

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**Control óptimo de la probabilidad de ruina
aplicando estrategias de inversión y reaseguro**

Tesis presentada para obtener el título de

Licenciado en Actuaría

Presenta

Emmanuel Ruiz Guarneros

Director de tesis

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Enero 2017

Agradecimientos

A mis padres por todo el apoyo que me han brindado, no solo a lo largo de mi carrera universitaria, sino también a lo largo de mi vida. Quiero agradecerles por todo el trabajo y sacrificios que han hecho con el objetivo de darnos a mis hermanos y a mí una preparación profesional.

A mis hermanos por todo el apoyo moral y económico que me han otorgado durante mis estudios.

A mi tía y a mi prima por haberme brindado un segundo hogar durante este tiempo.

A mi director de tesis, Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, a quien admiro y respeto por su labor como docente e investigador. Gracias por toda la ayuda y asesoría otorgada para la realización de este trabajo. De igual manera, gracias por todos los conocimientos brindados en sus cursos.

A mi tutor académico, Dr. Victor Hugo Vázquez Guevara, a quien también admiro y respeto por su trayectoria. Gracias por todo el apoyo concedido, no únicamente como tutor, sino también como profesor. Gracias por todos los conocimientos transmitidos.

A mis profesoras Mtra. Brenda Zavala López y Dra. Hortensia J. Reyes Cervantes por sus enseñanzas y apoyo brindado en sus cursos.

A mis amigos por su ayuda y por todos los buenos momentos que pasamos juntos en estos 5 años de licenciatura.

A mis sinodales, Dr. Francisco S. Tajonar Sanabria, Mtra. Brenda Zavala López y Dr. Fernando Velasco Luna, por haber aceptado revisar este trabajo y por sus aportes realizados al mismo.

A todos mis profesores en general.

Introducción

Un seguro se define como un contrato en el que una empresa especializada (aseguradora) se compromete a indemnizar algún daño al que esté expuesta una persona específica, a la cual se le denomina asegurado. La persona que recibirá la indemnización es llamada beneficiario, pudiendo ser éste el dueño del seguro o una tercera persona. La aseguradora se responsabiliza de esta indemnización a cambio de un pago, llamado prima, realizado por quien contrata el seguro.

La solvencia económica de una aseguradora es la capacidad de poder cumplir con sus obligaciones financieras, es decir, poder realizar los pagos de los siniestros asegurados. Por esta razón, es importante poder medir la solvencia que tiene una aseguradora en términos de algún indicador. Uno de los indicadores usados para medir la solvencia es la probabilidad de ruina.

El momento de ruina es un concepto teórico definido como el primer momento en el que una aseguradora tiene un capital menor o igual que cero. Se dice que es teórico, puesto que en la práctica una aseguradora no se puede considerar en ruina por tener capital negativo, ya que puede usar distintos medios para recuperar su estabilidad económica. De igual manera, una aseguradora que tenga unas cuantas unidades monetarias no se puede considerar plenamente solvente, sin embargo, en términos de la probabilidad de ruina, dicha aseguradora sería solvente por el hecho de tener un capital positivo. En consecuencia, una aseguradora desearía tener una probabilidad de ruina baja para sus distintas carteras. Para lograr esto, hay diversas opciones que nos permiten disminuir dicha probabilidad. Dos de estas técnicas son el reaseguro y la inversión en activos con riesgo.

El reaseguro es una forma de mitigación de riesgo. En éste, una aseguradora (denominada reaseguradora) asume la cobertura, parcial o total, de un riesgo que ya había sido asumido por otra aseguradora, sin modificar el contrato que se generó

entre la primera aseguradora y el asegurado.

La inversión en activos con riesgo consiste en la compra y venta de activos financieros. Se compran los activos financieros con la esperanza de que su precio aumente, de manera que a la hora de venderlos, éstos generan una ganancia.

El objetivo del presente trabajo es utilizar estrategias de reaseguro y de inversión en algún activo con riesgo para disminuir la probabilidad de ruina de alguna cartera de clientes. La metodología para abordar este problema será el uso de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), con la que se encontrarán las estrategias óptimas de reaseguro e inversión para, así, minimizar la probabilidad de ruina, o equivalentemente, maximizar la probabilidad de supervivencia. El modelo clásico que se utiliza para modelar el capital de una aseguradora, es el modelo de Cramer-Lundberg. Sin embargo, cabe recalcar que este no será utilizado directamente a la hora de minimizar la probabilidad de ruina, sino una aproximación de él a través de un proceso de difusión.

Los procesos de difusión son procesos estocásticos que se conforman de dos partes, una determinista y otra estocástica. Para representar un proceso de difusión se usan dos parámetros: el parámetro de tendencia y el parámetro de difusión. El parámetro de tendencia está asociado a la parte determinista, y es llamado de esta manera por esa misma razón, pues en caso de que no estuviera presente la parte estocástica, el proceso seguiría esa tendencia. Por otro lado, el parámetro de difusión es el que está asociado a la parte estocástica. Una de las características más importantes de estos procesos es que son procesos de Markov en tiempo continuo.

El documento está integrado de tres capítulos. En el primer capítulo, denominado *Preliminares*, se presentan los conceptos básicos de cálculo estocástico que se deben tomar en cuenta para la lectura del texto. En él se planea abordar conceptos como el Movimiento Browniano [13], definir lo que es una ecuación diferencial estocástica y explicar el modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg [1], así como presentar la justificación de por qué el modelo puede ser aproximado mediante un proceso de difusión. Dicha justificación está basada en [7]. De igual manera, se define en términos generales el principio de programación dinámica en tiempo continuo, para su posterior aplicación al problema aquí tratado. El material de este capítulo está

esencialmente basado en [10] y [12].

En el segundo capítulo, llamado *Minimización de la probabilidad de ruina*, se hace la implementación de la ecuación de HJB para minimizar la probabilidad de ruina mediante el reaseguro y la inversión. Como ya se dijo anteriormente, en lugar de utilizar el modelo de Cramer-Lundberg se hace una aproximación a través de un proceso de difusión, pues esto hace que la ecuación de HJB sea una ecuación diferencial no lineal, y no una ecuación integrodiferencial, que sería el caso si usáramos el modelo de Cramer-Lundberg. Para hacer uso de la aproximación, supondremos que la función de valor es dos veces continuamente diferenciable. El contenido de este capítulo se basa principalmente en [15].

En el tercer capítulo, nombrado *Aplicaciones*, se hace la aplicación de la teoría desarrollada en el capítulo anterior, y se hace la comparación de las probabilidades de ruina para una cartera en la que no se contempla reaseguro ni inversión, contra la misma cartera, pero ahora utilizando las estrategias óptimas de reaseguro e inversión, tanto de manera individual como de manera conjunta.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	11
1.1. Movimiento Browniano	11
1.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	12
1.2.1. Integral de Itô	12
1.2.2. Fórmulas de Itô	14
1.3. Modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg	19
1.4. Aproximación a través de un proceso de difusión	22
1.5. Programación dinámica en tiempo continuo	28
1.5.1. Introducción	28
1.5.2. Programación dinámica en tiempo continuo	28
2. Minimización de la probabilidad de ruina	31
2.1. Proceso de difusión con reaseguro	31
2.2. Estrategia óptima de reaseguro	37
2.3. Proceso de difusión con inversión	50
2.4. Estrategia óptima de inversión	53
2.5. Estrategias óptimas de reaseguro e inversión	61
3. Aplicaciones	67
3.1. Ajuste de la distribución	68
3.2. Aplicación del modelo	71
3.2.1. Reaseguro óptimo	72
3.2.2. Inversión óptima	74
3.2.3. Reaseguro e inversión óptimos	76
Conclusiones y notas finales	79

A. Movimiento Browniano Geométrico (MBG)	83
B. Lema de Itô	85
C. Teoremas de martingalas	87
D. Distribuciones de probabilidad	89
E. Truncamiento de una variable aleatoria	91
F. Criterio de Información de Akaike (AIC)	93
G. Prueba de Anderson-Darling	95
Bibliografía	97

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta la teoría necesaria para la comprensión del modelo tratado en el presente trabajo. El material expuesto en este capítulo está basado principalmente en las siguientes referencias: [13], [10], [12] y [15]. Primero se expone la teoría básica del cálculo estocástico. Posteriormente se muestra el modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg, así como la manera en la que es aproximado a través de un proceso de difusión. Para finalizar se habla acerca de programación dinámica en el caso continuo y cómo será empleada más adelante.

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración. Este espacio de probabilidad y la filtración se consideran en común para las siguientes subsecciones de este capítulo.

1.1. Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano (MB) o Proceso de Wiener es un proceso estocástico en tiempo continuo con espacio de estados continuo (\mathbb{R}), y se representa como $\{B_t : t \geq 0\}$. El movimiento Browniano cumple las siguientes propiedades:

- $B_0 = 0$, \mathbb{P} -c.s.
- Tiene incrementos independientes y estacionarios, i.e., $B_{t+h} - B_h \sim B_t$, para $0 \leq h, t$.
- $B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$, sin embargo, dado que se puede usar la estandarización, consideraremos el caso particular en el que $\sigma = 1$, es decir:
 $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$, para cualesquiera $0 \leq s \leq t$.
- Las trayectorias con respecto al tiempo son continuas, \mathbb{P} -c.s.

1.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Para comenzar, debemos definir lo que es una Ecuación Diferencial Estocástica (EDE). Sea $\{B_t : t \geq 0\}$ un MB adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Una EDE es una ecuación de la forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t,$$

definida para valores de t en un intervalo $[0, M]$, donde $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ son funciones escalares de $[0, M] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} , y con condición inicial X_0 considerada \mathcal{F}_0 -medible. Al coeficiente $a(\cdot, \cdot)$ se le conoce como coeficiente de tendencia, mientras que al coeficiente $b(\cdot, \cdot)$ se le llama coeficiente de difusión. Por lo tanto, la solución a encontrar es el proceso X_t que cumple con dicha ecuación.

De igual manera, al integrar desde 0 a t , se puede expresar la EDE en su forma integral, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} X_t - X_0 &= \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s \\ X_t &= X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Aquí podemos observar que la integral relacionada con el coeficiente de tendencia es una integral de Riemann, mientras que la integral relacionada con el coeficiente de difusión es una integral estocástica de Itô, la cual será definida a continuación. Los procesos definidos como el proceso X_t son llamados «Procesos de Itô».

1.2.1. Integral de Itô

Como se vio en la sección anterior, para ecuaciones expresadas de la misma manera que (1.1) es necesario definir integrales de la forma

$$\int_0^M X(t)dB_s,$$

pues no pueden ser tratadas como integrales de Riemann-Stieltjes, debido a que el MB tiene variación no acotada [9].

Con el propósito de definir las se utilizará el mismo procedimiento usado para definir una integral de Riemann, es decir, primero se considerarán sumas con respecto a una partición, así como los límites.

Sea $\pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = M\}$ una partición del intervalo finito $[0, M]$ donde $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = M$. De esta manera, las sumas de la forma:

$$\sum_{j=0}^{n-1} X(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}),$$

pueden ser consideradas como aproximaciones a la integral $\int_0^M X(s)dB_s$. Dichas sumas son denominadas Sumas de Itô.

Al igual que en el cálculo ordinario, se tiene que:

$$\int_0^M X(s)dB_s = \lim_{\|\pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} X(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Para construir formalmente la integral de Itô, representada por I , primero consideremos un MB $\{B_t\}$ y una filtración $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq M\}$, con B_t \mathcal{F}_t -medible. Definamos $L^2([0, M] \times \Omega)$ como el espacio de todos los procesos estocásticos $X(t)$, con $0 \leq t \leq M$, que satisfacen:

- $X(t)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$
- $\int_0^M \mathbb{E}(|X(t)|^2)dt < +\infty$

Para comenzar, consideremos un proceso $X \in L^2([0, M] \times \Omega)$ escalonado. Como $X(t)$ es un proceso escalonado, puede ser escrito como:

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

con Y_i \mathcal{F}_t -medible y $\mathbb{E}[Y_i] < +\infty$. Así, definimos la integral de Itô para un proceso escalonado como:

$$I(X) = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (1.2)$$

A continuación, enunciemos un lema de aproximación, el cual nos garantiza que para todo proceso estocástico, existe una sucesión de procesos escalonados que convergen

a dicho proceso. El lema dice lo siguiente:

Lema 1.2.1 *Si $X \in L^2([0, M] \times \Omega)$, entonces existe una sucesión $\{X_n\}$ en $L^2([0, M] \times \Omega)$ tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^M \mathbb{E}(|X(t) - X_n(t)|^2) = 0.$$

En (1.2) ya tenemos definida la integral para un proceso escalonado, así que definimos la integral para cualquier proceso $X \in L^2([0, M] \times \Omega)$ como:

$$I(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n).$$

En [10] puede verse la demostración del Lema 1.2.1, así como una explicación más extensa de la construcción formal de la integral de Itô.

1.2.2. Fórmulas de Itô

La fórmula de Itô es el equivalente a la regla de la cadena del cálculo ordinario para obtener la derivada de $f(g(t))$. Dicha regla nos dice, que si f y g son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = f'(g(t))g'(t).$$

Sin embargo, esa regla no funciona en el cálculo estocástico, pues, aplicando la fórmula obtendríamos:

$$\frac{d}{dt}f(B_t) = f'(B_t)B'(t),$$

lo cual no tiene sentido, pues las trayectorias de B_t no son diferenciables [9].

Así, considerando una partición $\pi_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = t\}$ de $[a, t]$ y la igualdad

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(B_{t_{j+1}}) - f(B_{t_j})),$$

se puede usar la expansión de Taylor de la función f , si es que f pertenece a la clase C^2 , obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_a) &= \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i} + \lambda_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2. \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \lim_{\|\pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) &= \int_a^t f'(B_s) ds \\ \lim_{\|\pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i} + \lambda_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 &= \int_a^t f''(B_s) ds. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos las llamadas Fórmulas de Itô, que se muestran a continuación:

■ En su forma diferencial:

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt. \quad (1.3)$$

■ En su forma integral:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds. \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.- En este ejemplo se presenta el uso de (1.4) para el cálculo de la integral $\int_0^t B_s dB_s$. Observamos que la integral estocástica de (1.4) es la integral de $f'(\cdot)$. Por esta razón, tenemos que en este ejemplo $f'(x) = x$. Por lo tanto, proponemos $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Aplicando (1.4):

$$\frac{B_t^2}{2} - \frac{B_0^2}{2} = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t ds.$$

Sustituímos $B_0 = 0$ y despejamos, obteniendo:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}. \quad \square$$

Ejemplo 2.- En este ejemplo se obtendrá $\int_0^t e^{B_s} dB_s$. Nuevamente, dado que en

la integral estocástica de (1.4) se encuentra f' , para este ejemplo $f'(x) = e^x$. Por lo tanto, proponemos $f(x) = e^x$. Aplicando (1.4):

$$e^{B_t} - e^{B_0} = \int_0^t e^{B_s} dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds.$$

Sustituímos $B_0 = 0$ y despejamos, consiguiendo:

$$\int_0^t e^{B_s} dB_s = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds. \quad \square$$

Las fórmulas anteriores pueden generalizarse al tomar a f como una función escalar $f(t, B_t)$ que ahora también depende del tiempo. En [13] puede verse que si X_t es un proceso de Itô, y $f(t, X_t)$ es una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en x , entonces el proceso $\{Y_t = f(t, X_t)\}$ es también un proceso de Itô y satisface la ecuación estocástica:

■ En su forma diferencial:

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \quad (1.5)$$

■ En su forma integral:

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t f_t(s, X_s)ds + \int_0^t f_x(s, X_s)dX_s + \int_0^t \frac{1}{2}f_{xx}(s, X_s)(dX_s)^2. \quad (1.6)$$

Ejemplo 3.- En este ejemplo haremos uso de (1.6) para hallar $\int_0^t s dB_s$. Observamos que la integral estocástica de (1.6) es la integral de f_x . Como queremos hallar $\int_0^t s dB_s$, tenemos que $f_x(x, t) = t$. Por lo tanto, proponemos $f(x, t) = tx$. Aplicando (1.6)

$$tB_t - 0B_0 = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}0(dB_s)^2.$$

Observamos que al aplicar (1.6) aparece el término $(dB_s)^2$. En el Cuadro 1.1 se encuentra la tabla de McKean (véase [13]), con la cual podemos encontrar a qué es igual dicho término. Sustituyendo obtenemos

$$tB_t - 0B_0 = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}0 ds.$$

\times	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Cuadro 1.1: Tabla de McKean

Despejando:

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds. \quad \square$$

En los ejemplos anteriores hemos encontrado expresiones para integrales de Itô, las cuales están relacionadas con alguna EDE. Es decir, implícitamente hemos resuelto la EDE asociada a cada integral de Itô de los ejemplos previos. A continuación veremos un ejemplo en el que se resuelve directamente una EDE.

Ejemplo 4.- Hallaremos el proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (1.7)$$

$$\text{con } X_0 = x_0 \text{ y } X_t = f(t, B_t)$$

Solución:

Para resolver esta ecuación utilizaremos la fórmula de Itô (1.5). Notamos que al aplicar esta fórmula obtenemos el término $(dB_s)^2$, al igual que en el *Ejemplo 3*. Nuevamente usamos el Cuadro 1.1 para encontrar a qué es igual ese término.

El método a utilizar para hallar la solución de (1.7) es el método de igualación de coeficientes. Este método consiste en igualar los coeficientes de (1.7) con los de (1.5). Al realizarlo, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_t(t, B_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) &= \mu f(t, B_t) \\ f_x(t, B_t) &= \sigma f(t, B_t). \end{aligned}$$

Fijándonos en una realización x del proceso B_t , obtenemos el siguiente sistema de

ecuaciones en derivadas parciales:

$$f_t(t, x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, x) = \mu f(t, x) \quad (1.8)$$

$$f_x(t, x) = \sigma f(t, x). \quad (1.9)$$

Trabajando con la ecuación (1.9) y usando el método del factor integrante, obtenemos

$$f_x(t, x) - \sigma f(t, x) = 0.$$

Calculamos el factor integrante,

$$\mu(x) = e^{-\int \sigma dx} = e^{-\sigma x}.$$

Multiplicando la ecuación (1.9) por $\mu(x)$ obtenemos:

$$e^{-\sigma x} f_x(t, x) - e^{-\sigma x} \sigma f(t, x) = 0,$$

la cual puede ser vista como la derivada de un producto de funciones, de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}(f(t, x)e^{-\sigma x}) = 0$$

$$f(t, x)e^{-\sigma x} = k(t)$$

$$f(t, x) = k(t)e^{\sigma x}.$$

Sustituyendo $f(t, x)$ en la ecuación (1.8) obtenemos:

$$e^{\sigma x} k'(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma x} k(t) = \mu e^{\sigma x} k(t)$$

$$e^{\sigma x} k'(t) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu\right) e^{\sigma x} k(t) = 0$$

$$k'(t) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu\right) k(t) = 0.$$

Nuevamente podemos usar el método del factor integrante, el cual es:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu) dt} \\ &= e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)t}. \end{aligned}$$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos:

$$\begin{aligned} k'(t)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)t} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu\right) e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)t}k(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(k(t)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)t}\right) &= 0 \\ k(t)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)t} &= c \\ k(t) &= ce^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}. \end{aligned}$$

Ahora que ya encontramos $k(t)$, podemos sustituir para hallar $f(t, x)$:

$$f(t, x) = e^{\sigma x} ce^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} = ce^{\sigma x + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Así,

$$f(t, B_t) = ce^{\sigma B_t + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Usando la condición inicial podemos hallar el valor de c :

$$\begin{aligned} f(0, B_0) &= x_0 \\ x_0 &= ce^{\sigma B_0 + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)0} \\ x_0 &= c. \end{aligned}$$

Así, la solución a la ecuación $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$ es

$$f(t, B_t) = X_t = x_0 e^{\sigma B_t + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Dicho proceso se llama Movimiento Browniano Geométrico (MBG). \square

1.3. Modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg

El modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg modela el capital de una empresa aseguradora en tiempo continuo de la siguiente manera:

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (1.10)$$

en donde $t \in [0, +\infty)$, U_t es el capital de la aseguradora en el tiempo t , u es el capital inicial de la aseguradora, c es la prima (que se considera constante) que recibe la empresa por parte de los asegurados, $\{N(t) : t \geq 0\}$ es el proceso Poisson con intensidad λt , y Y_i es el monto de la i -ésima reclamación. En este caso se supone que las reclamaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución F y que además son independientes de $N(t)$.

El término $S(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, el cual representa el monto acumulado de todas las reclamaciones hasta el momento t , recibe el nombre de proceso Poisson compuesto, y cumple con las siguientes propiedades:

- Tiene incrementos independientes y estacionarios. Es decir, si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces $S(t_1) - S(t_0), S(t_2) - S(t_1), \dots, S(t_n) - S(t_{n-1})$ son independientes. Si $h > 0$, entonces $S(t+h) - S(t) \sim S(h)$, pues $S(t+h) - S(t) = \sum_{i=0}^{N(t+h)} Y_i - \sum_{i=0}^{N(t)} Y_i = \sum_{N(t)}^{N(t+h)} Y_i \sim \sum_{i=0}^{N(h)} Y_i$.
- $\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[Y] = \lambda t\mathbb{E}[Y]$.
- $\text{Var}[S(t)] = \lambda t\mathbb{E}[Y^2]$.
- $\text{Cov}[S(t), S(s)] = \lambda\mathbb{E}[Y^2] \min\{t, s\}$.
- $\mu_{S(t)}(x) = e^{\lambda t(\mu_Y(x)-1)}$.

