Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMATICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

Modelo de Simulación Monte Carlo para el Sistema de Pensiones del IMSS y su Efecto en la Pobreza de México para el Periodo 2016-2061.

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA
ANEL FERNANDA REYES DUARTE

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ RAÚL CASTRO ESPARZA

PUEBLA, PUE. Mayo 2017

Dedicatoria

A la memoria de mi princesa Vale. A mis padres y hermana.

Agradecimientos

A mi familia, amigos y a todas aquellas personas que directa e indirectamente contribuyeron en la realización de esta tesis.

En particular al Dr. José Raúl Castro Esparza, por sus enseñanzas y apoyo incondicional.

Al Mtro. José Asunción Hernández, al Mtro. Ángel Tejeda Moreno y al Mtro. José Francisco Colín por sus valiosos comentarios a este trabajo.

A todos mis profesores por su compromiso con la enseñanza.

Introducción

El tema a desarrollar comprende la relación que existe entre la pobreza y los sistemas de pensiones en el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) desde el año 2016 hasta el año 2061, en particular comparando el sistema de reparto de la ley IMSS 73 y el nuevo sistema de capitalización de la Ley IMSS 97. Se desea pronosticar el efecto en el nivel de pobreza por la reforma del año 1997, a las personas de 60 años en adelante.

La ley 73 ya no es viable financieramente para el país y no es factible mantenerla. Sostener un sistema de beneficio definido requeriría cobrar mayores impuestos o recortar las pensiones. Lo que no cumpliría con el principal objetivo de la seguridad social que es mantener la calidad de vida, es decir, buscar una superación de la pobreza intentando evitar que la economía del individuo disminuya de un estándar mínimo.

Planteamiento del Problema

El sistema de reparto o beneficio definido consiste en que un trabajador al concluir su vida laboral pueda recibir una pensión con base en su salario y el número de años que laboró. Este sistema es financiado por el Gobierno o una empresa privada. El sistema con sus diferencias según la ley de cada país, funcionó muy bien en las decadas anteriores pero se presentaron dos variables que cambiaron su efectividad: el aumento en la esperanza de vida y la disminución en la tasa de natalidad. El aumento en la esperanza de vida provoca que la pensión deba ser pagada por mas años a los trabajadores inactivos. La reducción en la natalidad provoca una disminución en la proporción de afiliados activos por cada afiliado jubilado, lo que tiene como consecuencia que cada año, la tasa de remplazo sea menor, es decir, el número de trabajadores activos que deberían pagar las pensiones de los pensionados decrece. En la década de los años 70 había un promedio de diez trabajadores por cada pensionado; pero para el 2010 este número se redujo a ocho y se pronostica que para el 2050 probablemente solo haya dos punto cinco trabajadores activos por cada pensionado, según informes de la Organización para la Cooperación del Desarrollo Económico (OCDE).

Justificación de la Investigación

De no haberse hecho el cambio de sistema, las pensiones en un futuro tendrían que pagarse con mayores impuestos pagados por los trabajadores activos, lo que podría llevar al país a aumentar su deuda en caso de no contar con los recursos necesarios para cubrir los montos de las pensiones.

De esta forma en el año de 1997 se creó en México la reforma del nuevo sistema de capitalización. Con esta ley se define una pensión a partir del ahorro que realiza cada trabajador; es decir, el monto de la pensión ya no depende de la aportación de los trabajadores activos, sino del ahorro que realice el individuo durante su vida laboral. Comparando con la ley 73, la reforma del 97 fue un gran paso, debido a que el trabajador podrá recibir su pensión a través del ahorro que él mismo realice.

Metodología

Para hacer la comparación de nivel de pobreza, se realiza una simulación de proyecciones quinquenales de individuos cotizando en el IMSS y personas que se pensionan desde el año 2016 al año 2061, de la misma manera se simula el salario y la densidad de cotización que obtienen a la edad de retiro y a partir de eso, se calcula la pensión correspondiente. El medio por el cual se pretende hacer la simulación es por el método Monte Carlo. La razón para realizar la simulación por este método es que el comportamiento de los datos históricos desde el año 2000 hasta el año 2016, que son tomados como muestra, no reflejan estacionalidad.

