda a una entidad a determinar la cantidad que cada artículo producido costará. Usualmente, las prácticas de contabilidad suelen proporcionar las herramientas y directrices necesarias para asignar los costos de producción.

Todas las empresas tienen algún tipo de objetivos para alcanzar ciertos beneficios, que pueden lograrse a través de la venta de bienes y servicios. Es bien sabido que el beneficio de un producto es el precio de venta menos el costo de ese producto. Si dividimos este resultado entre el precio de venta, se puede conocer el margen de beneficio bruto por artículo. En la mayoría de los casos, la única forma en que una empresa puede aumentar su margen de beneficio bruto es elevando el precio de venta o reduciendo sus **costos**. Sin las prácticas adecuadas de **asignación de costos**, la empresa puede adquirir grandes riesgos o en un caso extremo, ir a la quiebra.

La asignación de costos juega un papel importante en la toma de decisiones económicas ya que ayuda a medir ingresos y activos, promueve un uso más efectivo de los recursos, ayuda a localizar puntos débiles de la empresa, permite comparar costos entre productos elaborados y en general se utiliza como un instrumento de control y toma de decisiones.

Las empresas pueden tener todo tipo de ineficiencias u operaciones que elevan sus costos de manera constante. Por ejemplo, una empresa puede utilizar demasiados trabajadores para elaborar un producto específico; estos trabajadores adicionales aumentan los costos de los productos expresados como pagos de salarios hacia esos trabajadores.

Si los profesionales de gestión determinaran donde existen estas ineficiencias, podrían eliminarlas del sistema mejorando las operaciones de la compañía y reduciendo los costos del producto a un rango normal que permita la maximización de la ganancia.

La revisión constante del proceso de asignación de costos de una empresa debe ser obligada. Esto permite evaluar qué tan bien se opera en comparación con otras empresas en el mismo mercado.

Este proceso de asignación de costos se realiza bajo diversos **métodos clásicos**. Por otro lado, como la competencia en el mercado actual es muy acelerada, las compañías pretenden desarrollar un liderazgo en costos que les permita competir, así que deben integrar en su sistema de administración nuevas técnicas de control y gestión que tengan la capacidad de adaptarse a los cambios, como resulta ser la aplicación de los métodos de **Teoría de Juegos** como se mostrará más adelante.

4.2 ¿Qué es el costo?

Por **costo** se entiende la suma de todos los pagos en los que incurre una persona física o moral para la adquisición de un bien o de un servicio, con la intención de que genere ingresos en el futuro. Un costo puede tener distintas características en diferentes situaciones:

a. Costo-activo. Existe cuando se incurre en un costo cuyo potencial de ingresos va más allá del potencial de un periodo; por ejemplo, la adquisición de un edificio, maquinaria, etcétera.
b. Costo-gasto. Es el desembolso de efectivo que ha contribuido al esfuerzo productivo de un periodo; por ejemplo, los sueldos correspondientes a ejecutivos de administración o bien, la depreciación del edificio de la empresa.
c. Costo-pérdida. Es el gasto que se efectuó, pero que no generó los ingresos esperados; por ejemplo, cuando se incendia un equipo de reparto que no estaba asegurado.

La información de costos es usada para dos propósitos en la mayoría de las empresas, primero los sistemas de contabilidad de costos proveen información para evaluar el desempeño de una unidad organizacional, y también proveen los medios para estimar los costos de unidades de producto o servicio que la organización pueda manufacturar o proveer a otros.

Para efectos de este trabajo nos interesa conocer qué se entiende por el concepto de **asignación de costos**. El objetivo principal de la asignación de costos es determinar los costos unitarios de cada uno de los artículos o productos producidos, sin esto, sería muy difícil establecer un precio de venta, evaluar inventarios, identificar fallas en el proceso, conocer la rentabilidad del cada producto o realizar reportes financieros.

Note que, el concepto de costo tiene un significado muy diferente al concepto gastos. Costo es el valor monetario de los recursos que se entregan a cambio de los bienes o servicios que se adquieren y **gasto** comprende todos los costos que pueden deducirse de los ingresos.

4.3 Clasificación de costos

Los costos, como se ha mencionado, son fundamentales para el administrador no sólo para efectos de valuar inventarios, sino para los diferentes procesos administrativos de la organización (planeación, toma de decisiones, control etc.). Dependiendo del tipo de proceso administrativo de que se trate y del tipo de toma de decisiones que se requieran tomar, los costos pueden ser clasificados [8]:

De acuerdo al área donde incurren

- Costos de Producción: son los costos que se generan en el proceso de transformar la materia prima en productos terminados; se clasifican en Material Directo, Mano de Obra Directa, etc.
- Costos de Distribución: son los que se generan por llevar el producto o servicio hasta el consumidor final.

- Costos de Administración: son los generados en las áreas administrativas de la empresa.
- Costos de financiamiento: son los que se generan por el uso de recursos de capital.

Según su identificación con alguna unidad de costeo

- Directos: son los costos que pueden identificarse fácilmente con el producto, servicio o proceso; por ejemplo, el material y la mano de obra.
- Indirectos: es difícil asociarlos con un producto o servicio específico. Para su asignación se requieren base de distribución, metros cuadrados, número de personas etc.

De acuerdo con el tiempo en que fueron calculados

- Históricos: son costos pasados, que se generaron en un periodo anterior.
- Predeterminados: son costos que se calculan con base en métodos estadísticos y que se utilizan para elaborar presupuestos.

Según el grado de control

- Costos Controlables: son aquellos costos sobre los cuales la dirección de la organización tiene autoridad para que se generen o no; por ejemplo, el porcentaje de aumento en los salarios de los empleados que ganen más del salario mínimo es un costo controlable para la empresa.
- Costos no Controlables: son aquellos costos sobre los cuales no se tiene autoridad para su control; por ejemplo, el valor del arrendamiento a pagar es un costo no controlable, pues dependen del dueño del inmueble.

De acuerdo con la importancia sobre la toma de decisiones

- Costos Relevantes: son costos relevantes aquellos que se modifican al tomar una u otra decisión. En ocasiones coinciden con los costos variables.
- Costos no Relevantes: son aquellos costos que independiente de la decisión que se tome en la empresa permanecerán constantes. En ocasiones coinciden con los costos fijos.
- Costos desembolsables: son aquellos que generan una salida real de efectivo.

- Costos de oportunidad: es el costo que se genera al tomar una determinación que conlleva la renuncia de otra alternativa.

Sin embargo, la clasificación que más interesa es **de acuerdo a su comportamiento o variabilidad.**

Costos Fijos: son aquellos costos que permanecen constantes durante un periodo de tiempo determinado sin importar el volumen de producción. Los costos fijos se consideran como tal en su monto global, pero unitariamente se consideran variables. Algunas características son:

- Son controlables respecto a la duración del servicio que prestan a la empresa.
- Están relacionados estrechamente con la capacidad instalada.
- Están relacionados con un nivel relevante. Permanecen constantes en un amplio intervalo.
- Regulados por la administración.
- Están relacionados con el factor tiempo.
- Son variables por unidad y fijos en su totalidad.

Costos Variables: son aquellos que se modifican de acuerdo con el volumen de producción, es decir, si no hay producción no hay costos variables y si se producen muchas unidades el costo variable es alto. Unitariamente el costo variable se considera fijo, mientras que en forma total se considera variable. Algunas características son:

- Sólo son controlables a corto plazo.
- Son proporcionales a una actividad. Tienen un comportamiento lineal relacionado con alguna medida de actividad.
- Están relacionados con un nivel relevante, fuera de ese nivel puede cambiar el costo unitario.
- Son regulados por la administración.
- En total son variables, por unidades son fijos.

Escalonados: son aquellos costos que permanecen constantes hasta cierto punto, luego crecen hasta un nivel determinado y así sucesivamente. La separación de costos en fijos y variables es una de las más utilizadas en la contabilidad de costos y en la contabilidad administrativa para la toma de decisiones. Algunas de las ventajas de separar los costos en fijos y variables son que:

- Facilita el análisis de las variaciones.
- Permite calcular puntos de equilibrio.
- Facilita el diseño de presupuestos.
- Permite utilizar el costo directo.
- Garantiza mayor control de los costos.

4.4 Métodos de costeo

Dentro de la contabilidad de costos tradicional, se utilizan varios métodos. El **método de costeo total** se define como la incorporación de todos los costos de fabricación tantos variables y fijos al costo del producto [15], así como se excluyen todos los costos que no son de fabricación. Este método incluye en el costo del producto, todos los costos de la función productiva independientemente y su comportamiento fijo o variable.

Ventajas

- La valuación de los inventarios de producción es superior al costeo directo.
- Se utiliza en muchos casos.

Desventajas

- Es difícil obtener el punto de equilibrio.
- Dificulta la combinación costo-volumen-unidad.
- No son tan confiables los presupuestos.

El **método de costeo directo** se define como un sistema que evalúa el inventario y el costo de las ventas a su costo variable de fabricación [15]. El costo variable se define como aquel que se incrementa directamente con el volumen de producción. En general, se puede denominar como un método contable que se basa en el análisis del comportamiento de los costos de producción y operación para clasificarlos como costos fijos o costos variables, con el objeto de proporcionar suficiente información relevante a la dirección de la empresa para su proceso de planeación estratégica.

Ventajas

- No existen fluctuaciones en el costo unitario.
- Ayuda a la toma de decisiones.
- Facilita la obtención del punto de equilibrio.

Desventajas

- Los resultados pueden ser engañosos.
- Se obtienen en muchos casos costos unitarios menores que los reales.

Estos métodos consideran a los costos fijos totales de fabricación constantes a cualquier volumen de producción y a los costos variables totales que aumentan en forma lineal, es decir, en proporción directa con los cambios que ocurren en la producción.

Sin embargo, graficamente la línea para los costos unitarios variables se considera constante y la línea para los costos unitarios fijos crece o decrece de acuerdo a los niveles de producción.

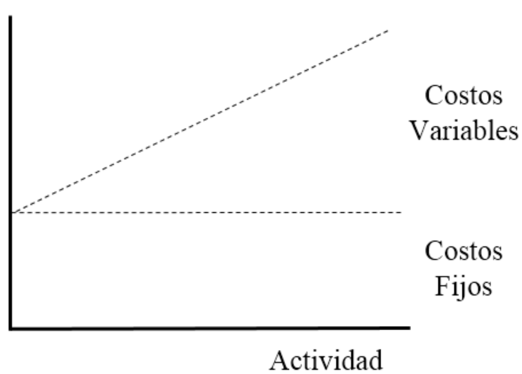


Figura 17. Estructura de costos.

En general, los costos unitarios que resultan de los sistemas de contabilidad se trabajan como costos promedio, es decir, el costo unitario promedio de un producto se calcula dividiendo el total de los costos (fijos y variables) entre el número total de unidades producidas.

Por otro lado, en Economía se consideran que los aumentos o disminuciones en los costos unitarios variables ocurren a un ritmo variable. La Teoría Económica se ocupa de los costos marginales. Un **costo marginal** representa el aumento en los costos totales que resulta de la producción de una unidad adicional.

Para efectos de este trabajo nos enfocaremos a los métodos de costos de acuerdo a la economía y no de acuerdo a la teoría de contabilidad. De acuerdo con la Teoría Económica, las utilidades de la empresa se maximizan en el punto en el cuál, el ingreso marginal, es decir, el aumento en el ingreso derivado de la venta de una unidad adicional, es igual al costo marginal; a ese punto se le conoce como **punto de equilibrio**.

El punto de equilibrio es aquel nivel de actividad en el que la empresa consigue cubrir la totalidad de sus costos tanto fijos como variables, obteniendo un beneficio cero, es decir: $PE = IT - CT = 0$, donde IT es igual a los ingresos totales y CT a los costos totales que a su vez se representan como la suma de los costos fijos más los costos variables o también $IT = CF + CV = CT$.

Para aplicar las fórmulas de este método de costeo es indispensable conocer el total de los costos fijos, pero también el precio de venta de un bien producido, su volumen de producción y su costo variable unitario. El **costo variable unitario** resulta del cociente del costo variable total entre el número de unidades producidas:

$$CVu = \frac{Costo\ variable\ total}{Total\ de\ unidades\ producidas}$$

Para determinar el punto de equilibrio en ingresos podemos calcularlo mediante:

$PEingresos = \frac{Costo\ fijo\ total}{\frac{1-CVu}{PVu}}$ Donde PVu es el precio de venta unitario.

Para determinar el punto de equilibrio en unidades producidas podemos calcularlo mediante la fórmula:

$$PEuproducida = \frac{PEingresos}{Precio\ de\ venta\ unitario}$$

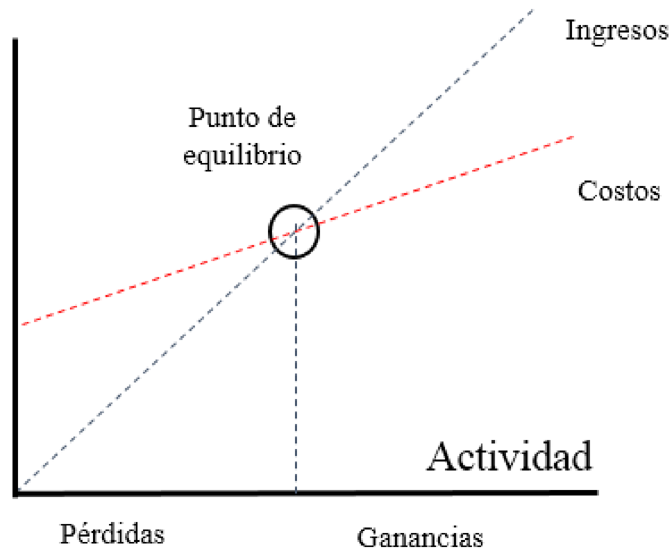


Figura 18. Representación del punto de equilibrio

Note que por debajo de dicho punto la empresa genera pérdidas, por encima, la empresa genera beneficios.

Ejemplo 4.4.1 Se pretende analizar desde el punto de vista económico, una explotación apícola denominada " La abejita Feliz "que se ubica en cierto municipio de Tamaulipas. Esta explotación cuenta actualmente con 100 colmenas "tipo Jumbo".

En el manejo de sus colmenas, el propietario emplea el sistema Nómada o en movimiento, movilizando sus apiarios hasta cuatro veces en un ciclo anual. La producción de miel, estimada por colmena es de 40 litros. La miel en el mercado (envasada y etiquetada), tiene un precio promedio de \$ 40.00 por litro. Los costos anuales, calculados para esta explotación apícola, son los siguientes:

1. Combustible. - Se estiman alrededor de 30 visitas a los apiarios con un desembolso de $150.00 por visita.
2. Alimentación artificial, se les otorga dos veces en el año a las 100 colmenas y se consideran $ 40.00 de cada una (las dos veces).
3. Cambio de abejas reina en el total de colmenas $ 65.00 de cada una.
4. El control y tratamiento se lleva a cabo una vez en el año, con un costo de $ 45.00 por colmena.
5. Renta del extractor. - Se lleva a cabo el pago y uso de extractor 4 veces en el año, con un costo de $ 1,500.00 cada ocasión.
6. Se adquieren 4,000 envases cada año para el envasado de miel, con valor $ 3.00 cada uno.
7. El etiquetado para el total de litros de miel producida tiene un costo de $ 3,000.
8. La mano de obra permanente, representa $ 25,000.00 en el año.
9. Pago de agua mensual es de $ 160.00.
10. El pago de luz Bimestral es de $ 250.00.

Determinar el punto de equilibrio en ingresos y productivo para la explotación.

Primero clasificamos los costos:

Tabla 1. Clasificación de costos.

Costos Variables		**Costos Fijos**	
Combustible	4,500	Renta de extractor	6,000
Alimentación	8,000	M. de obra	25,000
Abejas reinas	6,500	Pago de agua	1,920
Medicamentos	4,500	Pago de luz	1,500
Envases	12,000		
Etiquetas	3,000		
Total	**38,500**		**34,420**

Después, sabemos que:

$$CVu = \frac{Costo\ variable\ total}{Total\ de\ unidades\ producidas} = \frac{38{,}500}{4{,}000} = 9{,}625.$$

Ahora se calcula el punto de equilibrio en ingresos:

$$PEingresos = \frac{Costo\ fijo\ total}{\frac{1-CVu}{PVu}} = \frac{34{,}420}{\frac{1-9.625}{40}} = 45{,}289.$$

Para determinar el punto de equilibrio en unidades producidas se calcula:

$$PEuproducida = \frac{PEingresos}{Precio\ de\ venta\ unitario} = \frac{45{,}289}{40} = 1{,}132.$$

Y verificando, los ingresos totales fueron $IT = 4000(40) = 160{,}000$ y los costos totales equivalen a $CT = CF + CV = 38{,}500 + 34{,}420 = 72{,}920$.

En conclusión, el volumen de producción de miel es de 4,000 litros, sus ingresos totales son de \$160,000, sus costos totales son de \$72,920, el punto de equilibrio económico es de \$45,289 y el punto de equilibrio productivo es de 1132 litros.

La empresa por encima de los ingresos y volumen de producción representados por el punto de equilibrio tendrá utilidades. En contraparte, cuando se encuentre por debajo del punto de equilibrio habrá de operar con pérdidas. De acuerdo con los resultados obtenidos la empresa en análisis opera con rendimientos excelentes.

Ejemplo 4.4.2 Los costos fijos de una empresa (luz, teléfonos, alquileres etc.), que son independientes del nivel de producción, ascienden a \$ 250,000.00. El costo variable o costo por unidad de producción del bien es de \$ 22.50. El precio de venta del producto es de \$ 30.00 por unidad.

Otra forma de obtener el punto de equilibro es determinando una **función de beneficio** y generada por la diferencia entre la **función de ingresos** y **la función de costos** definidas por: $B(x) = I(x) - C(x)$ donde sí ocurre que $I(x) = C(x)$, entonces existe el punto de equilibrio.

El costo por unidad se define como *c*, el costo fijo se define como *k*, el precio de venta por unidad se define como *s* y la cantidad producida o vendida de un bien equivale a *x*. Luego la función de costos y de ingresos equivalen a:

$$C(x) = cx + k, \quad I(x) = sx \quad \text{y además} \;\; B(x) = (s - c)x - k$$

Así $C(x) = 22.50x + 250{,}000 \quad I(x) = 30x \; y \; B(x) = 7.50x - 250{,}000$

Pero en el punto de equilibro B(x) es cero, así $0 = 7.50x - 250{,}000$ y por tanto $x = 33{,}333.3$ unidades; entonces $y = 999{,}999.9$. Las coordenadas del punto de equilibrio son:

$$(33{,}333.3, \;\; 999{,}999.9).$$

Es decir, en dicho punto se tiene:

$$C(x) = 22.50(33{,}333.3) + 250{,}000 = 100{,}000, \quad I(x) = 30(33{,}333.3) = 100{,}000$$

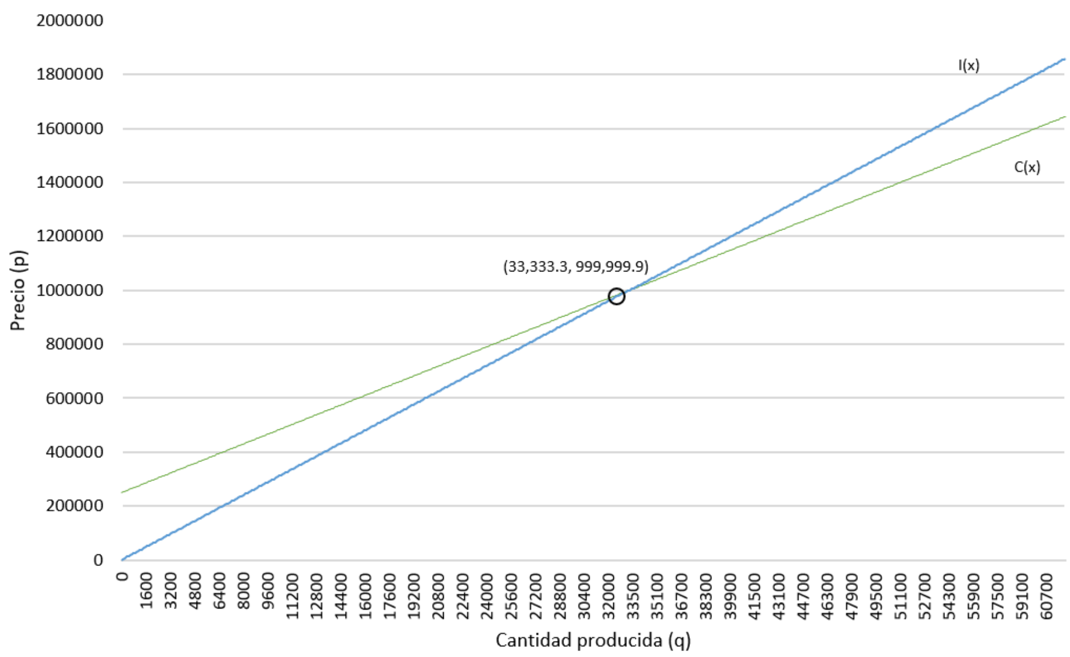


Figura 19. Representación del punto de equilibrio del ejemplo anterior.

Así podemos concluir que con menos de 33,333 unidades producidas y vendidas la empresa tendrá déficit (pérdida) y con cualquier cantidad superior tendrá ganancia. El punto de equilibrio nos permite medir no solo una relación entre ingresos y costos, sino que tiene otras aplicaciones para la toma de decisiones como por ejemplo la conveniencia de contratar un servicio o no hacerlo, comprar un bien u otro.

4.5 Métodos para el cálculo de costos

Como sabemos el problema que nos ocupa en la Teoría de Juegos es el de repartir o distribuir de forma equitativa, racional y objetiva un determinado beneficio, utilidad o en su defecto el costo entre dos o más individuos o entidades.

Este tipo de repartos puede admitir distintos métodos de solución conforme a la naturaleza del problema; analicemos algunos **métodos económicos para el cálculo de costos**.

Por ejemplo, si se establece una sociedad entre tres personas, que representamos por A, B y C, que al final rinde una utilidad de $ 1.200,00 y se convino previamente en que las ganancias o pérdidas serían asumida por cada socio en proporción al capital aportado; el socio A contribuyó a la formación de ese capital con $ 1.000,00, el B con $2.000,00 y el C con $3.000,00; la utilidad o beneficio que corresponde a cada uno de ellos se determina fácilmente con la fórmula [4]:

$b_i = \frac{(beneficio\ total)(capital\ aportado\ por\ i)}{capital\ total\ aportado}$ Con i = A, B y C, resultando los valores de:

$$b_A = \frac{12000*1000}{6000} = 200,\ \ b_B = \frac{12000*2000}{6000} = 400\ \text{ y } b_C = \frac{12000*3000}{6000} = 600.$$

Donde $b_A, b_B\ y\ b_C$ representan las utilidades que les corresponden a los socios A, B y C respectivamente y claramente se verifica que la suma de los beneficios individuales corresponde al beneficio total.

$$b_A + b_B + b_C = 200 + 400 + 600 = 1200.$$

En el ejemplo anterior la forma de repartir el beneficio conjunto resulto fácil porque previamente se debió acordar una regla o función matemática para repartir las ganancias. Esta regla es: $b_i = \frac{b_t}{A_t} A_i$ de donde:

b_i = Beneficio del socio i.

b_t = Beneficio total a repartir.

A_i = Aporte del socio i.

A_t = Aporte total de los socios.

En la mayoría de los casos, el problema a resolver no se presenta tan sencillo como se mostró anteriormente y según la naturaleza de la utilidad a repartir, se pueden aplicar distintas metodologías o técnicas; por ejemplo, cuando se quieren asignar recursos para alguna de las unidades académicas en una universidad, ¿cómo se haría?, ¿por cantidad de alumnos?, ¿por cantidad de carreras?... resulta un problema algo complejo, por la cantidad de variables que realmente deben considerarse, sin embargo, en la actualidad muchos de estos elementos se fijan arbitrariamente en base a los acuerdos y toma de decisiones subjetivas.

Otro ejemplo en el que se enfoca más la Teoría de Juegos en cuanto a la Economía es la distribución de un costo conjunto entre dos o más artículos que salen de una planta de producción, a los efectos de poder establecer el beneficio que puede producir cada uno de ellos.

De lo anterior, se desprende el concepto denominado **asignación de costos**. Supongamos que en una planta industrial se llega a producir un elemento básico del que se obtiene posteriormente dos o más productos derivados que más adelante representaremos con los valores A, B, C con valores agregados propios [4].

El **valor agregado propio** se refiere al mejoramiento que una compañía hace a su producto antes de ofrecerlo a los consumidores. Estos mejoramientos pueden aumentar su precio o su valor.

En la producción se distinguen dos etapas; la primera etapa consta de los costos generados hasta antes de iniciar la producción, estos costos posteriormente serán absorbidos por la producción final, a esto se le conoce como el **costo conjunto $\boldsymbol{C^c}$**. Se incluyen los costos de alquileres, mantenimiento de equipos, personal, materia prima, combustibles, insumos etc.

La segunda etapa consta de la elaboración y terminación de cada uno de los productos que agrega sus **costos individuales**; se considera que cada uno de estos artículos se encuentran perfectamente determinados y se representan por $\boldsymbol{C_i^a}$ con i = A, B, C,…

Para poder calcular realmente el beneficio de la producción y venta de cada uno de estos productos de la empresa, es necesario determinar con la mayor objetividad el costo conjunto que corresponde a cada uno de los productos por separado.