Con base en las propiedades del proceso Poisson compuesto podemos definir un nuevo concepto llamado *Condición de ganancia neta*, pero antes de definirlo, obtengamos la esperanza del capital de la aseguradora:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_t] &= \mathbb{E}[u + ct - S(t)] \\ &= u + ct - \mathbb{E}[S(t)] \\ &= u + ct - \lambda t\mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Si consideramos a $\mathbb{E}[Y] := \mu$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_t] &= u + ct - \lambda t\mu \\ &= u + (c - \lambda\mu)t. \end{aligned}$$

Una vez calculada la esperanza del proceso, vemos en qué caso dicha esperanza es

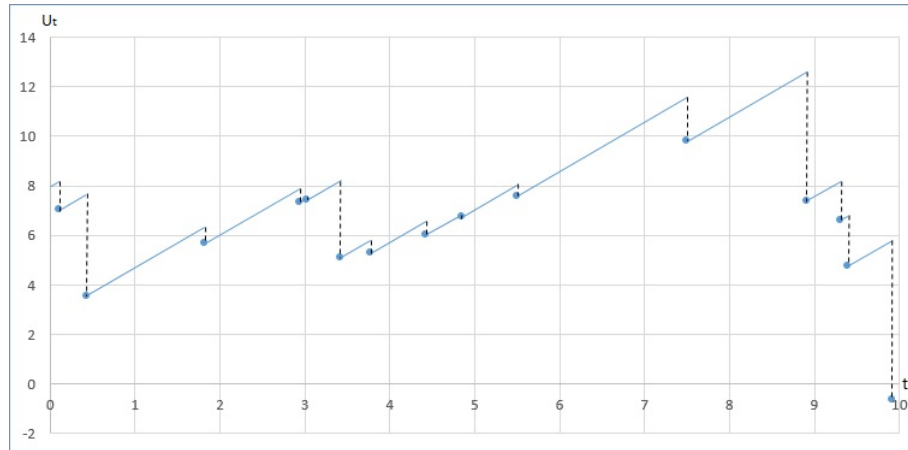


Figura 1.1: Simulación del proceso de Cramer-Lundberg

positiva, es decir, cuándo se espera que la aseguradora tenga un capital positivo.

$$\mathbb{E}[U_t] > 0$$

$$c - \lambda\mu > 0.$$

De este modo, la condición de ganancia neta queda definida como:

$$c > \lambda\mu.$$

Aunado a esto, se definen las variables T_i como el instante de tiempo en el que ocurre la i -ésima reclamación. En el modelo de Cramer-Lundberg se tiene que $T_i \sim \text{Gamma}(i, \lambda)$.

El proceso que modela el capital de la aseguradora es llamado "Proceso de superávit". En la Figura 1.1 se muestra una simulación de dicho proceso donde se considera que el proceso Poisson tiene tasa $\lambda = 1$, los montos de reclamación siguen una distribución Exponencial con parámetro $\beta = 2$, se considera una prima de $c = 2$ unidades monetarias y un capital inicial de $u = 8$ unidades monetarias.

Diremos que la compañía se encuentra en ruina cuando $U_t \leq 0$. Definiremos al momento de la ruina como $\tau := \inf\{t > 0 : U_t \leq 0\}$. Lo que nos interesa encontrar es la probabilidad de que ocurra la ruina, de manera formal se define como:

$$\psi(u) := P[\tau < +\infty | U_0 = u] = P_u[\tau < +\infty].$$

Dicha probabilidad cumple las siguientes propiedades (véase [12]):

- ψ es una función decreciente, es decir, si $u_1 < u_2$ entonces $\psi(u_1) < \psi(u_2)$.
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$.
- $\frac{d}{du} \tilde{\psi}(u) = \frac{\lambda}{c} (\tilde{\psi}(u) - \int_0^u \tilde{\psi}(u-y) f(y) dy)$, con $\tilde{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$.
- $\psi(0) = \frac{\lambda \mu}{c}$.
- $\psi(u) = \frac{\lambda}{c} (\int_u^\infty \tilde{F}(y) dy + \int_0^u \psi(u-y) \tilde{F}(y) dy)$, con $\tilde{F}(y) = 1 - F(y)$.

1.4. Aproximación a través de un proceso de difusión

En esta sección se demostrará que el proceso de Cramer-Lundberg puede ser aproximado a través de un proceso de difusión. Adicional a esto, se darán los parámetros (μ, σ^2) de dicho proceso.

Un proceso de difusión con parámetros (μ, σ^2) , escrito en su forma diferencial, está dado por

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Para justificar nuestra aproximación probaremos que nuestro proceso de superávit (1.10) converge en distribución al proceso de difusión. Esta convergencia ocurre cuando los montos de reclamación tienden a cero.

Observación: La suposición de que los montos de reclamación tienden a cero puede hacerse sin pérdida de generalidad, ya que, si los montos de reclamación se estabilizan alrededor de un valor $M > 0$, podemos volver a definir el proceso, de manera que los montos tiendan a 0.

Comenzaremos por redefinir nuestro proceso de superávit. Consideramos que la aseguradora contrata un reaseguro proporcional con nivel de retención b . Así, el proceso de Cramer-Lundberg queda redefinido como:

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} bY_i.$$

Vemos que la única parte del proceso que depende del tiempo es $ct - \sum_{i=1}^{N(t)} bY_i$, por lo que solo trabajaremos con esa parte, a la cual denominaremos como $\tilde{U}_t := ct - \sum_{i=1}^{N(t)} bY_i$. Definimos $\hat{Y}_i = bY_i$ y $\hat{S}_t = \sum_{i=1}^{N(t)} \hat{Y}_i$. De esta manera

$$\tilde{U}_t = ct - \hat{S}_t.$$

Proponemos los siguientes parámetros para el proceso de difusión

$$\mu := c - \lambda \mathbb{E}(\hat{Y}) \quad (1.11)$$

$$\sigma^2 := \lambda \mathbb{E}(\hat{Y}^2). \quad (1.12)$$

Escribiendo a $\hat{Y}_i = \alpha W_i$ para $\alpha > 0$ y $W_i \in L^2$, y por (1.12) obtenemos:

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\mathbb{E}(\hat{Y}^2)} \quad (1.13)$$

$$= \left(\frac{\sigma^2}{\alpha^2} \right) \left(\frac{1}{\mathbb{E}(W^2)} \right). \quad (1.14)$$

Para demostrar la convergencia en distribución, usaremos la función generadora de momentos de \tilde{U}_t , definida por:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{U}_t}(r) &= \mathbb{E} \left(e^{r(ct - \hat{S}_t)} \right) \\ &= e^{rct} \mathbb{E} \left(e^{-r\hat{S}_t} \right) \\ &= e^{rct} M_{\hat{S}_t}(-r). \end{aligned}$$

Pero por las propiedades de \hat{S}_t discutidas en la sección anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} M_{\tilde{U}_t}(r) &= e^{rct} e^{\lambda t [M_{\hat{Y}}(-r) - 1]} \\ &= e^{t[rc + \lambda(M_{\hat{Y}}(-r) - 1)]}. \end{aligned}$$

Tomando logaritmo natural, dividiendo entre t y usando (1.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\ln M_{\tilde{U}_t}(r)}{t} &= rc + \lambda(M_{\hat{Y}}(-r) - 1) \\ &= r(\mu + \lambda \mathbb{E}[\hat{Y}]) + \lambda \left(\mathbb{E} \left[e^{-r\hat{Y}} \right] - 1 \right). \end{aligned}$$

Usando la serie de Taylor de la función exponencial se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\ln M_{\tilde{U}_t}(r)}{t} &= r\mu + r\lambda\mathbb{E}[\hat{Y}] + \lambda \left(\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r\hat{Y})^k}{k!} \right] - 1 \right) \\
&= r\mu + r\lambda\mathbb{E}[\hat{Y}] + \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r)^k \mathbb{E}[\hat{Y}^k]}{k!} - 1 \right) \\
&= r\mu + r\lambda\mathbb{E}[\hat{Y}] + \lambda \left(1 - r\mathbb{E}[\hat{Y}] + \frac{r^2\mathbb{E}[\hat{Y}^2]}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-r)^k \mathbb{E}[\hat{Y}^k]}{k!} - 1 \right) \\
&= r\mu + \frac{r^2\lambda\alpha^2\mathbb{E}[W^2]}{2} + \lambda \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-r)^k \alpha^k \mathbb{E}[W^k]}{k!} \\
&= r\mu + \frac{r^2\lambda\alpha^2\mathbb{E}[W^2]}{2} + \lambda\delta(\alpha), \quad \text{con } \delta(\alpha) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-r)^k \alpha^k \mathbb{E}[W^k]}{k!}.
\end{aligned}$$

Usando (1.14)

$$\begin{aligned}
\frac{\ln M_{\tilde{U}_t}(r)}{t} &= r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2} + \lambda\delta(\alpha) \\
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln M_{\tilde{U}_t}(r)}{t} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2} + \lambda\delta(\alpha) \\
&= r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_{\tilde{U}_t}(r) = e^{\left(r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}\right)t},$$

la cual es la función generadora de momentos de una variable aleatoria Normal(μ, σ^2).

Por lo que nuestro proceso de superávit converge en distribución a un proceso de difusión con parámetros:

$$\begin{aligned}
\mu &= c - \lambda\mathbb{E}[\hat{Y}] \\
\sigma^2 &= \lambda\mathbb{E}[\hat{Y}^2].
\end{aligned}$$

Con esto queda justificado que el proceso de Cramer-Lundberg puede ser aproximado a través de un proceso de difusión.

Ahora hallaremos una expresión para la probabilidad de ruina cuando se considera el proceso de difusión. Primero, comencemos por definir el siguiente MB con

parámetros (μ, σ^2) :

$$X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Antes de obtener la probabilidad de ruina, consideremos el proceso

$$\left\{ Y_t = e^{\frac{-2\mu}{\sigma^2} X_t} \right\}.$$

Veamos que es una martingala. Primero debemos comprobar que es integrable:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_t|] &= \mathbb{E}\left[\left|e^{\frac{-2\mu}{\sigma^2} X_t}\right|\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\frac{-2\mu}{\sigma^2}(\mu t + \sigma B_t)}\right] \\ &= e^{\frac{-2\mu^2}{\sigma^2}t} \mathbb{E}\left[e^{\frac{-2\mu}{\sigma} B_t}\right]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ahora calculemos la esperanza que se encuentra en (1.15)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\frac{-2\mu}{\sigma} B_t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2\mu}{\sigma} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\sigma^2 z^2 + 2\mu\sigma(2t)z + (2\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} e^{\frac{(2\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dz \\ &= e^{\frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(z - (-\frac{2\mu t}{\sigma}))^2}{2t}} dz \\ &= e^{\frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (1.15)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_t|] &= e^{\frac{-2\mu^2 t}{\sigma^2}} e^{\frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}} \\ &= e^{\frac{-2\mu^2 t}{\sigma^2} + \frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}} \\ &= 1 < +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y_t es integrable.

Ahora veamos que $\{Y_t\}$ cumple la propiedad martingala. Sean $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{-2\mu}{\sigma^2} X_t} \middle| \mathcal{F}_s\right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\mu}{\sigma} B_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= e^{-\frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\mu}{\sigma} (B_t - B_s + B_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= e^{-\frac{2\mu^2 t}{\sigma^2}} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\mu}{\sigma} (B_t - B_s)} \right] e^{-\frac{2\mu}{\sigma} B_s}. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos la esperanza que aparece en (1.16). Recordamos que la variable $B_t - B_s \sim \text{Normal}(0, t - s)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\mu}{\sigma} (B_t - B_s)} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\mu}{\sigma} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{z^2}{2(t-s)}} dz \\
&= e^{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{2\mu(2(t-s))\sigma z + \sigma^2 z^2}{2\sigma^2(t-s)}} dz \\
&= e^{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(\sigma z)^2 + (2)(\sigma z)(2\mu(t-s)) + (2\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}} dz.
\end{aligned}$$

Sin embargo, vemos que en el exponente tenemos un trinomio cuadrado perfecto, así,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2\mu}{\sigma} (B_t - B_s)} \right] &= e^{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(\sigma z + 2\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}} dz \\
&= e^{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{\left(z - \frac{-2\mu(t-s)}{\sigma}\right)^2}{2(t-s)}} dz \\
&= e^{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (1.16) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Y_t | \mathcal{F}_s] &= e^{-\frac{2\mu^2}{\sigma^2} t} e^{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}(t-s)} e^{-\frac{2\mu}{\sigma} B_s} \\
&= e^{-\frac{2\mu^2}{\sigma^2} (\mu s + \sigma B_s)} \\
&= e^{-\frac{2\mu}{\sigma} X_s} \\
&= Y_s.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{E} [Y_t | \mathcal{F}_s] = Y_s.$$

Con esto queda demostrado que el proceso $\{Y_t\}$ es una martingala.

Ahora obtengamos una expresión para $\psi(x)$, donde $x \in \mathbb{R}^+$ es el capital inicial de la aseguradora. Definimos el siguiente tiempo de paro $\mathfrak{T} := \inf\{t : X_t = -x\}$. Así

que $\psi(x) = \mathbb{P}(\mathfrak{T} < +\infty)$. Por el teorema de convergencia, como $\{Y_t\}$ es martingala acotada, entonces el proceso detenido $\{Y_{\mathfrak{T} \wedge t}\}$ es también una martingala acotada y converge a $Y_{\mathfrak{T}}$.

Por otro lado, tenemos que $X_t \in \{-x, \infty\}$, es decir, se alcanza o no la ruina. Además, por el teorema de paro óptimo (véase Apéndice C), $\mathbb{E}[Y_{\mathfrak{T}}] = \mathbb{E}[Y_0] = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \mathbb{P}(\mathfrak{T} < +\infty) \\ &= \mathbb{P}\left(Y_{\mathfrak{T}} = e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}}\right).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Por definición

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{\mathfrak{T}}] &= e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x} \mathbb{P}\left(Y_{\mathfrak{T}} = e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} \mathbb{P}\left(Y_{\mathfrak{T}} = e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\right) \\ &= e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x} \mathbb{P}\left(Y_{\mathfrak{T}} = e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\right) + 0 \mathbb{P}(Y_{\mathfrak{T}} = 0) \\ &= e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x} \mathbb{P}\left(Y_{\mathfrak{T}} = e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{P}\left(Y_{\mathfrak{T}} = e^{\frac{2\mu}{\sigma^2}x}\right) = \mathbb{E}[Y_{\mathfrak{T}}] e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}.\tag{1.18}$$

Sustituyendo (1.18) en (1.17) tenemos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \mathbb{E}[Y_{\mathfrak{T}}] e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} \\ &= e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}.\end{aligned}$$

De esta manera encontramos la siguiente expresión para la probabilidad de ruina cuando el proceso de Cramer-Lundberg es aproximado por un proceso de difusión:

$$\psi(x) = e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x}.\tag{1.19}$$

En [7] puede encontrarse otra forma de demostrar que el proceso de Cramer-Lundberg puede ser aproximado a través de un proceso de difusión. En dicho documento, en lugar de hallar el proceso de difusión que aproxima al de Cramer-Lundberg, se aproxima directamente la probabilidad de ruina, tanto para el caso de horizonte finito como el de horizonte infinito.

1.5. Programación dinámica en tiempo continuo

1.5.1. Introducción

Una de las herramientas de optimización más usadas es la programación dinámica, la cual está basada en el principio de optimalidad de Bellman [3]. Sin embargo, este método solo funciona para problemas a tiempo discreto. Es por eso, que los científicos William Hamilton y Gustav Jacobi trabajaron para hacer una extensión de esta técnica al caso de problemas a tiempo continuo. La ecuación en la que está basado este procedimiento es llamada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), la cual es una ecuación diferencial parcial, cuya solución es denominada función valor.

En esta sección se encontrará en términos generales el principio de programación dinámica en tiempo continuo. Este principio es en el cual se basa la ecuación de HJB. Algo importante que hay que mencionar cuando se habla de la ecuación de HJB, es que esta ecuación es motivada de manera intuitiva. Por esta razón debe demostrarse un teorema de verificación, con el cual se justifica que la función de valor hallada es la buscada.

1.5.2. Programación dinámica en tiempo continuo

Sea X^C un proceso determinado por un proceso C , llamado proceso de control, con espacio de estados \mathcal{C} . Éste representa las estrategias tomadas para influir el valor de X^C . Suponemos que $C = \{C_t : t \geq 0\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ dada, ya que la elección de la estrategia solo puede ser tomada con base en la historia del proceso, y no con base en los valores futuros.

Definimos a \mathfrak{C} el conjunto de estrategias admisibles, es decir, el conjunto de estrategias adaptadas $C = \{C_t : t \geq 0\}$ que son permitidas.

Sea $X_t = x$ el valor del proceso al tiempo t . En cada momento hay una ganancia o pérdida, que representamos con $r(X_t, C_t)$. Un valor negativo de $r(X_t, C_t)$ sería un costo. El valor relacionado con una estrategia C lo definimos como

$$V^C(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^K e^{-\delta(s-t)} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K-t)} r_K(X_K^C) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (1.20)$$

donde K es un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Vemos que la expresión (1.20) tiene dos argumentos, el tiempo t y el valor x . Para simplificar el manejo de esta función, consideramos funciones valor que no dependan del tiempo t . Es decir, en lugar de tomar en cuenta toda la historia del proceso, nos fijamos únicamente en el último valor de éste, obteniendo

$$V^C(x) = \mathbb{E} \left[\int_t^K e^{-\delta(s-t)} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K-t)} r_K(X_K^C) \middle| X_t = x \right].$$

Hay dos ganancias continuas, una de tasa $r(X_t, C_t)$ dependiente del estado actual del proceso y de la estrategia tomada, y una tasa r_K dependiente únicamente del estado final del proceso.

Nuestra meta es maximizar la función valor. Es decir, buscamos

$$V(x) = \sup_{C \in \mathfrak{C}} V^C(x).$$

Como $V(x) = \sup_{C \in \mathfrak{C}} V^C(x)$, entonces $V(x) - \varepsilon, \varepsilon > 0$, no puede ser cota superior, es decir,

$$\begin{aligned} \exists \tilde{C} \in \mathfrak{C} : V(x) - \varepsilon < V^{\tilde{C}}(x) \\ V(x) < V^{\tilde{C}}(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea C una estrategia arbitraria en el intervalo $[0, K \wedge t]$. A partir del tiempo $K \wedge t$ elegimos la estrategia \tilde{C} . Entonces

$$\begin{aligned} V(x) \geq V^C(x) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + \int_{K \wedge t}^K e^{-\delta s} r(X_s^{\tilde{C}}, \tilde{C}_{s-t}) ds + e^{-\delta K} r_K(X_K^{\tilde{C}}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + \right. \\ &\quad \left. e^{-\delta(K \wedge t)} \mathbb{E} \left[\int_0^{(K-t)^+} e^{-\delta s} r(X_{t+s}^{\tilde{C}}, \tilde{C}_s) ds + e^{-\delta(K-t)^+} r_K(X_K^{\tilde{C}}) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V^{\tilde{C}}(X_{K \wedge t}^C) \right] \\ &> \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V(X_{K \wedge t}^C) \right] - \varepsilon. \end{aligned}$$

A continuación hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$, y dado que C es una estrategia arbitraria,

tomamos el supremo sobre C obteniendo que:

$$V(x) \geq \sup_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V(X_{K \wedge t}^C) \right]. \quad (1.21)$$

Ahora, empezando con una estrategia arbitraria, se observó anteriormente que

$$\begin{aligned} V^C(x) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V^C(X_{K \wedge t}^C) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V(X_{K \wedge t}^C) \right]. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre C

$$V(x) \leq \sup_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V(X_{K \wedge t}^C) \right]. \quad (1.22)$$

Usando las ecuaciones (1.21) y (1.22), encontramos el principio de programación dinámica para el caso de tiempo continuo

$$V(x) = \sup_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{E} \left[\int_0^{K \wedge t} e^{-\delta s} r(X_s^C, C_s) ds + e^{-\delta(K \wedge t)} V(X_{K \wedge t}^C) \right].$$

Este es el principio en el que está basada la ecuación de HJB. Como se mencionó anteriormente, la ecuación de HJB es motivada de manera intuitiva, por lo que no hay expresión general para esta ecuación, ya que depende de cada problema en el que se planea utilizar. En el próximo capítulo se motivará la ecuación de HJB usando como función valor la probabilidad de supervivencia, pues al maximizarla, la probabilidad de ruina se minimiza. Los procesos de control que son utilizados son la estrategia de reaseguro y la estrategia de inversión.