Una vez que se obtiene la simulación de los datos, se procede a calcular las pensiones correspondientes a cada individuo.

Se aplicarán dos cálculos diferentes a los mismos datos simulados, para poder hacer la comparación y medición de la pobreza. El primer cálculo se hará suponiendo que todas las personas que reciban una pensión desde el año 2016 hasta el año 2061 lo harán con el sistema de reparto de la ley 73. El segundo cálculo se dividirá en dos partes. Se sabe que la ley 97 tiene como requisitos para cesantía en edad avanzada tener la edad de 60 años y al menos 1250 semanas de cotización, se prevé que los primeros candidatos a obtener una pensión con esta ley lo harán a partir del año 2021 con 100 % de semanas de cotización laborales, con un ingreso al IMSS a la edad de 35 años de edad. Para el año 2041 el total de la población del IMSS en edad de retiro se pensionará bajo esta nueva ley, por lo que el 2041 será el año referencia para hacer el cambio de cálculo de pensiones. Por esta razón en la primera parte, a las personas que reciban una pensión desde el año 2016 hasta el año 2040, se les calculará con el sistema de reparto, mientras que a partir del año 2041 hasta el año 2061 se hará el calculo de su pensión con el sistema de capitalización, luego se realiza la comparación para poder ver si existe un crecimiento o una disminución en los montos de las pensiones y en el número de candidatos a recibir una pensión, así se reflejará si afecta esto al nivel de pobreza para las personas de la tercera edad.

Índice general

Modelo de Simulación Monte Carlo para el Sistema de Pensiones del IMSS y su Efecto en la Pobreza de México para el Periodo 2016-2061.

Anel Fernanda Reyes Duarte

Mayo 2017

Capítulo 1

Marco Histórico

1.1. Seguro Social

El seguro social es el sistema de bienestar social mas importante en México, los institutos públicos encargados de ofrecer este servicio son el Instituto Mexicano del Seguro Social, el Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE), Petróleos Mexicanos (PEMEX), Instituto de Seguridad Social para las Fuerzas Armadas Mexicanas (ISSFAM) entre otros. Esta tesis tendrá un enfoque en el IMSS por ser el instituto con mayor numero de afiliados en el país.

Las razones para recibir una pensión son: por incapacidad permanente, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte prematura. En esta investigación se tiene un interés especial en la cesantía en edad avanzada y vejez, las cuales tienen como requisitos cumplir la edad de 60 y 65 años respectivamente y las semanas mínimas de cotización según la ley correspondiente: ley 73 con 500 semanas y para la ley 97 con 1250 semanas.

1.1.1. Sistema de Pensiones por Beneficio Definido (Ley 73)

El plan de beneficio definido es un plan de pensiones en el cual la empresa define una remuneración o beneficio que recibirá el empleado una vez que se haya retirado. Este beneficio se basa en varios criterios principalmente el salario y antigüedad en la empresa.

Este sistema, funciona mediante las aportaciones mensuales obligatorias que realizan los trabajadores activos para pagar las pensiones de los jubilados. En México la "Ley de Seguridad Social", dice que todas las empresas están obligadas a ofrecer este beneficio a sus empleados. La empresa constituye un pasivo equivalente al valor presente de los pagos que deberá realizar en el futuro al empleado. Este pasivo es remunerado por la empresa, mediante una inversión de activos donde hace aportaciones según los beneficios que adquiera el empleado. Como la empresa asume el riesgo, también se tiene que preocupar de lograr los objetivos que se establezcan. La razón del cambio de sistema en México es por encontrarse en situación de descapitalización que se refiere a cuando los pasivos son mayores que los activos.