Una vez resuelto esto, se puede determinar el **costo total por articulo** $C_{t(i)} = C_i^c + C_i^a$ y luego conociendo el **ingreso por producto (**I) se puede calcular el beneficio aportado por el mismo definido como $B_i = I_i - C_{t(i)}$ con i = A, B, C,…

La cuestión de esto es hallar las partes del costo conjunto para cada i. En economía existen varios métodos para hallarlo, cuya elección de ellos depende de la información que se tenga y la naturaleza del mismo problema, a continuación, se muestran algunos métodos.

1) **Método basado en la cantidad de material producido**

Se es posible medir en unidades homogéneas la cantidad o peso de los artículos A, B, C,…, de la producción, el costo conjunto se puede distribuir proporcionalmente a esos pesos mediante la siguiente fórmula [4]: $C_i^c = \frac{C^c}{P_t} P_i$ y $\sum C_i^c = C^c$. Donde P_t representa el peso total que resulta de sumar los pesos de cada producto A, B,…

Note que: Este método no se usa debido a objeciones como son, que los productos derivados por su distinta naturaleza pueden ser medidos en unidades no homogéneas como líquidos y sólidos lo que hace imposible usar el método en varias situaciones.

Ejemplo 4.4.1 En cierta fábrica se produce en una primera etapa de fabricación de material básico para tres productos, A, B y C, con costos agregados de 400, 600 y 800, respectivamente, por cada 1000 del costo conjunto de la etapa inicial. Se tiene datos adicionales y se sabe que la cantidad de unidades o material producido fue de 1400, 100 y 800 respectivamente. Y los ingresos por cada producto fueron $2000, $2400 y $3600.

Definimos:

Costo conjunto: $C^c = 1000$.

Costos autónomos: $C^a(A) = 400,\ C^a(B) = 600\ y\ C^a(C) = 800$.

Peso o cantidad de unidades: $P(A) = 1400,\ P(B) = 1000\ y\ P(C) = 800$.

Ingresos por cada producto: $I(A) = 2000,\ I(B) = 2400\ y\ I(C) = 3600$.

Calculamos el peso total $P_t = P(A) + P(B) + P(C) = 3200$.

Ahora a cada producto le asignamos parte del coste conjunto:

$C_A^c = \frac{C^c}{P_t} P_A = \frac{1000}{3200} 1400_i = 438$.

$C_B^c = \frac{C^c}{P_t} P_B = \frac{1000}{3200} 1000 = 312$.

$C_C^c = \frac{C^c}{P_t} P_C = \frac{1000}{3200} 8000 = 250$.

Y se cumple que el coste conjunto total es $C^c = 438 + 312 + 250 = 1000$.

2) **Método basado en el valor de ventas**

Si se conocen los ingresos que produce cada producto I_i el método consiste en cargar a cada producto una parte del costo conjunto proporcional a dichos ingresos, mediante la siguiente fórmula [4]: $C_i^c = \frac{C^c}{I_t} I_i$ y $\sum C_i^c = C^c$. . Donde I_t representa el ingreso total que resulta de sumar los ingresos cada producto A, B,…

Este método también tiene objeciones como que los costos reales de producción no están en relación en todos los casos con los ingresos que cada producto proporciona.

Ejemplo 4.4.2 Basándonos en el **Ejemplo 4.4.1**, si consideramos el ingreso total tendríamos $I_t = 2000 + 2400 + 3600 = 8000$, y asignando el costo conjunto se tiene que:

$C_A^c = \frac{C^c}{I_t} I_A = \frac{1000}{8000} 2000 = 250$.

$C_B^c = \frac{C^c}{I_t} I_B = \frac{1000}{8000} 2400 = 300$.

$C_C^c = \frac{C^c}{I_t} I_C = \frac{1000}{8000} 3600 = 450.$

Y se cumple que el coste conjunto total es $C^c = 250 + 300 + 450 = 1000.$

3) Método del valor neto de realización

Se puede calcular el costo conjunto mediante la fórmula siguiente:

$$C_i^c = \frac{C^c}{VNR_t} VNR_i \text{ y } \sum C_i^c = C^c.$$

De donde:

El valor neto de realización total $= VNR_t = \sum I_i$ representa la suma de los ingresos individuales.

El valor neto de realización por producto $= VNR_i = I_i - C_i^a$, que representa la diferencia entre el ingreso producido por el mismo, su costo auténtico.

Ejemplo 4.4.3 Basándonos en el **Ejemplo 4.4.1**, calculamos el valor neto de realización por cada producto $VNR_i = I_i - C_i^a$:

$$VNR_A = I_A - C_A^a = 2000 - 400 = 1600.$$

$$VNR_B = I_B - C_B^a = 2400 - 600 = 1800.$$

$$VNR_C = I_C - C_{iC}^a = 3600 - 800 = 2800.$$

Y el valor Neto de realización total $VNR_t = 1600 + 1800 + 2800 = 6200$. Así, la asignación de costo conjunto viene denotado por:

$$C_A^c = \frac{C^c}{VNR_t} VNR_A = \frac{1000}{6200} 1600 = 258.$$

$$C_B^c = \frac{C^c}{VNR_t} VNR_B = \frac{1000}{6200} 1800 = 290.$$

$$C_C^c = \frac{C^c}{VNR_t} VNR_C = \frac{1000}{6200} 2800 = 452 .$$

Y se cumple que el coste conjunto total es $C^c = 258 + 290 + 452 = 1000.$

Los tres métodos mostrados se consideran métodos tradicionales. Aunque también se desarrollaron otros métodos “nuevos” que tienden a disminuir aspectos arbitrarios (aunque estos problemas siempre surgen en alguna medida). Veamos los siguientes.

4) Costes alternativos de Moriarity

La distribución de los costos se hace en proporción al beneficio estimado obtenido por cada uno de los productos. Para ello es necesario contar como datos, además del costo conjunto y costos autónomos, con los ingresos por producto, para poder establecer el beneficio que cada uno de ellos aporta, los cuales se obtienen como la diferencia entre ingresos y costes totales correspondientes.

Este método brinda la posibilidad de que la empresa pueda adquirir el producto en el mercado a un precio económico en lugar de producirlo. Así, se consideran dos valores para un mismo producto entre los que debe elegirse el costo total del producto *i*, a mejor precio en el mercado C_i^o y el costo máximo de producción propia de *i* con su coste conjunto $C^c + C_i^a$ [4].

Entre ambas posibilidades se elige la mínima para cada producto que se conoce como **mejor alternativa:** $Y_i = \min \ \{C_i^o, C^c + C_i^a\}$.
La suma de las mejores alternativas de los productos *i* menos el costo total de fabricación o adquisición de ellos permite evaluar el **ahorro de la empresa** H, se representa como: $H = \sum Y_i - C^t$.

Con el ahorro total, se puede asignar de manera proporcional a las mejores alternativas Y_i, así, para cada producto habrá **un ahorro de fabricación o adquisición propia** denotado por $H_i = \frac{H}{\sum Y_i} Y_i$.

Así, el **costo total por producto** será $C_i^t = Y_i$ - H_i, lo que permite calcular la parte del costo conjunto por producto denotado como sigue: $C_i^c = C_i^t - C_i^a$. El modelo de Moriarity, que posee considerables ventajas sobre los métodos clásicos; en algunos casos, puede asignar costos negativos.

Ejemplo 4.4.4 Basándonos en el **Ejemplo 4.4.1**, de acuerdo al método, la empresa debe considerar dos alternativas para la obtención de sus productos. Supongamos que la propuesta de adquirir sus productos en el mercado se define respectivamente por C_A^o= 1200, C_B^o= 1400 y C_C^o= 2000.

La otra alternativa era fabricándolos por sí misma, entonces, obteniendo los costos máximos de producción por producto se tiene: $C^c + C_A^a = 1400$, $C^c + C_B^a = 1600$ y $C^c + C_C^a = 1800$ respectivamente.

Para cada producto se debe considerar la mejor alternativa, entonces:

$$Y_A = \min \ \{1200{,}1400\} = 1200.$$
$$Y_B = \min \ \{1400{,}1600\} = 1400.$$
$$Y_C = \min \ \{2000{,}1800\} = 1800.$$

Ahora la empresa considerará el ahorro total resultante H.

$$H = \sum Y_i - C^t = \sum Y_i - (C_i^c + \sum \ C_i^a) = 4400 - 2800 = 1600.$$

Inmediatamente se puede obtener el ahorro total obtenido por cada producto:

$$H_A = \frac{H}{\sum Y_i} Y_A = \frac{1600}{4400} 1200 = 436.$$
$$H_B = \frac{H}{\sum Y_i} Y_B = \frac{1600}{4400} 1400 = 510.$$
$$H_C = \frac{H}{\sum Y_i} Y_C = \frac{1600}{4400} 1800 = 654.$$

Así, el costo total por producto será $C_i^t = Y_i$ - H_i.

$$C_A^t = Y_A - H_A = 1200 - 436 = 764.$$
$$C_B^t = Y_B - H_B = 1400 - 510 = 890.$$
$$C_C^t = Y_C - H_C = 1800 - 654 = 1146.$$

Y el costo conjunto por producto: $C_i^c = C_i^t - C_i^a$ es:

$$C_A^c = C_A^t - C_A^a = 764 - 400 = 364.$$

$$C_B^c = C_B^t - C_B^a = 890 - 600 = 290.$$

$$C_C^c = C_C^t - C_C^a = 1146 - 800 = 346.$$

Finalmente se cumple que el coste conjunto total es:

$$C^c = 364 + 290 + 346 = 1000.$$

5) **Método de juegos (utilizando el Método Moriarity)**

Como ya se mencionó anteriormente, la Teoría de Juegos se aplica para resolver situaciones de conflicto o incertidumbre, en donde dos personas compiten inteligentemente por un mismo objetivo. Cada jugador desarrolla sus estrategias para derrotar a su rival, en base a reglas preestablecidas. Se debe suponer que el adversario elegirá sus mejores opciones, y se debe elegir la estrategia que maximice nuestro beneficio, suponiendo siempre que el adversario analizará de la misma manera nuestras opciones. En el problema que nos ocupa en este momento es la distribución de costos conjuntos entre dos o más productos.

El método más moderno consiste en aplicar elementos de la Teoría de Juegos, considerando a cada uno de los artículos o productos en cuestión como jugadores que compiten por la asignación de un beneficio común. Lo que cada artículo (jugador) puede obtener de ese beneficio corresponde exactamente a lo que pierden los demás en el reparto.

La estrategia que cada jugador o producto, será la de jugar individualmente o asociado a los otros jugadores y el beneficio que recibirá será el que le corresponda por su actuación personal más los de su participación en los equipos formados con los demás jugadores (Juegos formando coaliciones).

Ejemplo 4.4.5 Utilizando los datos del **Ejemplo 4.4.1.** Para aplicar el método de los juegos emplearemos como datos los mejores costos alternativos del método de Moriarity [4].

Primero se va a considerar a cada uno de los productos A, B y C como jugadores en juego por llevarse la mayor parte del beneficio total que obtiene la empresa y una vez repartido, se podrá calcular el costo común de cada producto, que es lo que nos interesa. Las estrategias de cada producto serán las de jugar solos o en equipos y se definen como $S = A, B, C, AB, AC, BC, ABC$. Los costos C^c, $C_i^a, C_i^o, C^c + C_i^a$ calculados anteriormente se utilizarán y además podemos calcular $I(S)$; donde $I(S)$ representa los ingresos que obtiene cada equipo de jugadores como la suma aportada de cada participante. Para resumir esto, se acomodaron los valores en la Tabla 2.

Tabla 2. Costos e ingresos para cada equipo de jugadores.

	A	**B**	**C**	**AB**	**AC**	**BC**	**ABC**	**Ingresos totales**
C^c								1000
C_i^a	400	600	800	1000	1200	1400	1800	
C_i^o	1200	1400	2000	2600	3200	3400	4600	
$C^c + C_i^a$	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2800	
$I(S)$	2000	2400	3600	4400	5600	6000	8000	

Como sabemos, del método anterior, las mejores alternativas para la adquisición de productos o conjuntos de productos adecuándolo al conjunto S se representa por**:**

$$Y_S = \min \ \{C_S^o, C^c + C_S^a\}.$$

Para poder asignar los beneficios conjuntos se debe tomar en cuenta que la utilidad o beneficio que cada equipo obtenga será la diferencia entre el ingreso que aportan y el mejor costo del equipo, es decir $V(S) = I(S) - Y(S)$. Además, el beneficio obtenido por cada equipo debe ser igual a la suma de sus contribuciones individuales.

Entonces, cuando un equipo se forma de un solo jugador, su utilidad coincide con su aporte residual único $CR(S)$, es decir:

$$CR(A) = V(A) = 800, CR(B) = V(B) = 1000, CR(C) = V(C) = 1800.$$

Para equipos de dos jugadores en adelante, su aporte residual conjunto equivale a la diferencia entre el valor o beneficio obtenido por el equipo menos el aporte residual de cada uno de ellos; por ejemplo para la coalición AB será:

$$CR(AB) = V(AB) - CR(A) - CR(B) = 2400 - 800 - 1000 = 600.$$

Para la coalición AC será:

$$CR(AC) = V(AC) - CR(A) - CR(C) = 3400 - 800 - 1800 = 800.$$

Para la coalición BC será:

$$CR(BC) = V(BC) - CR(B) - CR(C) = 3600 - 1000 - 1800 = 800.$$

Para la coalición formado por los jugadores A, B, C, el costo residual se denota por:

$$CR(ABC) = V(ABC) - V(AB) - V(AC) - V(BC) + V(A) + V(B) + V(C).$$

$$CR(ABC) = 5200 - 2400 - 3400 - 3600 + 800 + 1000 + 1800 = -600.$$

Ahora, existe un acuerdo que determina que el precio de cada grupo se distribuye en partes iguales entre todos sus integrantes, entonces el factor de distribución se determina como $W(S) = \frac{1}{r}$ donde r es el número de integrantes en cada coalición.

$$W(A) = 1, W(B) = 1\ , W(C) = 1\ , W(AB) = \frac{1}{2}.$$

$$W(AC) = \frac{1}{2}\ , W(BC) = \frac{1}{2}\ , W(ABC) = \frac{1}{3}\ .$$

Finalmente, se debe utilizar la función de beneficio $b(i) = \sum W_i\,(S)CR(S)$ con i = A, B, C.

$$b(A) = 800 + \frac{1}{2}600 + \frac{1}{2}800\text{-}\frac{1}{3}600 = 1300.$$

$$b(B) = 1000 + \frac{1}{2}600 + \frac{1}{2}800\text{-}\frac{1}{3}600 = 1500.$$

$$b(C) = 1800 + \frac{1}{2}600 + \frac{1}{2}800\text{-}\frac{1}{3}600 = 2400.$$

Y el beneficio total = $1300 + 1500 + 2400 = 5200$.

Tabla 3. Costos, ingresos y beneficios para cada equipo de jugadores.

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Ingresos totales
C^c								1000
C_i^a	400	600	800	1000	1200	1400	1800	
C_i^o	1200	1400	2000	2600	3200	3400	4600	
$C^c + C_i^a$	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2800	
$I(S)$	2000	2400	3600	4400	5600	6000	8000	
$Y(S)$	1200	1400	1800	2000	2200	2400	2800	
$V(S)$	800	1000	1800	2400	3400	3600	5200	
$CR(S)$	800	1000	1800	600	800	800	-600	5200
$W(S)$	1	1	1	1/2	1/2	1/2	1/3	
$b(i)$	1300	1500	2400					5200
C_i^c	300	300	400					1000

Sabemos que: Beneficio = Ingreso – Costo total, es decir $b(i) = I(i) - (C_i^c + C_i^a)$ y despejando el costo total por jugador $C_i^c = I(i) - b(i) - C_i^a$.

Finalmente, para este problema tenemos:

$$C_A^c = 2000 - 1300 - 400 = 300.$$

$$C_B^c = 2400 - 1500 - 600 = 300.$$

$$C_C^c = 3600 - 2400 - 800 = 400.$$

Y se cumple que el coste conjunto total es $C^c = 300 + 300 + 400 = 1000$ como se puede notar en la fila 12 de la Tabla 3.

Tabla 4. Comparación entre costos de producción y la mejor alternativa de producción.

	C_i^o	$C^c + C_i^a$	$Y(S)$
A	1200	1400	1200
B	1400	1600	1400
C	2000	1800	1800
AB	2600	2000	2000
AC	3200	2200	2200
BC	3400	2400	2400
ABC	4600	2800	2800
Máximos	4600	2800	

Si comparamos en esta tabla los costos totales de adquirir cada producto en el marcado C_i^o y los costos máximos por obteneros de una producción propia $C^c + C_i^a$ para cada equipo podemos calcular su mejor alternativa Y_i calculando el mínimo de esos costos como se ve en la columna 4 de la Tabla 4.

Si calculamos el máximo de esos costos C_i^o y propia $C^c + C_i^a$ obtenemos los valores mostrados en la última fila de la tabla 4.

Como podemos recordar, el criterio de más bajo valor de juego y más alto valor de juego, si coinciden existe un punto silla o punto óptimo de estrategias y se cumple el criterio de Minimax. En este caso podemos ver en efecto que de acuerdo a la Teoría de Juegos se cumple esto ya que, si calculamos el mínimo costo de nuestros costos máximos y el máximo valor de la mejor alternativa (mínimos) obtenemos 2800.

Lo que en su defecto indicaría que la mejor alternativa para la empresa es obtener sus tres productos mediante una producción propia.

En conclusión, el problema principal ha resolver en todo este capitulo ha sido el de repartir o distribuir de forma equitativa, racional y objetiva un determinado beneficio o costo entre dos o más participantes.

Notemos que las grandes compañias y negocios en general no se constituyen en la mayoría de los casos con la iniciativa y el capital de una sola persona. Por esta razón, se hace necesaria la unión de capitales y técnicas de varias personas formando asi, una agrupación o sociedad. En consecuencia, los beneficios o pérdidas de la compañía se reparten entre los socios.

En todos los ejemplos anteriormente estudiados se les aplicó un concepto al que podríamos llamar **la regla de compañía**. La regla de compañía es la aplicación de un reparto proporcional; que como se pudo ver, consiste en repartir las ganancias o pérdidas que se producen en una sociedad entre los participantes de manera proporcional a los capitales, tiempos de fabricación, precios de venta, o cualquier otro factor.

Es por eso que, los métodos basados en la cantidad de material producido, en el valor de ventas, en el valor neto de realización o el método Moriarity son métodos de asignación que podrían parecer justos, pero no lo son. Sabiendo esto, imagina que te encuentras en la universidad; un compañero y tu tienen que hacer juntos una tarea final, muy importante para cierta clase, pero tú hiciste todo el trabajo solo, sacrificaste tiempo y esfuerzo. Si la calificacion final de la tarea es de 10, y tu profesor considera la repartición proporcional como método de asignación, de verdad ¿consideras justo que tu compañero y tú reciban la misma calificación?

CAPÍTULO 5. “AN APPLICATION OF GAME THEORY: COST ALLOCATION”

5.1 Introducción

En esta parte se analizará el artículo **“AN APPLICATION OF GAME THEORY: COST ALLOCATION”** de Jean Lemaire [16]. Jean Lemaire (también conocido como Harry J. Loman) es profesor de Seguros y Gestión de Riesgos en la Universidad Wharton y es director de un programa de Ciencias Actuariales. Tiene una Maestría en Estadística, una Maestría en Ciencias Actuariales y un Doctorado en Matemáticas Aplicadas; todos sus títulos los obtuvo en la universidad de Bruselas. Es un personaje muy destacado al haber publicado más de 100 trabajos de investigación y libros referentes a la Teoría de Juegos y la Ciencia Actuarial, de ello nace la importancia de estudiar su trabajo.

Como se mencionó anteriormente, el concepto de asignación de costos es uno de los problemas más difíciles en la Economía, esto ocurre sobre todo cuando existe la cooperación entre varios departamentos de una empresa a gran escala.

Es claro que el beneficio de una cooperación debe asignarse entre los jugadores o para este contexto, entre los departamentos participantes de cierta organización. Particularmente, en el sector asegurador, estos problemas son numerosos; así los contadores de una empresa, se ven obligados a dividir los costes operativos entre los diferentes tipos de seguros; en la vida real, la cantidad de tiempo empleado y la complejidad de los métodos utilizados en la asignación de costos son absolutamente sorprendentes [16].

Por eso, analizaremos algunos problemas de asignación de interés actuarial y compararemos diversos métodos de solución que nos permitan aplicar las herramientas que nos brinda la Teoría de Juegos para llegar a la mejor repartición de costos y no solo quedarnos con el análisis de los métodos contables o económicos tradicionales.

5.2 Aplicación de la Teoría de Juegos: Asignación de costos

El análisis comenzará mediante el siguiente ejemplo; una gran empresa belga opera tres clases de seguros (vida, fuego y accidentes) y utiliza no menos de 11 diferentes criterios para asignar sus costos [16]:

Criterio No. 1: Imputación Directa

Algunos costos de operación pueden ser asignados directamente a una clase: el salario de los empleados que trabajan exclusivamente en esa clase, las comisiones de los corredores, los honorarios de los topógrafos.

Criterio No. 2: En Proporción al Criterio No. 1

Los salarios de los trabajadores que no trabajan exclusivamente para una clase, las primas de sus pólizas de seguro, la cotización patronal a la seguridad social, etc., se asignan en proporción al total observado en el Criterio No. l.

Criterio No. 3: Por Proporción al Número de Archivos

Los salarios, las facturas telefónicas, los gastos de viaje de los inspectores administrativos de la empresa se asignan según el número de expedientes que tienen que considerar mensualmente.

Criterio No. 4: Por Proporción al Número de Políticas y Endosos

Los costos asignados de acuerdo con esta clave incluyen los salarios de los inspectores, los colectores de primas, el fondo de solidaridad de los agentes en caso de enfermedad, etc.

Criterio No. 5: Un Tercero para Cada Clase

La compañía opera un centro de capacitación, donde sus agentes de vez en cuando vienen por una semana completa de lecciones. Todos los gastos relacionados con esta actividad (sueldos de los instructores, alimentos y bebidas, salario del cuidador, calefacción del centro, etc.) se distribuyen de forma uniforme entre las clases.

Criterio No. 6: Promedio de los Criterios 3, 4 y 5

Las primas de las pólizas de seguro de los inspectores son los únicos costos asignados por este criterio.

Criterio No. 7: En Proporción a la superficie ocupada

Los costos de calentamiento, agua, electricidad, facturas telefónicas, salarios de los intendentes, mantenimiento de ascensores, etc. se reparten según la superficie ocupada por las tres clases del edificio.

Criterio No. 8: Por Proporción a los Ingresos de los Premios

La lista de los costos divididos de acuerdo a esta clave es casi interminable y muy diversificada: subsidios a diversas organizaciones, suscripciones a periódicos y revistas, regalos para los hijos de los empleados en Navidad, premios para concursos entre los agentes, la publicidad, los gastos de viaje de los directores, el mantenimiento de los coches de la empresa, los costes de recepción de los visitantes extranjeros, la impresión del boletín de la compañía.

Criterio No. 9: Por Proporción del Número Promedio de Empleados de cada Clase

En esta sección tenemos los costos de mantenimiento del departamento de impresión, los gastos de funcionamiento del restaurante, los suministros de papelería, entre otros.

Criterio No. 10: En Proporción al Número de Horas de Computación más el número promedio de CD’s o DVD’s utilizados

Esta regla se ha seleccionado para subdividir los costes de la computadora.

Criterio No. 11: Proporción al Total de Criterios N ° 1 a 10

Este último criterio incluye los gastos de envío, los gastos de funcionamiento de las oficinas locales de la empresa, las pólizas de seguro de los coches de la empresa, la ayuda médica para el empleado.

Además de esta complejidad, cantidades millonarias se trasladan arbitrariamente de una clase a otra cuando se siente que una de las claves actúa injustamente. Los contadores reconocen unánimemente que sus métodos son extremadamente complejos y de alguna manera completamente arbitrarios. Admiten que el total general de una clase puede estar equivocado por un porcentaje muy alto, pero pretenden que esto no es demasiado importante “puesto que el beneficio total de la empresa es la suma de sus tres componentes”; ellos afirman que un error de asignación simplemente aumenta el beneficio de una clase a expensas de otra, y no influye en el resultado total; esto obviamente no es correcto: **las asignaciones incorrectas pueden dar lugar a acciones que disminuyan el beneficio global de la empresa**.

Ejemplo 5.1.1 Durante la primera semana de abril de 1983, tres conductores belgas se ven envueltos en medio de un accidente en Yugoslavia como se puede observar en las Tabla 5 y la Figura 20.

Tabla 5. Monto de reclamación para las tres empresas involucradas en el accidente.

Titular de la poliza	Compañía	Lugar del siniestro	Monto de reclamación
J_1	1	Ljublana	300
J_2	2	karlovac	1000
J_3	3	Bistrica	200

Las tres empresas involucradas necesitan realizar un estudio de daños de los coches. Todas sus oficinas de evaluación se encuentran ubicadas en Belgrado. Si se observa la ubicación de las tres reclamaciones en el mapa, podemos analizar qué sale mucho más barato (en cuanto al recorrido en kilómetros).