Capítulo 2

Minimización de la probabilidad de ruina

En este capítulo se obtendrán las estrategias óptimas de reaseguro e inversión para el proceso de difusión. En la primera sección se considera que la aseguradora únicamente contrata el reaseguro proporcional, y se obtiene la estrategia óptima. En la segunda sección se trata el problema sin reaseguro, pero tomando en cuenta que la aseguradora puede invertir cierta cantidad de dinero en un activo con riesgo; y se determina la estrategia óptima de inversión. Finalmente, en la última sección se obtienen ambas estrategias óptimas cuando interactúan de manera conjunta.

El contenido de este capítulo se encuentra principalmente motivado por [14] y [15]. En este trabajo se presenta de manera más detallada la teoría y demostraciones expuestas en dichas referencias.

2.1. Proceso de difusión con reaseguro

Consideremos un proceso de difusión como aproximación al modelo clásico de riesgo. Además, se utiliza reaseguro proporcional con un nivel de retención $b \in [0, 1]$. Expresamos la prima como $c = (1 + \eta)\lambda\mu$, con $\eta > 0$, llamado *factor de recargo* (safety loading). Para una reclamación Y_i , el asegurador paga bY_i y el reasegurador paga $(1 - b)Y_i$. El asegurador usa el principio del valor esperado para calcular la prima, al igual que el reasegurador. Así, la prima para el reaseguro es

$$(1 + \theta)\lambda\mathbb{E}[(1 - b)Y_i] = (1 + \theta)(1 - b)\lambda\mu,$$

donde $\theta > 0$ es el factor de recargo que cobra la reaseguradora.

Así, el excendente de prima con el que se queda la aseguradora es

$$\begin{aligned} c(b) &= (1 + \eta)\lambda\mu - (1 + \theta)(1 - b)\lambda\mu \\ &= (b(1 + \theta) - (\theta - \eta))\lambda\mu. \end{aligned}$$

En la sección de preliminares, vimos que el proceso de difusión a través del cual aproximaremos el modelo de Cramer-Lundberg tiene coeficiente de tendencia $c - b\lambda\mu$ y coeficiente de difusión $b\sqrt{\lambda\mu_2}$. Por lo tanto, el proceso de difusión que se usa como aproximación, escrito en su forma integral, es

$$\begin{aligned} X_t^b &= x + \int_0^t (c(b_s) - b_s\lambda\mu)ds + \int_0^t b_s\sqrt{\lambda\mu_2}dB_s \\ &= x + \int_0^t ((b_s(1 + \theta) - (\theta - \eta))\lambda\mu - b_s\lambda\mu)ds + \int_0^t b_s\sqrt{\lambda\mu_2}dB_s \\ &= x + \int_0^t ((b_s\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu)ds + \sigma \int_0^t b_sdB_s, \end{aligned}$$

con $\sigma = \sqrt{\lambda\mu_2}$, el cual escrito en su forma diferencial queda como

$$\begin{aligned} dX_t^b &= ((b_t\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu)dt + \sigma b_tdB_t \\ \text{con } X_0 &= x. \end{aligned}$$

Denotamos al conjunto de estrategias admisibles como \mathfrak{U} . Dicho conjunto es el conjunto de procesos càdlàg (continuos a la derecha y con límite a la izquierda) $\{b_t\}$ adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}$ con valores en $[0, 1]$, donde la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ es la filtración generada por $\{B_t\}$.

Definimos el momento de ruina como $\tau^b := \inf\{t \geq 0 : X_t^b < 0\}$, y la probabilidad de ruina como $\psi^b(x) = \mathbb{P}[\tau^b < +\infty | X_0 = x]$. Por lo tanto, la probabilidad de supervivencia, representada por δ^b , es $\delta^b(x) = 1 - \psi^b(x)$. Así, nuestro objetivo es minimizar la probabilidad de ruina, o equivalentemente, maximizar la probabilidad de supervivencia. Es decir, buscamos

$$\delta(x) = \sup_{b \in \mathfrak{U}} \delta^b(x).$$

Asumiremos que $\theta > \eta$, para que la prima del reaseguro sea más cara que la del seguro, y así evitar la solución trivial $b_t = 0$.

Lema 2.1.1 *La función δ es estrictamente creciente en el conjunto $\{x : \delta(x) < 1\}$.*

Demostración: Sea $y > x$ y sea $b = \{b_t\}$ una estrategia para el capital inicial x . Sea τ_x^b el momento de ruina con un capital inicial x . Para un capital inicial y usamos la siguiente estrategia:

$$\tilde{b}_t = \begin{cases} b_t, & t \leq \tau_x^b \\ 1, & t > \tau_x^b. \end{cases}$$

Con esto, vemos que

$$\begin{aligned} \delta^{\tilde{b}}(y) &= \mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty) \\ &= \mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty | \tau_x^b < +\infty) \mathbb{P}(\tau_x^b < +\infty) \\ &\quad + \mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty | \tau_x^b = +\infty) \mathbb{P}(\tau_x^b = +\infty). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(\tau_x^b < +\infty) = 1 - \delta^b(x)$ y $\mathbb{P}(\tau_x^b = +\infty) = \delta^b(x)$, entonces

$$\delta^{\tilde{b}}(y) = \mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty | \tau_x^b < +\infty)(1 - \delta^b(x)) + \mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty | \tau_x^b = +\infty)\delta^b(x). \quad (2.1)$$

Ahora, analizaremos por separado las dos probabilidades condicionales presentes en la ecuación (2.1). Para la primera probabilidad condicional tenemos que $\tau_x^b < +\infty$. Esto quiere decir que para el instante τ_x^b la aseguradora tendrá un capital de $y - x$. Además, a partir de ese momento la estrategia $\tilde{b}_t = 1$. Dicho en otros términos

$$\mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty | \tau_x^b < +\infty) = \delta^1(y - x). \quad (2.2)$$

Para la otra probabilidad condicional, recordemos la definición de τ_x^b y $\tau_y^{\tilde{b}}$:

$$\begin{aligned} \tau_x^b &= \inf\{t : X_t^b < 0\} \\ \tau_y^{\tilde{b}} &= \inf\{t : Y_t^{\tilde{b}} < 0\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} X_t^b &= x + \int_0^t (b_s\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu ds + \sigma \int_0^t b_s dB_s \\ Y_t^{\tilde{b}} &= y + \int_0^t (\tilde{b}_s\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu ds + \sigma \int_0^t \tilde{b}_s dB_s. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\tau_y^{\tilde{b}} < \tau_x^b$. Por la forma en la que está definida \tilde{b} , para el momento $\tau_y^{\tilde{b}}$ ambas estrategias son iguales, es decir, ambos procesos son iguales

salvo por el capital inicial. Como $y > x$, entonces sabemos que existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = x + r$. Observamos que

$$\begin{aligned}
0 > Y_{\tau_y^{\tilde{b}}}^{\tilde{b}} &= y + \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} (\tilde{b}_s \theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds + \sigma \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} \tilde{b}_s dB_s \\
&= y + \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} (b_s \theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds + \sigma \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} b_s dB_s \\
&= x + r + \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} (b_s \theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds + \sigma \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} b_s dB_s \\
&> x + \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} (b_s \theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds + \sigma \int_0^{\tau_y^{\tilde{b}}} b_s dB_s \\
&= X_{\tau_y^{\tilde{b}}}^b,
\end{aligned}$$

es decir, hemos encontrado un momento menor que τ_x^b en el que $X_t^b < 0$, pero esto es una contradicción, porque $\tau_x^b = \inf\{t : X_t^b < 0\}$. Por lo tanto, $\tau_y^{\tilde{b}} \geq \tau_x^b$. Con esto, concluimos que

$$\mathbb{P}(\tau_y^{\tilde{b}} = +\infty | \tau_x^b = +\infty) = 1. \quad (2.3)$$

Sustituyendo (2.2) y (2.3) en (2.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta^{\tilde{b}}(y) &= \delta^b(x) + (1 - \delta^b(x)) \delta^1(y - x) \\
&= \delta^b(x) + (1 - \delta^b(x)) (1 - e^{-2\eta(y-x)/\sigma^2}),
\end{aligned}$$

donde $\delta^1(y - x) = 1 - e^{-2\eta(y-x)/\sigma^2}$ se obtiene directamente de la ecuación (1.19).

Tomando el supremo sobre todas las estrategias b , obtenemos

$$\delta(y) \geq \delta(x) + (1 - \delta(x)) (1 - e^{-2\eta(y-x)/\sigma^2}) > \delta(x).$$

Observamos, que si $\delta(x) < 1$, entonces $\delta(y) > \delta(x)$. Así que $\delta(x)$ es estrictamente creciente en el conjunto $\{x : \delta(x) < 1\}$. \square

Ahora, motivaremos la ecuación de HJB relacionada a este problema.

Sea $(0, h]$ un intervalo pequeño, y supongamos que tenemos para cada capital $x_h > 0$ en el tiempo h una estrategia b^ε tal que $\delta^{b^\varepsilon}(x_h) > \delta(x_h) - \varepsilon$. Sabemos que esta estrategia b^ε existe, pues tenemos que:

$$\delta(x) = \sup_{b \in \mathcal{U}} \delta^b(x).$$

Por lo que, $\delta(x) - \varepsilon$ no puede ser cota superior. Por lo tanto, existe $b^\varepsilon \in \mathfrak{U}$ tal que

$$\delta(x) - \varepsilon < \delta^{b^\varepsilon}(x).$$

Sea $b_t = b \in [0, 1]$ para $t \leq h$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta(x) &\geq \delta^b(x) = \mathbb{P}(\tau^b = +\infty) \\ &= \int_{R_{X_h^b}} \mathbb{P}(\tau^b = +\infty | X_h^b = y) dF_{X_h^b}(y), \quad h < \tau^b \\ &= \int_{R_{X_h^b}} \delta^{b^\varepsilon}(y) dF_{X_h^b}(y), \quad h < \tau^b \\ &= \mathbb{E}[\delta^{b^\varepsilon}(X_h^b) \mathbb{I}_{\tau^b > h}] \\ &= \mathbb{E}[\delta^{b^\varepsilon}(X_{\tau^b \wedge h}^b)] \\ &\geq \mathbb{E}[\delta(X_{\tau^b \wedge h}^b)] - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que ε es arbitrario, podemos hacerlo tender a 0 consiguiendo que

$$\delta(x) \geq \mathbb{E}[\delta(X_{\tau^b \wedge h}^b)].$$

Usando el Lema de Itô (Apéndice B), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(X_{\tau^b \wedge h}^b) &= \delta(x) + \int_0^{\tau^b \wedge h} \left((b\theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu \delta'(X_s^b) + \frac{\sigma^2 b^2}{2} \delta''(X_s^b) \right) ds \\ &\quad + \int_0^{\tau^b \wedge h} b \sigma \delta'(X_s^b) dB_s. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vemos que si $\delta'(X_s^b)$ en (2.4) es acotada, entonces la integral estocástica es una martingala (véase [4]). De esta manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\delta(X_{\tau^b \wedge h}^b)] &= \delta(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^b \wedge h} \left((b\theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu \delta'(X_s^b) + \frac{\sigma^2 b^2}{2} \delta''(X_s^b) \right) ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^b \wedge h} b \sigma \delta'(X_s^b) dB_s \right] \\ &= \delta(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^b \wedge h} \left((b\theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu \delta'(X_s^b) + \frac{\sigma^2 b^2}{2} \delta''(X_s^b) \right) ds \right], \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^b \wedge h} \left((b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu\delta'(X_s^b) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}\delta''(X_s^b) \right) ds \right] &= \mathbb{E} [\delta(X_{\tau^b \wedge h}^b)] - \delta(x) \leq 0 \\ \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^b \wedge h} \left((b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu\delta'(X_s^b) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}\delta''(X_s^b) \right) ds \right] &\leq 0. \end{aligned}$$

Dividiendo entre h y tomando el límite cuando h tiende a 0, obtenemos que

$$(b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu\delta'(x) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}\delta''(x) \leq 0,$$

para todo $b \in [0, 1]$. Así que,

$$\sup_{b \in [0,1]} \left\{ (b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu\delta'(x) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}\delta''(x) \right\} \leq 0.$$

Ahora, sea b una estrategia óptima tal que $\lim_{t \downarrow 0} b_t = b_0$. Entonces, de manera análoga al caso de la estrategia arbitraria, obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^b \wedge h} \left((b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu\delta'(X_s^b) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}\delta''(X_s^b) \right) ds \right] = 0.$$

Notando que ahora se cumple la igualdad, pues estamos usando la estrategia óptima.

Dividiendo entre h y haciendo $h \rightarrow 0$, obtenemos

$$(b_0\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu\delta'(x) + \frac{\sigma^2 b_0^2}{2}\delta''(x) = 0.$$

Así, tenemos que la ecuación de HJB asociada a este problema es

$$\sup_{b \in [0,1]} \left\{ (b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu f'(x) + \frac{\sigma^2 b^2}{2}f''(x) \right\} = 0, \quad (2.5)$$

con la condición inicial $f(0) = 0$ y la condición de frontera $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := f(+\infty) = 1$.

La solución a esta ecuación debe ser estrictamente creciente. Se hallará la solución f de (2.5) y después se utilizará un teorema de verificación para comprobar que δ y f coinciden.

2.2. Estrategia óptima de reaseguro

Una vez que ya se tiene propuesta la ecuación de HJB, se procede a resolverla. Para realizarlo, primero vemos los posibles valores que puede tomar la función $f''(\cdot)$, y con base en esto maximizaremos con respecto a b . Pero antes, definimos a g como la función a maximizar, es decir,

$$g(b) := (b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu f'(x) + \frac{\sigma^2 b^2}{2} f''(x),$$

con $x \in \mathbb{R}^+$ fijo.

- Caso 1) $f''(x) > 0$

Para maximizar la función $g(b)$, obtenemos su primera derivada, que es

$$g'(b) = b\sigma^2 f''(x) + \theta\lambda\mu f'(x).$$

Igualando a cero y despejando a b , obtenemos el punto crítico

$$b^* = -\frac{\theta\lambda\mu f'(x)}{\sigma^2 f''(x)} < 0.$$

Evaluando la segunda derivada de g en ese punto, tenemos

$$g''(b^*) = \sigma^2 f''(x) > 0.$$

Por lo tanto, concluimos que b^* es un mínimo. Observamos que g es una función cuadrática, es decir, al graficarla obtenemos una parábola. Al tener que b^* es un mínimo, podemos decir que g tiene una forma como la de la Figura 2.1.

Así, vemos que en el intervalo $[0,1]$, la función g es creciente, y por lo tanto, alcanza su máximo en $b^* = 1$. Sustituyendo este valor de b en la ecuación de HJB propuesta, obtenemos

$$\begin{aligned} \eta\lambda\mu f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) &= 0 \\ f''(x) + \frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} f'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Definimos $y(x) := f'(x)$. Sustituyendo, obtenemos

$$y'(x) = -\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} y(x),$$

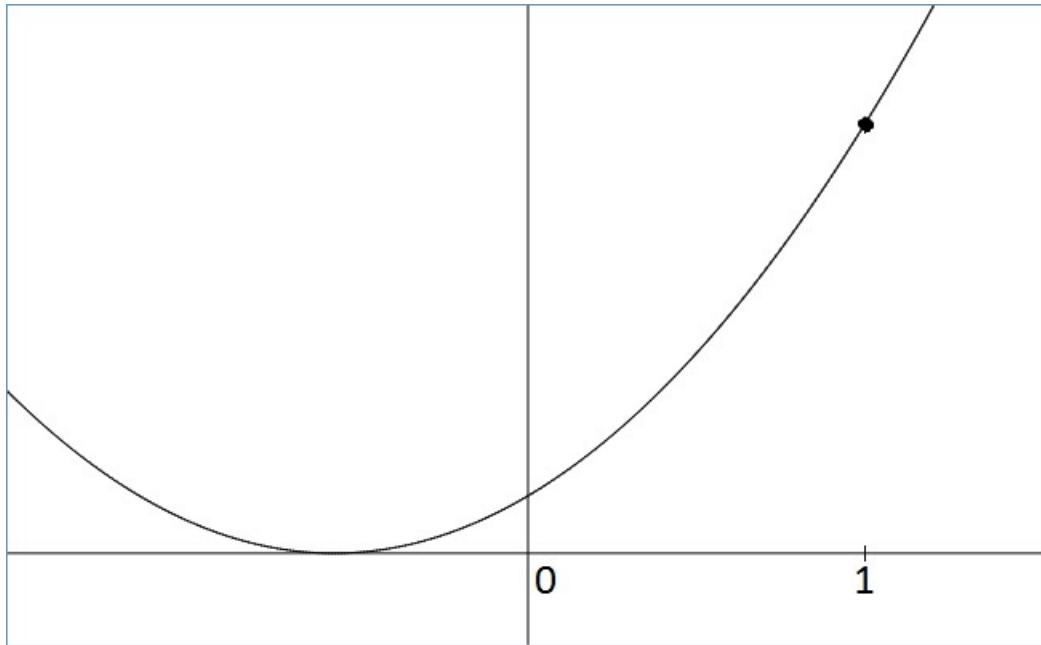


Figura 2.1: Gráfica de la función g .

que es una ecuación diferencial de primer orden. De esto, podemos obtener a $y(x)$ de la siguiente forma

$$y(x) = c_1 e^{-\int \frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} dx} = c_1 e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} x},$$

con c_1 una constante real. Es decir,

$$f'(x) = c_1 e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} x}.$$

Como pedimos que f sea estrictamente creciente, entonces $f'(x) > 0$ para cualquier x , con lo cual deducimos que $c_1 > 0$. Pero si esto es cierto, derivando obtenemos

$$f''(x) = -c_1 \frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2} x} < 0,$$

lo cual es una contradicción, pues estamos suponiendo que $f''(x) > 0$. Por lo tanto, $f''(x) > 0$ no puede ocurrir.

- Caso 2) $f''(x) = 0$

Si suponemos $f''(x) = 0$, la función g sería

$$g(b) = (b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu f'(x),$$

que es la ecuación de una recta con pendiente $\theta f'(x) > 0$, y por lo tanto, es creciente. Así, como en el caso anterior, al ser creciente en el intervalo $[0, 1]$, se tiene que el máximo se alcanza en $b^* = 1$.

Sustituyendo $b^* = 1$ en la ecuación de HJB, tenemos

$$\begin{aligned}(\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu f'(x) &= 0 \\ f'(x) &= 0 \\ f(x) &= c,\end{aligned}$$

con c una constante real. Pero sabemos que $f(x)$ es estrictamente creciente para toda x tal que $f(x) < 1$, entonces $f(x) = 1$. Sin embargo, como condición inicial tenemos que $f(0) = 0$. Así, llegamos a que $1 = f(0) = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, concluimos que $f''(x)$ no puede ser igual a cero. Por la propiedad de tricotomía, aseguramos que $f''(x) < 0$.

Como $f''(x) < 0$, procedemos a encontrar el punto crítico \tilde{b} de manera análoga al Caso 1, obteniendo

$$\tilde{b} = -\frac{\theta\lambda\mu f'(x)}{\sigma^2 f''(x)} > 0. \quad (2.6)$$

Evaluando dicho valor en la segunda derivada de g ,

$$g''(\tilde{b}) = \sigma^2 f''(x) < 0.$$

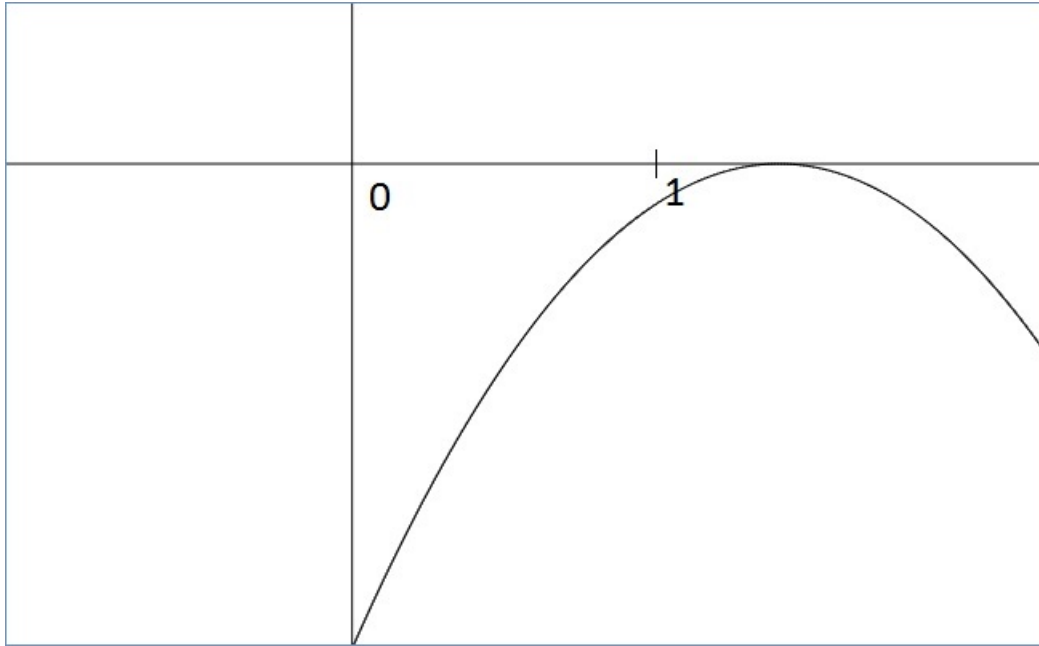
Por lo tanto, concluimos que \tilde{b} es un máximo.