1.1.2. Cálculo de las Pensiones IMSS (Ley 73).

La ley del seguro social, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 12 de marzo de 1973 en la sección octava, "De la Cuantía de las Pensiones" explica en los artículos 167 al 171 el cálculo de las pensiones:

Artículo 167: las pensiones anuales de invalidez y de vejez se compondrán de una cuantía básica y de incrementos anuales computados de acuerdo con el número de cotizaciones semanales reconocidas al asegurado con posterioridad a las primeras quinientas semanas de cotización. La cuantía básica y los incrementos serán calculados conforme a la siguiente tabla:

Grupo de salario en veces el salario mínimo general para D .F. Hasta 1	Porcentaje de cuantía básica %	*Los salarios incremento anual %*
de 1.01 a 1.25	80.00	0.563
de 1.26 a 1.50	77.11	0.814
de 1.51 a 1.75	58.18	1.178
de 1.76 a 2.00	49.23	1.430
de 2.01 a 2.25	42.67	1.615
de 2.26 a 2.50	37.65	1.756
de 2.51 a 2.75	33.68	1.868
de 2.76 a 3.00	30.48	1.958
de 3.01 a3.25	27.83	2.033
de 3.26 a 3.50	25.60	2.096
de 3.51 a 3.75	23.70	2.149
de 3.75 a 4.00	22.07	2.195
de 4.01 a 4.25	20.65	2.235
de 4.26 a 4.50	19.39	2.271
de 4.51 a 4.75	18.29	2.302
de 4.76 a 5.00	17.30	2.330
de 5.01 a 5.25	16.41	2.355
de 5.26 a 5.50	15.61	2.377
de 5.51 a 5.75	14.88	2.398
de 5.76 a 6.00	14.22	2.416
de 6.01 límite	13.62	2.433
superior establecido	13.00	2.450

Figura 1.1: Cuantía básica de las pensiones.

Para los efectos de determinar la cuantía básica anual de la pensión y sus incrementos, se considera como salario diario el promedio correspondiente a las últimas doscientas cincuenta semanas de cotización. Si el asegurado no tuviere reconocidas las doscientas cincuenta semanas señaladas, se tomarán las que tuviere acreditadas, siempre que sean suficientes para el otorgamiento de una pensión. El salario diario que resulte se expresará en veces el Salario Mínimo General para el Distrito Federal vigente en la fecha en que el asegurado se pensione, a fin de determinar el grupo de la tabla que antecede en que el propio asegurado se encuentre. Los porcentajes para calcular la cuantía básica, así como los incrementos anuales se aplicarán al salario promedio diario mencionado. Los incrementos a la cuantía básica, tratándose de fracciones de año, se calcularán en la siguiente forma:

a) Con trece a veintiséis semanas reconocidas se tiene derecho al cincuenta por ciento del incremento anual.

b) Con más de veintiséis semanas reconocidas se tiene derecho al cien por ciento del incremento anual. El Instituto otorgará a los pensionados comprendidos en este capítulo, un aguinaldo anual equivalente a una mensualidad del importe de la pensión que perciban.

Artículo 168. La pensión de invalidez, de vejez o cesantía en edad avanzada, incluyendo las asignaciones familiares y ayudas asistenciales que en su caso correspondan, no podrá ser inferior al cien por ciento del salario mínimo general que rija para el Distrito Federal. El monto determinado conforme el párrafo anterior, servirá de base para calcular las pensiones que se deriven de la muerte tanto del pensionado, como del asegurado, al igual que para fijar la cuantía de aguinaldo anual. La cuantía mínima de las pensiones derivadas de incorporaciones generadas por decreto del Ejecutivo Federal o convenios celebrados por el Instituto en los términos de esta ley, que contengan modalidades de aseguramiento en el ramo de los seguros de invalidez, vejez, cesantía en edad avanzada y muerte, se sujetará a lo establecido en el segundo párrafo del artículo 172.

Artículo 169. La pensión que se otorgue por invalidez, vejez o cesantía en edad avanzada, incluyendo el importe de las asignaciones familiares y ayudas asistenciales que se concedan, no excederá del cien por ciento del salario promedio que sirvió de base para fijar la cuantía de la pensión. Este límite se elevará únicamente por derechos derivados de semanas de cotización reconocidas, cuando el monto que se obtenga por concepto de la pensión sea superior al mismo. Las anteriores limitaciones no regirán para las pensiones con el monto mínimo establecido en el artículo 168.