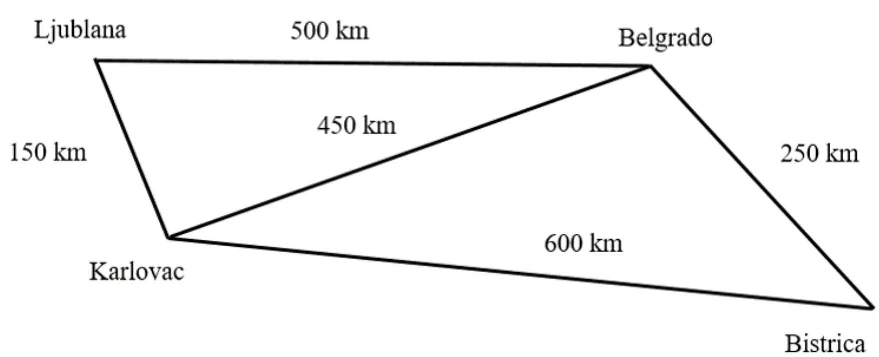


Figura 20. Mapa de la zona que muestra la ubicación de las empresas aseguradoras con respecto al accidente.

Si representamos el juego de manera coalicional obtenemos: $J = \{1,2,3\}$

Y cada uno de los valores de las coaliciones $c(\{S\})$ denotan el total de kilómetros que las empresas aseguradoras deben conducir con el fin de inspeccionar el daño del vehículo.

$$c(\emptyset) = 0, c(\{1\}) = 1000, c(\{2\}) = 900, c(\{1,2\}) = 1100, c(\{3\}) = 500,\ c(\{1,3\}) = 1500,$$
$$c(\{2,3\}) = 1300,\ c(\{1,2,3\}) = 1500$$

En donde los valores están expresados en kilómetros.

Ahora, el problema es no saber de qué manera se debe distribuir el costo x_i entre cada compañía aseguradora. Es evidente que los costes fijos (noches de hotel en cada ciudad, honorarios del ajustador por cada vehículo, etc.) se pueden asignar directamente a la reclamación correspondiente, por lo que sólo tenemos que considerar la repartición de los costes variables, es decir, los gastos de viaje. Suponemos que la indemnización por reembolso del experto es proporcional al kilometraje manejado.

Se trabajarán con los métodos clásicos de asignación de costos.

Método 1: Repartición igual de la ganancia total

$$x_i = c(i) - \tfrac{1}{3}\left[\textstyle\sum_j c(j) - c(N)\right].$$

De acuerdo a nuestro problema:

$$x_1 = c(1) - \frac{1}{3}[c(1) + c(2) + c(3) - c(123)]$$

$$= 1000 - \tfrac{1}{3}(1000 + 900 + 500 - 1500) = 700.$$

$$x_2 = c(2) - \frac{1}{3}[c(1) + c(2) + c(3) - c(123)]$$

$$= 900 - \tfrac{1}{3}(1000 + 900 + 500 - 1500) = 600.$$

$$x_3 = c(3) - \frac{1}{3}[c(1) + c(2) + c(3) - c(123)]$$

$$= 500 - \tfrac{1}{3}(1000 + 900 + 500 - 1500) = 200.$$

Por tanto el vector de distribución de costos queda definido por $x = (700,600,200)$.

Método 2: Repartición proporcional de la ganancia total (Método Moriarity)

$$x_i = c(i) - \frac{c(i)}{\sum_j c(j)}\left[\sum_k c(k) - c(N)\right] = \frac{c(i)}{\sum_j c(j)} c(N).$$

De acuerdo a nuestro problema:

$$x_1 = \frac{c(1)}{c(1)+c(2)+c(3)} c(123) = \frac{1000}{1000+900+500}(1500) = 625.$$

$$x_2 = \frac{c(2)}{c(1)+c(2)+c(3)} c(123) = \frac{900}{1000+900+500}(1500) = 562.5.$$

$$x_3 = \frac{c(3)}{c(1)+c(2)+c(3)} c(123) = \frac{500}{1000+900+500}(1500) = 312.5.$$

Por tanto el vector de distribución de costos queda definido por $x = (625{,}562.5{,}312.5)$.

Método 3: Repartición igual de los costos no-marginales

Recordemos que un costo marginal para i se define como:

$$CM(i) = c(N) - c(N - \{i\}).$$

Por tanto para obtener el valor de cada x_i, se aplica la fórmula:

$$x_i = CM(i) + \frac{1}{3}\left[c(N) - \sum_k CM(k)\right].$$

De acuerdo a nuestro problema:

$$CM(1) = c(123) - c(23) = 200.$$

$$CM(2) = c(123) - c(13) = 0.$$

$$CM(3) = c(123) - c(12) = 400.$$

Y así

$$x_1 = CM(1) + \frac{1}{3}[c(123) - (CM(1) + CM(2) + CM(3))]$$

$$= 200 + \frac{1}{3}[1500 - (200 + 0 + 400)] = 500.$$

$$x_2 = CM(2) + \frac{1}{3}[c(123) - (CM(1) + CM(2) + CM(3))]$$

$$= 0 + \frac{1}{3}[1500 - (200 + 0 + 400)] = 300.$$

$$x_3 = CM(3) + \frac{1}{3}[c(123) - (CM(1) + CM(2) + CM(3))]$$

$$= 400 + \frac{1}{3}[1500 - (200 + 0 + 400)] = 700.$$

Por tanto el vector de distribución de costos queda definido por $x = (500,300,700)$.

Método 4: Repartición proporcional de los costos no-marginales

$$x_i = CM(i) + \frac{CM(i)}{\sum_j CM(j)}[c(N) - \sum_k CM(k)] = \frac{CM(i)}{\sum_j CM(j)}c(N).$$

De acuerdo a nuestro problema:

$$x_1 = \frac{CM(1)}{CM(1)+CM(2)+CM(3)}c(123) = \frac{200}{200+0+400}(1500) = 500.$$

$$x_2 = \frac{CM(2)}{CM(1)+CM(2)+CM(3)}c(123) = \frac{0}{200+0+400}(1500) = 0.$$

$$x_3 = \frac{CM(3)}{CM(1)+CM(2)+CM(3)}c(123) = \frac{400}{200+0+400}(1500) = 1000.$$

Por tanto el vector de distribución de costos queda definido por $x = (500,0,1000)$.

Método 5: Repartición proporcional de los montos de reclamación

$$x_i = \frac{S(i)}{\sum_j S(j)}c(N).$$

Donde $S(i)$ representa el monto de la reclamación.

De acuerdo a nuestro problema:

$$x_1 = \frac{S(1)}{S(1)+S(2)+S(3)}c(123) = \frac{300}{300+1000+200}(1500) = 300.$$

$$x_2 = \frac{S(2)}{S(1)+S(2)+S(3)}c(123) = \frac{1000}{300+1000+200}(1500) = 1000.$$

$$x_3 = \frac{S(3)}{S(1)+S(2)+S(3)}c(123) = \frac{200}{300+1000+200}(1500) = 200.$$

Por tanto el vector de distribución de costos queda definido por $x = (300,1000,200)$.

Los cinco métodos anteriores recomiendan asignaciones totalmente diferentes. Podemos compararlos por sus propiedades. Para que un método sea "lo más justo posible", ciertamente tiene que satisfacer dos propiedades naturales:

1. **Propiedad de racionalidad individual** $x_i \leq c(\{i\})$,

   Para el ejemplo que estamos analizando, significa que una empresa no puede cobrar más que si su asegurado hubiera estado solo para causar un accidente. Si recordamos: $c(\{1\}) = 1000,\ c(\{2\}) = 900,\ c(\{3\}) =\ 500.$

Y por ejemplo, tomando el vector de distribución de costos $x = (300{,}1000{,}200)$ no es cierto que: $x_2 \leq c(\{2\})$

2. **Propiedad de racionalidad para las coaliciones**

$$x_i \geq c(N) - c(N - \{i\}) = CM(i).$$

   Indica que ninguna empresa debe cobrar menos que su **costo marginal**. Note que el costo marginal para las empresas aseguradoras es:

$$CM(1) = 200, CM(2) = 0, CM(3) = 400.$$

Y tomando el vector de distribución de costos $x = (300{,}1000{,}200)$ no es cierto que:

$$x_3 \geq 400.$$

Entonces, si analizamos los datos obtenidos, estas propiedades limitan los valores de la asignación x y al no cumplirse ambas propiedades por completo, los cinco métodos mostrados anteriormente se deben **rechazar** por no ser lo suficientemente justos. Entonces, ¿Cómo podemos asignar de la mejor manera los costos?

La mejor manera de poder trabajar este problema es mediante el uso de la **Teoría de Juegos;** de hecho, el juego de asignar costos es idéntico al juego de asignar utilidades transferibles mostrado en el capítulo anterior. Para comprobar que la utilización de los métodos de Teoría de Juegos para asignar utilidades transferibles es una mejor herramienta al asignar costos, se trabajaran con dos de los métodos “nuevos” mencionados en el capítulo anterior más dos variaciones del Nucleolus.

El primero es **el Valor de Shapley,** que como vimos representa la esperanza matemática del costo cuando todas las coaliciones son equiprobables. Todo sucede como si los jugadores entraran en la coalición uno por uno, recibiendo cada uno de ellos el ahorro completo que ofrece la coalición formada justo antes de él. Todas las coaliciones son consideradas e intervienen con el mismo peso para los cálculos.

Calculemos el Valor de Shapley para el **Ejemplo 5.1.1**

Recordemos que el Valor de Shapley se representa como

$$\varphi_i(c) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[c(S) - c(S - \{i\})].$$

En donde $q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, siendo $s = |S|$ el número de jugadores en la coalición S.

Para este juego con tres jugadores tenemos:

$$\varphi_1(c) = \frac{1}{3}c(\{1\}) + \frac{1}{6}[c(\{1,2\}) - c(\{2\})] + \frac{1}{6}[c(\{1,3\}) - c(\{3\})] + \frac{1}{3}[c(\{1,2,3\}) - c(\{2,3\})]$$

$$= \tfrac{1}{3}(1000) + \tfrac{1}{6}[200] + \tfrac{1}{6}[1000] + \tfrac{1}{3}[200] = 600.$$

$$\varphi_2(c) = \frac{1}{3}c(\{2\}) + \frac{1}{6}[c(\{1,2\}) - c(\{1\})] + \frac{1}{6}[c(\{2,3\}) - c(\{3\})] + \frac{1}{3}[c(\{1,2,3\}) - c(\{1,3\})$$

$$= \tfrac{1}{3}(900) + \tfrac{1}{6}[100] + \tfrac{1}{6}[800] + \tfrac{1}{3}[0] = 450.$$

$$\varphi_3(c) = \frac{1}{3}c(\{3\}) + \frac{1}{6}[c(\{1,3\}) - c(\{1\})] + \frac{1}{6}[c(\{2,3\}) - c(\{2\})] + \frac{1}{3}[c(\{1,2,3\}) - c(\{1,2\})]$$

$$= \tfrac{1}{3}(500) + \tfrac{1}{6}[500] + \tfrac{1}{6}[400] + \tfrac{1}{3}[400] = 450.$$

Así, el Valor de Shapley del juego es $\varphi(c) = (600,450,450)$.

El segundo método “nuevo” (de Teoría de Juegos) es **el Nucleolus** que, como vimos, mide la actitud de una coalición hacia una asignación propuesta por la diferencia entre el costo que puede asegurar y el costo propuesto. Como sabemos, el exceso de una coalición está representado por:

$$e(S,x) = c(S) - x(S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Y el Nucleolus es la imputación que maximiza (lexicográficamente) el exceso más pequeño de una coalición. Para los datos del **Ejemplo 5.1** el Nucleolus se puede obtener resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\min a$$

$$x_1 + a \geq 1000,$$

$$x_2 + a \geq 900,$$

$$x_3 + a \geq 500,$$

$$x_1 + x_2 + a \geq 1100,$$

$$x_1 + x_3 + a \geq 1500,$$

$$x_2 + x_3 + a \geq 1300,$$

$$x_1 \leq 1000,$$

$$x_2 \leq 900,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1500.$$

El vector de distribución de costos queda definido por $x = (600{,}450{,}450)$.

Algunas propuestas adicionales al modelo que se mostró anteriormente son: el Nucleolus Disruptivo y el Nucleolus Proporcional.

El tercer método es el **Nucleolus Proporcional, s**e obtiene cuando el exceso de una coalición se denota con esta nueva fórmula definida como: $e(S,x) = \frac{c(S)-\sum_{i=1}^{n} x_i}{c(S)}$.

Lo que hace esta modificación de la fórmula de excesos original es que, en lugar de conceder la cantidad adecuada a cada coalición, se otorga una cantidad proporcional a c(S) esa coalición. Para los datos del **Ejemplo 5.1** el Nucleolus Proporcional se puede obtener resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\min a$$

$$x_1 + 1000\, a \geq 1000,$$

$$x_2 + 900\, a \geq 900,$$

$$x_3 + 500\, a \geq 500,$$

$$x_1 + x_2 + 1100\, a \geq 1100,$$

$$x_1 + x_3 + 1500\, a \geq 1500,$$

$$x_2 + x_3 + 1300\, a \geq 1300,$$

$$x_1 \leq 1000,$$

$$x_2 \leq 900,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1500.$$

El vector de distribución de costos queda definido por $x = (1000,0,500)$.

El cuarto método es el **Nucleolus Disruptivo.** Para cada vector de distribución x se define la propensión a interrumpir para la coalición S como la relación entre lo que $(N - S)$ y S perderían si x fuera abandonado. El Nucleolus Disruptivo se denota como el Nucleolus original remplazando el exceso de una coalición $e(S,x) = c(S) - \sum_{i=1}^{n} x_i$ por:

$$d(S,x) = \frac{c(N\backslash S)-\sum_{i=1}^{n} x_i}{c(S)-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Para obtener la distribución x se utiliza una fórmula en función a los costos marginales:

$$x_i = CM(i) + \frac{c(i)-CM(i)}{\sum_j c(j)-CM(j)}\left[c(N) - \sum_k CM(k)\right].$$

Para los datos del **Ejemplo 5.1** tenemos que:

$$x_1 = 200 + \frac{1000-200}{(1000-200)+(900-0)+(1500-400)}[1500-(200+0+400)] = 600.$$

$$x_2 = 0 + \frac{900-0}{(1000-200)+(900-0)+(1500-400)}[1500-(200+0+400)] = 450.$$

$$x_3 = 400 + \frac{500-400}{(1000-200)+(900-0)+(1500-400)}[1500-(200+0+400)] = 450.$$

Por tanto el vector de distribución de costos queda definido por $x = (600{,}450{,}450)$, que es la misma distribución de costos que se obtuvo con el Valor de Shapley.

Ahora, ya que se revisaron los cuatro “nuevos” métodos de asignación de costos, ¿Cuál de ellos debe ser seleccionado? El estudio de las siguientes propiedades nos ayudará con esta elección.

Propiedad 1. Razonabilidad colectiva. El método debe proporcionar una imputación dentro del Core. Una asignación fuera del Core significaría para el contexto dado, que algunos departamentos de alguna empresa aseguradora no necesitan el subsidio de otros; por lo tanto, los directivos departamentales dejarían de formar coaliciones con otros departamentos para hacer el trabajo solos.

Por ejemplo, para un juego con 3 jugadores:

$$c(\emptyset) = 0, c(\{1\}) = c(\{2\}) = c(\{3\}) = c(\{1,2\}) = 12, c(\{1,3\}) = c(\{2,3\}) = 20,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 23.$$

El Valor de Shapley resulta que es $\varphi(c) = (6.33,6.33,10.33)$. Mientras que el Core se define por las desigualdades: $3 \leq x_1 \leq 12$, $3 \leq x_2 \leq 12$ y $11 \leq x_3 \leq 12$.

Nota: El Valor Shapley pertenece al Core del juego.

Propiedad 2 Monotonía en costos. Todos los jugadores contribuyen a un incremento en el costo total del juego $c(N)$. En la mayoría de los casos, las negociaciones relacionadas con la asignación de costos de un proyecto se llevan a cabo antes de que éste se inicie, por decir, una compañía de electricidad acepta contribuir al costo de erigir una presa sólo si sabe por adelantado cuánto costará (o al menos si se conoce una buena estimación del costo total). Pero es claro que el costo final de un proyecto no se conoce tan pronto como uno esperaría. La propiedad de la monotonía exige que cada jugador participe en un aumento del costo total: Sería injusto tener un jugador que se beneficie de un aumento de $c(N)$. El Valor de Shapley es monótono. Supongamos que $c(N)$ aumenta en la expresión:

$$\varphi_i(c) = \sum_{S \in P(J)} q(s)[c(S) - c(S - [i])] \text{ Donde } q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

$c(N)$ Aparece sólo una vez, cuando *i* entra en la coalición *N* - *{i}* para formar *N*. Por lo tanto, cualquier exceso de presupuesto es distribuido uniformemente entre los participantes.

El Nucleolus Proporcional es también monótono: cada incremento del coste global es compartido entre los jugadores en proporción de su beneficio $c(i) - x$ esto es intuitivamente mucho más satisfactorio. Por otra parte, el Nucleolus y el Nucleolus Disruptivo no son monótonos. Considere el siguiente ejemplo:

$$c\ (1) = 4, c\ (2) = c\ (3) = 6, c\ (12) = c\ (13) = 7.5, c\ (23) = 12, c\ (123) = 13.$$

Al calcular el Nucleolus Disruptivo

$$x_i = CM(i) + \frac{c(i) - CM(i)}{\sum_j c(j) - CM(j)}[c(N) - \sum_k CM(k)].$$

Tenemos que:

$$x_1 = 1 + \frac{4-1}{(4-1)+(6-5.5)+(6-5.5)}[13 - (1 + 5.5 + 5.5)] = 1.75.$$

$$x_2 = 1 + \frac{6-5.5}{(4-1)+(6-5.5)+(6-5.5)}[13 - (1 + 5.5 + 5.5)] = 5.625.$$

$$x_3 = 1 + \frac{6-5.5}{(4-1)+(6-5.5)+(6-5.5)}[13 - (1 + 5.5 + 5.5)] = 5.625.$$

Con lo cual, se obtiene la distribución $x = (\mathrm{I}.75, 5.625, 5.625)$. Si ahora proponemos $c(123) = 13.1$ obtenemos la nueva distribución $x = (\,1.727, 5.6865, 5.6865)$. Note que mientras que el coste total del proyecto ha aumentado, la contribución del jugador 1 ha disminuido.

Propiedad 3 Aditividad. Una subdivisión de un jugador en dos juegos no debe afectar a la asignación. En otras palabras: cualquiera de los jugadores, en ausencia del otro, incurre en los mismos costos que si los dos estuvieran en el juego. Por ejemplo: una compañía de seguros con sede en Bruselas quiere instalar dos terminales de ordenador en su oficina local en Liége, y una en Namur. Los costos de alquiler de las líneas telefónicas se indican en la Figura 21.

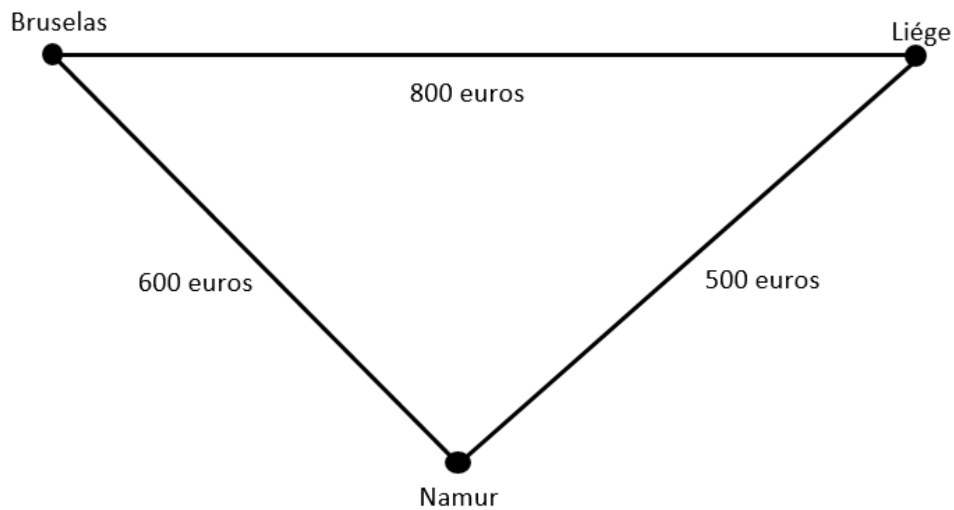


Figura 21. Costos de alquiler de líneas telefónicas

¿Qué cantidad se debe cargar a cada oficina local?

- Si razonamos en términos de Terminales, nos enfrentamos a un juego de 3 personas, con las funciones de costo:

$$c\ (1) = \ c\ (2) = \ c\ (12) = 800, c\ (3) = \ 600, c(13) = c(23) = \ c(123)\ = \ 1100.$$

- Si pensamos en términos de oficinas, tenemos un juego de 2 personas (L y N):

$$c\ (L) = \ 800, c\ (N) = 600, c\ (LN)\ = 1100.$$

Después de calcular los 4 métodos "nuevos" propuestos anteriormente, se obtienen los datos mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6. Asignaciones obtenidas por los diferentes métodos, para cada juego.

	3 jugadores			2 jugadores	
	1	**2**	**3**	**Liége (1)**	**Namur (2)**
Shapley	350	350	400	650	450
Nucleolus	325	325	450	650	450
Nucleolus Prop.	314.28	314.28	471.42	628.57	471.42
Nucleolus disruptivo	336.84	336.84	426.31	650	450

Así que el Valor de Shapley y el Nucleolus Disruptivo no satisfacen la propiedad de Aditividad. El Nucleolus y el Nucleolus Proporcional son aditivos. Vamos a comprobar esto; para que sea aditivo debe de cumplir que, al estar en una subdivisión de otro juego, no se debe afectar su asignación de cada coalición:

Para el Nucleolus:

$$x = (325{,}325{,}450) \text{ y } x = (650, 450),$$

$$325 + 325 = 650.$$

Para el Nucleolus Proporcional:

$$x = (314.28{,}314.28{,}471.42) \text{ y } x = (628.57{,}471.42),$$

$$314.28 + 314.28 = 628.57.$$

Para el Nucleolus Disruptivo:

$$x = (336.84{,}336.84{,}426.31) \text{ y } x = (650{,}450),$$

$$336.84 + 336.84 \neq 650.$$

Para el Valor de Shapley:

$$x = (350,350,400) \text{ y } x = (650,450),$$

$$350 + 350 \neq 650.$$

En resumen, un método que satisface las tres propiedades es el Nucleolus Proporcional; así que se propone como el mejor método de asignación de costos para este problema.

5.3 Estudio de un problema de asignación de interés

El tesorero de ASTIN (jugador 1) desea invertir la cantidad de 1,800,000.00 € a corto plazo (3 meses). En Bélgica, el rendimiento de dicha inversión se ve en función de la suma depositada:

Tabla 7. Rendimientos de la inversión.

Deposito	Tasa de interes Anual
0-1,000,000	7.75%
1,000,000-3,000,000	10.25%
3,000,000-5,000,000	12%

El jugador 1 entra en contacto con el tesorero de la Asociación Internacional de Actuarios (I.A.A. - Jugador 2) y con el tesorero de la Asociación de Actuarios de Bruselas (A.A.Br.-Jugador 3) para hacer una inversión grupal. I.A.A. depositó $900,000.00 en el fondo común, y A.A.Br. $300,000.00. ¿Cómo deben dividirse los intereses entre los 3 jugadores?

Este ejemplo se puede analizar como un juego cooperativo con utilidades transferibles; típicamente, contamos con los participantes que juegan por obtener algún costo o beneficio, la oportunidad de obtener algún costo o beneficio resulta de la cooperación que haya entre todas las coaliciones formadas entre ellos, los jugadores son libres de negociar entre ellos, así como que cada uno tiene el interés de maximizar sus beneficios y minimizar sus costos.

La solución siempre adoptada en la práctica equivale a otorgar el mismo rendimiento a todos. Ésto, sin embargo, implica una perfecta solidaridad entre los jugadores, es decir, que todos aceptan no usar sus diversas posibilidades de amenaza. Como esta asignación no es la única aceptable, es interesante comparar los diferentes métodos:

El juego queda definido de la siguiente manera:

$$v\ (1) = 46,125 \ \ v\ (2) = 17{,}437.5 \quad v(12) = 69{,}187.5 \ \ v\ (3) = \ 5812.5,$$

$$v(13) = 53{,}812.5 \quad v(23) = 30{,}750 \ \ v(123) \ = \ 90{,}000.$$

Para la repartición proporcional de los montos invertidos:

$$x_i = \frac{S(i)}{\sum_j S(j)} c(N)$$

En donde $S(i)$ representa el monto de la inversión del jugador i.

$$x_1 = \frac{S(1)}{S(1)+S(2)+S(3)} c(123) = \frac{1{,}800{,}000}{1{,}800{,}000+900{,}000+300{,}000} (90{,}000) = 54{,}000.$$

$$x_2 = \frac{S(2)}{S(1)+S(2)+S(3)} c(123) = \frac{900{,}000}{1{,}800{,}000+900{,}000+300{,}000} (90{,}000) = 27{,}000.$$

$$x_3 = \frac{S(3)}{S(1)+S(2)+S(3)} c(123) = \frac{300{,}000}{1{,}800{,}000+900{,}000+300{,}000} (90{,}000) = 9{,}000.$$

Por tanto el vector de distribución queda definido por $x = (54000{,}27000, 9000)$, esto quiere decir que los intereses se repartirían de la siguiente manera; para el jugador 1 el 12%, para el jugador 2 el 12% y para el jugador 3 el 12%.