Si $\tilde{b} \geq 1$, entonces la gráfica de la función g sería la de una parábola con la forma de la Figura 2.2.

De esta manera, en el intervalo $[0, 1]$ el máximo se alcanza en $b^* = 1$. De manera análoga al caso 1, decimos que

$$f_1'(x) = ce^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x},$$

con $c > 0$ porque f es estrictamente creciente. Por otro lado, si $\tilde{b} < 1$, sustituyendo en la ecuación de HJB, obtenemos:

Figura 2.2: Gráfica de la función g .

$$\left(\left(-\frac{\theta \lambda \mu f'(x)}{\sigma^2 f''(x)} \right) \theta - (\theta - \eta) \right) \lambda \mu f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} \left(-\frac{\theta \lambda \mu f'(x)}{\sigma^2 f''(x)} \right)^2 f''(x) = 0$$

$$-\frac{\theta^2 \lambda^2 \mu^2 f'(x)^2}{2\sigma^2 f''(x)} - (\theta - \eta) \lambda \mu f'(x) = 0$$

Procedemos a definir $y(x) := f'(x)$. Sustituimos en la expresión anterior y despejamos, llegando a la ecuación

$$-\theta^2 \lambda \mu y(x) = 2(\theta - \eta) \sigma^2 y'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta) \sigma^2} y(x).$$

Así, conseguimos una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución es

$$y(x) = ce^{-\int \frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta) \sigma^2} dx} = ce^{-\frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta) \sigma^2} x}.$$

Por lo que,

$$f_2'(x) = ce^{-\frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta) \sigma^2} x}.$$

Es decir, tenemos dos soluciones dependiendo del valor de b^* . Dado que necesitamos que $f'(x) > 0$, entonces ninguna de estas soluciones puede estar combinada con $f(x) = 1$.

Ahora analizaremos los exponentes de ambas soluciones. Para eso, consideraremos lo siguiente

$$\begin{aligned}(\theta - 2\eta)^2 &\geq 0 \\ \theta^2 &\geq 4\theta\eta - 4\eta^2 \\ \frac{\theta^2}{2(\theta - \eta)\sigma^2} &\geq \frac{2\eta}{\sigma^2} \\ \frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2} &\geq \frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}.\end{aligned}$$

En la anterior desigualdad, cuando $\theta = 2\eta$, se tiene que

$$\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2} = \frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}.$$

Por lo tanto, si $\theta = 2\eta$, entonces las dos soluciones coinciden. Es decir, $f'(x) = ce^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x}$, y además $b^* = 1$.

Ahora supongamos que existe un punto x_0 donde $f(x)$ cambia de una solución $f_1(x)$ a otra solución $f_2(x)$. Como deseamos que $f(x)$ sea dos veces diferenciable, se debe cumplir

$$\begin{aligned}f_1'(x_0) &= f_2'(x_0) \\ f_1''(x_0) &= f_2''(x_0).\end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}ce^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x_0} &= ce^{-\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta-\eta)\sigma^2}x_0} \\ -\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}ce^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x_0} &= -\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta-\eta)\sigma^2}ce^{-\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta-\eta)\sigma^2}x_0}.\end{aligned}$$

Dichas ecuaciones solo se cumplirán de manera simultánea si y solo si $\theta = 2\eta$. Por lo tanto, la solución es una de las dos funciones encontradas.

Ahora, integrando tanto a $f_1'(x)$ como a $f_2'(x)$ encontramos las siguientes soluciones:

$$f_1(x) = -\frac{\sigma^2}{2\eta\lambda\mu}ce^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x} + k_1,$$

$$f_2(x) = -\frac{2(\theta - \eta)\sigma^2}{\theta^2\lambda\mu}ce^{-\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2}x} + k_2,$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Definiendo $c_1 = \frac{\sigma^2}{2\eta\lambda\mu}c$ y $c_2 = \frac{2(\theta - \eta)\sigma^2}{\theta^2\lambda\mu}c$, obtenemos

$$f_1(x) = -c_1e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x} + k_1$$

$$f_2(x) = -c_2e^{-\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2}x} + k_2.$$

Para encontrar las constantes que aparecen en las relaciones anteriores, usamos la condición inicial y la de frontera: $f(0) = 0$ y $f(+\infty) = 1$. Trabajando con f_1 ,

$$f_1(0) = 0$$

$$-c_1 + k_1 = 0$$

$$k_1 = c_1.$$

Pero además:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = 1$$

$$k_1 = 1.$$

Así, concluimos que

$$f_1(x) = 1 - e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}x}.$$

Ahora, trabajamos con f_2

$$f_2(0) = 0$$

$$-c_2 + k_2 = 0$$

$$k_2 = c_2.$$

Pero además,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 1$$

$$k_2 = 1.$$

Así, concluimos que

$$f_2(x) = 1 - e^{-\frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2} x}.$$

Como ya vimos, cuando $\theta = 2\eta$, se cambia de una solución a otra. Por lo tanto, podemos escribir a $f(x)$ como:

$$f(x) = 1 - e^{-kx} \quad \text{con} \quad k = \begin{cases} \frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2}, & \eta < \theta < 2\eta, \\ \frac{2\eta \lambda \mu}{\sigma^2}, & 2\eta \leq \theta. \end{cases}$$

Dado que $f(x)$ ya se encuentra determinada, procedemos a encontrar b^* . Para ello se considera lo siguiente

$$\begin{aligned} b^* &= -\frac{\theta \lambda \mu f'(x)}{\sigma^2 f''(x)} \\ &= -\frac{\theta \lambda \mu (k e^{-kx})}{\sigma^2 (-k^2 e^{-kx})} \\ &= \frac{\theta \lambda \mu}{\sigma^2 k}. \end{aligned}$$

Si $\eta < \theta < 2\eta$, entonces

$$\begin{aligned} b &= \frac{\theta \lambda \mu}{\sigma^2} \frac{2\sigma^2(\theta - \eta)}{\theta^2 \lambda \mu} \\ &= 2 \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right) < 1. \end{aligned}$$

Si $2\eta \leq \theta$, entonces

$$\begin{aligned} b &= \frac{\theta \lambda \mu}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2\eta \lambda \mu} \\ &= \frac{\theta}{2\eta} \geq 1. \end{aligned}$$

De los dos casos anteriores obtenemos,

$$b^* = \left(2 \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right)\right) \wedge 1.$$

Por lo tanto, nuestra solución es

$$f(x) = 1 - e^{-kx} \quad \text{con} \quad k = \begin{cases} \frac{\theta^2 \lambda \mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2}, & \eta < \theta < 2\eta \\ \frac{2\eta \lambda \mu}{\sigma^2}, & 2\eta \leq \theta \end{cases} \quad (2.7)$$

y nuestra estrategia óptima de reaseguro es

$$b^* = \left(2 \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right)\right) \wedge 1. \quad (2.8)$$

Una vez que hemos encontrado la solución a la ecuación de HJB, solo resta comprobar el teorema de verificación para asegurar que la función f hallada corresponde con nuestra función δ buscada.

A continuación se presenta un lema que será útil para realizar la prueba del teorema de verificación. La demostración del lema puede verse en [15].

Lema 2.2.1 *Sea $S_n = \sum_{k=1}^n (W_k - Z_k)$, con $0 \leq W_k \leq w$, $w < +\infty$ y $Z_k \geq 0$. Si $\{S_n\}$ es submartingala, entonces:*

$$\mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} Z_k = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} W_k < +\infty \right) = 0.$$

Teorema 2.2.1 $\delta(x) = f(x)$, donde $f(x)$ está dada por (2.7) y la estrategia óptima de reaseguro $b_t = b^*$ es constante y está dada por (2.8).

Demostración:

Para demostrar que $\delta^{b^*}(x) = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^+$, usamos (1.19), obteniendo

$$\psi^{b^*}(x) = e^{-\frac{2((b^*\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu)}{\sigma^2(b^*)^2}}.$$

Si $b^* = 1$ entonces,

$$\psi^{b^*}(x) = e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}}. \quad (2.9)$$

Si $b^* = 2(1 - \frac{\eta}{\theta})$ entonces,

$$\begin{aligned}\psi^{b^*}(x) &= e^{-\frac{2\left(\left(2\left(1-\frac{\eta}{\theta}\right)\theta - (\theta - \eta)\right)\lambda\mu\right)}{\sigma^2\left(2\left(1-\frac{\eta}{\theta}\right)\right)^2}} \\ &= e^{-\frac{(\theta^2 - \theta\eta)\theta\lambda\mu}{2(\theta - \eta)^2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2}}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

De (2.9) y (2.10) tenemos que

$$\delta^{b^*}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2\eta\lambda\mu}{\sigma^2}}, & b^* = 1, \\ 1 - e^{-\frac{\theta^2\lambda\mu}{2(\theta - \eta)\sigma^2}}, & b^* = 2\left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right). \end{cases}$$

Pero $b^* = 1$ cuando $\theta \geq 2\eta$ y $b^* = 2\left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right)$ cuando $\theta < 2\eta$. Así, concluimos que $\delta^{b^*} = f(x)$.

Ahora, sea b una estrategia arbitraria. Con la fórmula de Itô

$$\begin{aligned}f(X_{\tau \wedge t}^b) &= f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} (b_s\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu f'(X_s^b) + \frac{b_s^2\sigma^2}{2} f''(X_s^b) ds \\ &\quad + \int_0^{\tau \wedge t} b_s\sigma f'(X_s^b) dB_s \\ &\leq f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} b_s\sigma f'(X_s^b) dB_s,\end{aligned}\tag{2.11}$$

pues $f(x)$ satisface la ecuación (2.5). Observamos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= ke^{-kx} \\ &\leq k,\end{aligned}$$

pues $e^{-kx} \leq 1$. Es decir, $f'(x)$ está acotada por k . Así que tomando esperanza en (2.11) tenemos que

$$\mathbb{E} [f(X_{\tau \wedge t}^b)] \leq f(x).\tag{2.12}$$

En particular tenemos que $\{f(X_{\tau \wedge t}^b)\}$ es una supermartingala. Por el teorema de convergencia de martingalas (véase Apéndice C), concluimos que $f(X_{\tau \wedge t}^b)$ converge cuando $t \rightarrow +\infty$.

Si, cuando la ruina no ocurre, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(X_t^b)$ pertenece a $(0, 1)$, entonces $X_\infty^b = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t^b$ pertenece a $(0, +\infty)$. Fijamos $x_0 > 0$ y suponemos que $\mathbb{P}(X_\infty^b \leq x_0) > 0$. La

variable aleatoria $\int_t^{t+1} b_s dB_s$ tiene media 0 y varianza distinta de cero, a menos que $b_s = 0$. Entonces $\mathbb{P}(\int_t^{t+1} b_s dB_s < 0) > 0$.

Ahora supongamos que $\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds < \frac{1-\frac{\eta}{\theta}}{4}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds &= \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &\quad + \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Examinando la primera integral de (2.13):

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds &\leq \int_t^{t+1} (\theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &= \eta \lambda \mu \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &< \eta \lambda \mu \left(\frac{1-\frac{\eta}{\theta}}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Antes de trabajar con la segunda integral de (2.13) veamos lo que implica el evento de la función indicadora de dicha integral:

$$\begin{aligned} 2b_s &< 1 - \frac{\eta}{\theta} \\ \lambda \mu (\theta b_s - (\theta - \eta)) &< \lambda \mu \left(\frac{\theta - \eta}{2} - (\theta - \eta) \right) \\ \lambda \mu (\theta b_s - (\theta - \eta)) &< - \left(\frac{\theta - \eta}{2} \right) \lambda \mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} + \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds &= 1 \\ \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds &= 1 - \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &> 1 - \frac{1-\frac{\eta}{\theta}}{4} \\ &= 1 - \frac{\theta - \eta}{4\theta} \\ &= \frac{3 + \frac{\eta}{\theta}}{4}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$-\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds < -\frac{3 + \frac{\eta}{\theta}}{4}. \quad (2.16)$$

Considerando la segunda integral de (2.13), usando (2.15) y (2.16) tenemos,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds &\leq -\int_t^{t+1} \left(\frac{\theta - \eta}{2}\right) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &= \left(\frac{\theta - \eta}{2}\right) \lambda \mu \left(-\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds\right) \\ &< \frac{(\theta - \eta) \lambda \mu}{2} \left(-\frac{3 + \frac{\eta}{\theta}}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.14) y (2.17) en (2.13)

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds &= \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &\quad + \int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &< \eta \lambda \mu \left(\frac{1 - \frac{\eta}{\theta}}{4}\right) - \left(\frac{3 + \frac{\eta}{\theta}}{4}\right) \left(\frac{(\theta - \eta) \lambda \mu}{2}\right) \\ &= \lambda \mu \left(\frac{\theta \eta - \eta^2}{4\theta} - \frac{3\theta + \eta}{8\theta} (\theta - \eta)\right) \\ &= \lambda \mu \left(-\frac{\theta - \eta}{8\theta}\right) \left(\frac{3\theta - \eta}{8\theta}\right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Recordamos que

$$\begin{aligned} \eta &< \theta \\ \frac{3\theta - \eta}{2\theta} &> 1. \end{aligned}$$

De (2.18) obtenemos

$$\int_t^{t+1} (\theta b_s - (\theta - \eta)) \lambda \mu ds < \left(-\frac{\theta - \eta}{4}\right) \lambda \mu.$$

Así que, $X_{t+1}^b - X_t^b \leq -\left(\frac{\theta - \eta}{4}\right) \lambda \mu$ con probabilidad estrictamente positiva.

Por otro lado, si tenemos que $\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \geq \frac{1-\frac{\eta}{\theta}}{4}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} b_s^2 ds &= \int_t^{t+1} b_s^2 \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds + \int_t^{t+1} b_s^2 \mathbb{I}_{2b_s < (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &\geq \int_t^{t+1} b_s^2 \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds. \end{aligned}$$

Analizamos el evento de la función indicadora de la integral anterior

$$\begin{aligned} 2b_s &\geq 1 - \frac{\eta}{\theta} \\ b_s &\geq \frac{1 - \frac{\eta}{\theta}}{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} b_s^2 ds &\geq \int_t^{t+1} b_s^2 \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &\geq \int_t^{t+1} \left(\frac{1 - \frac{\eta}{\theta}}{2}\right)^2 \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &= \frac{(1 - \frac{\eta}{\theta})^2}{4} \int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \\ &\geq \frac{(1 - \frac{\eta}{\theta})^2}{4} \left(\frac{1 - \frac{\eta}{\theta}}{4}\right) \\ &= \frac{(1 - \frac{\eta}{\theta})^3}{16}. \end{aligned}$$

Definimos $T := \inf \left\{ s \geq t : \int_t^s b_v^2 dv > \frac{(1-\frac{\eta}{\theta})^3}{16} \right\}$. Entonces $\int_t^T \sigma b_v dB_v$ está normalmente distribuida con media 0 y varianza

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\int_t^T \sigma b_v dB_v \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \sigma b_v dB_v \right)^2 \right] - \left(\mathbb{E} \left[\int_t^T \sigma b_v dB_v \right] \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \sigma b_v dB_v \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \sigma b_v dB_v \right) \left(\int_t^T \sigma b_v dB_v \right) \right]. \end{aligned}$$

Por la propiedad de isometría de Itô (véase [4]),

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar \left[\int_t^T \sigma b_v dB_v \right] &= \int_t^T \sigma^2 b_v^2 dv \\ &= \sigma^2 \int_t^T b_v^2 dv.\end{aligned}$$

Por la forma en la que definimos a T tenemos que,

$$\mathbb{V}ar \left[\int_t^T \sigma b_v dB_v \right] = \frac{\sigma^2 \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right)^3}{16}.$$

Como $\int_t^T \sigma b_v dB_v$ tiene varianza distinta de cero, se obtiene que $X_T^b - X_t^b \leq -\frac{(\theta-\eta)\lambda\mu}{4}$, también con probabilidad estrictamente positiva cuando $\int_t^{t+1} \mathbb{I}_{2b_s \geq (1-\frac{\eta}{\theta})} ds \geq \frac{1-\frac{\eta}{\theta}}{4}$. En particular, $\sup_{s \in (t, t+1)} \{X_s^b - X_t^b\} \leq -\frac{(\theta-\eta)\lambda\mu}{4}$ con probabilidad estrictamente positiva. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \in (t, t+1)} \{X_s^b - X_t^b\} \leq -\frac{(\theta-\eta)\lambda\mu}{4} \middle| \mathcal{F}_t \right) \geq \delta.$$

Definimos $B_k := \left\{ \sup_{s \in (k, k+1)} \{X_s^b - X_k^b\} \leq -\frac{(\theta-\eta)\lambda\mu}{4} \right\}$ y $Z_k := \mathbb{I}_{B_k}$. También denotamos $Y_n := \sum_{k=1}^n (Z_k - \delta)$. Veamos que $\{Y_n\}$ es submartingala:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[Y_n + Z_{n+1} - \delta | \mathcal{F}_t] \\ &= Y_n + \mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_t] - \delta \\ &= Y_n + \mathbb{P}(B_{n+1} | \mathcal{F}_t) - \delta \\ &> Y_n.\end{aligned}$$

Así, $\{Y_n\}$ es submartingala. Además tenemos que $0 \leq Z_k \leq 1$ y $\delta \geq 0$. Por lo tanto, usando el Lema 2.2.1, concluimos que el evento $\{Z_k = 1\}$ ocurre un número infinito de veces c.s. Por consiguiente, para toda $n \geq 1$ podemos encontrar $k \geq n$ tal que

$$\sup_{s \in (k, k+1)} \{X_s^b - X_k^b\} \leq -\frac{\theta - \eta}{4}.$$

Es decir, para toda $n \geq 1$ podemos encontrar $k \geq n$ tal que

$$X_s^b - X_k^b \leq -\frac{\theta - \eta}{4},$$

con $s \in (k, k+1)$. Con lo que concluimos que X_t^b no converge. Por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^b = \infty$, cuando $\{\tau^b = \infty\}$. Dicho de otra manera, solo hay dos posibilidades, que la ruina ocurra o que el proceso X_t^b diverja a ∞ .

Haciendo $t \rightarrow \infty$ en (2.12), obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_{\tau^b \wedge t}^b)] \\ &= f(+\infty)\mathbb{P}(\tau^b = \infty) + f(0)\mathbb{P}(\tau^b < +\infty) \\ &= f(+\infty)\mathbb{P}(\tau^b = \infty) \\ &= f(+\infty)\delta^b(x) \\ &= \delta^b(x), \end{aligned}$$

pues $f(+\infty) = 1$. Como ya habíamos demostrado que $f(x) = \delta^{b^*}(x)$, entonces para b estrategia arbitraria se tiene

$$\delta^b(x) \leq \delta^{b^*}(x). \quad \square$$

Con el teorema anterior, queda justificado que la función f encontrada al resolver la ecuación de HJB es nuestra función δ . Matemáticamente se demostró que la función δ es estrictamente creciente cuando $\delta(x) < 1$. Esto quiere decir que entre más grande sea el capital inicial, mayor es la probabilidad de supervivencia, lo cual es completamente razonable. También vemos que nuestra estrategia óptima de reaseguro cambia dependiendo de los valores η y θ , que son los factores de recargo para el seguro y el reaseguro, respectivamente. Vemos que, cuando el factor de recargo que cobra la reaseguradora es mayor o igual que el doble del factor de recargo que cobra la aseguradora, se debe elegir un nivel de retención del cien por ciento. Lo que implica no usar el reaseguro. Es decir, que cuando esto ocurre, el costo del reaseguro es tan alto que el hecho de no usar reaseguro resulta mejor para la aseguradora que usarlo.

2.3. Proceso de difusión con inversión

Para este caso, dado que no hay reaseguro, simplemente representamos nuestro coeficiente de tendencia como $\eta > 0$ y nuestro coeficiente de difusión como $\sigma_S > 0$. Por lo que nuestro proceso de difusión que aproxima al proceso de superávit queda

como

$$dX_t = \eta dt + \sigma_S dB_t^S.$$

Ahora, la aseguradora tiene la posibilidad de invertir en un activo con riesgo, cuyo precio será modelado como un movimiento Browniano geométrico, es decir,

$$dZ_t = mZ_t dt + \sigma_I Z_t dB_t^I.$$

Equivalentemente,

$$Z_t = e^{\left(m - \frac{\sigma_I^2}{2}\right)t + \sigma_I B_t^I},$$

donde se suponen $\{B_t^I\}$ y $\{B_t^S\}$ como independientes.

El asegurador puede elegir una cantidad A_t para invertir al tiempo t . Dada una estrategia de inversión A , el proceso de superávit es modelado por la siguiente EDE

$$dX_t^A = (\eta + A_t m) dt + \sigma_S dB_t^S + \sigma_I A_t dB_t^I, \quad X_0^A = x.$$

Usamos la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ generada por el movimiento Browniano bidimensional $\{(B_t^S, B_t^I)\}$. El conjunto de estrategias admisibles, denotado por \mathfrak{A} , es el conjunto de procesos càdlàg $\{A_t\}$ adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}$ tales que la EDE admita una única solución. Definimos a

$$\tau^A := \inf\{t \geq 0 : X_t^A < 0\}.$$

Al igual que en el caso del reaseguro, el objetivo es minimizar

$$\psi^A(x) = \mathbb{P}[\tau^A < +\infty | X_0 = x].$$

Alternativamente, maximizar la probabilidad de supervivencia $\delta^A(x) = 1 - \psi^A(x)$. Se define la función de valor como $\delta(x) := \sup_A \delta^A(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$ representa el capital inicial.