Artículo 170. El total de las pensiones atribuidas a la viuda o a la concubina y a los huérfanos de un asegurado fallecido, no deberá exceder del monto de la pensión de invalidez, de vejez, o de cesantía en edad avanzada que disfrutaba el asegurado, o de la que le hubiere correspondido en el caso de invalidez. Si ese total excediera, se reducirán proporcionalmente cada una de las pensiones. Cuando se extinga el derecho de alguno de los pensionados, se hará nueva distribución de las pensiones que queden vigentes, entre los restantes, sin que se rebasen las cuotas parciales ni el monto total de dichas pensiones.

Artículo 171. Al asegurado que reúna las condiciones para el otorgamiento de la pensión de cesantía en edad avanzada, le corresponde una pensión cuya cuantía se calculará de acuerdo con la siguiente tabla:

Años cumplidos en la fecha en que se adquiere el derecho a recibir la pensión	Cuantía de la pensión expresada en % de la cuantía de la pensión de vejez que le hubiera correspondido al asegurado de haber alcanzado 65 años
60	75%
61	80%
62	85%
63	90%
64	95%

Figura 1.2: Cuantía proporcional a la edad de retiro.

Se aumentará un año a los cumplidos cuando la edad los exceda en seis meses.

Ejemplo:

Si se tiene una persona de 60 años con salario en las últimas 250 semas de cotización de \$8,000 y en total de su vida laboral cotizó 1485 semanas. ¿Cuál es el monto de su pensión?

Paso 1: Cuantía básica

Se establece el salario mínimo en \$73.04 por día.

$$\begin{aligned} M =& \ \$73.04 \times 30 \\ =& \ \$2191.20 \end{aligned}$$

$$\text{Proporción de salarios mínimos} = \frac{\$8000}{\$2191} = 3.65.$$

Este valor se busca en la tabla del artículo 167, de acuerdo a los salarios mínimos de esta persona, le corresponde un 23.7 % de porcentaje de cuantía básica y 2.149 % de incremento anual, luego se calcula la cantidad de semanas cotizadas excedentes de las 500 establecidas en la ley.

$$\text{Semanas excedentes de } 500 = 985$$

$$\text{Años excedentes} = \frac{985}{52} = 18.9$$

$$\text{Monto porcentual} = 0.237 + (0.02149 \times 18.9) = 0.644$$

$$\begin{aligned}\text{Monto} &= 0.644 \times \$8000 \\ &= \$5152\end{aligned}$$

Paso 2: Ayuda asistencial equivalente al 15 % del monto.

$$\begin{aligned}\text{Monto} &= 1.15 \times \$5152 \\ &= \$5924.8\end{aligned}$$

Paso 3: Una doceava parte del monto calculado en el paso 1, correspondiente al aguinaldo.

$$\begin{aligned}\text{Monto} &= \$5924.8 + (0.083333 \times \$5152) \\ &= \$5924.8 + 429.33 \\ &= \$6354.13\end{aligned}$$

Paso 4: Factor por edad.
Según la tabla del artículo 171, le corresponde el 75 % del monto calculado en el paso 3.

$$\begin{aligned}\text{Monto} &= \$6354.13 \times 0.75 \\ &= \$4765.59\end{aligned}$$

Paso 5: Decreto.
Según un decreto del 5 de enero del 2004 durante la gubernatura del presidente Vicente Fox, a la pensión se le aumentará un 11 % en el monto calculado en el paso 4.

$$\begin{aligned}\text{Monto} &= \$4765.59 \times 1.11 \\ &= \$5284.8\end{aligned}$$

Paso 6: Pensión mínima garantizada.
Si Monto<\$2221.63 entoces Monto= \$2221.63
Si Monto>\$2221.63 entonces Monto= Monto

1.1.3. Sistema de Pensiones por Contribución Definida (Ley 97)

Este sistema, que existe actualmente en México, funciona mediante el ahorro individual de cada afiliado, los afiliados cada periodo mensual ponen un porcentaje de su sueldo en cuentas de ahorro individuales que se invierten en la bolsa para que ganen rentabilidad. En el plan de contribución definida la empresa también realiza contribuciones monetarias periódicamente a beneficio del empleado. La pensión final del empleado depende del aporte del pensionado durante la etapa laboral y la rentabilidad que su ahorro haya tenido durante todo ese tiempo, estos ahorros son administrados por instituciones privadas.