Para el Core:

(Principio de eficiencia): $x(S) = x_1 + x_2 + x_3 = 90{,}000.$

(Racionalidad individual): $x_1 \geq 46125, x_2 \geq 17437.5, x_3 \geq 5812.5.$

(Racionalidad para las coaliciones): $x_1 + x_2 \geq 69187.5, x_1 + x_3 \geq 53812.5,$

$x_2 + x_3 \geq 30750.$

Los elementos del Core son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones de racionalidad para las coaliciones de dos jugadores. Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 90{,}000$ se tiene que:

$$x_1 + x_2 \geq 69187.5 \leftrightarrow 90000 - x_3 \geq 69187.5 \leftrightarrow x_3 \leq 20812.5,$$

$$x_2 + x_3 \geq 30750 \leftrightarrow 90000 - x_1 \geq 30750 \leftrightarrow x_2 \leq 59250,$$

$$x_1 + x_3 \geq 53812.5 \leftrightarrow 90000 - x_2 \geq 53812.5 \leftrightarrow x_1 \leq 36187.5.$$

Así, $C(J, v)$ es:

$$46125 \leq x_1 \leq 59250,$$

$$17437.5 \leq x_2 \leq 36187.5,$$

$$5812.5 \leq x_3 \leq 20812.5.$$

Para el Valor de Shapley:

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})]$$

$$= \tfrac{1}{3}(46125) + \tfrac{1}{6}[23062.5] + \tfrac{1}{6}[48000] + \tfrac{1}{3}[59250] = 51750.$$

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{3}v(\{2\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})$$

$$= \frac{1}{3}(17437.5) + \frac{1}{6}[23062.5] + \frac{1}{6}[24937.5] + \frac{1}{3}[36187.5] = 25875.$$

$$\varphi_3(v) = \frac{1}{3}v(\{3\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1}{6}[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + \frac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})]$$

$$= \tfrac{1}{3}(5812.5) + \tfrac{1}{6}[7687.5] + \tfrac{1}{6}[13312.5] + \tfrac{1}{3}[20812.5] = 12375.$$

Así, el Valor de Shapley del juego es $\varphi(v) = (51750{,}25875{,}12375)$, esto quiere decir que los intereses se repartirían de la siguiente manera; para el jugador 1 el 11.5%, para el jugador 2 el 11.5% y para el jugador 3 el 16.5%.

Según el Valor Shapley, el jugador 3 tiene una gran ventaja cuando entra al juego ya que con su aportación se alcanza la marca de 3 millones de euros y su beneficio por intereses es muy alto en comparación a los otros dos jugadores.

Para el Nucleolus:

El problema a resolver es:

$$\min a$$

$$x_1 + a \geq 46125,$$

$$x_2 + a \geq 17437.5,$$

$$x_3 + a \geq 5812.5,$$

$$x_1 + x_2 + a \geq 69187.5,$$

$$x_1 + x_3 + a \geq 53812.5,$$

$$x_2 + x_3 + a \geq 30750,$$

$$x_1 \geq 46125,$$

$$x_2 \geq 17437.5,$$

$$x_3 \geq 5812.5,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 90000.$$

Por tanto, el vector de distribución queda definido por $x = (52687.5\ ,24937.5\ ,12375)$, esto quiere decir que los intereses se repartirían de la siguiente manera; para el jugador 1 el 11.71%, para el jugador 2 el 11.08% y para el jugador 3 el 16.5%.

El Nucleolus indica mayor ganancia hacia A.A.Br. (Jugador 3) como ocurre en el valor de Shapley; también hay que tomar en cuenta el hecho de que ASTIN (jugador 1) está en mejor situación que I.A.A. (jugador 2), ya que logra un rendimiento del 10.25% jugando solo, mientras que I.A.A. (jugador 2) sólo haría el 7.75%.

Para el Nucleolus Proporcional:

$$\min a$$

$$x_1 + 46125\ a \geq 46125,$$

$$x_2 + 17437.5\ a \geq 17437.5,$$

$$x_3 + 5812.5\ a \geq 5812.5,$$

$$x_1 + x_2 + 69187.5\ a \geq 69187.5,$$

$$x_1 + x_3 + 53812.5\ a \geq 53812.5,$$

$$x_2 + x_3 + 30750\ a \geq 30750,$$

$$x_1 \geq 46125,$$

$$x_2 \geq 17437.5,$$

$$x_3 \geq 5812.5,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 90000.$$

Por tanto, el vector de distribución queda definido por $x = (54000{,}27000{,}9000)$, esto quiere decir que los intereses se repartirían de la siguiente manera; para el jugador 1 el 12%, para el jugador 2 el 12% y para el jugador 3 el 12%.

Para el Nucleolus Disruptivo:

$$x_i = CM(i) + \frac{c(i) - CM(i)}{\sum_j c(j) - CM(j)}\left[c(N) - \sum_k CM(k)\right].$$

Para los datos del **Ejemplo 5.1** tenemos que:

$$x_1 = 59250 + \frac{46125 - 59250}{(46125 - 43875) + (17437.5 - 72562.5) + (84187.5 - 5812.5)}$$

$$[90{,}000 - (43875 + 72562.5 + 84187.5)] = 51900.$$

$$x_2 = 72562.5 + \frac{17437.5 - 72562.5}{(46125 - 43875) + (17437.5 - 72562.5) + (84187.5 - 5812.5)}$$

$$[90{,}000 - (43875 + 72562.5 + 84187.5)] = 25687.5.$$

$$x_3 = 84187.5 + \frac{5812.5 - 84187.5}{(46125 - 43875) + (17437.5 - 72562.5) + (84187.5 - 5812.5)}$$

$$[90{,}000 - (43875 + 72562.5 + 84187.5)] = 12412.5.$$

Por tanto, el vector de distribución queda definido por $x = (51900, 25687.5, 12412.5)$, esto quiere decir que los intereses se repartirían de la siguiente manera: para el jugador 1 el 11.53%, para el jugador 2 el 11.42% y para el jugador 3 el 16.55%.

Por otro lado, las posibilidades estratégicas de los jugadores dependen de las cantidades que proporcionen. Así que veremos otros dos escenarios para poder tomar una decisión.

Escenario 2. Consideremos dos variaciones este problema de asignación de interés. Primero, que el tesorero de ASTIN (jugador 1) desea invertir la cantidad de 1,700,000 € a corto plazo (3 meses). I.A.A. (jugador 2) depositó 1,100,000 € en el fondo común, y mantiene A.A.Br. (jugador 3) el monto de 300,000 €.

Escenario 3. Consideremos dos variaciones este problema de asignación de interés. Primero que el tesorero de ASTIN (jugador 1) desea invertir la cantidad de 1,700,000 € a corto plazo (3 meses). I.A.A. (jugador 2) depositó 1,400,000 € en el fondo común, y mantiene A.A.Br. (Jugador 3) el monto de 300,000 €.

Y los valores obtenidos se representan en la siguiente tabla:

Tabla 8. Asignación de intereses mediante el Escenario 2 y Escenario 3

Escenario 2					
	Repartición proporcional de los montos invertidos	**Valor de Shapley**	**Nucleolus**	**Nucleolus Proporcional**	**Nucleolus Disruptivo**
$\mathbf{x_1}$	51,000	48,395.83	48,708.33	51,000	48,481.65
Intereses	12%	11.39%	11.46%	12%	11.41%
$\mathbf{x_2}$	33,000	33,020.83	33,333.33	33,000	33,106.65
Intereses	12%	12%	12.12%	12%	12.04%
$\mathbf{x_3}$	9,000	11,583.33	10,958.33	9,000	11,411.70
Intereses	12%	15.44%	14.61%	12%	15.22%
Escenario 3					
	Repartición proporcional de los montos invertidos	**Valor de Shapley**	**Nucleolus**	**Nucleolus Proporcional**	**Nucleolus Disruptivo**
$\mathbf{x_1}$	51,000	51,093.75	51.140.625	52,378.37	51,127.01
Intereses	12%	12.02%	12.03%	12.32%	12.03%
$\mathbf{x_2}$	42,000	43,406.25	43,453.13	43,621.63	43,439.52
Intereses	12%	12.40%	12.41%	12.46%	12.41%
$\mathbf{x_3}$	9,000	7,500	7,406.25	6,000	7,433.47
Intereses	12%	10%	9.88%	8%	9.91%

Note el cambio profundo, la parte de A.A.Br. (Jugador 3), que ya no es necesaria para alcanzar los 3 millones, se reduce considerablemente, incluso en el caso del Nucleolus. El Valor de Shapley y el Nucleolus son buenos métodos de repartición, pero no parecen ser buenos conceptos de solución para este problema en particular.

Cuando dos jugadores forman una coalición, el Valor Shapley comparte los beneficios de la cooperación en partes lo más equitativas posibles, y recordemos que para este tipo de situaciones donde el dinero se juega en cantidades muy grandes, hay que tomar en cuenta que las cantidades iguales no conducen a porcentajes de repartición iguales. Así que, el Nucleolus Proporcional parece la repartición más apta para este problema específico por el contexto de multiplicar el rendimiento en base a su aportación proporcional dentro de cada coalición y no solo dividirlo de igual manera entre todos los participantes.

Los juegos cooperativos pueden utilizarse para resolver problemas en donde los participantes neseciten asignar cierta cantidad de dinero. Los jugadores podrán minimizar o maximizar su asignación dependiendo la naturaleza del problema. Si la situación es decidir cómo repartir sus pagos fiscales, es claro que todos los jugadores desearán minimizar su parte, sin embargo, si se tuviera que dividir el dinero extra generado por algún rendimiento, todos los participantes querrán maximizar su parte. El importe total que se le asignará a cada uno se determinará por la función característica $v(S)$; notemos que, en el ejemplo anterior, la función característica seria el dinero ganado por cada coalición, a esto se le considera un ejemplo de tipo superaditivo.

Un ejemplo sub-aditivo podría ser minimizar las asignaciones de costo de comisión por primas de seguro para un grupo de trabajadores, como lo que veremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 6. SEGURO DE VIDA GRUPO

6.1 Introducción

En este capítulo comienza la aplicación, es decir, a partir de toda la teoría estudiada en los primeros 5 capítulos y de los objetivos planteados al inicio de esta tesis, se ejemplificará la aplicación la Teoría de Juegos Cooperativos mediante un caso de estudio denominado “Seguro de Vida Grupo”.

Como ya sabemos, la asignación de costos juega un papel importante en la toma de decisiones económicas ya que nos ayuda a medir ingresos y/o pérdidas y promueve un uso más efectivo de los recursos. Para la asignación de costos, se trabajarán los métodos clásicos y los métodos de Teoría de Juegos Cooperativos, junto con las variantes del Nucleolus vistas en el Capítulo 5. Posteriormente, se hará la implementación de un programa en VBA Excel que ejemplifique la solución al mismo problema.

Antes de comenzar, recordemos en qué consiste un seguro de vida grupo. El Seguro de Vida Grupo está diseñado para proteger a los miembros de un grupo de personas unidas por un vínculo, diferente al de contratar el seguro tradicional de vida, ofreciendo condiciones sumamente favorables en su costo y en su manejo. Están orientados a incrementar el bienestar general de un conjunto de personas, por lo que son considerados como un elemento más de la previsión social.

De acuerdo al Reglamento del Seguro de Grupo en su artículo 2º de la CNSF, podemos considerar grupos asegurables a empleados y obreros de un mismo patrón o empresa, que realizan una misma actividad [19]. Por ejemplo: empleados de empresas legalmente constituidas como empresas Industriales, farmacéuticas; automotrices; siderúrgicas; alimenticias; empresas comerciales, Distribuidoras, importadoras y exportadoras; de servicios; financieros profesionales y técnicos; turísticos; hoteles; preparación de alimentos y bebidas; hospitalarios; educativos; recreativos; centros deportivos; teatros; cines; transportes y comunicaciones; aéreas; marítimas; terrestres; empleados de organismos gubernamentales; agrupaciones legalmente constituidas de colegios como: colegios de médicos, de actuarios, de abogados, de ingenieros, de arquitectos, etc. Una vez definido el grupo asegurable, por ley, éste deberá contar con un mínimo de 25 asegurados y deberán participar al menos el 75% de ellos en la contratación.

Cabe mencionar que para este ejemplo se trabajarán los conceptos de Empresario principal y Empresarios concurrentes; un Empresario principal, es aquel que contrata o subcontrata servicios correspondientes a la propia actividad que ejercen y que se desarrolla en su propio centro de trabajo, mientas que un Empresario concurrente es aquel que brinda sus servicios en ese mismo centro de trabajo y desarrolla las actividades con sus propios trabajadores cumpliendo las instrucciones acordadas entre él y el Empresario principal.

6.2 Problema de asignación de interés “Seguro de Vida Grupo”

Caso de estudio:

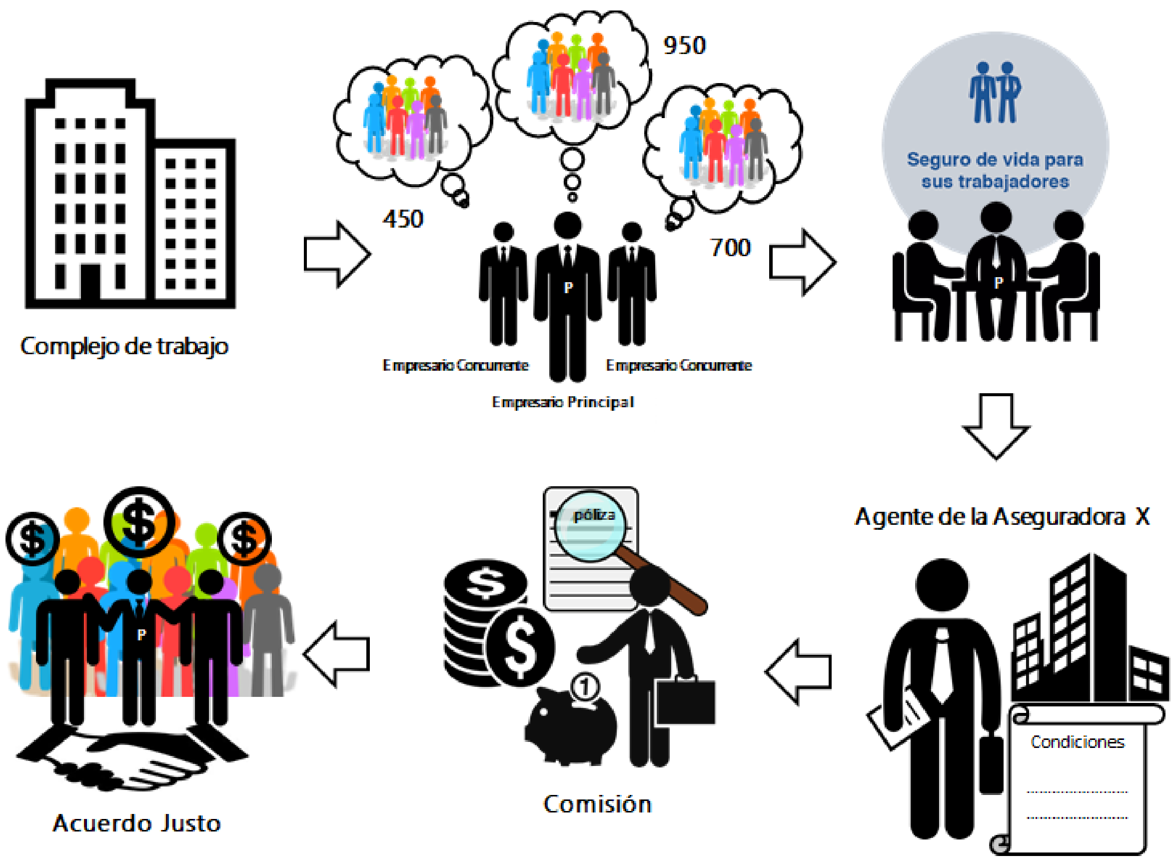


Figura 22. Diagrama del problema de Asignación “Seguro de Vida Grupo”

Situación:

Supongamos que, en cierto complejo de trabajo, el Empresario Principal (Jugador 1) quiere contratar un seguro de vida grupo (sin coberturas adicionales) para sus 950 empleados. En una junta de consejo, el Empresario Principal llega a un acuerdo con los otros dos Empresarios Concurrentes; el Empresario Concurrente 1 (jugador 2) y el Empresario Concurrente 2 (jugador 3), pertenecientes a su mismo centro de trabajo y todos juntos pretenden asegurar a sus trabajadores. El Empresario Concurrente 1 quiere asegurar a sus 450 empleados y el Empresario Concurrente 2 quiere asegurar a sus 700 empleados. Los empresarios se contactan con el agente de la Aseguradora X y el seguro de vida grupo se calcula bajo lo siguiente.

Condiciones:

Se considera un grupo cerrado, es decir, un grupo en el cual no se tendrán altas durante la vigencia del seguro.

El cálculo de la prima neta de riesgo será de un seguro temporal a un año que se realiza bajo un esquema sin contribución, es decir, el contratante del seguro (Él o los Empresarios) absorben el costo total de la prima.

La tasa de interés se toma al 4% efectiva anual.

La forma en la que se determina la suma asegurada de cada participante en el grupo será con base a los meses de sueldo, en particular, para este caso de estudio será de 36 meses para cada trabajador. Además, se aplica el siguiente criterio para establecer la suma asegurada máxima a otorgar por integrante del grupo [19].

Tabla 9. Criterio de la suma asegurada máxima.

Número de Asegurados	Factor	Tope
de 10 a 24	2	$ 750,000.00
de 25 a 49	3	$1,000,000.00
de 50 a 99	4	$1,250,000.00
de 100 a 149	5	$1,500,000.00
de 150 a 199	6	$1,750,000.00
de 200 a 299	7	$2,000,000.00
de 300 a 399	8	$2,250,000.00
de 400 a 499	9	$2,500,000.00
500 o más	10	$3,000,000.00

"en ningún caso será superior a la que resulte de multiplicar la suma asegurada promedio del grupo, por los factores que aparecen a continuación de acuerdo con el número de asegurados en el mismo grupo. Donde la suma asegurada promedio de un grupo es la que resulta de dividir la suma asegurada total del grupo, entre el número de asegurados que lo componen" [19].

El agente de la empresa aseguradora X recibirá una comisión que refleja el valor de sus servicios expresado como un porcentaje de las primas en función del tamaño del grupo. Este agente le da la oportunidad a los Empresarios de elegir el esquema bajo el cuál realizarán el pago de su comisión.

- En función del número de asegurados.

Tabla 10. Porcentaje de pago por comisión en función del número de asegurados.

Número de integrantes	**Comisión**
Menos de 50	10%
de 50 a 99	8%
de 100 a 499	7.5%
de 500 a 999	5%
de 1000 a 2999	4%
de 3000 o más	2%

- En función del valor de su prima

Tabla 11. Porcentaje de pago por comisión en función del valor de su prima.

Valor de la Prima	**Comisión**
$5,000	10%
$10,000	5%
$15,000	3%
$20,000	1%
$50,000	0.50%
Cualquier otra	0.30%

- Mediante un porcentaje fijo. Para este caso de estudio se tomará el 4.5% de comisión por concepto de póliza sin importar el número de asegurados ni el valor de la prima.

Al aceptar el contrato, los empresarios deben elegir uno, de los tres esquemas de comisión por conceptos de primas. ¿Cuál esquema de comisión sería más apropiado elegir para los Empresarios?; en ese esquema, ¿Cómo se repartirían la comisión los 3 Empresarios que van a contratar el seguro?, ¿Cuál es el mejor método de asignación de costos?

Solución:

Como ya se ha mencionado, este caso de estudio se puede modelar como un juego cooperativo con utilidades transferibles; contamos con los participantes que juegan por dividir un “costo” que resulta de la cooperación que hay entre todas las coaliciones formadas entre ellos; todos los jugadores son libres de negociar entre ellos, por tanto, lo que se pretende es analizar los diversos métodos mencionados anteriormente con el objetivo de comparar cada asignación y tomar la más justa posible desde el punto de vista de los jugadores.

De igual manera este estudio se hará para los tres diferentes esquemas de comisión (en función del número de asegurados, en función del valor de su prima y mediante un porcentaje fijo).

En la parte de ANEXOS se podrán encontrar las tablas correspondientes a los datos de cada uno de los empleados del Empresario Principal, del Empresario Concurrente 1 y del Empresario Concurrente 2 que contienen: la clave del empleado (ID), fecha de nacimiento, edad actual, salario quincenal, salario mensual y el sexo, así como la tabla correspondiente a las probabilidades de fallecimiento que son indispensables para este problema. Cabe señalar que todas las bases de datos, así como la tabla de probabilidades de fallecimiento fueron retomadas de una actividad realizada en la materia de Administración de Riesgos, impartida por el Dr. José Raúl Castro Esparza.

Dado que se trabaja bajo el supuesto de grupo cerrado, el primer paso es determinar la suma asegurada por empleado. La forma en la que se determina la SA de cada participante es bajo la regla de 36 meses de sueldo, así:

$$SA = Salario\ Mensual * 36.$$

Después de calcular la *SA* se debe de tener especial cuidado con el criterio de la suma asegurada máxima para cada grupo de trabajadores que depende del número de asegurados [19]; la manera de calcular la *SA* máxima es:

$$SA\ máxima = SA\ promedio * Factor.$$

En donde:

$$SA\ promedio = \frac{SA\ total\ de\ grupo}{No.de\ asegurados\ en\ el\ grupo}.$$

Además, para prevenir situaciones en donde los participantes tengan una suma asegurada muy elevada, se debe establecer un tope en cada rango.

Es decir, por ejemplo, para la base de datos de empleados del Empresario Principal (ANEXO 2; cuenta con 950 empleados activos), supongamos que el trabajador con clave EMP001 percibe un salario mensual de $14,059.76. Entonces:

$$\text{SA} = \$14{,}059.76 * 36 = \$506{,}151.36.$$

Después de realizar este paso con cada uno de los empleados, el SA promedio del grupo es de $381,691.06, entonces, de acuerdo al criterio de la SA máxima y considerando el factor de 10 dado que en el grupo hay 500 o más integrantes:

$$SA\ máxima = \$381{,}691.06 * 10 = \$3{,}816{,}910.65\ .$$

Ahora considerando el tope máximo de acuerdo a la tabla dada se tiene un valor de $3,000,000.00 por tanto, para cada integrante de este grupo si el valor de su suma asegurada es mayor que $3,000,000.00 solo podrá asegurarse máximo por esta cantidad. En particular para el trabajador con clave EMP001 la suma asegurada es:

$$\text{SA} = \$14{,}059.76 * 36 = \$506{,}151.36 \leq \$3{,}000{,}000.00.$$

Ahora se debe calcular el valor de la prima de riesgo para cada participante en el grupo; se calcula mediante el método de Tarificación con clasificación manual [19]. Este método habitualmente se utiliza para establecer los costos iniciales que se cobrarán a los grupos que no han sido asegurados previamente o de los cuales no se conoce su experiencia. Note que en México el principal factor utilizado en la determinación de cuotas para la cotización del Seguro de vida Grupo es la edad.

Lo siguiente a calcular es la Prima neta de riesgo de un seguro temporal a un año que se define como [19]:

$$\overline{A}_{1_{x:\overline{1}|}} = \int_0^{t=1} e^{-\delta t}\ {}_tP_x\ \mu_x(t)dt.$$

En dónde:

x, Representa un individuo de edad x.

${}_tP_x$, Es la probabilidad de que la persona de edad x llegue a la edad $x + t$.

$\mu_x(t)$, Es la fuerza de mortalidad o medida de mortalidad para los individuos que llegan a la edad $x + t$ estando en la edad x.

$e^{-\delta t}$, También conocido como v, Representa un factor de descuento de la tasa de interés en el tiempo t.

Suponiendo que se tendrá una distribución uniforme de siniestros durante el año, tenemos las siguientes igualdades:

$${}_tP_x = 1 - {}_tq_x.$$

$$\mu_x(t) = \frac{q_x}{1 - {}_tq_x}.$$

En dónde:

${}_tq_x$ Es la probabilidad de que la persona de edad x muera antes de alcanzar la edad $x + t$.

Por otro lado δt, es la **fuerza de interés** constante en el tiempo t y tiene la capacidad de medir la intensidad con la que el interés opera en cada momento del tiempo, está definida como:

$$e^{\delta t} = 1 + i \text{ ó } \delta = \ln(1 + i).$$

Y sustituyendo se tiene que:

$$\overline{A}_{1_{x:\overline{1}|}} = \int_0^1 e^{-\delta t}(1 - {}_tq_x)\frac{q_x}{1 - {}_tq_x}dt = q_x\int_0^1 e^{-\delta t}dt = q_x\left(-\frac{1}{\delta}\right)e^{-\delta t}\Big|_0^1 = q_x\frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta}).$$

De igual manera, recordando las igualdades de tasas de interés podemos trabajar cualquiera de las siguientes equivalencias:

$$1-e^{-\delta t}=1-e^{-\ln(1+i)}=1-e^{\ln\left(\frac{1}{1+i}\right)}=1-\frac{1}{1+i}=\frac{i}{1+i}=iv$$

Para este caso de estudio se considera una tasa de interés de 4% efectiva anual. Finalmente, el costo de la prima para cada integrante del grupo es:

$$Prima = SA * \text{Prima neta de riesgo de un seguro temporal a un año}$$

Es decir, por ejemplo, para la base de datos de empleados del Empresario Principal (que cuenta con 950 empleados activos), supongamos que el trabajador con clave EMP001 tiene una suma asegurada de $506,151.36.

$$\bar{\mathrm{A}}_{1_{\mathrm{x}:\bar{1}|}}=\mathrm{q_x}\frac{1}{\delta}(1-\mathrm{e}^{-\delta t}).$$

En dónde: el valor de $\mathrm{q_x}$ se obtiene el anexo 2 correspondiente a las probabilidades de Fallecimiento. En particular, el empleado en cuestión es una mujer de 61 años de edad así que $\mathrm{q_x}=0.01342$.