Para llevar a cabo este propósito, comenzaremos considerando la siguiente estrategia de inversión,

$$A_t = \begin{cases} A, & t < (h \wedge \tau^A), \\ A_{t-h}^\varepsilon, & t > h. \end{cases} \quad (2.19)$$

Donde A_t^ε es una estrategia tal que: $\delta(X_h^A) < \delta^{A^\varepsilon}(X_h^\varepsilon) + \varepsilon$. Sabemos que esta estrategia existe pues sabemos que

$$\delta(x) = \sup_{A \in \mathfrak{U}} \delta^A(x).$$

Así que $\delta(x) - \varepsilon$ no puede ser cota superior. Por lo tanto, existe $A^\varepsilon \in \mathfrak{U}$ tal que

$$\delta(x) - \varepsilon < \delta^{A^\varepsilon}(x).$$

Para $t \leq h$ tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(x) &\geq \delta^A(x) = \mathbb{P}(\tau^A = +\infty) \\ &= \int_{R_{X_h^A}} \mathbb{P}(\tau_x^A = +\infty | X_h^A = y) dF_{X_h^A}(y), \quad h < \tau^A \\ &= \int_{R_{X_h^A}} \delta^{A^\varepsilon}(y) dF_{X_h^A}(y), \quad h < \tau^A \\ &= \mathbb{E}[\delta^{A^\varepsilon}(X_h^A) \mathbb{I}_{\tau^A > h}] \\ &\geq \mathbb{E}[\delta(X_h^A) \mathbb{I}_{\tau^A > h}] - \varepsilon \\ &= \mathbb{E}[\delta(X_{\tau^A \wedge h}^A)] - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que ε es arbitrario, podemos hacerlo tender a 0. Por lo tanto,

$$\delta(x) \geq \mathbb{E}[\delta(X_{\tau^A \wedge h}^A)].$$

Usando el Lema de Itô (Apéndice B), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(X_{\tau^A \wedge h}^A) &= \delta(x) + \int_0^{\tau^A \wedge h} \left((\eta + Am)\delta'(X_t^A) + \frac{1}{2}(\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2)\delta''(X_t^A) \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\tau^A \wedge h} \sigma_S \delta'(X_t^A) dB_t^S + \int_0^{\tau^A \wedge h} \sigma_I A \delta'(X_t^A) dB_t^I. \end{aligned}$$

Tomando esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta(X_{\tau^A \wedge h}^A)] &= \mathbb{E}[\delta(x)] + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^A \wedge h} \left((\eta + Am)\delta'(X_t^A) + \frac{1}{2}(\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2)\delta''(X_t^A) \right) dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^A \wedge h} \sigma_S \delta'(X_t^A) dB_t^S \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^A \wedge h} \sigma_I A \delta'(X_t^A) dB_t^I \right]. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Si $\sigma_S \delta'(X_t^A)$ y $\sigma_I A \delta'(X_t^A)$ en (2.20) son acotadas, entonces las dos integrales estocásticas son martingalas (véase [4]). De esta manera

$$\mathbb{E}[\delta(X_{\tau^A \wedge h}^A)] = \delta(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^A \wedge h} \left((\eta + Am) \delta'(X_t^A) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2) \delta''(X_t^A) \right) dt \right].$$

Despejando

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^A \wedge h} \left((\eta + Am) \delta'(X_t^A) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2) \delta''(X_t^A) \right) dt \right] &= \mathbb{E}[\delta(X_{\tau^A \wedge h}^A)] - \delta(x) \leq 0 \\ \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^A \wedge h} \left((\eta + Am) \delta'(X_t^A) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2) \delta''(X_t^A) \right) dt \right] &\leq 0. \end{aligned}$$

Dividiendo entre h y tomando el límite cuando h tiende a 0, obtenemos que

$$(\eta + Am) \delta'(x) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2) \delta''(x) \leq 0.$$

Esto debe cumplirse para toda $A \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, nuestra ecuación de HJB queda motivada de la siguiente forma

$$\sup_{A \in \mathbb{R}^+} \left\{ (\eta + Am) f'(x) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2) f''(x) \right\} = 0, \quad (2.21)$$

con la condición inicial $f(0) = 0$ y la condición de frontera $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := f(+\infty) = 1$. Se hallará la solución f de (2.21) y después se utilizará un teorema de verificación para comprobar que δ y f coinciden.

2.4. Estrategia óptima de inversión

Una vez que ya se tiene propuesta la ecuación de HJB, se procede a resolverla. Para realizarlo, primero vemos los posibles valores que puede tomar la función $f''(\cdot)$, y con base en esto, maximizaremos con respecto a A . Pero antes, definimos a g como la función a maximizar, es decir

$$g(A) := (\eta + Am) f'(x) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A^2) f''(x),$$

con $x \in \mathbb{R}^+$ fijo.

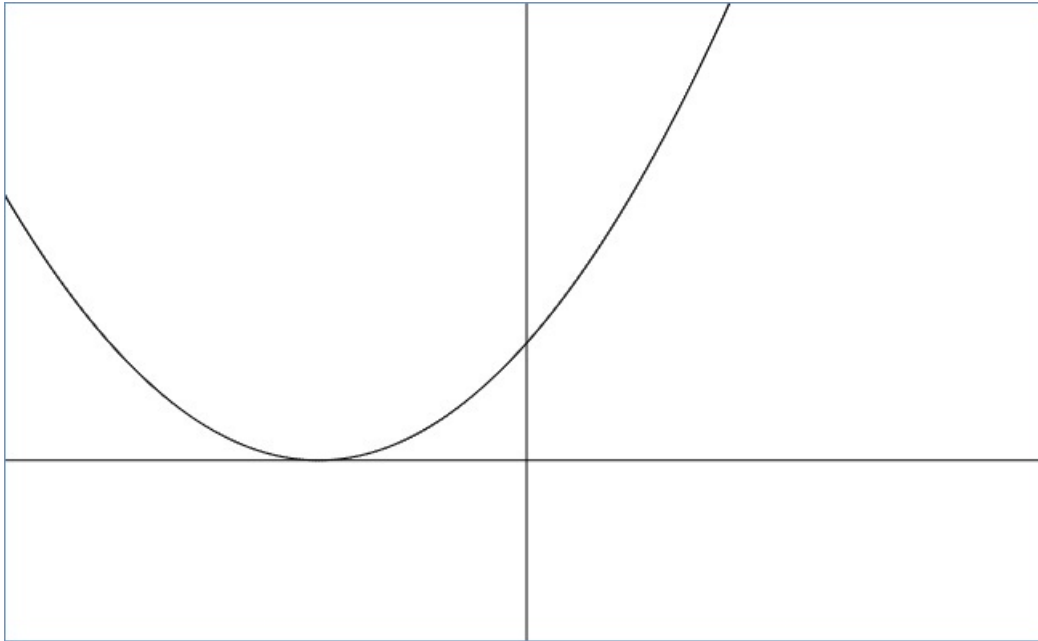


Figura 2.3: Gráfica de la función g .

- Caso 1) $f''(x) > 0$

Para maximizar la función $g(b)$, obtenemos su primera derivada, que es

$$g'(A) = mf'(x) + A\sigma_I^2 f''(x).$$

Igualando a cero y despejando a A , obtenemos el punto crítico

$$\tilde{A} = -\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} < 0.$$

Evaluando en la segunda derivada de g , tenemos:

$$g''(\tilde{A}) = \sigma_I^2 f''(x) > 0.$$

Por lo tanto, concluimos que \tilde{A} es un mínimo. Al tener que $\tilde{A} < 0$ es un mínimo, podemos decir que g tiene una forma como la de la Figura 2.3.

Así, vemos que en el intervalo $[0, +\infty)$ la función g es estrictamente creciente, y por lo tanto, el supremo no existe, y $f(x)$ no sería una solución.

- Caso 2) $f''(x) = 0$

Si suponemos $f''(x) = 0$, la función g sería

$$\begin{aligned} g(A) &= (\eta + Am)f'(x) \\ g(A) &= \eta f'(x) + Amf'(x), \end{aligned}$$

la cual corresponde a la ecuación de una recta con pendiente $mf'(x) > 0$, y por lo tanto, es creciente. Así, como en el caso anterior, al ser estrictamente creciente en el intervalo $[0, \infty)$, tenemos que el supremo no existe, y nuevamente $f(x)$ no sería una solución. Por la propiedad de tricotomía concluimos que $f''(x) < 0$.

Ahora que tenemos que $f''(x) < 0$, encontramos el punto crítico \tilde{A} de manera análoga al caso 1, obteniendo

$$\tilde{A} = -\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} > 0.$$

Evaluando dicho valor en la segunda derivada de g

$$g''(\tilde{A}) = \sigma_I^2 f''(x) < 0,$$

de lo cual concluimos que

$$\tilde{A} = A^* = -\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} \tag{2.22}$$

es un máximo.

Sustituyendo en la ecuación de HJB

$$\begin{aligned} \left(\eta + \left(-\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} \right) m \right) f'(x) + \frac{1}{2} \left(\sigma_S^2 + \sigma_I^2 \left(-\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} \right)^2 \right) f''(x) &= 0 \\ \eta f'(x) - \frac{m^2 f'(x)}{2\sigma_I^2 f''(x)} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 f''(x) &= 0 \\ 2\eta \sigma_I^2 f'(x) f''(x) - m^2 f'(x)^2 + \sigma_S^2 \sigma_I^2 f''(x)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Con base en (1.19) y (2.7) proponemos $f'(x) = e^{-g(x)}$, con $g(x) = Rx$, R constante real. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}
2\eta\sigma_I^2 e^{-g(x)} e^{-g(x)} (-g'(x)) - m^2 (e^{-g(x)})^2 + \sigma_S^2 \sigma_I^2 (e^{-g(x)} (-g'(x)))^2 &= 0 \\
-2\eta\sigma_I^2 g'(x) + \sigma_S^2 \sigma_I^2 g'(x)^2 - m^2 &= 0 \\
\sigma_S^2 \sigma_I^2 R^2 - 2\eta\sigma_I^2 R - m^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Observamos que se trata de una ecuación de segundo grado. Ocupando la fórmula general, encontramos que

$$R = \frac{\eta\sigma_I \pm \sqrt{\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2 m^2}}{\sigma_S^2 \sigma_I}.$$

Ahora, analizamos el numerador de la expresión anterior. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2 m^2 &> \eta^2\sigma_I^2 > 0 \\
\sqrt{\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2 m^2} &> \eta\sigma_I.
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que

$$R_1 = \frac{\eta\sigma_I - \sqrt{\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2 m^2}}{\sigma_S^2 \sigma_I} < 0.$$

Si $R = R_1$, entonces tendríamos que $f''(x) = e^{-g(x)}(-R) > 0$, lo cual es una contradicción.

Así que,

$$R = \frac{\eta\sigma_I + \sqrt{\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2 m^2}}{\sigma_S^2 \sigma_I} > 0.$$

Una vez que tenemos $g'(x) = R$ podemos hallar a g ,

$$g(x) = \int g'(x) dx = Rx + k_1,$$

con k_1 una constante real. Con esto encontramos que

$$f'(x) = k_2 e^{-Rx},$$

con $k_2 = e^{k_1}$. Ahora que tenemos una expresión para $f'(x)$, podemos integrar para obtener $f(x)$. Realizándolo conseguimos

$$f(x) = -\frac{k_2}{R}e^{-Rx} + k_3.$$

Por último, usamos la condición inicial y de frontera para poder encontrar el valor de las constantes que nos hacen falta.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ -\frac{k_2}{R} + k_3 &= 0 \\ k_3 &= \frac{k_2}{R}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= 1 \\ k_3 &= 1. \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - e^{-Rx}, \\ \text{con } R &= \frac{\eta\sigma_I + \sqrt{\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2m^2}}{\sigma_S^2\sigma_I}. \end{aligned}$$

Una vez que ya tenemos nuestra función $f(x)$ podemos encontrar nuestra estrategia óptima A^*

$$\begin{aligned} A^* &= -\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} \\ A^* &= -\frac{m(Re^{-Rx})}{\sigma_I^2(-R^2e^{-Rx})} \\ A^* &= \frac{m}{R\sigma_I^2}. \end{aligned}$$

En conclusión

$$f(x) = 1 - e^{-Rx}, \quad (2.23)$$

$$\text{con } R = \frac{\eta\sigma_I + \sqrt{\eta^2\sigma_I^2 + \sigma_S^2m^2}}{\sigma_S^2\sigma_I}$$

$$\text{y } A^* = \frac{m}{R\sigma_I^2}. \quad (2.24)$$

Ahora solo queda demostrar el teorema de verificación.

Teorema 2.4.1 $\delta(x) = f(x)$, donde $f(x)$ está dada por (2.23) y la estrategia óptima de inversión $A_t = A^*$ es constante y está dada por (2.24).

Demostración

Sea $\{A_t\}$ una estrategia arbitraria. Usando la fórmula de Itô

$$\begin{aligned} f(X_{\tau \wedge t}^A) &= f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} (\eta + A_s m) f'(X_s^A) + \frac{1}{2} (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A_s^2) f''(X_s^A) ds \\ &\quad + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_S f'(X_s^A) dB_s^S + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_I A_s f'(X_s^A) dB_s^I \\ &\leq f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_S f'(X_s^A) dB_s^S + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_I A_s f'(X_s^A) dB_s^I, \end{aligned}$$

pues f es solución de la ecuación (2.21).

Además, para $A_t = A^*$ tenemos que la igualdad se cumple por la misma razón, es decir,

$$f(X_{\tau \wedge t}^{A^*}) = f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_S f'(X_s^{A^*}) dB_s^S + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_I A_s^* f'(X_s^{A^*}) dB_s^I. \quad (2.25)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= R e^{-Rx} \\ &\leq R, \end{aligned}$$

pues $e^{-Rx} \leq 1$. Por lo tanto, tomando esperanza en (2.25) tenemos que

$$\mathbb{E} [f(X_{\tau \wedge t}^{A^*})] = f(x),$$

con lo que concluimos que $\{f(X_t^{A^*})\}$ es una martingala.

Para el caso de una estrategia arbitraria, tomando esperanza obtenemos

$$\mathbb{E} [f (X_{\tau \wedge t}^A)] \leq f(x),$$

pues la igualdad no se cumple en ese caso. En particular, tenemos que $\{f(X_t^A)\}$ es una supermartingala. Por el teorema de convergencia, $f(X_t^A)$ converge cuando $t \rightarrow \infty$.

Definimos $T := \inf \{s > t : \int_t^s (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A_v^2) dv > \sigma_S^2\}$. Vemos que

$$\begin{aligned} \int_t^T (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A_v^2) dv &= \int_t^T \sigma_S^2 dv + \int_t^T \sigma_I^2 A_v^2 dv \\ &= \sigma_S^2 (T - t) + \int_t^T \sigma_I^2 A_v^2 dv. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T \leq t + 1$.

Ahora,

$$\begin{aligned} \int_t^T (\eta + A_v m) dv &\leq \int_t^T (\eta + (A_v^2 + 1)m) dv \\ &= \int_t^T (\eta + m + mA_v^2) dv \\ &= \eta(T - t) + m(T - t) + m \int_t^T A_v^2 dv \\ &\leq \eta + m + m \int_t^T A_v^2 dv. \end{aligned}$$

Por la definición de T tenemos que

$$\begin{aligned} \int_t^T \sigma_I^2 A_v^2 &\leq \sigma_S^2 \\ \int_t^T A_v^2 &\leq \frac{\sigma_S^2}{\sigma_I^2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_t^T (\eta + A_v m) dv \leq \eta + m + m \frac{\sigma_S^2}{\sigma_I^2}.$$

Ahora, $\int_t^T \sigma_S dB_v^S + \int_t^T \sigma_I A_v dB_v^I$ tiene distribución normal con media cero y varianza

$$\mathbb{V}ar \left[\int_t^T \sigma_S dB_v^S + \int_t^T \sigma_I A_v dB_v^I \right] = \mathbb{V}ar \left[\int_t^T \sigma_S dB_v^S \right] + \mathbb{V}ar \left[\int_t^T \sigma_I A_v dB_v^I \right],$$

pues $\{B_t^S\}$ y $\{B_t^I\}$ son independientes. Por la propiedad de isometría de Itô se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar \left[\int_t^T \sigma_S dB_v^S + \int_t^T \sigma_I A_v dB_v^I \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \sigma_S dB_v^S \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \sigma_I A_v dB_v^I \right)^2 \right] \\ &= \int_t^T \sigma_S^2 dv + \int_t^T \sigma_I^2 A_v^2 dv \\ &= \int_t^T (\sigma_S^2 + \sigma_I^2 A_v^2) dv \\ &= \sigma_S^2. \end{aligned}$$

Como $\int_t^T \sigma_S dB_v^S + \int_t^T \sigma_I A_v dB_v^I$ tiene varianza distinta de cero, tenemos que $\mathbb{P}(X_T^A - X_t^A \leq \eta + m + m \frac{\sigma_S^2}{\sigma_I^2} | \mathcal{F}_t) \geq \delta$, con $\delta > 0$. En particular

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \in (t, t+1)} \{X_s^A - X_t^A\} \leq \eta + m + m \frac{\sigma_S^2}{\sigma_I^2} \mid \mathcal{F}_t \right) \geq \delta.$$

Definiendo B_k y Z_k de manera análoga al Teorema 2.2.1, así como usando el Lema 2.2.1, podemos demostrar que solo hay dos posibilidades: la ruina ocurre o X_t^A diverge a ∞ .

Tomando una estrategia arbitraria A , y haciendo $t \rightarrow \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_{\tau^A \wedge t}^A)] \\ &= f(\infty) \mathbb{P}(\tau^A = \infty) + f(0) \mathbb{P}(\tau^A < +\infty) \\ &= f(\infty) \mathbb{P}(\tau^A = \infty) \\ &= f(\infty) \delta^A(x) \\ &= \delta^A(x). \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando se tiene $A = A^*$, se cumple la igualdad, y por lo tanto, $f(x) = \delta^{A^*}(x)$. Con lo que se concluye que $\delta^A(x) \leq \delta^{A^*}$. \square

Con el Teorema 2.4.1 queda demostrado que la función f encontrada es la función δ buscada. Podemos observar que δ es estrictamente creciente, lo cual es bastante

lógico, pues a mayor capital inicial uno espera menor probabilidad de ruina, ya que la empresa tiene más recursos para hacer frente a sus obligaciones, es decir, tiene mayor solvencia económica.

2.5. Estrategias óptimas de reaseguro e inversión

En las secciones pasadas se consideró el reaseguro y la inversión de manera separada. Ahora se utilizarán de manera conjunta para minimizar la probabilidad de ruina. Nuevamente consideramos que $c = (1 + \eta)\lambda\mu$ es la prima que recibirá la aseguradora. Por concepto del reaseguro con nivel de retención b_t , la aseguradora pagará $(1 + \theta)(1 - b)\lambda\mu$ a la reaseguradora, con $\theta > \eta > 0$ ambos factores de recargo. Por lo tanto, por conceptos de primas, la aseguradora obtiene $c(b) = (b(1 + \theta) - (\theta - \eta))\lambda\mu$. De manera análoga a la Sección 2.1 obtenemos nuestro proceso de superávit con reaseguro

$$dX_t^b = (b_t\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu dt + \sigma_S b_t dB_t^S.$$

Además, la aseguradora tiene la posibilidad de invertir una cantidad A_t en un activo riesgoso, cuyo precio es modelado como un MBG. Es decir, el precio Z_t del activo al tiempo t es modelado con la siguiente EDE

$$dZ_t = mZ_t dt + \sigma_I Z_t dB_t^I,$$

con B_t^I y B_t^S independientes. Con base en esto, decimos que nuestro proceso de superávit con reaseguro e inversión queda expresado por la siguiente ecuación diferencial

$$dX_t^{Ab} = ((b_t\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu + mA_t)dt + \sigma_S b_t dB_t^S + \sigma_I A_t dB_t^I, \text{ con } X_0^{Ab} = x.$$

En este caso nuestra ecuación de HJB queda de la siguiente manera

$$\sup_{A \in \mathbb{R}^+, b \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{2} (A^2 \sigma_I^2 + b^2 \sigma_S^2) f''(x) + (mA + (b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu) f'(x) \right\} = 0, \quad (2.26)$$

con la condición inicial $f(0) = 0$ y la condición de frontera $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := f(+\infty) = 1$.

A continuación definimos a g como la función de dos variables a maximizar

$$g(A, b) := \frac{1}{2} (A^2 \sigma_I^2 + b^2 \sigma_S^2) f''(x) + (mA + (b\theta - (\theta - \eta))\lambda\mu) f'(x),$$

con $x \in \mathbb{R}^+$ fijo.