Por lo general, en el sistema de contribuciones definidas los trabajadores activos tienen el derecho de retirar sus fondos de ahorro acumulados, en caso de retirarse anticipadamente. Por este motivo, se dice que los sistemas de contribución definida tienen portabilidad, esto significa que, si el empleado termina su relación laboral con la empresa puede transferir sus ahorros al plan de otra empresa.

El empleado al retirarse sin haber cubierto los requisitos para jubilación puede acceder al acumulado de su ahorro, a diferencia del sistema de beneficio definido, donde si no se cubren estos requisitos no se garantiza ningún monto de las aportaciones hechas durante la vida laboral. En las contribuciones definidas es el empleado el que asume el riesgo de las inversiones de su ahorro.

Para contribuciones definidas existen dos tipos de planes:

1. Plan de contribución definida directa: es cuando el empleado de forma individual decide sobre las inversiones de su ahorro.

2. Plan de contribución definida esponsorizada: es cuando existe una entidad intermediaria que decide cómo se hacen las inversiones del ahorro.

En ambos casos es el empleado el que asume el riesgo de las inversiones de su ahorro. El plan de la reforma del IMSS de 1997 es esponsorizada, por medio de Administradoras de Fondos para el Retiro(AFORES) .

1.1.4. Calculo de las Pensiones IMSS (Ley 97)

La ley del seguro social, publicada en el Diario Oficial de la Federación de 1995 para ser aplicada a partir del 1 de Julio de 1997, en el Capitulo VI , Sección Primera en el Artículo 154 menciona los requisitos para ser candidato a una pensión.

Artículo 154. Para los efectos de esta ley existe cesantía en edad avanzada cuando el asegurado quede privado de trabajos remunerados a partir de los sesenta años de edad. Para gozar de las prestaciones de este ramo se requiere que el asegurado tenga reconocidas ante el Instituto un mínimo de mil doscientas cincuenta cotizaciones semanales. El trabajador cesante que tenga sesenta años o más y no reúna las semanas de cotización señaladas en el párrafo precedente, podrá retirar el saldo de su cuenta individual en una sola exhibición o seguir cotizando hasta cubrir las semanas necesarias para que opere su pensión. En este caso, si el asegurado tiene cotizadas un mínimo de setecientas cincuenta semanas tendrá derecho a las prestaciones en especie del seguro de enfermedades y maternidad.

Los siguientes artículos de esta ley hablan sobre el uso de la Cuenta Individual y el cálculo de las pensiones :

Artículo 159. Para efectos de esta ley, se entenderá por:

I. Cuenta individual, aquella que se abrirá para cada asegurado en las Administradoras de Fondos para el Retiro, para que se depositen en la misma las cuotas obrero-patronales y estatal por concepto del seguro de retiro, cesantía en edad avanzada y vejez, así como los rendimientos. La cuenta individual se integrará por las subcuentas: de retiro, cesantía en edad avanzada y vejez; de vivienda y de aportaciones voluntarias. Respecto de la subcuenta de vivienda las Administradoras de Fondos para el Retiro deberán hacer entrega de los recursos al Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores en los términos de su propia Ley.

II. Individualizar, el proceso mediante el cual se identifica la parte que se abona a las subcuentas correspondientes a cada trabajador de los pagos efectuados por el patrón y el estado, así como los rendimientos financieros que se generen.

III. Pensión, la renta vitalicia o el retiro programado.

IV. Renta vitalicia, el contrato por el cual la aseguradora a cambio de recibir los recursos acumulados en la cuenta individual se obliga a pagar periódicamente una pensión durante la vida del pensionado.

V. Retiros programados, la modalidad de obtener una pensión fraccionando el monto total de los recursos de la cuenta individual, para lo cual se tomará en cuenta la esperanza de vida de los pensionados, así como los rendimientos previsibles de los saldos.