La tasa de interés es $\mathrm{i} = 4\ \%$, así, la prima neta de riesgo de un seguro temporal a un año es de 0.013160236 y finalmente, el valor de la prima para este empleado es de $6,661.07.

Generalmente, la venta de los productos del Seguro de Grupo se realiza a través de agentes o corredores que reciben una comisión que debe reflejar el valor de sus servicios. Este valor se basa en el volumen y complejidad del trabajo que realizan. Las comisiones son expresadas generalmente como porcentaje de las primas.

Como lo que nos interesa es saber la cantidad de comisión que le correspondería pagar a cada Jugador (Empresario), para efectos de este caso de estudio, dependiendo las cooperaciones que ocurran entre los 3 jugadores se podrán formar 7 diferentes coaliciones:

$$c(1), c(2), c(12), c(3), c(13), c(23), c(123).$$

La solución siempre adoptada en la práctica equivale a asignar el mismo porcentaje de comisión para todos. Eso, sin embargo, implica una perfecta solidaridad entre los jugadores, es decir, que todos aceptan no usar sus diversas posibilidades de amenaza. Como esta asignación no es la única aceptable, compararemos diferentes métodos. Primero se trabajarán con los métodos clásicos de asignación de costos y posteriormente con los métodos de Teoría de Juegos vistos en el **Ejemplo 5.1.1.**

CASO 1.- Comisión en función del número de asegurados

En este caso, cada coalición formada, pagará un porcentaje de la prima de cada integrante dependiendo la cantidad de asegurados que conformen la coalición; de acuerdo a este caso de estudio, si el grupo tiene a menos de 50 integrantes, la comisión será del 10% por prima; si el grupo tiene entre 50 y 99 integrantes, la comisión será del 8% por prima, si el grupo tiene entre 100 y 499 integrantes, la comisión será del 7.5% por prima, si el grupo tiene entre 500 y 999 integrantes, la comisión será del 5% por prima, si el grupo tiene entre 1000 y 2999 integrantes, la comisión será del 4% por prima, y si el grupo tiene 3000 o más integrantes, la comisión será del 2% por prima. Posterior a esto, se suman las comisiones por prima y se obtiene el total de la comisión por coalición.

Así, el juego queda definido de la siguiente manera:

$$c(1) = 307{,}272.11, \quad c(2) = 232{,}503.70, \quad c(12) = 369{,}819.66,$$

$$c(3) = 242{,}883.89, \quad c(13) = 440{,}124.80, \qquad c(23) = 318{,}309.09,$$

$$c(123) = 564{,}126.78.$$

CASO 2.- En Función del valor de su prima

En este caso, cada coalición formada, pagará un porcentaje de la prima de cada integrante dependiendo de su valor. De acuerdo a este caso de estudio, si la prima del trabajador es de hasta \$5,000.00, la comisión será del 10% por prima; si la prima es de hasta \$10,000.00, la comisión será del 5% por prima; si la prima es de hasta \$15,000.00, la comisión será del 3% por prima, si la prima es de hasta \$20000.00, la comisión será del 1% por prima, si la prima es de hasta \$50,000.00, la comisión será del 0.50% por prima, y en cualquier otro caso la comisión será del 0.30% por prima. Posterior a esto, se suman las comisiones por prima y se obtiene el total de la comisión por coalición.

Así, el juego queda definido de la siguiente manera:

$$c(1) = 294{,}892.76, \quad c(2) = 138{,}991.72, \quad c(12) = 433{,}884.48,$$

$$c(3) = 218{,}662.85, \quad c(13) = 513{,}555.60, \quad c(23) = 357{,}654.57,$$

$$c(123) = 652{,}547.32.$$

CASO 3.- Mediante un porcentaje fijo

De acuerdo a este caso de estudio, cada coalición formada pagará el 4.5% de comisión por prima sin importar el número de asegurados que tengan. Posterior a esto, se suman las comisiones y se obtiene el total de la comisión por coalición.

Así, el juego queda definido de la siguiente manera:

$$c(1) = 276{,}544.90, \quad c(2) = 139{,}502.22, \quad c(12) = 416{,}047.12,$$

$$c(3) = 218{,}595.50, \quad c(13) = 495{,}140.40, \quad c(23) = 358{,}097.72,$$

$$c(123) = 634{,}642.62.$$

Para simplificar todos los cálculos realizados en los 3 casos anteriores, podemos ordenarlos de manera tabular como se muestra en la Tabla 12.

Tabla 12. Asignaciones correspondientes para cada uno de los tres jugadores de acuerdo a la comisión en función del número de asegurados.

Caso 1. Comisión en función del número de asegurados						
	Repartición igual de la pérdida total	**Moriarity**	**Repartición igual de los costos no marginales**	**Repartición proporcional de los costos no marginales**	**Repartición proporcional en base a la cantidad de empleados por asegurar**	**Comisión Total**
x1	234,427.81	221,476.11	245,817.69	245,817.69	255,200.21	564,126.78
%	41.556	39.26	43.575	43.575	45.238	100.00
x2	159,659.39	167,584.41	124,001.97	124,001.98	120,884.31	564,126.78
%	28.302	29.707	21.981	21.981	21.429	100.00
x3	170,039.58	175,066.26	194,307.11	194,307.11	188,042.26	564,126.78
%	30.142	31.033	34.444	34.444	33.333	100.00

	Valor de Shapley	Nucleolus Disruptivo	Nucleolus	Nucleolus Proporcional		Comisión Total
x1	240,122.75	245,817.69	234,427.81	221,476.11		564,126.78
%	42.565	43.575	41.556	39.26		100.00
x2	141,830.68	124,001.97	159,659.39	167,584.41		564,126.78
%	25.142	21.981	28.302	29.707		100.00
x3	182,173.35	194,307.12	170,039.58	175,066.26		564,126.78
%	32.293	34.444	30.142	31.033		100.00
Caso 2. Comisión en función del valor de su prima						
	Repartición igual de la pérdida total	**Moriarity**	**Repartición igual de los costos no marginales**	**Repartición proporcional de los costos no marginales**	**Repartición proporcional en base a la cantidad de empleados por asegurar**	**Comisión Total**
x1	294,892.76	294,892.76	294,892.76	294,892.76	295,199.98	652,547.3234
%	45.191	45.191	45.191	45.191	45.238	100
x2	138,991.72	138,991.72	138,991.72	138,991.72	139,831.57	652,547.3234
%	21.300	21.300	21.300	21.300	21.429	100
x3	218,662.85	218,662.85	218,662.85	218,662.85	217,515.78	652,547.3234
%	33.509	33.509	33.509	33.509	33.333	100
	Valor de Shapley	**Nucleolus Disruptivo**	**Nucleolus**	**Nucleolus Proporcional**		**Comisión Total**
x1	294,892.76	294,892.76	294,892.76	294,892.76		652,547.3234
%	45.191	45.191	45.191	45.191		100
x2	138,991.72	138,991.72	138,991.72	138,991.72		652,547.3234
%	21.300	21.300	21.300	21.300		100
x3	218,662.85	218,662.85	218,662.85	218,662.85		652,547.3234
%	33.509	33.509	33.509	33.509		100
Caso 3. Mediante un porcentaje fijo						
	Repartición igual de la pérdida total	**Moriarity**	**Repartición igual de los costos no marginales**	**Repartición proporcional de los costos no marginales**	**Repartición proporcional en base a la cantidad de empleados por asegurar**	**Comisión Total**
x1	276,544.90	276,544.90	276,544.90	276,544.90	287,100.23	634,642.6228
%	43.575	43.575	43.575	43.575	45.238	100
x2	139,502.22	139,502.22	139,502.22	139,502.22	135,994.85	634,642.6228
%	21.981	21.981	21.981	21.981	21.429	100
x3	218,595.50	218,595.50	218,595.50	218,595.50	211,547.54	634,642.6228
%	34.444	34.444	34.444	34.444	33.333	100
	Valor de Shapley	**Nucleolus Disruptivo**	**Nucleolus**	**Nucleolus Proporcional**		**Comisión Total**
x1	276,544.90	276,544.90	276,544.90	276,544.90		634,642.6228
%	43.575	43.575	43.575	43.575		100
x2	139,502.22	139,502.22	139,502.22	139,502.22		634,642.6228
%	21.981	21.981	21.981	21.981		100
x3	218,595.50	218,595.50	218,595.50	218,595.50		634,642.6228
%	34.444	34.444	34.444	34.444		100

6.3 “Seguro de Vida Grupo” Resultados

En base al caso de estudio, las preguntas a responder son:

- ¿Cuál esquema de comisión sería más apropiado para los Empresarios?
- ¿Cómo se repartirían la comisión los 3 Empresarios que van a contratar el seguro?
- ¿Cuál es el mejor método de asignación de costos?

El objetivo primordial de este problema se centra en definir un concepto solución que se adapte a las peculiaridades de un juego de asignación de costos. Dicha solución debe cumplir con las siguientes características:

- Descartar la idea de elegir siempre la “Repartición igual” o cualquiera de los métodos clásicos sin visualizar otras opciones; siempre la solución a escoger debe tomar en cuenta otros recursos.
- Que se analicen todos los costos entre las coaliciones y se repartan de la manera más justa posible.
- Que al valorar todos los casos se consideren las aportaciones de los jugadores dentro de cada método.

El esquema de comisión que resulta más conveniente para los empresarios, es el modelo 1 “En función del número de asegurados”, ya que pagarían una comisión total de $564,126.78. Obviamente, desde el punto de vista del agente, el esquema que le dejaría mayores ganancias sería “En función del valor de su prima” donde podría obtener una comisión de $652,547.32. Es claro que, para él, este esquema de comisión es el menos generoso; recordemos que los juegos cooperativos pueden utilizarse como modelos en donde los participantes pueden minimizar o maximizar su asignación dependiendo la naturaleza del problema.

Ahora, la situación que se presenta es que, sabiendo ya el mejor esquema, se debe decidir cómo repartir los pagos de comisión entre los 3 jugadores, es claro que todos los jugadores desearán minimizar su parte. Se aplicaron varios métodos (clásicos y nuevos) para comparar las distintas asignaciones.

Si analizamos primero los métodos clásicos, al utilizar la repartición proporcional en base a la cantidad de empleados por asegurar, el vector de distribución de costos queda definido por $x = (255{,}200.21,\ 120{,}884.31,\ 188{,}042.26)$ equivalente a que el jugador 1 pague el 45.238%, el jugador 2 pague el 21.429% y el jugador 3 el 33.33% del 100% de la comisión total.

Al utilizar la repartición igual de la pérdida total, el vector de distribución de costos queda definido por $x = (234{,}427.81,\ 159{,}659.39,\ 170{,}039.58)$ equivalente a que el jugador 1 pague el 41.556%, el jugador 2 pague el 28.302% y el jugador 3 el 30.142% del 100% de la comisión total.

Al utilizar el método Moriarity, el vector de distribución de costos queda definido por $x = (221{,}476.11,\ 167{,}584.41,\ 175{,}066.26)$ equivalente a que el jugador 1 pague el 39.260%, el jugador 2 pague el 29.707% y el jugador 3 el 31.033% del 100% de la comisión total.

Al utilizar la repartición igual de los costos no marginales y la repartición proporcional de los costos no marginales; el vector de distribución de costos queda definido por $x = (245{,}817.69,\ 124{,}001.98,\ 194307.12)$ equivalente a que el jugador 1 pague el 43.575%, el jugador 2 pague el 21.981% y el jugador 3 el 34.444% del 100% de la comisión total.

Todos los métodos indican un gasto menor para el jugador 2; sin embargo, hay que tomar en cuenta que no podemos conformarnos solo con elegir un método clásico porque algún jugador piense que a él le conviene más. Recordemos que lo que se busca es asignar el costo más justo por asegurar a cada uno de sus empleados.

Por otro lado, el Nucleolus da una asignación $x = (234{,}427.80\ ,159{,}659.39\ ,170{,}039.58)$ equivalente a que el jugador 1 pague el 41.556%, el jugador pague 2 el 28.302% y el jugador 3 pague el 30.142% del 100% de la comisión total, el Nucleolus existe si el Core es no vacío, es decir, se limita a ciertos vectores de pago que cumplen una serie de restricciones que son lo más razonables.

El Nucleolus Proporcional da una asignación $x = (221{,}476.11\ ,167{,}584.41, 175{,}066.26)$ equivalente a que el jugador 1 pague el

39.260%, el jugador pague 2 el 29.707% y el jugador 3 pague el 31.033% del 100% de la comisión total, el Nucleolus Proporcional nos otorga la cantidad ponderada x que le corresponde a cada coalición en base al número de jugadores de la coalición. Esta modificación al Nucleolus, minimiza los excesos.

Calculamos el Core de este juego con $J = \{1,2,3\}$:

$c(\emptyset) = 0,$ $c(\{1\}) = 307{,}272.11$, $c(\{2\}) = 232{,}503.70$, $c(\{1,2\}) = 369{,}819.66$,

$c(\{3\}) = 242{,}883.89$, $c(\{1,3\}) = 440{,}124.80$, $c(\{2,3\}) = 318{,}309.09$, $c(\{1,2,3\}) = 564{,}126.78$.

(Principio de eficiencia): $x(S) = x_1 + x_2 + x_3 = 564{,}126.78$.

(Racionalidad individual): $x_1 \geq 307{,}272.11$, $x_2 \geq 232{,}503.70$, $x_3 \geq 242{,}883.89$.

(Racionalidad para las coaliciones): $x_1 + x_2 \geq 369{,}819.66$, $x_1 + x_3 \geq 440{,}124.80$,

$x_2 + x_3 \geq 318{,}309.09$.

Se tiene que:

$$45{,}817.69 \leq x_1 \leq 307{,}272.11,$$

$$124{,}001.98 \leq x_2 \leq 232{,}503.70,$$

$$194{,}307.12 \leq x_3 \leq 242{,}883.89.$$

Recordemos que, el Core es un conjunto de distribuciones de pagos que ofrece a cada coalición un beneficio mayor o igual que el que esta coalición puede conseguir por sí misma. Si analizamos los métodos anteriores, podemos notar que todos recomiendan asignaciones muy distintas, todos cumplen la propiedad de eficiencia $x(J) = x_1 + x_2 + x_3$ y racionalidad individual $x_i \leq c(\{i\})$, pero solo la repartición igual de los costos no marginales y la repartición proporcional de los costos no marginales verifica las condiciones de racionalidad para las coaliciones con $x_i \geq c(N) - c(N - \{i\}) = CM(i)$.

Por ello, los métodos mostrados anteriormente se deben **rechazar,** al no ser lo “suficientemente justos”; pero como se menciono al inicio, no es suficiente conformarse con un método clásico de solución sin antes verificar otras opciones.

El Valor de Shapley parece ser una repartición apta para este problema específico ya que además de cumplirse una serie de restricciones razonables, el porcentaje de comisión que le corresponde a cada jugador no se divide de manera proporcional y ya, sino que sabemos que la función de pagos $\varphi(v)$ cumple los axiomas de eficiencia, simetría, tratamiento del jugador pasivo y Aditividad.

Tiene una asignación $x = (240{,}122.75\ ,141{,}830.69\ ,182{,}173.35)$ equivalente a que el jugador 1 pague el 42.565%, el jugador pague 2 el 25.142% y el jugador 3 pague el 32.293% del 100% de la comisión total.

El pago que el Valor de Shapley asigna a cada jugador su costo como valor esperado si se supone que los jugadores han llegado a un punto de negociación y a cada uno de ellos se le reclama su coste a la coalición de jugadores que llegan antes que él. Además, se asume que el orden de llegada es aleatorio y todos los órdenes son igualmente probables; esta asignación es una imputación siempre eficiente ya que toma en cuenta la formación de las coaliciones en el juego cooperativo y las múltiples alternativas entre jugadores o diferentes grados de cooperación entre los mismos. Por tanto, este método representa la importancia que tiene cada jugador para la cooperación total y lo recompensa razonablemente.

Ahora analizando el Nucleolus Disruptivo, podemos notar que nos da una asignación $x = (\ 245{,}817.69\ \ ,124{,}001.98\ ,194{,}307.12\ )$ equivalente a que el jugador 1 pague el 43.575%, el jugador pague 2 el 21.981% y el jugador 3 pague el 34.444% del 100% de la comisión total; el Nucleolus Disruptivo brinda a cada valor de la distribución x una media ponderada de la relación entre lo que ganarían o perderían si el jugador *i* abandonara alguna coalición, en particular, esta asignación (vector de pago) minimiza el máximo grado de incorformidad de cualquier coalición ya que pertenece a la región limitada por el Core.

El Valor de Shapley y el Nucleolus Disruptivo satisfacen las condiciones de eficiencia y racionalidad individual, pero, si verificamos si cumplen la propiedad de monotonía resultEscriba aquí la ecuación.a que sólo el Valor de Shapley la cumple ya que distribuye cualquier costo o beneficio de manera uniforme entre los participantes, por otro lado, solo el Nucleolus Disruptivo cumple la propiedad de razonabilidad para las coaliciones.

La propuesta planteada por Shapley es la más utilizada en el tema del reparto de costos a través de la Teoría de Juegos y la justificación se centra en que cumple las condiciones deseables de cualquier reparto satisfactorio y justo. Sin embargo, se propone como mejor método de solución a este problema el **Nucleolus Disruptivo**; esto es porque, aunque que la repartición igual de los costos no marginales y la repartición proporcional de los costos no marginales tienen la misma asignación, el Nucleolus Disruptivo brinda a cada valor de la distribución de pagos una media ponderada de la relación de lo que estaría propenso a perder el jugador *i* al momento de abandonar alguna coalición.

Cabe señalar que este método se comporta de manera similar al Valor de Shapley, asi que le da su importancia a cada jugador y lo recompensa razonablemente, minimizando cualquier inconformidad. Además de todo pertenece al Core, por ese motivo, aunque el Valor de Shapley también podría ser un método apto para la asignación de costos, para este problema en particular, no se toma como el mejor método solución al no exigirle que cumpla el principio de racionalidad coalicional y su solución no necesariamente pertenezca al Core.

6.4 CSG Programa

La tecnología desempeña un papel preponderante en el ámbito cultural, social, deportivo, de entretenimiento y por supuesto educativo; gracias a ella, el plano de la enseñanza matemática se ha revolucionado y llevado a la práctica conceptos que la teoría no permite comprender a simple vista.

La creación del programa "CSG" es una alternativa de solución al problema "Seguro de vida grupo"; para su realización se utilizó VBA Excel y tiene como objetivo despertar el interés en estudiantes, profesores y/o personas no conocedoras del tema y mediante una manera más visible, aprender sobre el concepto de asignación de costos mediante la aplicación de métodos de Teoría de Juegos Cooperativos.

Recordemos que Microsoft Office Excel, es una aplicación para manejar hojas de cálculo. Este programa fue desarrollado por Microsoft y actualmente es muy utilizado en todo tipo de tareas, sobre todo financieras y contables. Excel combina las funciones de una hoja de cálculo con gráficos y características de un manejador de una base de datos. Desde 1993, Excel incluyó Visual Basic for Applications (VBA), un lenguaje de programación basado en Visual Basic, que añade la capacidad para automatizar tareas en Excel y para proporcionar las funciones definidas por el usuario para su uso en las hojas de trabajo.

VBA es un lenguaje de programación de Office lo que significa utilizar los objetos de Office con ayuda del lenguaje de programación VBA, y así, se puedan resolver tareas que, de lo contrario podrían llevar mucho tiempo.

Entonces, las operaciones tradicionales que se pueden realizar en Excel se pueden automatizar, de manera que se mantenga un registro que las contenga y posteriormente hacer referencia a ellas para la simplificación de tareas.

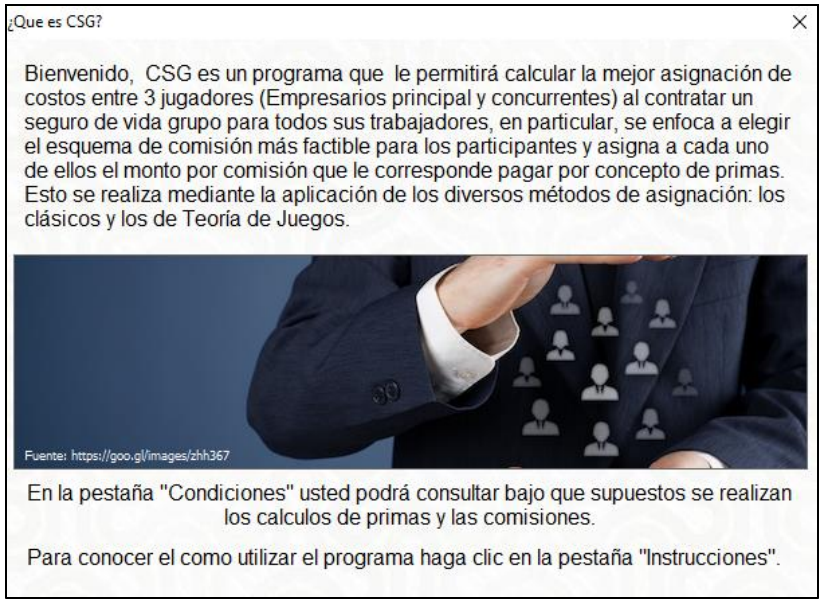
6.4.1 Implementación

A continuación, explicaremos todo el proceso para la implementación del programa.

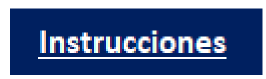
- Se usó la herramienta Microsoft Office Excel y se creó un archivo con el nombre “CSG”.
- Se creó la página principal en una pestaña de Excel a la que se le denominó “Bienvenido”. En esta pestaña se colocaron los botones necesarios para lograr la interacción con el usuario. Los botones creados fueron:

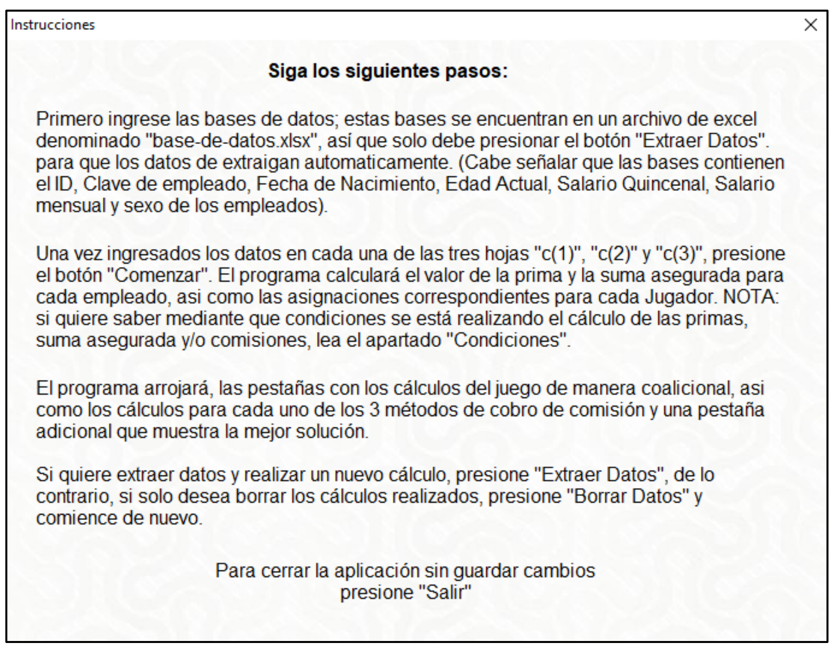
    - ¿Qué es CSG?
    - Instrucciones
    - Condiciones
    - Salir
    - Comenzar
    - Borrar Datos
    - Extraer Datos
    - ¿Cuál es el problema?

Diagrama, Botón y Ventana del Botón "¿Qué es CSG?"