Para obtener los puntos críticos de esta función debemos obtener las dos derivadas parciales de g , las cuales son

$$\begin{aligned} g_A(A, b) &= A\sigma_I^2 f''(x) + m f'(x) \\ g_b(A, b) &= b\sigma_S^2 f''(x) + \theta\lambda\mu f'(x). \end{aligned}$$

Pero nos damos cuenta que son las mismas derivadas para los casos de inversión y reaseguro por separado. Así que, con el mismo procedimiento concluimos que $f''(x) < 0$ y que el máximo se alcanza en los puntos dados por (2.6) y (2.22):

$$\begin{aligned} A^* &= -\frac{m f'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} > 0 \\ b^* &= -\frac{\theta\lambda\mu f'(x)}{\sigma_S^2 f''(x)} > 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de HJB tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\left(-\frac{m f'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} \right)^2 \sigma_I^2 + \left(-\frac{\theta\lambda\mu f'(x)}{\sigma_S^2 f''(x)} \right)^2 \sigma_S^2 \right) f''(x) \\ &+ \left(m \left(-\frac{m f'(x)}{\sigma_I^2 f''(x)} \right) + \left(\left(-\frac{\theta\lambda\mu f'(x)}{\sigma_S^2 f''(x)} \right) \theta - (\theta - \eta) \right) \lambda\mu \right) f'(x) = 0 \\ &\sigma_S^2 m^2 f'(x)^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2 f'(x)^2 + 2\sigma_S^2 \sigma_I^2 f''(x) (\theta - \eta) \lambda\mu f'(x) = 0 \\ &2\sigma_S^2 \sigma_I^2 (\theta - \eta) \lambda\mu f''(x) + (\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2) f'(x) = 0. \end{aligned}$$

A continuación definimos $y(x) := f'(x)$. Sustituyendo

$$\begin{aligned} 2\sigma_S^2 \sigma_I^2 (\theta - \eta) \lambda\mu y'(x) + (\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2) y(x) &= 0 \\ y'(x) &= -\frac{\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2}{2\sigma_S^2 \sigma_I^2 (\theta - \eta) \lambda\mu} y(x). \end{aligned}$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución es

$$y(x) = ce^{-\int \frac{\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2}{2\sigma_S^2 \sigma_I^2 (\theta - \eta) \lambda\mu} dx}.$$

con c una constante real. Entonces

$$f'(x) = ce^{-\frac{\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2}{2\sigma_S^2 \sigma_I^2 (\theta - \eta) \lambda\mu} x}.$$

Integrando, obtenemos la solución que buscamos:

$$f(x) = -\frac{2\sigma_S^2\sigma_I^2(\theta - \eta)\lambda\mu}{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}ce^{-\frac{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}{2\sigma_S^2\sigma_I^2(\theta - \eta)\lambda\mu}x} + k.$$

con k una constante real. Ahora usamos la condición inicial y de frontera para obtener el valor de las constantes,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ -\frac{2\sigma_S^2\sigma_I^2(\theta - \eta)\lambda\mu}{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}c + k &= 0 \\ k &= \frac{2\sigma_S^2\sigma_I^2(\theta - \eta)\lambda\mu}{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}c. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= 1 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

Así, nuestra solución es

$$f(x) = 1 - e^{-Rx}, \text{ con } R = \frac{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}{2\sigma_S^2\sigma_I^2(\theta - \eta)\lambda\mu}.$$

Ahora que ya tenemos f , podemos encontrar nuestras estrategias óptimas que estaban en términos de la función encontrada. Sustituyendo en la estrategia óptima de inversión

$$\begin{aligned} A^* &= -\frac{mf'(x)}{\sigma_I^2f''(x)} \\ &= \frac{2m\sigma_S^2(\theta - \eta)\lambda\mu}{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la estrategia óptima de reaseguro

$$\begin{aligned} b^* &= -\frac{\theta\lambda\mu f'(x)}{\sigma_S^2f''(x)} > 0 \\ &= \frac{2\sigma_I^2\theta(\theta - \eta)\lambda^2\mu^2}{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2}. \end{aligned}$$

Ahora veamos en qué intervalo la estrategia óptima de reaseguro es menor que uno

$$\frac{2\sigma_I^2\theta(\theta - \eta)\lambda^2\mu^2}{\sigma_S^2m^2 + \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2} < 1$$

$$\sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2 - 2\sigma_I^2\theta\eta\lambda^2\mu^2 - \sigma_S^2m^2 < 0.$$

Si definimos a $g(\theta) = \sigma_I^2\theta^2\lambda^2\mu^2 - 2\sigma_I^2\theta\eta\lambda^2\mu^2 - \sigma_S^2m^2$ vemos que es la función de una parábola. Por lo tanto, podemos hallar sus dos raíces y luego evaluar en un punto que se encuentre dentro de las dos raíces para ver si se trata de una función cóncava o convexa, y así poder definir el intervalo en el que se cumple que $g(\theta) < 0$. Para hallar las raíces igualamos a 0, y ocupamos la fórmula general, obteniendo

$$\theta = \frac{\sigma_I\lambda\mu\eta \pm \sqrt{\sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 + \sigma_S^2m^2}}{\sigma_I\lambda\mu}.$$

Ahora analizaremos el numerador de la expresión anterior. Observamos que

$$\sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 + \sigma_S^2m^2 > \sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 > 0$$

$$\sqrt{\sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 + \sigma_S^2m^2} > \sigma_I\lambda\mu\eta.$$

Esto quiere decir que una raíz es positiva y la otra es negativa. Por lo tanto, el 0 se encuentra entre ambas raíces. Evaluando la función g en 0, obtenemos $g(0) = -m^2\sigma_S^2 < 0$. Por lo tanto, podemos decir que el intervalo de θ donde $b^* < 1$ es

$$\left(\frac{\sigma_I\lambda\mu\eta - \sqrt{\sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 + \sigma_S^2m^2}}{\sigma_I\lambda\mu}, \frac{\sigma_I\lambda\mu\eta + \sqrt{\sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 + \sigma_S^2m^2}}{\sigma_I\lambda\mu} \right).$$

Pero sabemos que $\theta > 0$, por lo que nuestro intervalo queda reducido a

$$\left(0, \frac{\sigma_I\lambda\mu\eta + \sqrt{\sigma_I^2\lambda^2\mu^2\eta^2 + \sigma_S^2m^2}}{\sigma_I\lambda\mu} \right).$$

Sin embargo, aún podemos reducir la expresión del extremo superior de dicho intervalo

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_I \lambda \mu \eta + \sqrt{\sigma_I^2 \lambda^2 \mu^2 \eta^2 + \sigma_S^2 m^2}}{\sigma_I \lambda \mu} &= \frac{\sigma_I \lambda \mu \eta + \sigma_I \lambda \mu \sqrt{\eta^2 + \frac{\sigma_S^2 m^2}{\sigma_I^2 \lambda^2 \mu^2}}}{\sigma_I \lambda \mu} \\ &= \eta + \sqrt{\eta^2 + \frac{\sigma_S^2 m^2}{\sigma_I^2 \lambda^2 \mu^2}}. \end{aligned}$$

Así, concluimos que si $\eta < \theta < \eta + \sqrt{\eta^2 + \frac{\sigma_S^2 m^2}{\sigma_I^2 \lambda^2 \mu^2}}$, entonces:

$$f(x) = 1 - e^{-Rx}, \quad \text{con } R = \frac{\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2}{2\sigma_S^2 \sigma_I^2 (\theta - \eta) \lambda \mu},$$

con estrategias óptimas

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{2m\sigma_S^2(\theta - \eta)\lambda\mu}{\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2} \\ b^* &= \frac{2\sigma_I^2 \theta (\theta - \eta) \lambda^2 \mu^2}{\sigma_S^2 m^2 + \sigma_I^2 \theta^2 \lambda^2 \mu^2}. \end{aligned}$$

Cuando $\theta \geq \eta + \sqrt{\eta^2 + \frac{\sigma_S^2 m^2}{\sigma_I^2 \lambda^2 \mu^2}}$ entonces $b^* = 1$ y quiere decir que no hay reaseguro, por lo tanto, la solución está dada por la misma que en la sección de inversión, pues ahí no se consideraba ningún reaseguro.

Para demostrar que f y δ coinciden se debe considerar los posibles valores de la estrategia óptima de reaseguro. Como se dijo, cuando $b^* = 1$, el problema se reduce al caso en el que únicamente hay inversión. Por lo tanto, para este caso, la demostración de que f y δ coinciden ya se hizo en el Teorema 2.4.1.

Para el caso en el que $b^* < 1$, primero tomamos estrategias arbitrarias b y A , y se usa la fórmula de Itô, obteniendo

$$\begin{aligned} f(X_{\tau \wedge t}^{Ab}) &= f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} \frac{1}{2} (A_s^2 \sigma_I^2 + b_s^2 \sigma_S^2) f''(X_s^{Ab}) + (mA_s + (b_s \theta - (\theta - \eta)) \lambda \mu) f'(X_s^{Ab}) ds \\ &\quad + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_S b_s f'(X_s^{Ab}) dB_s^S + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_I A_s f'(X_s^{Ab}) dB_s^I. \end{aligned}$$

Como f es solución de la ecuación (2.26), entonces

$$f(X_{\tau \wedge t}^{Ab}) \leq f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_S b_s f'(X_s^{Ab}) dB_s^S + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma_I A_s f'(X_s^{Ab}) dB_s^I.$$

Análogamente al Teorema 2.2.1 y al Teorema 2.4.1, se puede mostrar que únicamente

hay dos posibilidades: la ruina ocurre o X_t^{Ab} diverge a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$. Usando los mismos pasos que los teoremas mencionados, se demuestra que $f(x) = \delta^{A^*b^*}(x) \geq \delta^{Ab}(x)$, con A y b estrategias arbitrarias.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo, el modelo visto a lo largo de las secciones 2.2, 2.4 y 2.5 es aplicado a una base de datos perteneciente a una aseguradora italiana, la cual fue obtenida de la paquetería *CASdatasets* del software R. Los datos corresponden al monto de las reclamaciones por seguros de daños a terceros comprendidos entre 1997 y 2012. Los montos de las reclamaciones están expresados en euros. En el Cuadro 3.1 se muestran medidas de tendencia central, de dispersión y de asimetría. Vemos que, en promedio, el monto de las reclamaciones es de 1,015,352.154 euros con una desviación estándar de 680,742 euros. Vemos que el coeficiente de asimetría es positivo, por lo que se tiene una distribución asimétrica a la derecha. La curtosis también es positiva, por lo que la distribución es leptocúrtica y, por consiguiente, hay una mayor concentración de datos alrededor de la media en comparación con la distribución Normal. En la Figura 3.1 se muestra el histograma de frecuencias de los montos de reclamación.

Media	1 015 352.154
Mediana	844 010.92
Moda	680 219.05
Desviación estándar	680 742
Curtosis	12.87704327
Coefficiente de asimetría	2.570541662

Cuadro 3.1: Análisis descriptivo.

Para llevar a cabo la aplicación del modelo, primero se hará el ajuste de distribución a la base de datos. Una vez que se haya ajustado la mejor distribución, se procederá a obtener todos los parámetros necesarios en nuestro modelo. Para el caso

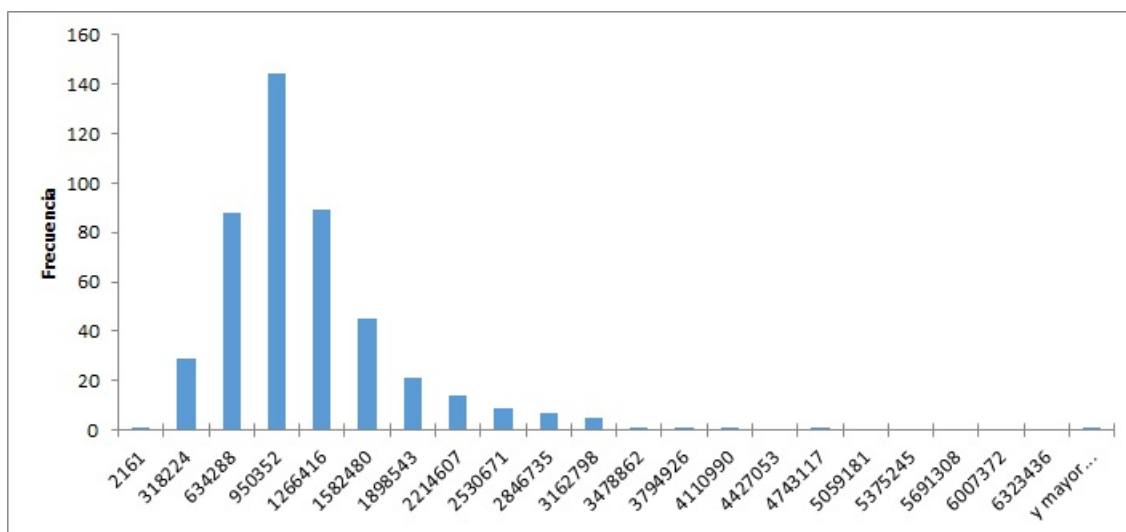


Figura 3.1: Histograma de frecuencias de los montos de reclamación en euros.

en el que se hace uso de la inversión, se considerarán los precios de los últimos 10 años de las acciones de la empresa SoftBank Group Alemania.

3.1. Ajuste de la distribución

Para realizar el ajuste de distribución se utilizó como apoyo el software llamado *EasyFit*, el cual es un programa que propone las mejores distribuciones que se le ajustan a una base de datos. Las distribuciones propuestas son las siguientes: distribución de Valores Extremos Generalizada (GEV por sus siglas en inglés), distribución Gamma Generalizada (GG), distribución Log-logística (LL), distribución Lognormal (LN) y la distribución de Pearson tipo VI (Pearson VI). Vemos que, en efecto, dichas distribuciones pueden encajar con el histograma de frecuencias obtenido en la Figura 3.1. Para lograr un mejor ajuste de la distribución, se agregará un parámetro de localización a las distribuciones comentadas que comúnmente no cuentan con él. Las distribuciones utilizadas, así como sus aspectos más importantes, se encuentran en el Apéndice D.

Para elegir la mejor distribución que se ajusta al modelo se utilizarán dos herramientas. La primera es el Criterio de Información de Akaike (véase Apéndice F), denominado AIC por sus siglas en inglés. Ésta es una excelente técnica que nos permite ver qué tan bueno es el ajuste de cierta distribución comparado con otras. Además, el AIC penaliza la cantidad de parámetros a estimar, algo que otras pruebas de bondad de ajuste no hacen. La segunda herramienta es el gráfico Cuantil-Cuantil

(QQ por sus siglas en inglés), véase [8], el cual es un método visual que nos permite ver que tan bien se ajusta la distribución propuesta a nuestros datos.

Antes de comenzar directamente con el ajuste de distribución se deben estimar los parámetros de las distribuciones a comparar. Para dicho propósito se aplicará el método de máxima verosimilitud. Se hizo uso de *Solver*, herramienta de optimización incorporada en Microsoft Excel, para maximizar directamente las funciones de log-verosimilitud ubicadas en el Apéndice D, y de esta manera conseguir una aproximación de los estimadores.

En el Cuadro 3.2 se muestran los resultados obtenidos para cada una de las distribuciones.

distribución GEV	
$\hat{\mu}$	717 982.152958252
$\hat{\sigma}$	429 231.317846551
\hat{k}	0.1024613163307
distribución GG	
$\hat{\alpha}$	10.7687264191263
$\hat{\beta}$	19 551.1565013722
$\hat{\gamma}$	-163 223.447
\hat{k}	0.588072762
distribución LL	
$\hat{\alpha}$	3.84327886626658
$\hat{\beta}$	1 122 614.41179053
$\hat{\gamma}$	-247 989.34
distribución LN	
$\hat{\mu}$	14.010385935899
$\hat{\sigma}$	0.441575625237071
$\hat{\gamma}$	-328 899.71
distribución Pearson VI	
$\hat{\alpha}_1$	1 882.55248697869
$\hat{\alpha}_2$	8.91726370904629
$\hat{\beta}$	6 989.68582549861
$\hat{\gamma}$	-650 510.53

Cuadro 3.2: Estimadores de máxima verosimilitud.

Una vez que ya tenemos la estimación de los parámetros, se procede a obtener

para cada una de las distribuciones los valores del AIC, los cuales se encuentran en el Cuadro 3.3.

Distribución	AIC
GEV	13 353.29
GG	13 371.24
LL	13 344.76
LN	13 361.29
Pearson VI	13375.14

Cuadro 3.3: Valores del AIC.

Como puede observarse en el Cuadro 3.3, el AIC más pequeño corresponde al de la distribución Log-Logística. Esto quiere decir que dicha distribución es la que se ajusta mejor a nuestra base de datos.

En la Figura 3.2 se encuentra el gráfico QQ para la distribución Log-Logística con los parámetros obtenidos por máxima verosimilitud. En él podemos observar que, en general, los puntos graficados se asemejan a una línea recta. Esto quiere decir que la distribución propuesta se acerca a la distribución ideal de nuestra base de datos.

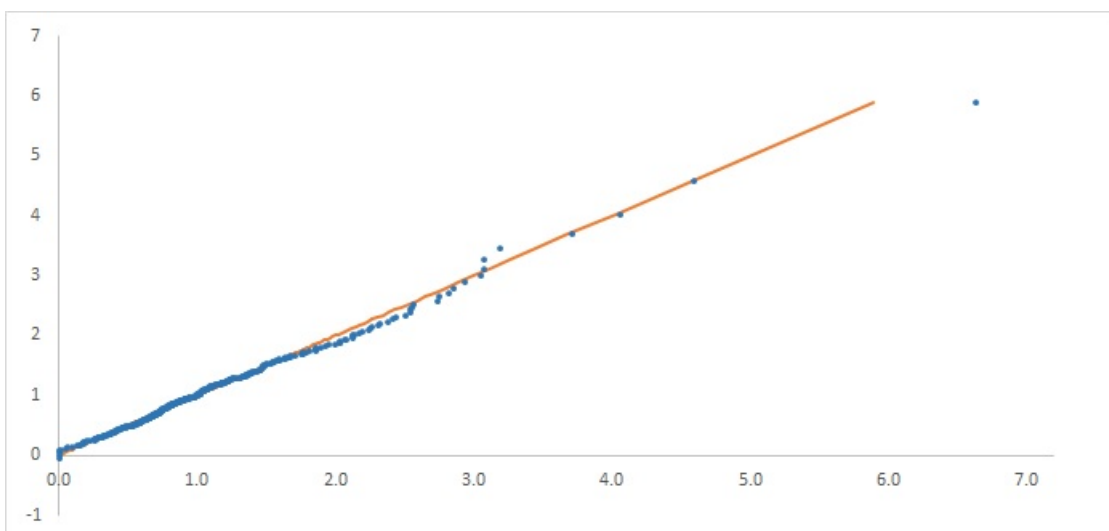


Figura 3.2: Gráfico QQ distribución Log-Logística (escala en millones de euros).

Así, con base en el AIC y el gráfico QQ decidimos que la distribución que mejor se ajusta a nuestros datos es la Log-Logística, con los parámetros obtenidos en el

Cuadro 3.2. Si X representa dicha variable, su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{\frac{3.8433}{1 \ 122 \ 614.412} \left(\frac{x+247 \ 989.34}{1 \ 122 \ 614.412}\right)^{2.8433}}{\left(1 + \left(\frac{x+247 \ 989.34}{1 \ 122 \ 614.412}\right)^{3.8433}\right)^2}, \quad \text{con } -247 \ 989.34 \leq x.$$

Sin embargo, nos damos cuenta que al haber aumentado el parámetro de localización a dicha variable aleatoria, el rango de la variable se modificó, dejando de ser una variable positiva. Ahora puede tomar valores negativos, pero en el contexto de nuestro problema eso no puede ser posible. Por esta razón, truncaremos la variable aleatoria en el número 0. La variable truncada en 0 será representada por \hat{X} y su función de densidad queda dada de la siguiente manera:

$$f_{\hat{X}}(x) = \frac{\frac{3.8433}{1 \ 122 \ 614.412} \left(\frac{x+247 \ 989.34}{1 \ 122 \ 614.412}\right)^{2.8433}}{(1 - F_X(0)) \left(1 + \left(\frac{x+247 \ 989.34}{1 \ 122 \ 614.412}\right)^{3.8433}\right)^2}, \quad 0 \leq x.$$

Al truncar una variable aleatoria, la función de densidad debe ser reescalada para que integre 1 sobre el nuevo recorrido de la variable. De esta manera, nuevamente se obtienen los AIC para las variables truncadas en 0, los cuales se encuentran en el Cuadro 3.4

Distribución	AIC
GEV truncada	13 351.55
GG truncada	13 370.05
LL truncada	13 342.01
LN truncada	13 359.89
Pearson VI truncada	13 373.55

Cuadro 3.4: Valores del AIC para las distribuciones truncadas en 0.

Observamos que todos los valores disminuyeron. No obstante, el AIC de la distribución Log-Logística continúa siendo el menor de todos. Así que la distribución que se termina ajustando es la Log-Logística truncada en el número 0.

3.2. Aplicación del modelo

Una vez que ya tenemos la distribución ajustada a nuestra base de datos, procedemos a aplicar el modelo desarrollado en el presente trabajo. Al igual que en la secuencia del Capítulo 2, primero se obtiene la probabilidad de ruina en el caso

de reaseguro, luego para el caso de inversión y por último para el caso en el que trabajan de manera conjunta.