VI. Seguro de sobrevivencia, aquel que se contrata por los pensionados, por riesgos de trabajo, por invalidez, por cesantía en edad avanzada o por vejez, con cargo a los recursos de la suma asegurada, adicionada a los recursos de la cuenta individual a favor de sus beneficiarios para otorgarles la pensión, ayudas asistenciales y demás prestaciones en dinero previstas en los respectivos seguros, mediante la renta que se les asignará después del fallecimiento del pensionado, hasta la extinción legal de las pensiones.

VII. Monto constitutivo es la cantidad de dinero que se requiere para contratar los seguros de renta vitalicia y de sobrevivencia con una institución de seguros.

VIII. Suma asegurada es la cantidad que resulta de restar al monto constitutivo el saldo de la cuenta individual del trabajador.

La renta vitalicia y el seguro de sobrevivencia, que otorguen de acuerdo a lo previsto en los seguros de riesgos de trabajo, invalidez y vida, retiro, cesantía en edad avanzada y vejez, las instituciones de seguros se sujetarán a las reglas de carácter general que expida la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, oyendo previamente la opinión de la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro.

Artículo 160. El pensionado que se encuentre disfrutando de una pensión de cesantía en edad avanzada, no tendrá derecho a una posterior de vejez o de invalidez.

La ley de Contribución Definida del IMSS en el artículo 159 menciona dos formas de retiro: Renta Vitalicia y por Retiro Programado. La renta vitalicia esta hecha de forma que la pensión pueda durar al jubilado hasta el momento de su muerte, esta forma de pensión no es ofertada al momento por ninguna institución privada de seguros debido a que al administrar el ahorro del pensionado, dicho ahorro se dividirá en partes iguales para ser pagados periódicamente según su esperanza de vida. El motivo por el que las instituciones financieras no ofrecen la renta vitalicia es; en caso de que el asegurado viva más años de los esperados, la institución debe asumir el riesgo, a diferencia del retiro programado donde el asegurado es quien asume el riesgo.

Por ese motivo este trabajo se enfoca en el sistema de retiro programado.

Ejemplo:

Cálculo del retiro programado para pensionados de 60 años en adelante con cónyuge y sin hijos menores o estudiantes.

Paso 1: Retiro programado

$$\text{Retiro programado} = \frac{\text{Saldo Cuenta} - MCSS}{12 \times URV}$$

donde URV= Unidad de renta vitalicia.

Paso 2: Monto constitutivo del seguro de sobrevivencia.

Para poder resolver esta sencilla ecuación es necesario primero calcular el saldo de la cuenta y el monto constitutivo del seguro de sobrevivencia en caso de retiro programado.

$$MCSS = MSSRP_i$$

Donde $MSSRP_i$ es el monto constitutivo del seguro de sobrevivencia del seguro de invalidez y vida determinado con la tasa de interés técnica i sustituyendo el parámetro ${}_kp_x^{(inv)}$ por el parámetro ${}_kp_x$ que es la probabilidad de que una persona de edad x no inválida, llegue con vida a la edad $x + k$.

Se tiene la igualdad:

$$MCSS_i = PNSS \times (1 + \alpha)$$

donde α es un porcentaje de margen de seguridad.

Después se tiene que:

$$PNSS = (CB_{ivs}) \times (FACBI) \times (PBSS + PSIH + PFH)$$

$PNSS$ es igual a la prima neta del seguro de sobrevivencia, CB_{ivs} es la cuantía básica, $FACBI$ es un factor de actualización de la cuantía básica por inflación, $PBSS$ es la prima básica del seguro de sobrevivencia, $PSIH$ es una prima básica del seguro de invalidez para hijos y PFH es una prima básica de finiquito para hijos.

$PSIH = 0$ y $PFH = 0$, suponiendo que las personas de 60 años en adelante ya no tienen dependientes.
De esta forma la ecuación queda:

$$PNSS = (CB_{ivs}) \times (FACBI) \times (PBSS)$$

Posteriormente, si se consideran pesos constantes tenemos que $FACBI$ =1.0.
La cuantía básica se obtiene de la siguiente forma:

$$CB_{ivs} = max(CB_{iv}, PMG)$$

donde PMG=2491.02 (Pensión mínima garantizada) y $CB_{iv} = 0.35 \times SP_{iv}$
SP_{iv}= Sueldo pensionable para el cálculo de la pensión.