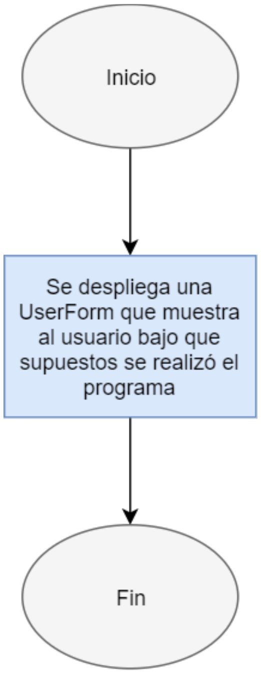


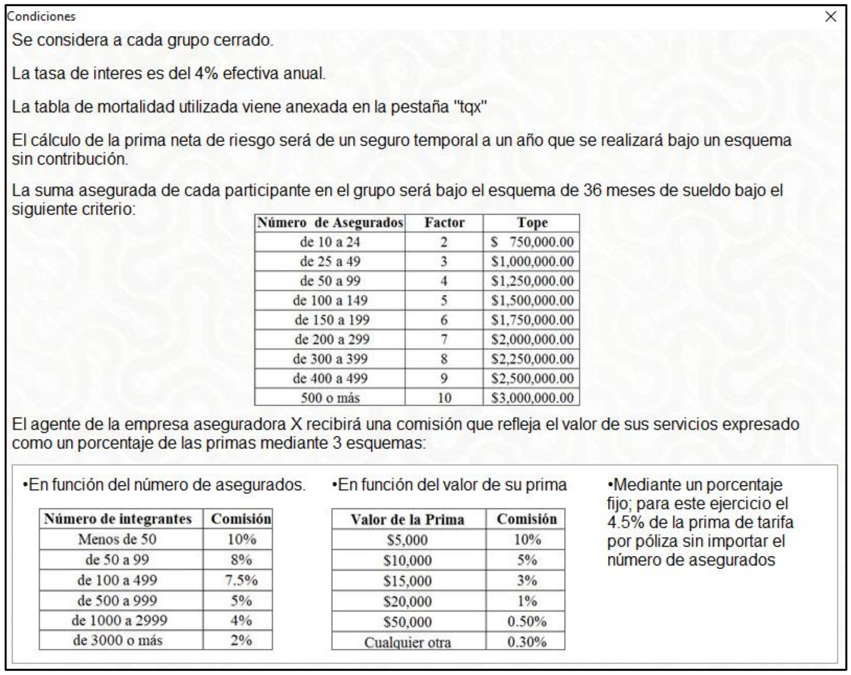
Diagrama, Botón y Ventana del Botón "Instrucciones"





Diagrama, Botón y Ventana del Botón “Condiciones”





Condiciones

Se considera a cada grupo cerrado.

La tasa de interes es del 4% efectiva anual.

La tabla de mortalidad utilizada viene anexada en la pestaña "tqx"

El cálculo de la prima neta de riesgo será de un seguro temporal a un año que se realizará bajo un esquema sin contribución.

La suma asegurada de cada participante en el grupo será bajo el esquema de 36 meses de sueldo bajo el siguiente criterio:

Número de Asegurados	Factor	Tope
de 10 a 24	2	$ 750,000.00
de 25 a 49	3	$1,000,000.00
de 50 a 99	4	$1,250,000.00
de 100 a 149	5	$1,500,000.00
de 150 a 199	6	$1,750,000.00
de 200 a 299	7	$2,000,000.00
de 300 a 399	8	$2,250,000.00
de 400 a 499	9	$2,500,000.00
500 o más	10	$3,000,000.00

El agente de la empresa aseguradora X recibirá una comisión que refleja el valor de sus servicios expresado como un porcentaje de las primas mediante 3 esquemas:

•En función del número de asegurados.

Número de integrantes	Comisión
Menos de 50	10%
de 50 a 99	8%
de 100 a 499	7.5%
de 500 a 999	5%
de 1000 a 2999	4%
de 3000 o más	2%

•En función del valor de su prima

Valor de la Prima	Comisión
$5,000	10%
$10,000	5%
$15,000	3%
$20,000	1%
$50,000	0.50%
Cualquier otra	0.30%

•Mediante un porcentaje fijo; para este ejercicio el 4.5% de la prima de tarifa por póliza sin importar el número de asegurados

Diagrama y Botón “Salir”

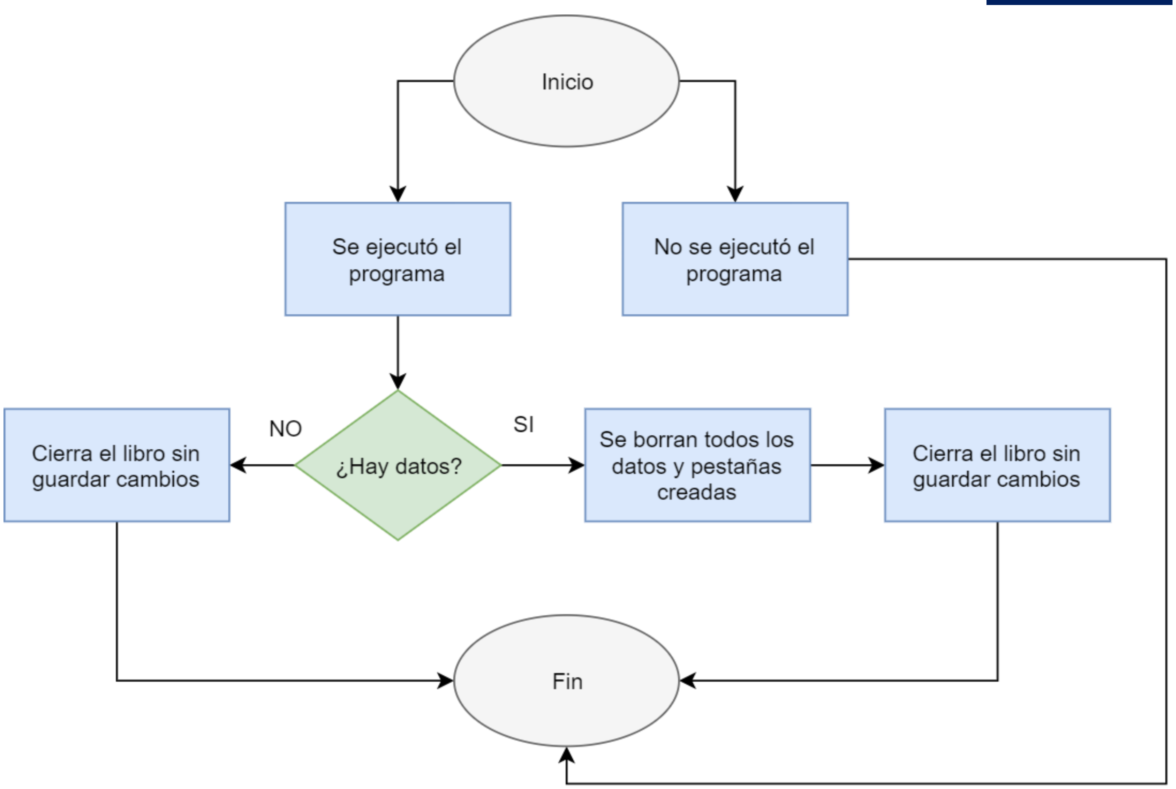


Diagrama y Botón "Comenzar"

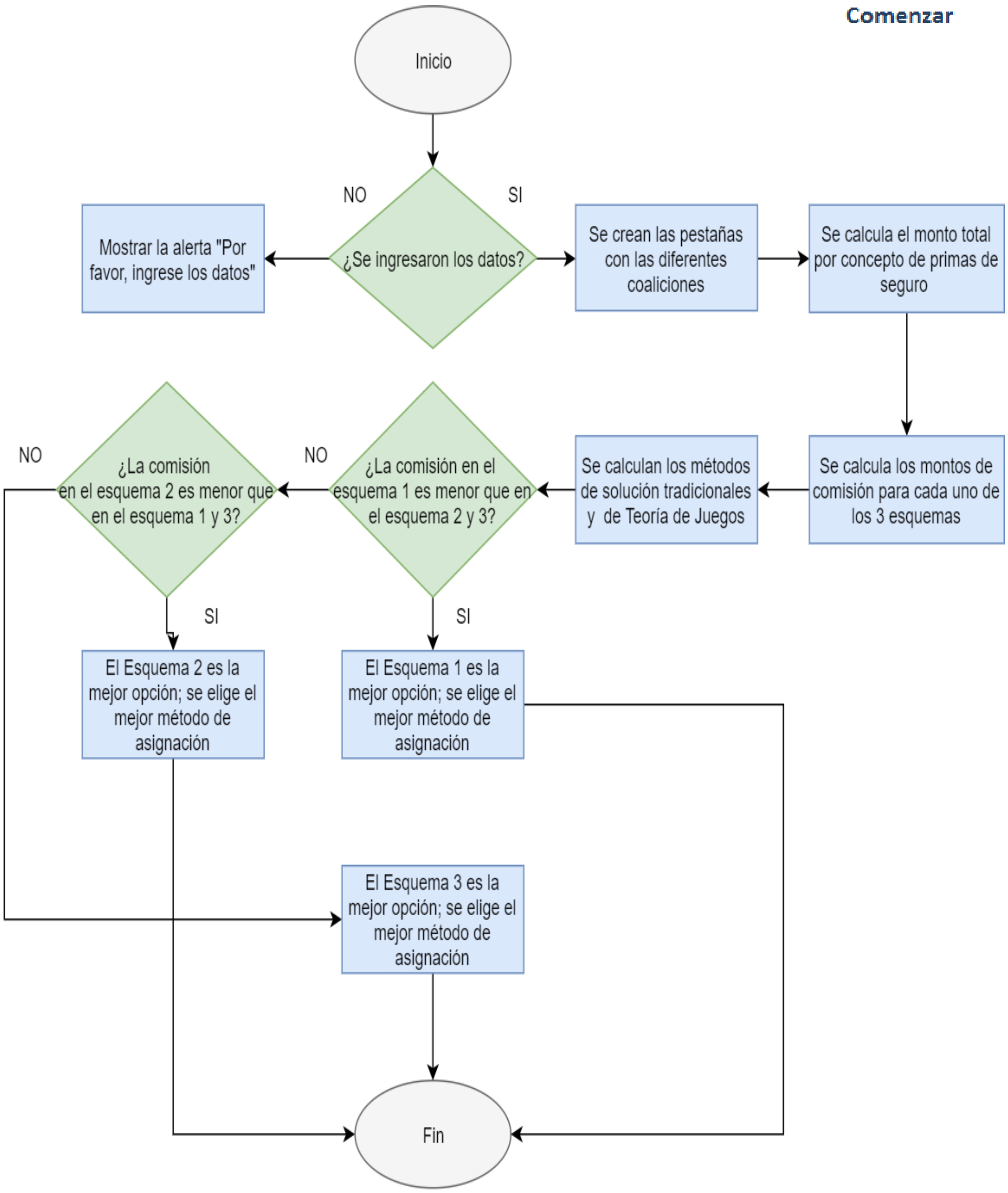


Diagrama y Botón "Borrar Datos"

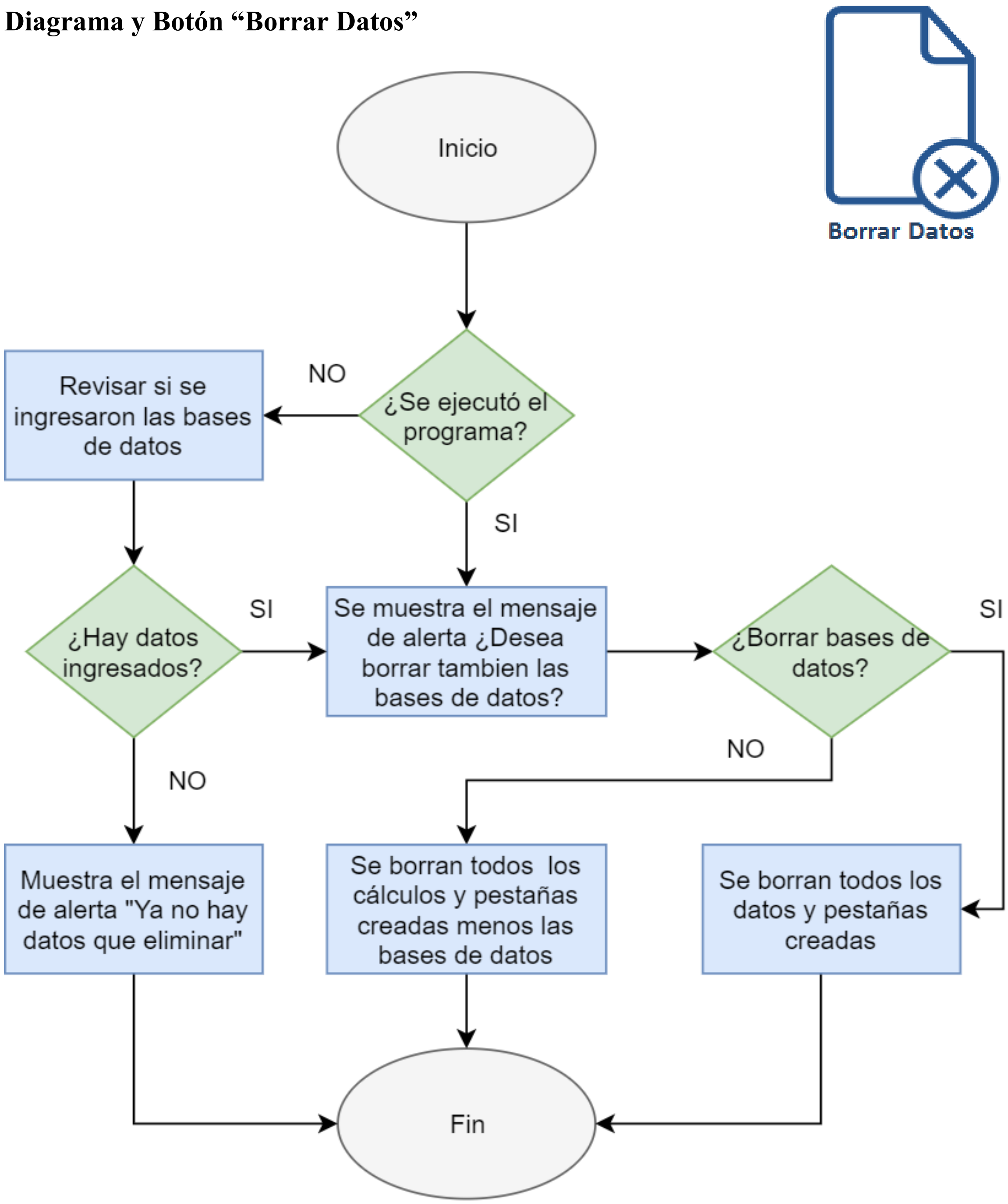
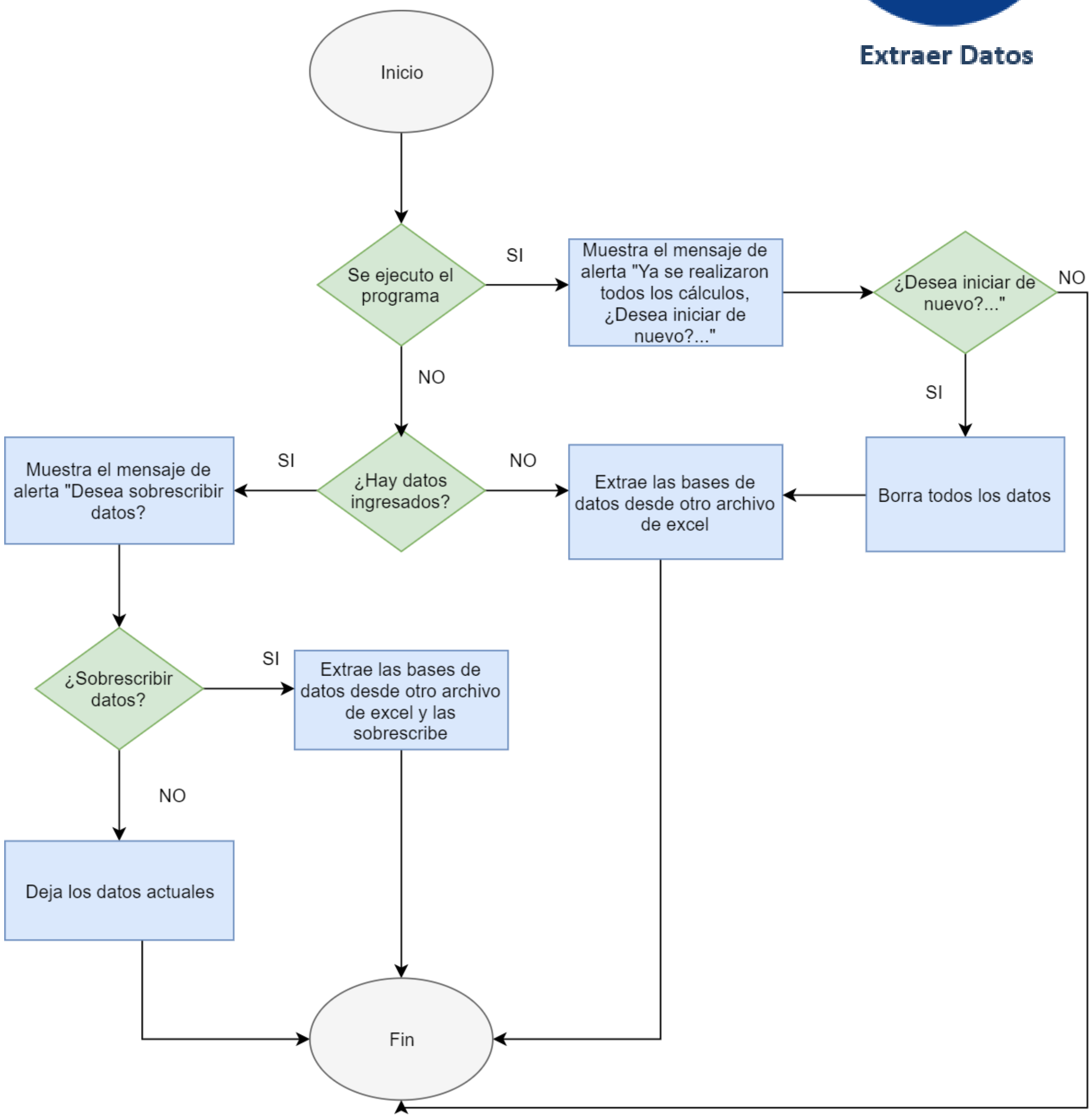
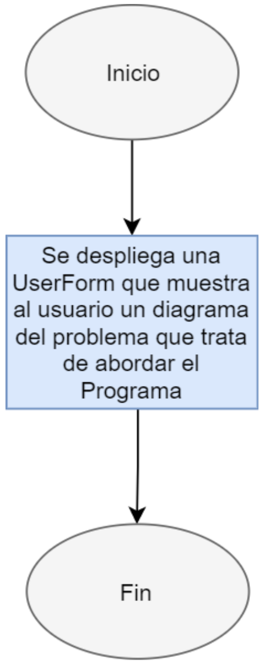
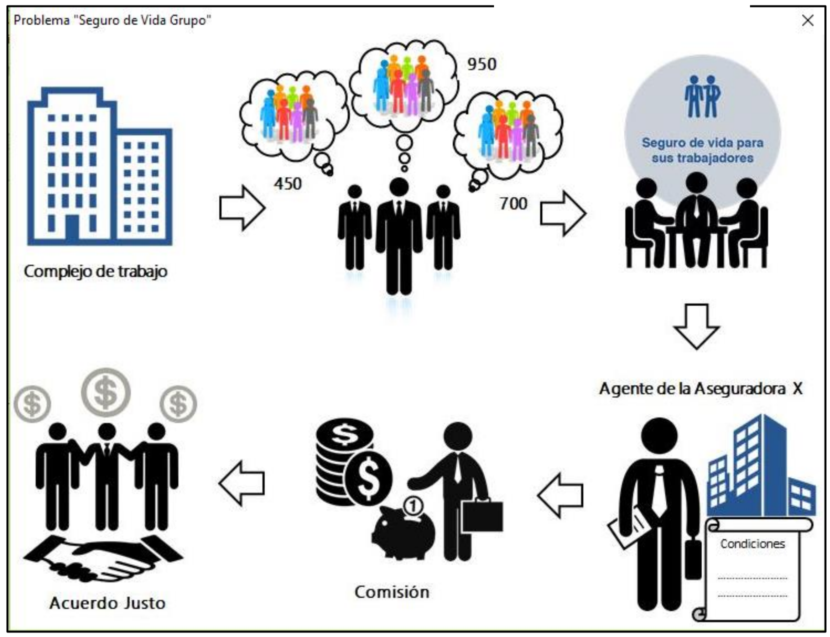


Diagrama y Botón "Extraer Datos"



Diagrama, Botón y Ventana "¿Cuál es el problema?"





6.4.2 Ejecución

Se comienza por abrir el archivo denominado "CSG"

Figura 23. Icono del programa "CSG"

Inmediatamente se mostrará una ventana que indica que el programa se encuentra cargando.

Figura 24. Ventana con barra de progreso.

Posteriormente se muestra la ventana principal en la pestaña “Bienvenido” en donde podemos observar los 8 botones mencionados anteriormente.

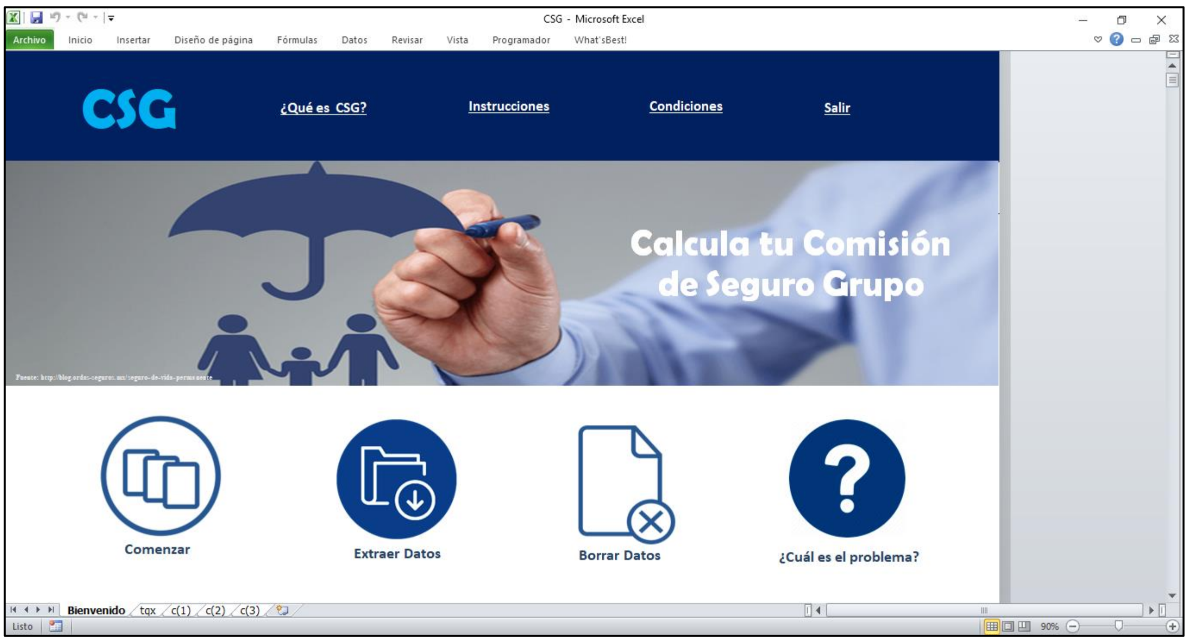
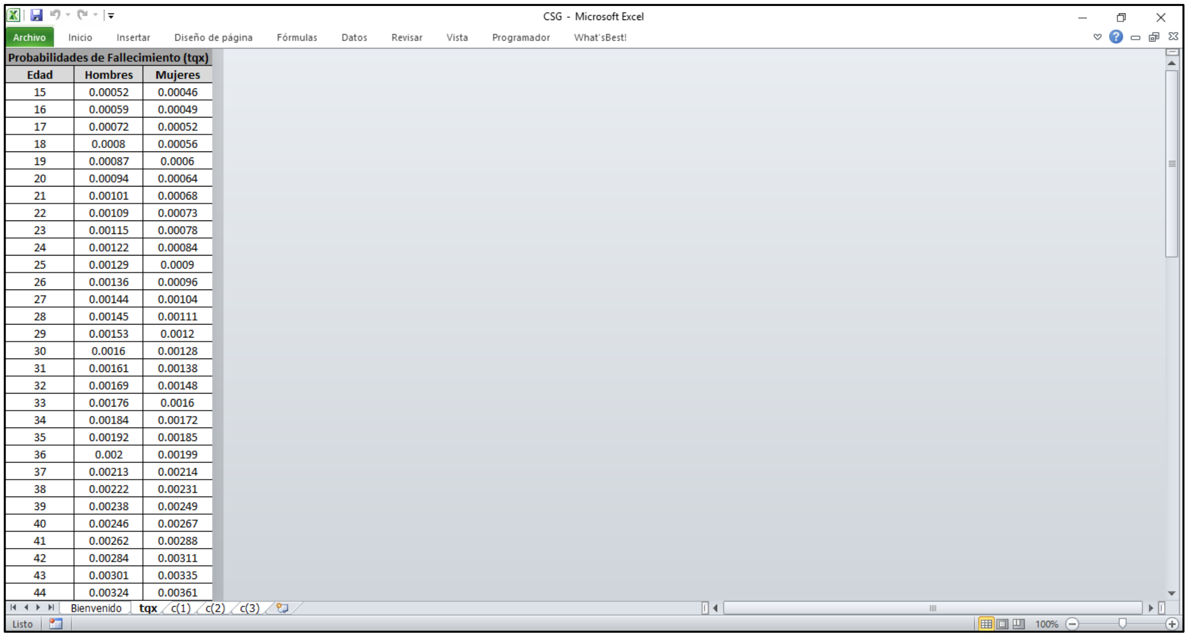


Figura 25. Vista de la pestaña “Bienvenido”

De igual manera, aparecerán 5 pestañas fijas; “Bienvenido” funciona como la pantalla de inicio, “tqx” contiene las probabilidades de fallecimiento que se utilizan para el caso de estudio y las pestañas “c(1)”, “c(2)” y “c(3)” contienen los títulos de los datos que hay que anexar.