3.2.1. Reaseguro óptimo

Antes de entrar directamente con el modelo, obtenemos algunos valores necesarios para la aplicación del mismo. Al tener una distribución truncada, la expresión de la esperanza μ y de la varianza σ_S^2 se modifican. Dichas expresiones, así como el segundo momento μ_2 de una variable truncada en 0, se encuentran en el Apéndice E.

También es necesario calcular el parámetro λ del proceso Poisson que modela la ocurrencia de los siniestros. En [6] se utiliza el método de máxima verosimilitud para obtener el siguiente estimador

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{T},$$

donde T es el intervalo de tiempo observado y N el número de siniestros ocurridos en el mismo periodo. En nuestro ejemplo, el periodo comprendió 192 meses y ocurrieron 457 siniestros.

En el Cuadro 3.5 se encuentran los términos necesarios para aplicación del modelo.

$\mathbb{E}[\hat{X}] = \hat{\mu}$	1 013 329.05
$\mathbb{E}[\hat{X}^2] = \hat{\mu}_2$	1 506 594 072 267.66
$\hat{\lambda}$	2.3802083
$\hat{\lambda}\hat{\mu}$	2 411 934.2596
$\hat{\sigma}_S = \sqrt{\hat{\lambda}\hat{\mu}_2}$	1 893 675.7288

Cuadro 3.5: Parámetros del modelo.

Ahora que se cuenta con todos los datos indispensables, se hace la aplicación del modelo. Sustituyendo en (2.8), hallamos la estrategia óptima de reaseguro. En la Figura 3.3 se muestra dicha estrategia considerando un factor de recargo de la aseguradora $\eta = 0.1$, un capital inicial $u = 6\,000\,000$, y se hizo variar el factor de recargo de la reaseguradora desde $\theta = 0.101$ hasta $\theta = 0.205$.

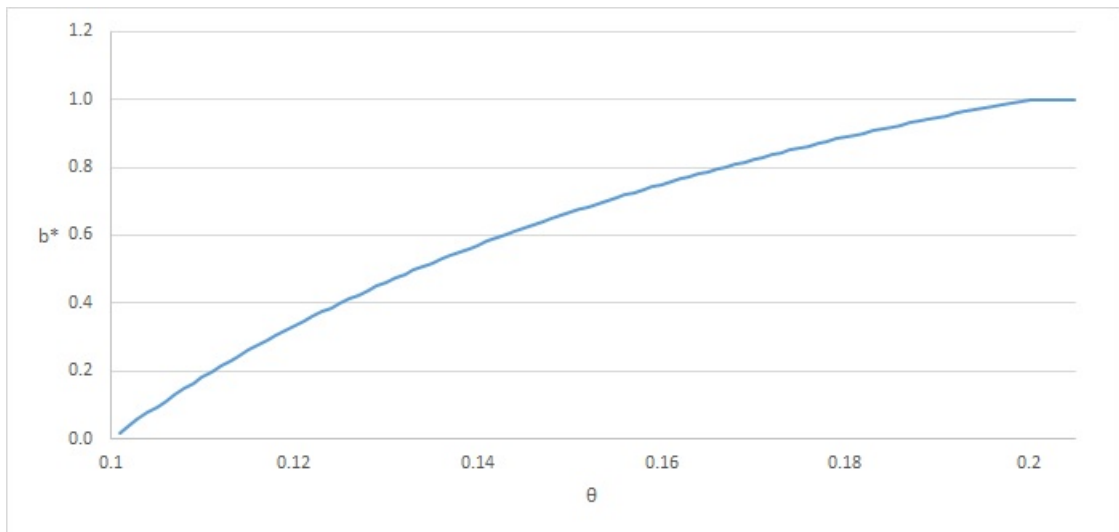


Figura 3.3: Estrategia óptima de reaseguro con $\eta = 0.1$ y $u = 6\,000\,000$.

En la Figura 3.4 se muestra una comparación de la probabilidad de supervivencia $\delta(u)$ sin reaseguro y la probabilidad de supervivencia $\delta^{b^*}(u)$ con la estrategia óptima de reaseguro b^* , considerando los valores de η , u y θ mencionados anteriormente.

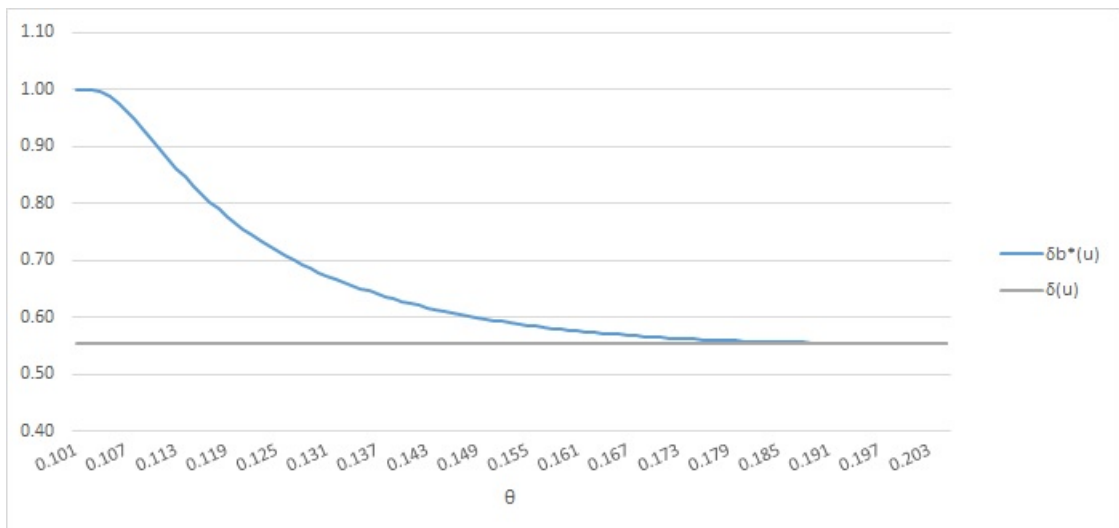


Figura 3.4: Probabilidades de supervivencia con $\eta = 0.1$ y $u = 6\,000\,000$.

A continuación se muestran algunos valores que se utilizaron para realizar las gráficas previas.

$\delta(u)$	θ	b^*	$\delta^{b^*}(u)$
0.553857	0.101	0.0198	1.000000
0.553857	0.12	0.3333	0.766087
0.553857	0.14	0.5714	0.627946
0.553857	0.16	0.7500	0.577228
0.553857	0.18	0.8889	0.558335
0.553857	0.2	1	0.553857

Cuadro 3.6: Valores obtenidos con $\eta = 0.1$ y $u = 6\,000\,000$.

Podemos observar en el Cuadro 3.6 los distintos valores de nuestra estrategia óptima de reaseguro, así como los valores de la probabilidad de supervivencia con dicha estrategia, conforme los valores de θ van variando. Vemos que cuando θ es muy cercana a η , el nivel de reaseguro es muy bajo, y la probabilidad de supervivencia aumenta considerablemente comparada con el caso sin reaseguro. Mientras θ va aumentando, nuestro nivel de retención va creciendo, y nuestra probabilidad de supervivencia va disminuyendo hasta alcanzar la probabilidad de supervivencia para el caso sin reaseguro, y mantenerse constante en ese valor.

3.2.2. Inversión óptima

Ahora se hará uso de la inversión en un activo con riesgo para minimizar la probabilidad de ruina. El activo que se decide usar es la acción de la empresa SoftBank Group Alemania. La empresa SoftBank Group Corp. es una empresa japonesa de telecomunicaciones. Los datos históricos de dicho activo fueron descargados de la página de Yahoo! Finance. Para efecto del ejemplo se consideró el precio del primer día hábil de cada mes desde enero 2007 hasta noviembre 2016.

Antes de poder usar el activo seleccionado para nuestro modelo, primero debe comprobarse que los rendimientos logarítmicos siguen una distribución Normal (véase el Apéndice A). Con el fin de lograr este objetivo, se hace uso de la prueba de Anderson-Darling (véase Apéndice G), obteniendo los valores concentrados en el Cuadro 3.7.

Se puede observar que el valor del estadístico A^2 ajustado no supera el valor crítico. Con esto concluimos que, con una significancia del 5%, no hay evidencia suficiente para negar que los rendimientos logarítmicos siguen una distribución Normal, cuyos parámetros fueron estimados a través de máxima verosimilitud. Con dichos parámetros podemos calcular m y σ_I , coeficientes de tendencia y difusión de

Parámetros v.a. Normal	
media	0.011368742
desviación estándar	0.09787983
Prueba de Anderson-Darling	
A^2	0.474955865
A^2 ajustado	0.490082275
Valor Crítico	0.751

Cuadro 3.7: Valores obtenidos en la prueba de Anderson-Darling con $\alpha = 5\%$.

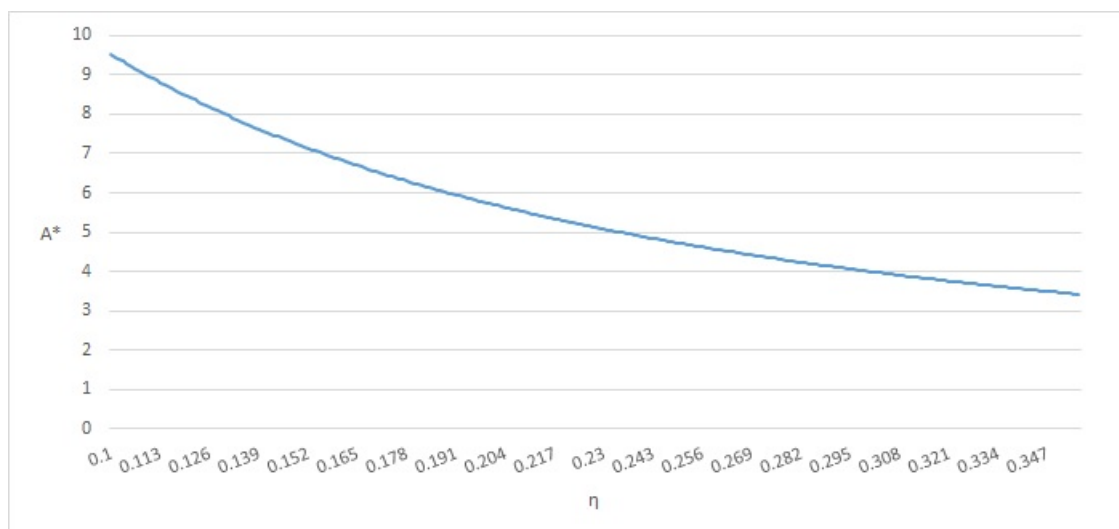
la EDE asociada al MBG que modelará el precio de nuestra acción. El valor de los coeficientes mencionados es

m	0.016158973
σ_I	0.09787983

Cuadro 3.8: Coeficientes de tendencia y difusión asociados al MBG que modela el precio de la acción.

Una vez que ya tenemos todos los cálculos necesarios podemos llevar a cabo la aplicación del modelo con inversión. Al igual que en el ejemplo del reaseguro, se considerará un capital inicial $u = 6\,000\,000$ y se hará variar el factor de recargo de la aseguradora η desde 0.1 hasta 0.35.

En la Figura 3.5 se expone la gráfica de la cantidad óptima a invertir en acciones de la empresa SoftBank Alemania, conforme varía el factor de recargo η .

Figura 3.5: Inversión óptima con $\eta = 0.1$ y $u = 6\,000\,000$ (escala en millones de euros).

Observamos en la gráfica, que conforme el factor de recargo que cobra la asegu-

radadora va aumentando, la cantidad a invertir va disminuyendo.

A continuación, en la Figura 3.6, se muestra una comparación de la probabilidad de supervivencia $\delta(u)$ sin inversión y la probabilidad de supervivencia $\delta^{A^*}(u)$ usando la estrategia óptima de inversión A^* .

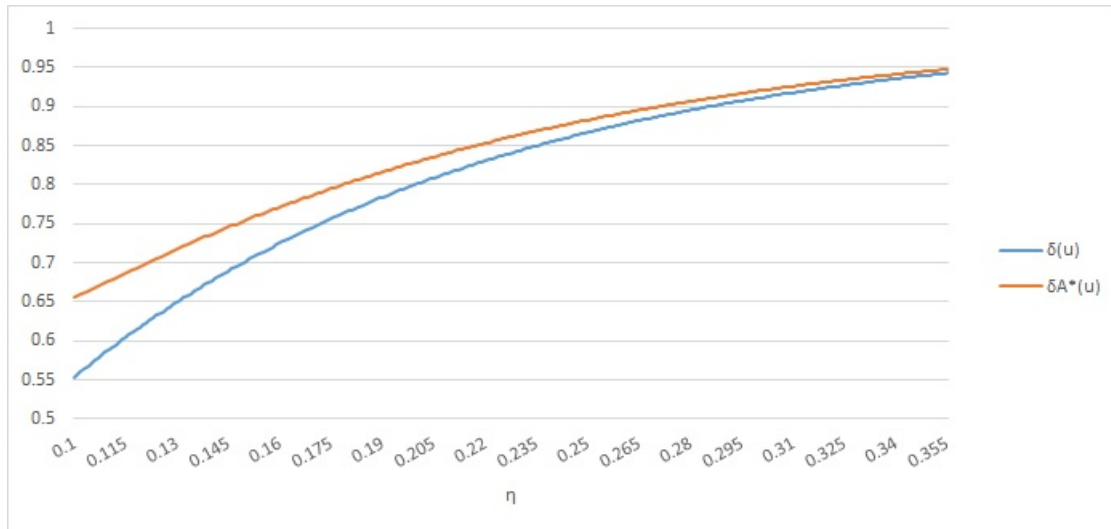


Figura 3.6: Probabilidades de supervivencia con $u = 6\,000\,000$.

Se observa que mientras el factor de recargo η aumenta, la aseguradora recibe más dinero por concepto de primas, y por esta razón su probabilidad de supervivencia aumenta, hasta acercarse mucho a aquella que se obtiene cuando se usa la estrategia óptima de inversión. En el Cuadro 3.9 se muestran algunos de los valores graficados.

η	$\delta(u)$	A^*	$\delta^{A^*}(u)$
0.10	0.553856722	9 509 309.698	0.655001612
0.14	0.676954202	7 580 920.603	0.736821902
0.18	0.766087281	6 240 945.997	0.802406196
0.22	0.830627234	5 275 519.591	0.853141531
0.26	0.877359667	4 555 141.767	0.891570529

Cuadro 3.9: Valores obtenidos cuando $u = 6\,000\,000$.

3.2.3. Reaseguro e inversión óptimos

Para cerrar este capítulo, veremos cómo afectan el reaseguro y la inversión a la probabilidad de ruina. Para hacer una comparación con los ejemplos anteriores, consideramos el mismo capital inicial $u = 6\,000\,000$ y el factor de recargo de la aseguradora $\eta = 0.1$, y hacemos variar el factor de recargo θ desde 0.101 hasta 0.28.

En la Figura 3.7 se muestra la gráfica de la estrategia óptima de reaseguro. Podemos ver que dicha gráfica se acerca más a una recta en comparación con el caso en el que hay únicamente reaseguro. Esto quiere decir que nuestro nivel de retención b aumenta más lentamente.

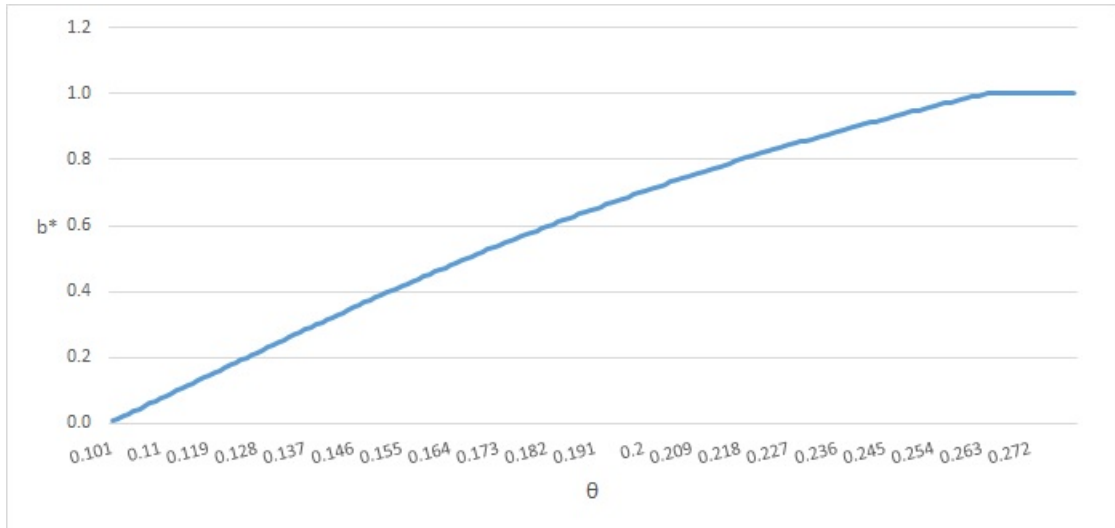


Figura 3.7: Estrategia óptima de reaseguro con $u = 6\,000\,000$ y $\eta = 0.1$.

Ahora se presenta, en la Figura 3.8, la gráfica de la estrategia óptima de inversión. En este caso no podemos hacer una comparación directa con el ejemplo del caso en el que únicamente se considera la inversión, pues en dicho ejemplo el término que se hacía variar era η . Sin embargo, podemos notar que entre más crece el factor de recargo θ , mayor es la cantidad a invertir.

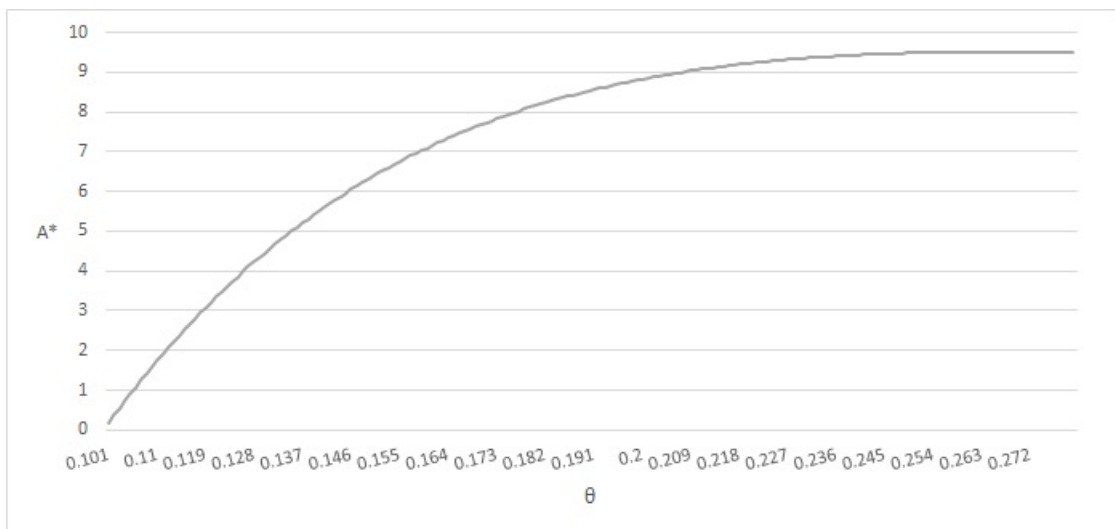


Figura 3.8: Inversión óptima con $u = 6\,000\,000$ y $\eta = 0.1$ (escala en millones de euros)

Finalmente se expone, en la Figura 3.9, el gráfico de comparación entre la probabilidad de supervivencia $\delta(u)$ sin reaseguro ni inversión y la probabilidad de supervivencia $\delta^{Ab^*}(u)$ con estrategias de reaseguro e inversión óptimas.

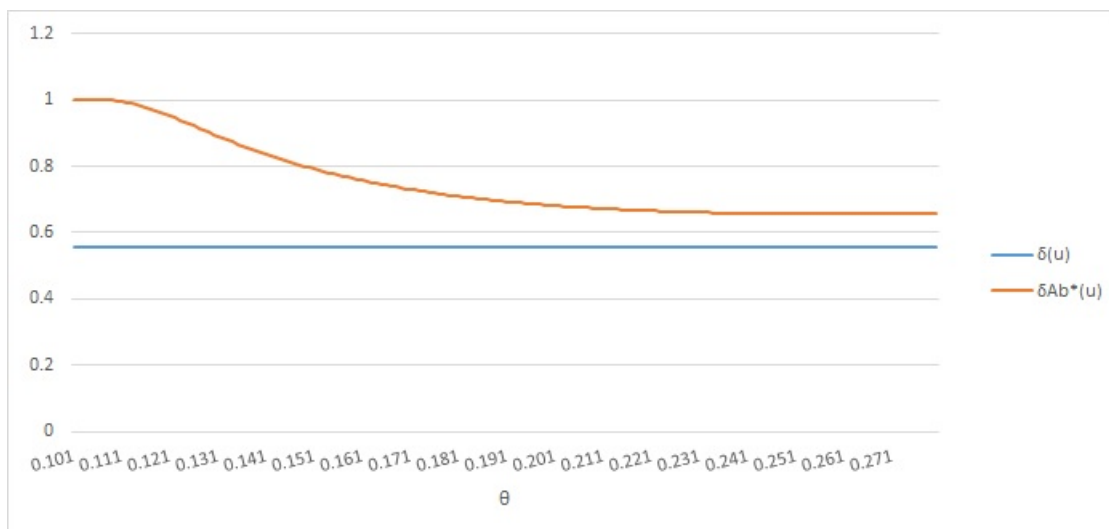


Figura 3.9: Probabilidades de supervivencia con $u = 6\,000\,000$ y $\eta = 0.1$.