Finalmente, para el cálculo de $PBSS$ para personas con cónyuge sin hijos:
Sea b_1 el beneficio a pagar a los derechohabientes.

$$b_1 = 0.9$$

$$R_0^{vda} = CB_{ivs} \times 90\,\%$$

Y se tienen dos casos:

a) Si el cónyuge es femenino y $R_0^{vda} \leq PMG$

$$A_{x,y}^{(iv)} = \{b_t \times 13 \times \sum_{k=0}^{\omega-y}(1 -_k p_x) \times_k p_y \times v^k\} \times (1 + INC)$$

donde INC es el incremento del 11 % del decreto que se reforma y adiciona a la ley del seguro social.

b) Si el cónyuge es femenino y $R_0^{vda} > PMG$ o es masculino.

$$A_{x,y}^{(iv)} = \{b_t \times 13 \times \sum_{k=0}^{\omega-y}(1 -_k p_x) \times_k p_y \times v^k\}$$

Finalmente

$$PBSS = A_{x,y}^{(iv)}$$

Y se sustituyen los valores

$$PNSS = (CB_{ivs}) \times (FACBI) \times (PBSS)$$

Y también

$$MCSS_i = PNSS \times (1 + \alpha)$$

Para así obtener el monto constitutivo del seguro de sobrevivencia.

Paso 3: Saldo a cuenta.
Para obtener el monto del saldo a cuenta se considera la siguiente tabla de cuota social según la Ley 97:

Salario base de cotización del trabajador	Cuota social
1 Salario Mínimo	\$5.04727
1.01 a 4 Salarios Mínimos	\$4.83697
4.01 a 7 Salarios Mínimos	\$4.62666
7.01 a 10 Salarios Mínimos	\$4.41636
10.01 a 15.0 Salarios Mínimos	\$4.20606

Figura 1.3: Cuota social con relación al salario.

Es importante considerar que antes de la reforma del 97, se hizo un pequeño cambio en las pensiones donde además del sistema de reparto se hacía un ahorro en el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR) a partir del 1 de Mayo del año 1992 hasta antes del 1 de Julio de 1997. Esto era equivalente al 2 % del salario. Y la aportación de AFORES equivale al 6.5 % de la cuota salarial. De este modo se debe tomar en cuenta para las personas que decidan retirarse por contribución definida que hayan comenzado a laborar en este periodo 1992-1997, la suma total de su ahorro en SAR y en su AFORE.

Para obtener su ahorro se debe conocer el salario y densidad de cotización (para SAR y AFORE). La suma de su ahorro debe ser calculada con la tasa real, en la cual a diferencia de la tasa de cotización se elimina el efecto de inflación, para las AFORES se tiene una tasa real del 3.5 %.

Ejemplo: Considerando una persona de 60 años que ingresó al IMSS a los 20 años en el año de 1996 y desea retirarse por contribuciones definidas, teniendo una densidad de cotización del 65 % de los años laborales y un salario de $10,000 en sus últimas 250 semanas de cotización.

$$\text{Años laborales} = 40$$

$$\begin{aligned}\text{Años de cotización} &= 40 \times 0.65\\ &= 26\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Semanas de cotización} &= 26 \times 52\\ &= 1352\end{aligned}$$

Para calcular el saldo a cuenta se realiza lo siguiente:

1. Como la persona estuvo un año haciendo aportaciones en SAR se obtiene su ahorro durante este Periodo:

$$\text{Saldo inicial} = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Aportación bimestral inicial} &= \$10,000 \times 0.02 \times 2\\ &= \$400\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Aportación real} &= \$400 \times 0.65\\ &= \$260\end{aligned}$$

$$\text{Saldo inicial (bimestre 1)} = \$260$$

$$\begin{aligned}\text{Intereses} &= \$260 \times (0.02/6)\\ &= 0.87\end{aligned}$$

$$\text{Aportación 2} = \$400$$

$$\begin{aligned}\text{Aportación real 2} &= \$260 + \$260 + 0.87\\ &= 520.87\end{aligned}$$

$$\text{Saldo inicial (bimestre 2)} = \$520.87$$

$$\begin{aligned}\text{Intereses} &= \$520.87 \times (0.02/6)\\ &= 1.74\end{aligned}$$