Probabilidades de Fallecimiento (tqx)

Edad	Hombres	Mujeres
15	0.00052	0.00046
16	0.00059	0.00049
17	0.00072	0.00052
18	0.0008	0.00056
19	0.00087	0.0006
20	0.00094	0.00064
21	0.00101	0.00068
22	0.00109	0.00073
23	0.00115	0.00078
24	0.00122	0.00084
25	0.00129	0.0009
26	0.00136	0.00096
27	0.00144	0.00104
28	0.00145	0.00111
29	0.00153	0.0012
30	0.0016	0.00128
31	0.00161	0.00138
32	0.00169	0.00148
33	0.00176	0.0016
34	0.00184	0.00172
35	0.00192	0.00185
36	0.002	0.00199
37	0.00213	0.00214
38	0.00222	0.00231
39	0.00238	0.00249
40	0.00246	0.00267
41	0.00262	0.00288
42	0.00284	0.00311
43	0.00301	0.00335
44	0.00324	0.00361

Figura 26. Vista de pestaña “tqx”

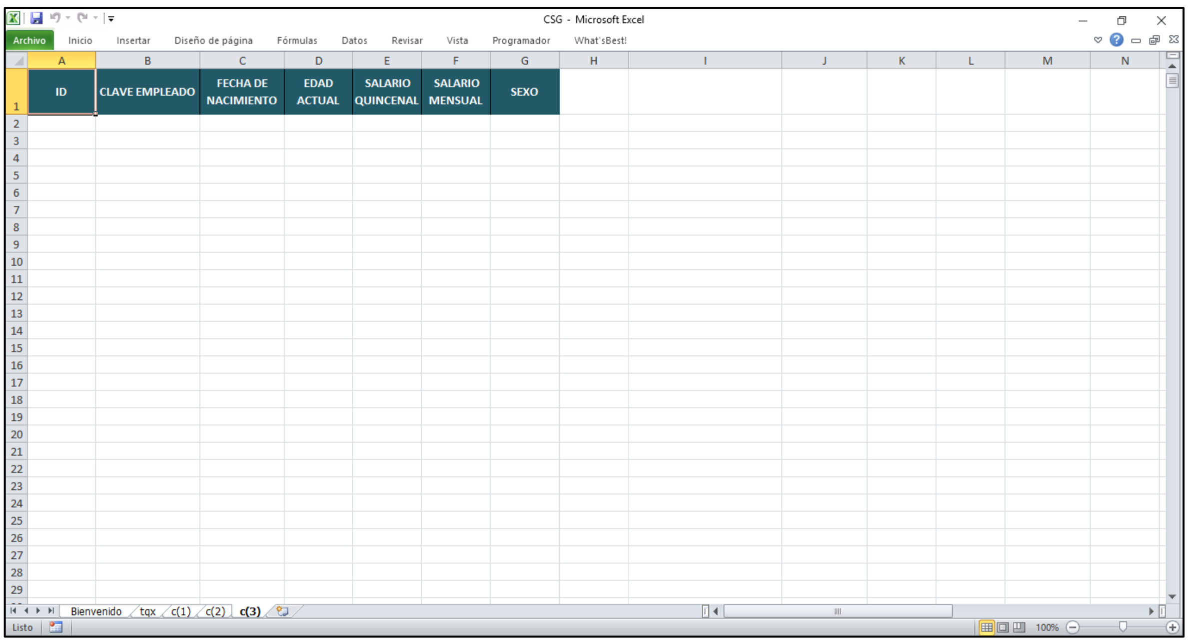


Figura 27. Vista de pestaña “c(3)”

Para iniciar el cálculo de la mejor asignación de costos debemos de agregar las bases de datos (que se encuentran en la parte de *ANEXOS)* en cada una de las pestañas (Para el Empresario Principal copiar los datos de la tabla que se encuentra en el *ANEXO 2* y pegarlos bajo los títulos de la hoja “c(1)”, para el Empresario Concurrente 1 copiar los datos de la tabla que se encuentra en el *ANEXO 3* y pegarlos bajo los títulos de la hoja “c(2)” y para el Empresario Concurrente 2 copiar los datos de la tabla que se encuentra en el *ANEXO 4* y pegarlos bajo los títulos de la hoja “c(3)”).

Para no realizar este proceso de manera manual, puede presionar el botón “Extraer Datos”; inmediatamente habrá agregado las bases extrayéndolas de un archivo de Excel denominado *anexo10.xlsx* el cual también podemos encontrar en la parte de *ANEXOS*.

Es importante haber ingresado todos los datos, de lo contrario el programa no iniciará y desplegará la alerta “Por favor, ingrese los datos”.

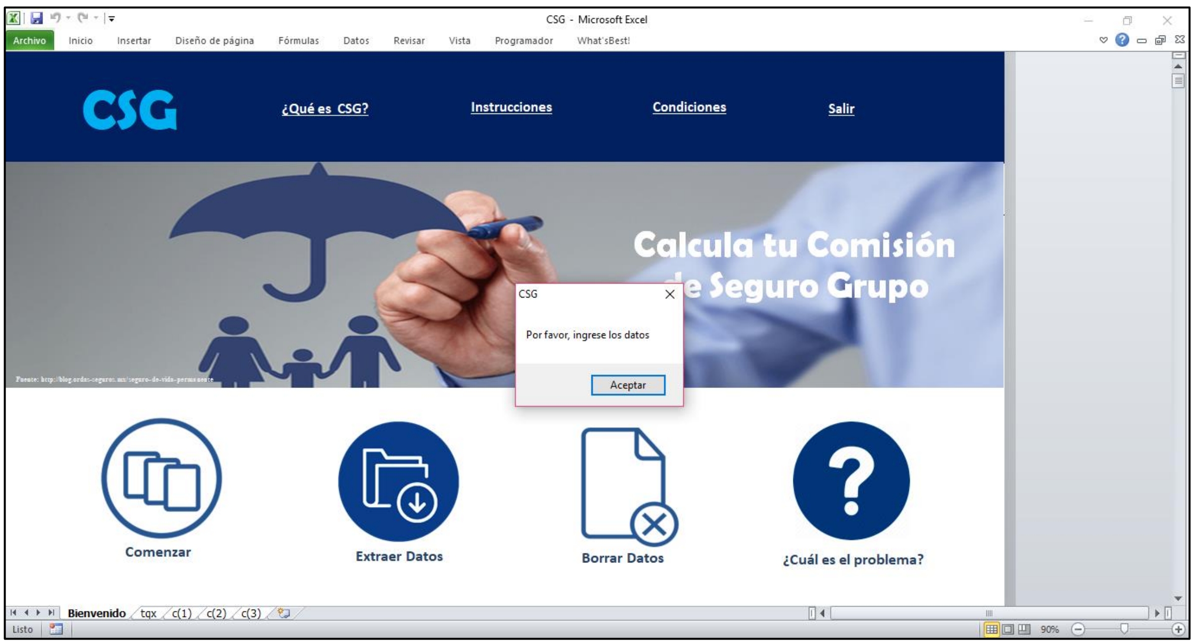
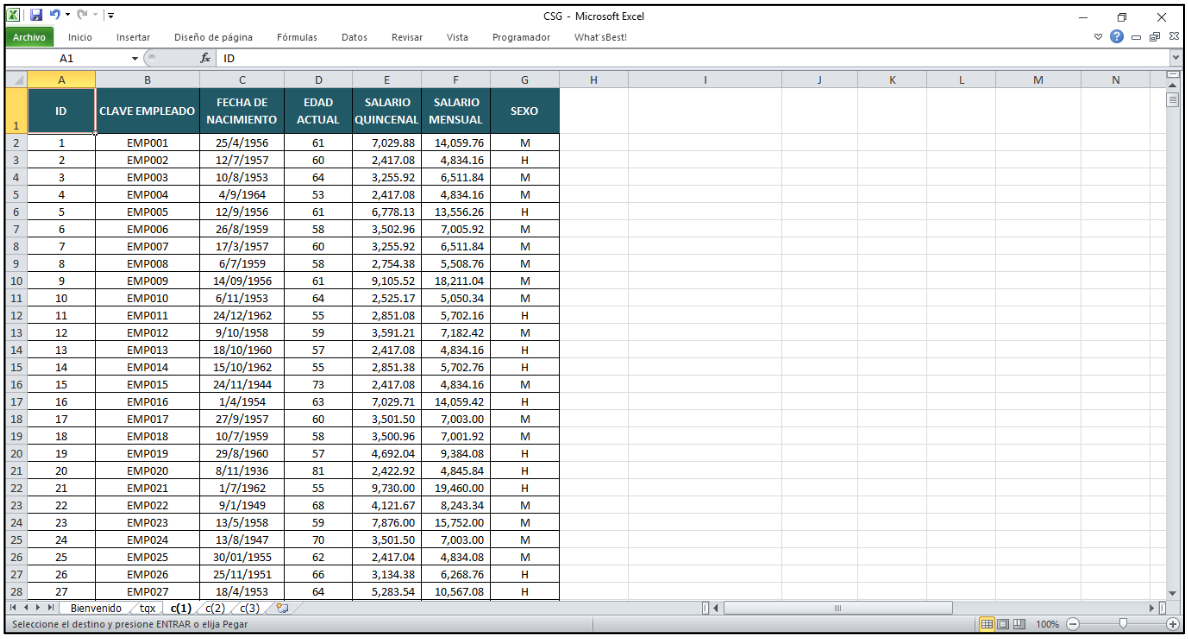


Figura 28. Alerta que indica que faltan datos por anexar.



ID	CLAVE EMPLEADO	FECHA DE NACIMIENTO	EDAD ACTUAL	SALARIO QUINCENAL	SALARIO MENSUAL	SEXO
1	EMP001	25/4/1956	61	7,029.88	14,059.76	M
2	EMP002	12/7/1957	60	2,417.08	4,834.16	H
3	EMP003	10/8/1953	64	3,255.92	6,511.84	M
4	EMP004	4/9/1964	53	2,417.08	4,834.16	M
5	EMP005	12/9/1956	61	6,778.13	13,556.26	H
6	EMP006	26/8/1959	58	3,502.96	7,005.92	M
7	EMP007	17/3/1957	60	3,255.92	6,511.84	M
8	EMP008	6/7/1959	58	2,754.38	5,508.76	M
9	EMP009	14/09/1956	61	9,105.52	18,211.04	M
10	EMP010	6/11/1953	64	2,525.17	5,050.34	M
11	EMP011	24/12/1962	55	2,851.08	5,702.16	H
12	EMP012	9/10/1958	59	3,591.21	7,182.42	M
13	EMP013	18/10/1960	57	2,417.08	4,834.16	H
14	EMP014	15/10/1962	55	2,851.38	5,702.76	H
15	EMP015	24/11/1944	73	2,417.08	4,834.16	M
16	EMP016	1/4/1954	63	7,029.71	14,059.42	H
17	EMP017	27/9/1957	60	3,501.50	7,003.00	M
18	EMP018	10/7/1959	58	3,500.96	7,001.92	M
19	EMP019	29/8/1960	57	4,692.04	9,384.08	H
20	EMP020	8/11/1936	81	2,422.92	4,845.84	H
21	EMP021	1/7/1962	55	9,730.00	19,460.00	H
22	EMP022	9/1/1949	68	4,121.67	8,243.34	M
23	EMP023	13/5/1958	59	7,876.00	15,752.00	M
24	EMP024	13/8/1947	70	3,501.50	7,003.00	M
25	EMP025	30/01/1955	62	2,417.04	4,834.08	M
26	EMP026	25/11/1951	66	3,134.38	6,268.76	H
27	EMP027	18/4/1953	64	5,283.54	10,567.08	H

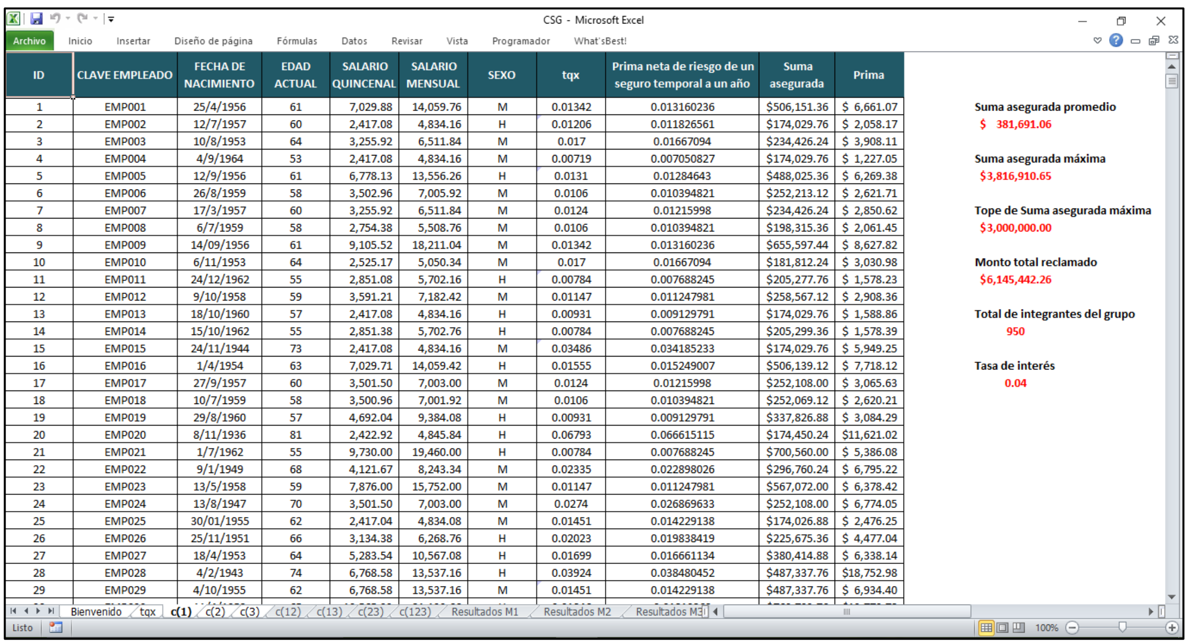
Figura 29. Vista de la pestaña “c(1)”, que indica la manera de anexar las bases de datos.

Después de haber anexado todos los datos en cada una de las tres pestañas, regresamos a la pestaña “Bienvenido” y presionamos “Comenzar”; después de aproximadamente 30 segundos el programa habrá generado 8 pestañas adicionales de las cuales hablaremos a continuación.

Figura 30. Vista de las 8 pestañas creadas al momento de presionar el botón “Comenzar”.

Dado que estamos trabajando este problema como un juego de manera coalicional entre tres jugadores, podemos observar que se generaron además de las coaliciones individuales en las pestañas “c(1)”, “c(2)” y “c(3)”, las coaliciones colectivas “c(12)”, “c(23)”, “c(13)” y “c(123)”. Todas y cada una de ellas contienen la misma información. Para verificarlo entraremos a la pestaña “c(1)”.

Como podremos observar, el programa calculó con los datos ya dados la probabilidad de fallecimiento, la prima neta de riesgo para un seguro temporal a un año, la suma asegurada y el monto de la prima para cada uno de los trabajadores que conforman esa coalición. De igual manera se obtuvo, la suma asegurada promedio en ese grupo, la suma asegurada máxima que podrían recibir, el tope de la suma asegurada máxima, el monto total reclamado, el total de integrantes que conforman el grupo y la tasa de interés bajo la cual se realizaron los cálculos.



ID	CLAVE EMPLEADO	FECHA DE NACIMIENTO	EDAD ACTUAL	SALARIO QUINCENAL	SALARIO MENSUAL	SEXO	tqx	Prima neta de riesgo de un seguro temporal a un año	Suma asegurada	Prima
1	EMP001	25/4/1956	61	7,029.88	14,059.76	M	0.01342	0.013160236	$506,151.36	$ 6,661.07
2	EMP002	12/7/1957	60	2,417.08	4,834.16	H	0.01206	0.011826561	$174,029.76	$ 2,058.17
3	EMP003	10/8/1953	64	3,255.92	6,511.84	M	0.017	0.01667094	$234,426.24	$ 3,908.11
4	EMP004	4/9/1964	53	2,417.08	4,834.16	M	0.00719	0.007050827	$174,029.76	$ 1,227.05
5	EMP005	12/9/1956	61	6,778.13	13,556.26	H	0.0131	0.01284643	$488,025.36	$ 6,269.38
6	EMP006	26/8/1959	58	3,502.96	7,005.92	M	0.0106	0.010394821	$252,213.12	$ 2,621.71
7	EMP007	17/3/1957	60	3,255.92	6,511.84	M	0.0124	0.01215998	$234,426.24	$ 2,850.62
8	EMP008	6/7/1959	58	2,754.38	5,508.76	M	0.0106	0.010394821	$198,315.36	$ 2,061.45
9	EMP009	14/09/1956	61	9,105.52	18,211.04	M	0.01342	0.013160236	$655,597.44	$ 8,627.82
10	EMP010	6/11/1953	64	2,525.17	5,050.34	M	0.017	0.01667094	$181,812.24	$ 3,030.98
11	EMP011	24/12/1962	55	2,851.08	5,702.16	H	0.00784	0.007688245	$205,277.76	$ 1,578.23
12	EMP012	9/10/1958	59	3,591.21	7,182.42	M	0.01147	0.011247981	$258,567.12	$ 2,908.36
13	EMP013	18/10/1960	57	2,417.08	4,834.16	H	0.00931	0.009129791	$174,029.76	$ 1,588.86
14	EMP014	15/10/1962	55	2,851.38	5,702.76	H	0.00784	0.007688245	$205,299.36	$ 1,578.39
15	EMP015	24/11/1944	73	2,417.08	4,834.16	M	0.03486	0.034185233	$174,029.76	$ 5,949.25
16	EMP016	1/4/1954	63	7,029.71	14,059.42	H	0.01555	0.015249007	$506,139.12	$ 7,718.12
17	EMP017	27/9/1957	60	3,501.50	7,003.00	M	0.0124	0.01215998	$252,108.00	$ 3,065.63
18	EMP018	10/7/1959	58	3,500.96	7,001.92	M	0.0106	0.010394821	$252,069.12	$ 2,620.21
19	EMP019	29/8/1960	57	4,692.04	9,384.08	H	0.00931	0.009129791	$337,826.88	$ 3,084.29
20	EMP020	8/11/1936	81	2,422.92	4,845.84	H	0.06793	0.066615115	$174,450.24	$11,621.02
21	EMP021	1/7/1962	55	9,730.00	19,460.00	H	0.00784	0.007688245	$700,560.00	$ 5,386.08
22	EMP022	9/1/1949	68	4,121.67	8,243.34	M	0.02335	0.022898026	$296,760.24	$ 6,795.22
23	EMP023	13/5/1958	59	7,876.00	15,752.00	M	0.01147	0.011247981	$567,072.00	$ 6,378.42
24	EMP024	13/8/1947	70	3,501.50	7,003.00	M	0.0274	0.026869633	$252,108.00	$ 6,774.05
25	EMP025	30/01/1955	62	2,417.04	4,834.08	M	0.01451	0.014229138	$174,026.88	$ 2,476.25
26	EMP026	25/11/1951	66	3,134.38	6,268.76	H	0.02023	0.019838419	$225,675.36	$ 4,477.04
27	EMP027	18/4/1953	64	5,283.54	10,567.08	H	0.01699	0.016661134	$380,414.88	$ 6,338.14
28	EMP028	4/2/1943	74	6,768.58	13,537.16	H	0.03924	0.038480452	$487,337.76	$18,752.98
29	EMP029	4/10/1955	62	6,768.58	13,537.16	M	0.01451	0.014229138	$487,337.76	$ 6,934.40

Suma asegurada promedio
$ 381,691.06

Suma asegurada máxima
$3,816,910.65

Tope de Suma asegurada máxima
$3,000,000.00

Monto total reclamado
$6,145,442.26

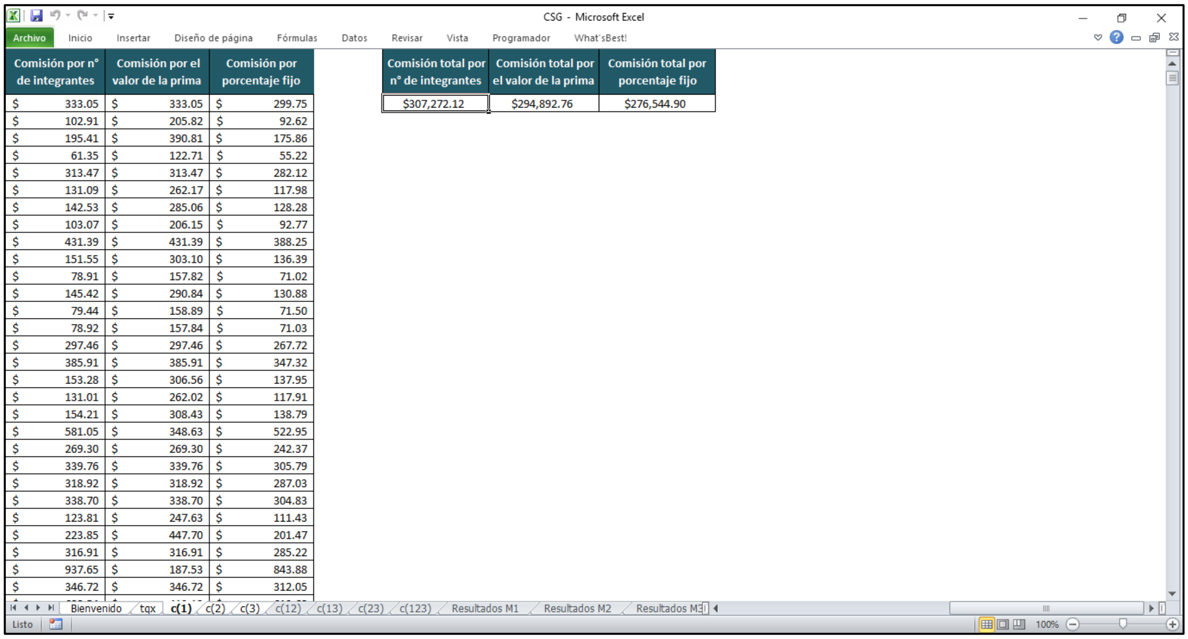
Total de integrantes del grupo
950

Tasa de interés
0.04

Figura 31. Vista de los resultados que se muestran en la pestaña “c(1)” parte 1 .

Si nos desplazamos a la derecha de la hoja, podemos ver una tabla que muestra la cantidad que tendría que pagar cada jugador (Empresario) por asegurar a sus empleados de acuerdo a cada esquema de comisión, ya sea por el número de integrantes, por el valor de la prima o por un porcentaje fijo.

Finalmente podemos notar una última tabla que calcula **el valor de la coalición** en la que nos encontramos para cada uno de los tres esquemas.



Comisión por n° de integrantes	Comisión por el valor de la prima	Comisión por porcentaje fijo
$ 333.05	$ 333.05	$ 299.75
$ 102.91	$ 205.82	$ 92.62
$ 195.41	$ 390.81	$ 175.86
$ 61.35	$ 122.71	$ 55.22
$ 313.47	$ 313.47	$ 282.12
$ 131.09	$ 262.17	$ 117.98
$ 142.53	$ 285.06	$ 128.28
$ 103.07	$ 206.15	$ 92.77
$ 431.39	$ 431.39	$ 388.25
$ 151.55	$ 303.10	$ 136.39
$ 78.91	$ 157.82	$ 71.02
$ 145.42	$ 290.84	$ 130.88
$ 79.44	$ 158.89	$ 71.50
$ 78.92	$ 157.84	$ 71.03
$ 297.46	$ 297.46	$ 267.72
$ 385.91	$ 385.91	$ 347.32
$ 153.28	$ 306.56	$ 137.95
$ 131.01	$ 262.02	$ 117.91
$ 154.21	$ 308.43	$ 138.79
$ 581.05	$ 348.63	$ 522.95
$ 269.30	$ 269.30	$ 242.37
$ 339.76	$ 339.76	$ 305.79
$ 318.92	$ 318.92	$ 287.03
$ 338.70	$ 338.70	$ 304.83
$ 123.81	$ 247.63	$ 111.43
$ 223.85	$ 447.70	$ 201.47
$ 316.91	$ 316.91	$ 285.22
$ 937.65	$ 187.53	$ 843.88
$ 346.72	$ 346.72	$ 312.05

Comisión total por n° de integrantes	Comisión total por el valor de la prima	Comisión total por porcentaje fijo
$307,272.12	$294,892.76	$276,544.90

Figura 32. Vista de los resultados que se muestran en la pestaña "c(1)" parte 2 .

Después hay otras 3 pestañas, "Resultados M1", "Resultados M2", y "Resultados M3"; estas pestañas contienen las asignaciones de costos para cada jugador de manera numérica y porcentual, calculadas con los métodos clásicos y los métodos de la Teoría de Juegos. Los cálculos de la pestaña "Resultados M1" se realizaron bajo el esquema de Comisión en función del número de asegurados, los cálculos de la pestaña "Resultados M2" se realizaron bajo el esquema de Comisión en función del valor de su prima y Los cálculos de la pestaña "Resultados M3" se realizaron bajo el esquema de Comisión mediante un porcentaje fijo.

Posteriormente se expresa el juego de manera coalicional extrayendo el dato final de cada una de las pestañas de las coaliciones. Podemos ver el total de empleados asegurados por cada Jugador.