Observamos que la probabilidad de ruina con estrategias óptimas disminuye de manera más lenta que el ejemplo en el que solo hay reaseguro. La probabilidad disminuye hasta que $\theta \approx 0.263$, pues para entonces el nivel de retención óptimo alcanza el valor de 1, es decir, que ya no hay reaseguro, haciendo que regresemos al caso en el que únicamente hay inversión. En el Cuadro 3.10 se muestran algunos de los valores obtenidos y graficados.

$\delta(u)$	θ	b^*	A^*	$\delta^{Ab^*}(u)$
0.553856722	0.101	0.007481075	185 744.3939	1
0.553856722	0.12	0.153843846	3 214 933.384	0.957053332
0.553856722	0.14	0.307688352	5 511 326.181	.840579597
0.553856722	0.16	0.452825191	7 097 145.210	0.759712493
0.553856722	0.18	0.585360286	8 154 997.722	0.710890945
0.553856722	0.20	0.704219550	8 829 806.306	0.682130044
0.553856722	0.22	0.809810139	9 230 678.476	0.665908125
0.553856722	0.24	0.903220125	9 437 467.283	0.657785259
0.553856722	0.26	0.985776525	9 507 760.178	0.655061443
0.553856722	0.28	1.000000000	9 509 309.698	0.655001612

Cuadro 3.10: Valores obtenidos cuando $u = 6\,000\,000$.

Conclusiones y notas finales

Como se mencionó en un inicio, la probabilidad de ruina, o la de supervivencia, son utilizadas como un indicador para evaluar la solvencia de una entidad aseguradora. En este trabajo se hizo uso de reaseguro e inversión en un activo con riesgo para poder optimizar la probabilidad de supervivencia. Dicha optimización se llevó a cabo obteniendo estrategias óptimas de reaseguro e inversión cuando se considera una aproximación del modelo de Cramer-Lundberg a través de un proceso de difusión de Itô.

La teoría del modelo fue desarrollada en el segundo capítulo. Primero se trataron los casos de reaseguro e inversión por separado, y finalmente cuando ambos interaccionan al mismo tiempo. Para los tres casos fue posible encontrar una expresión explícita para la probabilidad de supervivencia, la cual siempre resultó creciente. Es decir, cuanto mayor es el capital inicial, mayor es la probabilidad de supervivencia. La respectiva aplicación del modelo fue efectuada en el tercer capítulo, donde se comparó gráficamente la probabilidad de supervivencia sin ninguna estrategia y aquella con estrategias óptimas.

Cuando el reaseguro fue utilizado individualmente pudimos observar que conforme el factor de recargo de la reaseguradora aumenta, nuestro nivel óptimo de retención va aumentando hasta alcanzar el 100%, lo que implica no optar por el reaseguro. A tal punto se llega cuando el factor de recargo de la reaseguradora asciende al doble del que cobra la aseguradora. Cuando se utiliza el reaseguro y la inversión conjuntamente, también se encuentra un valor para el factor de recargo, a partir del cual se evita el reaseguro. Dicho en otras palabras, nuestro nivel de retención aumenta hasta que el reaseguro es demasiado caro y se evita.

Por otro lado, cuando se empleó únicamente la estrategia de inversión pudo notarse que, conforme el factor de recargo de la aseguradora aumenta, la cantidad a invertir va disminuyendo y la probabilidad de supervivencia sin estrategias asciende hasta el punto de casi igualar a la que cuenta con la estrategia óptima. Esto se debe a que, al incrementarse el factor de recargo, la aseguradora obtiene mayores

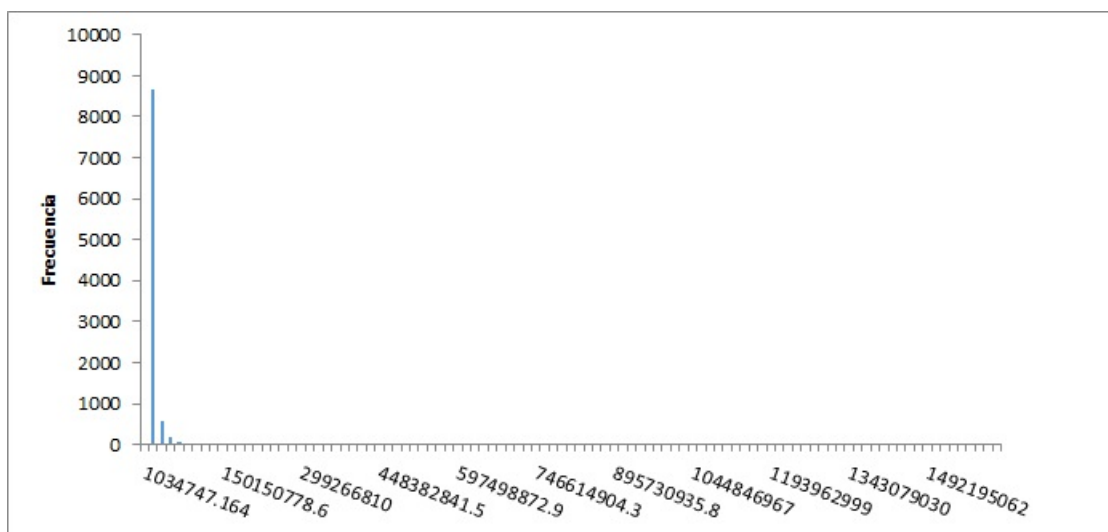


Figura 3.10: Histograma de frecuencias de los montos de reclamaciones en francos

ingresos. Cuando se usa tanto reaseguro como inversión, llega un momento en el que el reaseguro deja de ser apropiado, por lo que ese caso se resume nuevamente a aquél en el que únicamente hay inversión.

Cabe recalcar que, cuando se habla de seguros de no vida, suelen ocurrir siniestros cuyos montos de reclamación son demasiado altos. Este tipo de reclamaciones son denominadas *large claims* [16].

Eventos cuyos montos de reclamaciones son considerados *large claims* suelen presentarse cuando ocurren catástrofes y desastres naturales como terremotos, tornados, inundaciones e incendios. En [16] se mencionan diferentes criterios para poder clasificar un monto de reclamación como *large claim*. Generalmente suelen ser clasificadas de esa manera el 10% de las reclamaciones más altas. También suelen obtener dicha clasificación todas aquellas reclamaciones que individualmente representen más del 5% de la suma total de reclamaciones. Por último, puede establecerse alguna cantidad, de manera que si el monto de reclamación la rebasa, entonces es categorizada como *large claim*.

El análisis de las *large claims* es importante para una aseguradora, ya que pueden representar un peligro para la solvencia por el gran impacto que tienen. Hay una línea de investigación denominada *Teoría de valores extremos* destinada a trabajar con este tipo de reclamaciones.

A manera de ejemplo, en la Figura 3.10 se muestra el histograma de frecuencias para los montos asociados a seguros contra incendios de una aseguradora francesa. Los datos corresponden a aquellas reclamaciones ocurridas entre los años 1982 y 1996. Podemos ver que la distribución asociada es de cola pesada. Cabe mencionar

que este tipo de histogramas es frecuente cuando se trata de seguros contra daños. Vemos que, aunque el número de clases es bastante amplio, el histograma no logra tomar una forma muy bien definida. Si se hicieran clases más amplias, casi todos los montos caerían en la misma clase, lo que resultaría contraproducente.

En [5] es estudiada una aproximación al modelo clásico de riesgo cuando los montos de reclamación siguen una distribución de cola pesada. En particular, la distribución de los montos debe ser una distribución α -estable, con $1 < \alpha < 2$. Dicho conjunto de distribuciones α -estables reciben el nombre de distribuciones de Pareto-Lévy.

El caso de montos con alguna distribución Pareto-Lévy es tratado a través de una sucesión de procesos de riesgo que converge débilmente a un proceso de Lévy α -estable, con $1 < \alpha < 2$. Esto es logrado asumiendo que los montos de reclamaciones de la n -ésima sucesión tienen la siguiente forma

$$Y_k^{(n)} = \frac{1}{\rho(n)} Y_k,$$

donde $\rho(n)$ es la función de normalización $\rho(n) = n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)$, con L una función lentamente variable en el infinito; y $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[Y_k] = \mu$. Además, se asume que las variables Y_k pertenecen al dominio de atracción de una ley α -estable, es decir, la expresión

$$\frac{1}{\rho(n)} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu)$$

converge débilmente a $X_{\alpha,\beta}(1)$, donde $\{X_{\alpha,\beta}(t)\}$ es un proceso de Lévy α -estable, con $1 < \alpha < 2$ y sesgo β .

Con base en lo anterior y en algunas otras suposiciones sobre los demás componentes del modelo clásico de riesgo, se hace la aproximación del proceso de Cramer-Lundberg a través de un proceso de Lévy α -estable, con $1 < \alpha < 2$.

En resumen, el propósito de esta tesis fue encontrar las estrategias óptimas de reaseguro e inversión en un activo con riesgo con el fin de minimizar la probabilidad de ruina cuando se aproxima el proceso clásico de Cramer-Lundberg a través de un proceso de difusión. La aproximación a través de un proceso de Lévy α -estable queda abierto para su estudio en trabajos futuros, ya que también es importante el análisis cuando hay presencia de *large claims*.

Apéndice A

Movimiento Browniano Geométrico (MBG)

El modelo del MBG es uno de los más usados en el área de finanzas. Es especialmente usado para modelar el precio de activos que varían de manera aleatoria con el tiempo. Generalmente se utiliza para modelar precio de acciones. El proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ solución de la ecuación

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\X_0 &= x_0,\end{aligned}$$

puede escribirse como:

$$X_t = x_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Los coeficientes μ y σ son estimados con base en la historia del proceso. Sin embargo, antes de hacer uso de este modelo, debe verificarse una condición para asegurarnos que el proceso sigue este modelo.

Recordemos que la ecuación diferencial del MBG es

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\X_0 &= x_0.\end{aligned}$$

Si suponemos que los precios de nuestra acción siguen un MBG, decimos que el precio al tiempo t , está dado por la expresión

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ \ln(X_t) - \ln(X_0) &= \sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \\ \frac{\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma} &= B_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma} \sim N(0, t),$$

que en otras palabras se puede expresar como

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right),$$

en donde $\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right)$ representa los rendimientos de nuestro activo. Es decir, antes de proponer que el precio de algún activo sigue un MBG, se debe verificar que sus rendimientos estén distribuidos normalmente con media $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ y varianza $\sigma^2 t$.

Apéndice B

Lema de Itô

Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s,$$

con $t \in [0, T]$, a y b funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Este tipo de procesos se puede escribir equivalentemente en su forma diferencial de la siguiente manera:

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dB_t.$$

Lema B.1 (*Lema de Itô*) Si X_t es un proceso de Itô, y $f(t, x)$ es una función escalar continua de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} con derivadas parciales f_x , f_t y f_{xx} continuas, entonces $f(t, X_t)$ es también un proceso de Itô, y además

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(a, X_a) &= \int_a^t \left(f_t(s, X_s) + f_x(s, X_s)a(s) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, X_s)b(s)^2 \right) ds \\ &\quad + \int_a^t f_x(s, X_s)b(s)dB_s \end{aligned}$$

Apéndice C

Teoremas de martingalas

A continuación se presentan dos resultados de martingalas que pueden ser consultados en [15].

Teorema C.1 (*Teorema de convergencia*) Sea M una submartingala tal que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[(M_t)^+] < +\infty.$$

Entonces existe una variable aleatoria M_∞ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = M_\infty, \text{ y}$$
$$\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty.$$

Teorema C.2 (*Teorema de paro óptimo*) Sea M una submartingala, $t \geq 0$, y T_1, T_2 tiempos de paro. Entonces

$$\mathbb{E}[M_{T_1 \wedge t} | \mathcal{F}_{T_2}] \geq M_{T_1 \wedge T_2 \wedge t}.$$

En particular, el proceso detenido $\{M_{T_1 \wedge t}\}$ es una submartingala.

Apéndice D

Distribuciones de probabilidad

- Distribución de Valores Extremos Generalizada

Parámetros : $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, $\theta = (\sigma, \mu, k)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-\frac{1}{k}}} \left(1 + k \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1-\frac{1}{k}}, \quad \mu - \frac{\sigma}{k} \leq x$$

$$F(x) = e^{-(1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-\frac{1}{k}}}, \quad \mu - \frac{\sigma}{k} \leq x$$

$$l(\theta) = -n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \left(1 + k \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{k}} - \left(1 + \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + k \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \sigma \frac{\Gamma(1-k) - 1}{k}, \quad k \neq 0, \quad k < 1$$

- Distribución Gamma Generalizada

Parámetros : $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta = (\alpha, \beta, k, \gamma)$.

$$f(x) = \frac{k(x-\gamma)^{k\alpha-1}}{\beta^{k\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^k}, \quad \gamma \leq x$$

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^k(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \gamma \leq x, \text{ y } \Gamma_x(\alpha) \text{ es la función gamma incompleta}$$

$$l(\theta) = n \ln \left(\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\right) - k\alpha n \ln(\beta) + (k\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \gamma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \gamma}{\beta}\right)^k$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\Gamma\left(\frac{k\alpha+1}{k}\right)\beta}{\Gamma(\alpha)}.$$

- Distribución Log-Logística

Parámetros : $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$.

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha} \right)^{-2}, \quad \gamma \leq x$$

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{\beta}{x-\gamma} \right)^{\alpha} \right)^{-1}, \quad \gamma \leq x$$

$$l(\theta) = n \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i - \gamma}{\beta} \right) - 2 \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{x_i - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha} \right)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta \frac{\pi}{\alpha}}{\sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)}, \quad \alpha > 1.$$

- Distribución Log-Normal

Parámetros : $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta = (\mu, \sigma, \gamma)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}(x-\gamma)} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln(x-\gamma)-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad \gamma \leq x$$

$$F(x) = \Phi \left(\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma} \right), \quad \gamma \leq x$$

$$l(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \gamma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\ln(x_i - \gamma) - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

- Distribución Pearson Tipo VI

Parámetros : $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma)$.

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha_1-1}}{\beta B(\alpha_1, \alpha_2) \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right) \right)^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad \gamma \leq x$$

$$F(x) = \frac{B_{\frac{x-\gamma}{\beta}}(\alpha_1, \alpha_2)}{B(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad \gamma \leq x, \text{ y } B_x(\alpha_1, \alpha_2) \text{ es la función beta incompleta}$$

$$l(\theta) = -n \ln(\beta B(\alpha_1, \alpha_2)) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i - \gamma}{\beta} \right) - (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{x_i - \gamma}{\beta} \right) \right)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta \alpha_1}{\alpha_2 - 1}.$$

Apéndice E

Truncamiento de una variable aleatoria

Una distribución truncada es una distribución condicional en la cual se restringe el rango de una variable aleatoria (v.a.). Este tipo de distribuciones son utilizadas cuando cierta distribución es la que mejor se ajusta a una base de datos, pero el rango de la distribución ajustada incluye valores que, de antemano, sabemos que la v.a. no puede tomar.

El truncamiento de la v.a. puede ser tanto inferior ($X > a$, $a \in \mathbb{R}$) como superior ($X \leq b$, $b \in \mathbb{R}$).

Si X es una v.a. continua con función de densidad de probabilidad (f.d.p.) f_X y función de distribución acumulada (f.d.a.) F_X , y restringimos el dominio a un intervalo $(a, b]$ contenido en el rango de X , entonces la f.d.p. g_X de la distribución truncada es:

$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)}, & \text{si } x \in (a, b], \\ 0, & \text{si } x \notin (a, b]. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Con (E.1) podemos obtener la f.d.a. G_X de la distribución truncada, la cual está dada por:

$$G_X(x) = \begin{cases} \frac{\int_a^x f_X(s) ds}{F_X(b) - F_X(a)}, & \text{si } x \in (a, b), \\ 1, & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Usando (E.1) también podemos hallar el valor esperado de la distribución trun-

cada

$$\mathbb{E}[X|a < X \leq b] = \frac{\int_a^b x f_X(x) dx}{F_X(b) - F_X(a)}.$$

Cabe destacar que, al restringir el rango de una variable aleatoria, puede ser posible que la integral $\int_a^b x f_X(x) dx$ no pueda ser calculada de manera explícita. En estos casos se puede recurrir a algún método de integración numérica con el cual la integral puede ser aproximada. Algunos de estos métodos son: método del trapecio, método de Simpson 1/3, método de Simpson 3/8, entre otros.

Apéndice F

Criterio de Información de Akaike (AIC)

El criterio de información de Akaike [11], denominado AIC por sus siglas en inglés, fue desarrollado por Hirotugu Akaike y publicado por primera vez en 1974. El AIC es una medida que nos permite comparar la bondad de ajuste entre distintas distribuciones cuando son ajustadas a una base de datos. El AIC no proporciona una prueba de un modelo en el sentido de hacer una prueba de hipótesis, pero nos ofrece un medio para la selección de la mejor distribución a ajustar de entre los posibles candidatos.

El AIC es expresado como

$$AIC = 2k - 2 \ln L$$

donde k es el número de parámetros estimados y L es el máximo valor de la función de verosimilitud. Aquel modelo que tenga el menor valor de AIC será elegido como el mejor.

Apéndice G

Prueba de Anderson-Darling

La prueba de Anderson-Darling [11] es una prueba de bondad de ajuste. Nos ayuda a saber si los datos de una muestra provienen o no de una distribución F .

Si denotamos con F la distribución hipotética y F_n la distribución empírica, entonces definimos al estadístico de Anderson-Darling como:

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \phi(x) dF(x),$$

donde

$$\phi(x) = \frac{1}{[F(x)(1 - F(x))]}.$$

Sin embargo, si definimos

$$Z_i = F(X_{(i)}), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $X_{(i)}$ es el i -ésimo estadístico de orden, entonces:

$$A_n^2 = -n - \frac{\sum_{i=1}^n (2i - 1) [\ln Z_i + \ln(1 - Z_{n+1-i})]}{n}.$$

Algunos valores críticos para las distribuciones Normal, Exponencial y Weibull se encuentran en la Tabla G.1.

Distribución	Estadístico ajustado	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 2.5\%$	$\alpha = 1\%$
Normal($\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$)	$(1 + \frac{4}{n} - \frac{25}{n^2}) A_n^2$	0.632	0.751	0.870	1.029
Exponencial($\hat{\lambda}$)	$(1 + \frac{0.6}{n}) A_n^2$	1.070	1.326	1.587	1.943
Weibull($\hat{\alpha}, \hat{\beta}$)	$(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}) A_n^2$	0.637	0.757	0.877	1.038

Cuadro G.1: Valores críticos prueba de Anderson-Darling

Cabe recalcar que cuando la prueba de Anderson-Darling se usa como prueba de normalidad, resulta ser una de las pruebas más potentes.

Bibliografía

- [1] ASMUSSEN, S., *Ruin probabilities*, World Scientific, Singapur, 2000.
- [2] BARÓ, J. y MORATAL V., *Concentración y ditribuciones truncadas*, Questió, España, 1984.
- [3] BELLMAN, R., *Dynamic Programming*, Dover, 2003.
- [4] BRZEŹNIAK, Z. y ZASTAWNIAK, T., *Basic Stochastic Processes*, Springer, 2002.
- [5] CÍZEK, P., HAERDEL, W. y WERON, R., *Statistical tools for finance and insurance*, Springer, Alemania, 2005.
- [6] CONDE, M., *Verosimilitud para inferencia en procesos de Poisson (tesis de maestría)*, Universidad de Sonora, México, 2009.
- [7] GRANDELL, J., *A class of approximations of ruin probabilities*, Scandinavian actuarial journal, Suecia, 1977.
- [8] HELSEL, D. R. y HIRSCH, R. M., *Statistical methods in water resources*, USGS, Estados Unidos, 2002.
- [9] KARATZAS, I. y SHREVE, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, Estados Unidos, 1998.
- [10] LÓPEZ, R. A., *Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas (tesis de pregrado)*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2014.
- [11] LOVRIC, M., *International encyclopedia of statistical science*, Spinger, Alemania, 2010.
- [12] RINCÓN, L., *Introducción a la teoría del riesgo*, Las prensas de ciencias, México, 2012.

- [13] RINCÓN, L., *Introducción a los procesos estocásticos*, Las prensas de ciencias, México, 2012.
- [14] SCHMIDLI, H., *On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance*, The annals of applied probability, Estados Unidos, 2002.
- [15] SCHMIDLI, H., *Stochastic control in insurance*, Springer, Inglaterra, 2008.
- [16] TEUGELS, J. L., *Large claims in insurance mathematics*, ASTIN Bulletin, Bélgica, 1982.