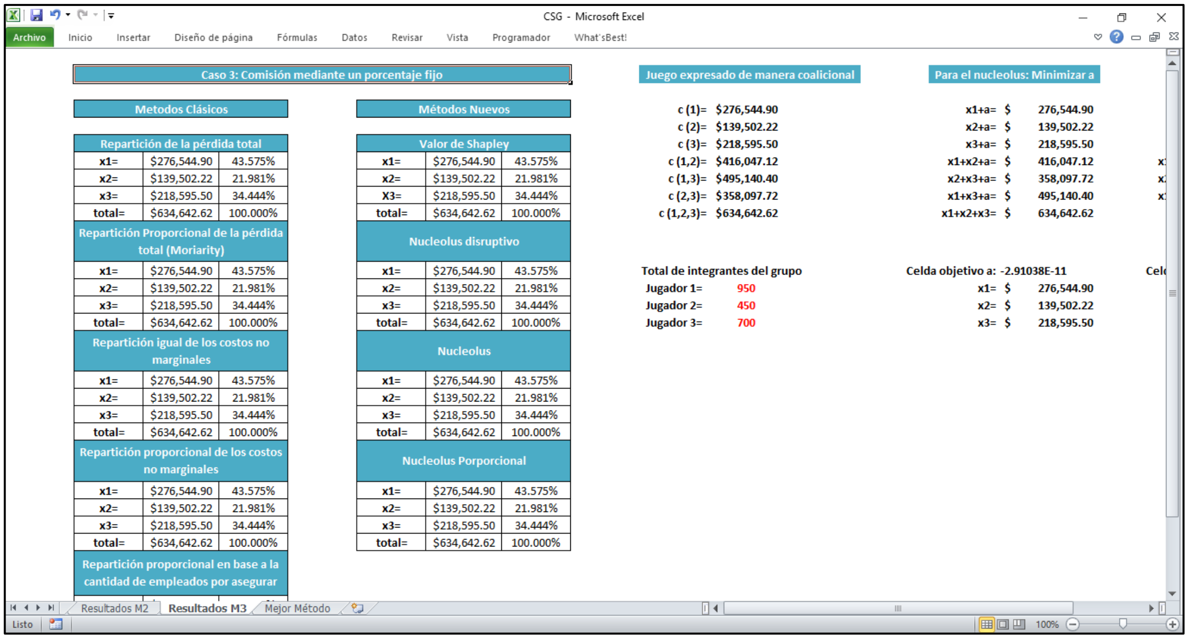


Figura 33. Vista de los resultados que se muestran en la pestaña “Resultados M1” parte 1.

A la derecha encontramos los datos generados al calcular el Nucleolus y el Nucleolus Proporcional mediante la utilización de *SOLVER*, mostrándonos las asignaciones y el valor de la celda objetivo al haber minimizado los excesos de cada coalición.

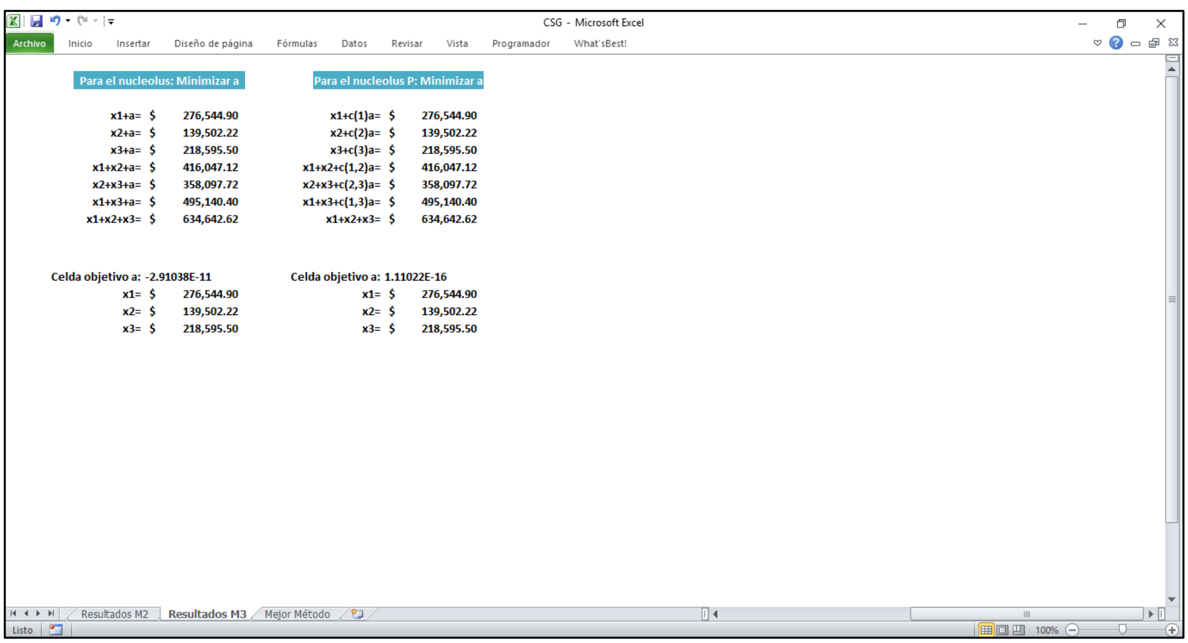


Figura 34. Vista de los resultados que se muestran en la pestaña “Resultados M1” parte 2.

Finalmente, encontramos una pestaña denominada “Mejor Método”. Esta pestaña selecciona, como su nombre lo indica, el mejor esquema de solución entre “Resultados M1”,” Resultados M2” y “Resultados M3”.

Se pueden observar algunos botones que dicen “Ver”, el cual nos muestra la formula y/o definición bajo la cual se está calculando cada método. También encontraremos un botón que dice “Imprimir”, el cual nos permitirá que los datos obtenidos en la hoja “Mejor Método” sean impresos.

Podemos ver que también se muestra el Core del juego, los Costos Marginales, y en letras rojas se nos indica cual fue el mejor esquema, así como cuales fueron los mejores métodos de solución con una pequeña justificación.

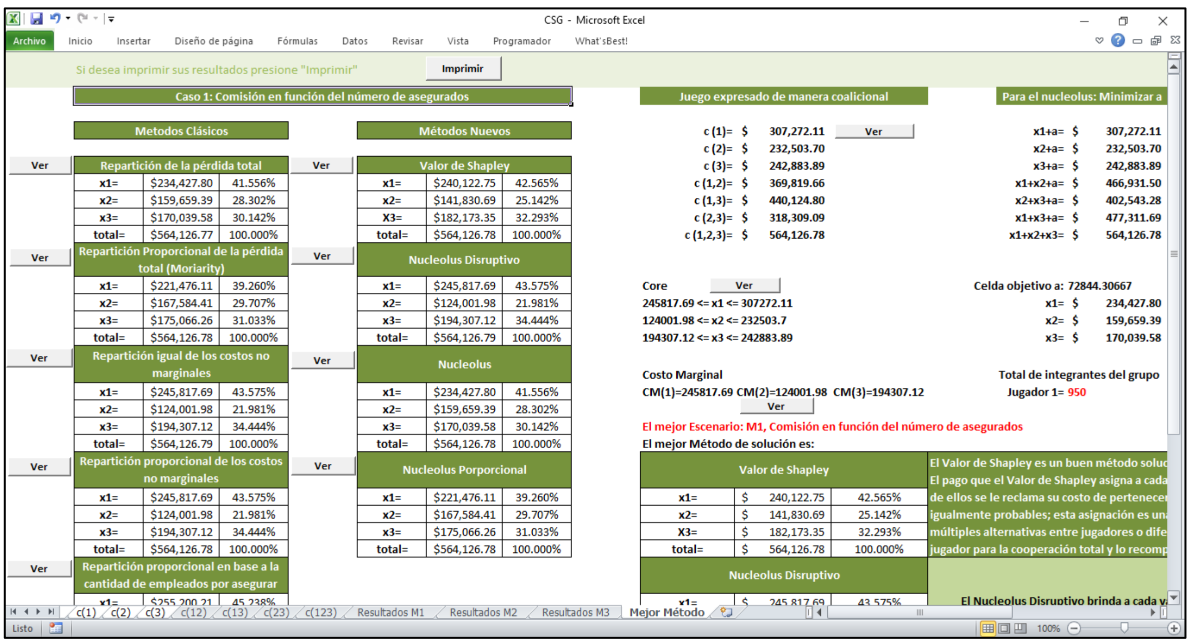


Figura 35. Vista de los resultados que se muestran en la pestaña “Mejor Método”.

Si quisiéramos borrar todo para ingresar una nueva base de datos, regresamos a la pestaña “Bienvenido” y presionamos el botón “Borrar datos”. Se mostrará el mensaje de alerta “¿Desea borrar también las bases de datos?”, así, el usuario tendrá la opción de eliminar todos los cálculos y mantener las bases de datos intactas o de eliminar por completo bases de datos y cálculos; puede volver a presionar el botón “Extraer Datos” para realizar un nuevo análisis (Nota: Si el usuario desea ingresar una nueva base de datos, tendrá que modificar el archivo *anexo10.xlsx* sin hacer cambios en el nombre de las hojas y los títulos de las columnas solicitadas, así, cuando vuelva a presionar "Extraer Datos" se habrá anexado su base modificada).

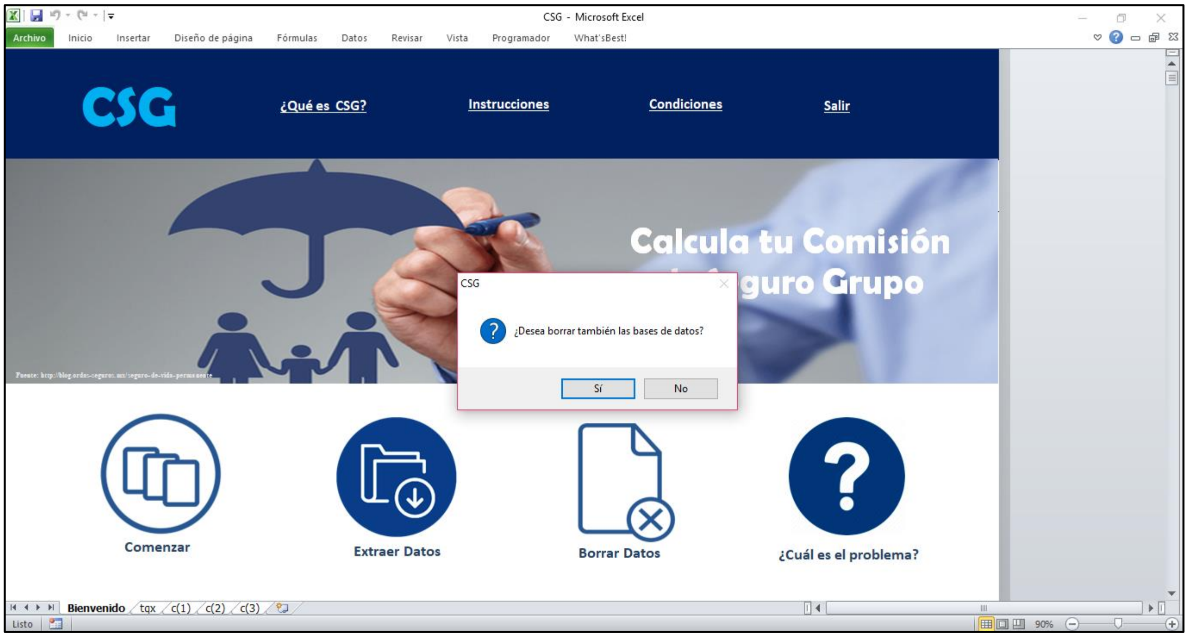


Figura 36. Vista de la alerta al momento de presionar el botón "Borrar Datos".

Si se eliminaron por completo los cálculos y bases de datos, se desplegará la alerta "Ya no hay datos que eliminar".

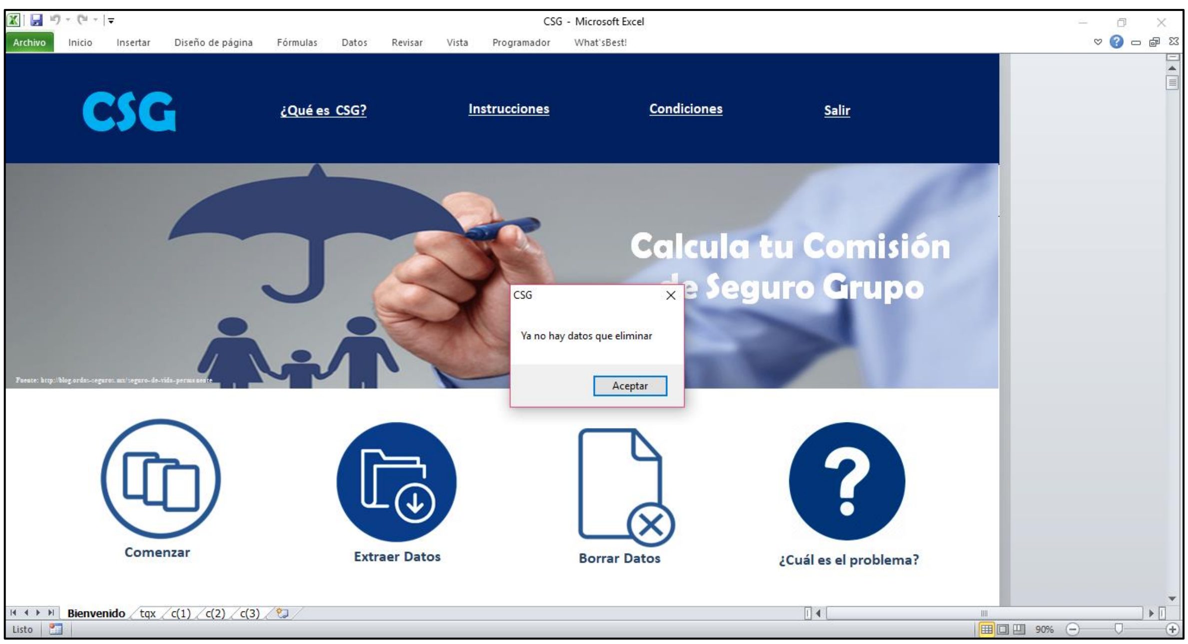


Figura 37. Vista de la alerta cuando no hay datos que eliminar.

De lo contrario, si lo que se desea es cerrar el programa, se debe seleccionar el botón “Salir” en la pestaña “Bienvenido”. El programa se cerrará sin guardar cambios.

Para un mayor detalle del funcionamiento del programa o el código de programación del mismo descargue los archivos *anexo8.pdf* y *anexo9.pdf* que se encuentra en los *ANEXOS.*

CONCLUSIÓN

La Teoría de Juegos analiza los comportamientos estratégicos entre los jugadores. En el mundo real, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la toma de decisiones entre dos o más jugadores.

Todos los juegos de niños o de adultos, son modelos que pueden sacar provecho de esta Teoría. La Teoría de Juegos se diferencia de la Teoría de Decisiones porque no se considera la elección de una conducta, sino que, depende de las elecciones de los participantes del juego, buscando así simular la interacción de la cooperación humana.

Los juegos cooperativos pueden utilizarse como modelos en donde los participantes pueden asignar cierta cantidad y minimizar o maximizar su asignación dependiendo la naturaleza del problema.

El concepto de asignación de costos juega un papel muy importante en la toma de decisiones económicas ya que además de medir ingresos y costos, funciona como un instrumento de control y toma de decisiones.

Este proceso de asignación de costos se realiza bajo diversos métodos clásicos, ya sean económicos o contables y cada uno de ellos recomienda asignaciones diferentes. Lo recomendable es compararlos para verificar cual método es "el más justo posible"; ciertamente tiene que satisfacer propiedades deseables que a veces se pasan por alto: la propiedad de racionalidad individual, la propiedad de racionalidad para coaliciones y la eficiencia.

Si al analizar cada método no se cumplen estas propiedades por completo, entonces se deben rechazar al no ser suficientemente justos y, por consiguiente, la manera de poder trabajar el problema es mediante el uso de los métodos de Teoría de Juegos.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto nivel de sofisticación matemática en tan solo medio siglo y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos se han visto beneficiados por las aportaciones de los distintos métodos de solución como lo son el Valor de Shapley o el Nucleolus.

El Valor de Shapley es un concepto muy importante porque ofrece una posible solución a las insatisfacciones generadas entre coaliciones por no obtener el beneficio que consideran adecuado. Es decir, dado que algunos jugadores contribuyen más a la coalición que otros, mediante este método, la repartición de los beneficios ocurre de la manera más justa posible. Este modelo es normativo y eso lo hace un método con solución única y confiable. Por tal motivo es el más utilizado en la solución de problemas de asignación de costos.

Por otro lado, el Nucleolus se limita a un conjunto de posibles valores (vectores de pago) que cumplen una serie de restricciones que tratan de ser lo más razonables dentro del Core, es decir, contiene aquellas distribuciones de pagos para las cuales se minimiza el mayor de los grados de satisfacción. De igual manera el Nucleolus es único y busca ser justo.

Por tanto, aunque ambos métodos suenan deseables, cada problema debe ser estudiado de acuerdo al comportamiento, al tipo de datos y a las diferentes propiedades que son satisfechas para tomar la mejor decisión;por ejemplo en el caso de estudio además de analizar las propiedades básicas se tuvo que verificar la monotonía y la razonabilidad entre coaliciones.

Como nota final, la Teoría de Juegos Cooperativos se enfrenta actualmente a un interesante punto de inflexión de su historia. Nació de problemas prácticos de considerable importancia; Puedo mencionar algunas aplicaciones efectivas de los conceptos de solución de la Teoría de Juegos al mundo real:

- Financiamiento de grandes proyectos de desarrollo.
- Reparto de agua entre comunidades
- Asignación de los costos o ingresos entre departamentos de empresas, etc.

ANEXOS

Todos los Anexos podrán ser descargados desde la página:
www.fcfm.buap.mx/jzacarias/eve/ y el anexo que desea visualizar, por ejemplo:

www.fcfm.buap.mx/jzacarias/eve/anexo1.pdf

ANEXO 1.- Tabla de probabilidad de fallecer para hombres y mujeres.

anexo1.pdf

ANEXO 2.- Tabla de datos de empleados del Empresario Principal, que contiene ID, Clave del empleado, Fecha de nacimiento, Edad actual, Salario quincenal, Salario mensual, Sexo y el valor de la Prima que le corresponde a cada uno de los 950 empleados.

anexo2.pdf

ANEXO 3.- Tabla de datos de empleados del Empresario Concurrente 1, que contiene ID, Clave del empleado, Fecha de nacimiento, Edad actual, Salario quincenal, Salario mensual, Sexo y el valor de la Prima que le corresponde a cada uno de los 450 empleados.

anexo3.pdf

ANEXO 4. Tabla de datos de empleados del Empresario Concurrente 2, que contiene ID, Clave del empleado, Fecha de nacimiento, Edad actual, Salario quincenal, Salario mensual, Sexo y el valor de la Prima que le corresponde a cada uno de los 700 empleados.

anexo4.pdf

ANEXO 5.- Tabla de datos de empleados del Empresario Principal, que contiene ID, Clave del empleado, el valor de la Prima que le corresponde a cada uno de los 950 empleados, así como el total de comisión que debe pagar en cada uno de los 3 esquemas por empleado.

anexo5.pdf

ANEXO 6.- Tabla de datos de empleados del Empresario Concurrente 1, que contiene ID, Clave del empleado, el valor de la Prima que le corresponde a cada uno de los 450 empleados, así como el total de comisión que debe pagar en cada uno de los 3 esquemas por empleado.

anexo6.pdf

ANEXO 7.- Tabla de datos de empleados del Empresario Concurrente 2, que contiene ID, Clave del empleado, el valor de la Prima que le corresponde a cada uno de los 700 empleados, así como el total de comisión que debe pagar en cada uno de los 3 esquemas por empleado.

anexo7.pdf

ANEXO 8.- Guía del funcionamiento del programa “CSG”.

anexo8.pdf

ANEXO 9.- Código de programación “CSG”.

anexo9.pdf

ANEXO 10.- Documento de Excel que contiene las Bases de datos de los Empresarios Principal y Concurrentes.

anexo10.xlsx

BIBLIOGRAFÍA

[1] Alcruise, J., *"COMPORTAMIENTO ESTRATÉGICO",* Prezi.com, 2015, https://prezi.com/svs03-xshyzk/comportamiento-estrategico/ (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[2] Anzil, F., *"TEORÍA DE JUEGOS",* Zona económica, 2006, http://www.zonaeconomica.com/teoriadejuegos/teoriadejuegos (consultada el 3 de febrero del 2017).

[3] Arcila, D., *"HISTORIA DE LA TEORÍA DE JUEGOS",* blogspot.mx, 2010, http://teoriadanielarcila.blogspot.mx/2010/11/historia-teoria-de-juegos.html (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[4] Badican, A. y Rescala, C., *"TEORÍA DE JUEGOS: APLICACIONES AL CÁLCULO DE COSTOS"*, Facultad de ciencias Económicas Universidad Nacional del Nordeste, Argentina, 2003, http://eco.unne.edu.ar/contabilidad/costos/invitados/teo-juegos.pdf (Consultada el 10 de mayo del 2017)

[5] Barron, E., *"GAME THEORY AN INTRODUCTION",* Loyola University Chicago, Wiley-interscience Publication, p. 451- 502., 2007, (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[6] Blázquez, M. y Gámez, C. V., *"TEORÍA DE JUEGOS Y APLICACIONES: EL DILEMA DEL PRISIONERO"*, Universidad Carlos III de Madrid, departamento de ingeniería telemática, 2006, http://www.it.uc3m.es/~jvillena/irc/practicas/06-07/08.pdf (Consultada el 9 de febrero del 2017).

[7] Cerdá, E., Pérez, J. y Jimeno, J. L., *"TEORÍA DE JUEGOS",* Madrid: Pearson educación, p. 3., 2004, (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[8] *"CONTABILIDAD DE COSTOS",* Universidad Nacional Autónoma de México. http://www.ingenieria.unam.mx/~materiacfc/CCostos.html (Consultada el 5 de Abril de 2017)

[9] *“EL DILEMA DEL PRISIONERO Y ALGUNAS APLICACIONES”,* Wordpress.com, 2014, https://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2014/06/23/el-dilema-del-prisionero-y-algunas-aplicaciones/ (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[10] Ferreira, J. L., *“LA TEORÍA DE LOS JUEGOS, LA HISTORIA MÁS LÚDICA JAMÁS CONTADA PARTE 2”*, Todoloqueseaverdad.Blogspot.mx, 2009, http://todoloqueseaverdad.blogspot.mx/2009/09/la-teoria-de-los-juegos-la-historia-mas_16.html (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[11] García, I., *“LOS DILEMAS”,* blogspot.mx, 2013, http://eticatercerocincogrouptwo.blogspot.mx/2013/04/21-los-dilemas.html (Consultada el 9 de febrero del 2017).

[12] Gastaldi, C., Urrea, M. y Fernández, P., *“TEORÍA DE LA DECISIÓN: CONTRIBUCIONES DE VON NEUMANN”*, 1998. Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1, p. 37–42, 1998, http://www.emis.de/journals/DM/v61/art5.pdf (Consultada el 9 de febrero del 2017).

[13] Hernández, S., *“HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA”,* La ciencia y el hombre, Revista de divulgación científica y tecnológica de la universidad veracruzana, 2005, http://www.uv.mx/cienciahombre/revistae/vol18num2/articulos/historia/ (consultada el 31 de enero del 2017).

[14] *“HISTORIA DE LA PROBABILIDAD”,* Estadística para todos, 2008, http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_proba.html (consultada el 31 de enero del 2017).

[15] Lara, O. R., *“COSTEO ABSORBENTE Y DIRECTO, UN ANÁLISIS COMPARATIVO”,* Gestiopolis.com. https://www.gestiopolis.com/costeo-absorbente-y-directo-un-analisis-comparativo/ (Consultada el 10 de Abril del 2017)

[16] Lemaire, J., *“AN APPLICATION OF GAME THEORY: COST ALLOCATION”*, Universite Libre de Bruxelles, https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S0515036100004815 (Consultada el 10 enero de 2017)

[17] Martínez, M. A. y Martínez M. M., *"TEORÍA DE JUEGOS",* Autores Científico-Técnicos y Académicos, 2011, http://www.acta.es/medios/articulos/matematicas/060099.pdf (Consultada el 11 de febrero del 2017).

[18] Minbang, J, Van Steenkiste, I. y Bernal, L., *"LA TEORÍA DE JUEGOS: EL ARTE DEL PENSAMIENTO ESTRATÉGICO",* Kindle Edition, 50Minutos.es., p. 6-8, 2016, (Consultada el 3 de febrero del 2017).

[19] Saavedra, I*., "FUNDAMENTOS Y TARIFICACIÓN DEL SEGURO DE VIDA GRUPO",* CNSF, XIII Premio de investigación sobre seguros y fianzas, México, 2006, http://www.cnsf.gob.mx/Eventos/Premios_2014/1er%20Lugar%20Seguros%202006.pdf (Consultada el 2 de junio del 2017)

[20] *"TEORÍA DE JUEGOS",* Wikipedia.org, 2017, https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos#Historia_de_la_teor.C3.ADa_de_juegos (Consultada el 3 de febrero del 2017).