Se realiza este proceso hasta obtener el monto del tiempo cotizado, en este caso es por un año y el monto es de \$2104.42912, como se observa en la tabla:

	Saldo inicial	intereses	Aportación	Aportación real	saldo final
may-92	0	0	400	260	260
jul-92	260.00	0.87	400.00	260	520.87
sep-92	520.87	1.74	400.00	260	782.60
nov-92	782.60	2.61	400.00	260	1045.21157
ene-93	1,045.21	3.48	400.00	260	1308.6956
mar-93	1,308.70	4.36	400.00	260	1573.05792
may-93	1,573.06	5.24	400.00	260	1838.30145
jul-93	1,838.30	6.13	400.00	260	2104.42912
sep-93	2,104.43	7.01	400.00	260	2371.44388
nov-93	2,371.44	7.90	400.00	260	2639.3487
ene-94	2,639.35	8.80	400.00	260	2908.14653
mar-94	2,908.15	9.69	400.00	260	3177.84035
may-94	3,177.84	10.59	400.00	260	3448.43315
jul-94	3,448.43	11.49	400.00	260	3719.92793

Figura 1.4: Aportación a SAR.

2. Ahorro AFORE.

Para obtener la suma del ahorro en AFORE se hace un procedimiento similar al de SAR.

Donde el saldo Inicial es cero en caso de comenzar a cotizar a partir del 1 de Julio de 1997 o equivalente al saldo obtenido mediante el ahorro en SAR si comenzó a cotizar entre mayo de 1992 hasta antes del 1 de Julio de 1997, para el ejemplo anterior,

$$\text{Saldo inicial1} = \$2104.42912$$

$$\begin{aligned} \text{Intereses} =& \ \$2104.42912 \times (0.035/6) \\ =& \ \$12.28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aportación bimestral} =& \ \$10,000 \times 0.065 \times 2 \\ =& \ \$1300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cuota social} =& \ \$4.62666 \times 60 \\ =& \ \$277.60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Aportación bimestral total} &= \$1300 + \$277.60\\ &= \$1557.60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Aportación bimestral real} &= \$1577.60 \times 0.65\\ &= \$1025.44\end{aligned}$$

$$\text{Aportación} = \text{Aportación real}$$

$$\begin{aligned}\text{Saldo final1} &= \text{Saldo inicial1} + \text{Intereses} + \text{Aportación real}\\ &= \$3142.14\end{aligned}$$

$$\text{Saldo inicial2} = \text{Saldo final1}$$

Se hace este cálculo por cada bimestre hasta los 40 años laborales.

Obteniendo el saldo a cuenta antes de pensionarse de \$518,037.

Con el saldo a cuenta y el MCSS se puede obtener el monto de la pensión mensual de la ecuación:

$$\text{Retiro programado} = \frac{\text{Saldo Cuenta} - MCSS}{12 \times URV}.$$

Capítulo 2

Método Monte Carlo

Monte Carlo es un método estadístico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. La técnica de la simulación de Monte Carlo se basa en simular la realidad a través del estudio de una muestra, que se ha generado de forma totalmente aleatoria. Resulta, por tanto, de gran utilidad en los casos en los que no es posible obtener información sobre la realidad a analizar, o cuando la experimentación no es posible, o es muy costosa. Así, permite tener en cuenta para el análisis un elevado número de escenarios aleatorios. La aplicación de esta técnica se basa en la identificación de las variables que se consideran más significativas, así como las relaciones existentes entre ellas (aunque esto puede resultar realmente complejo).

2.1. Origen

[1] El método de Monte Carlo (MC) es un método utilizado para realizar las computaciones numéricas de funciones de variables aleatorias. Su origen se remonta a cuando Laplace y Bouffon calcularon el valor numérico de utilizar un experimento aleatorio. Más tarde, durante la construcción de la bomba atómica en Los Álamos, durante la Segunda Guerra Mundial, como una palabra de código para el trabajo secreto. Fue sugerido por los casinos de juego en la ciudad de Monte Carlo en Mónaco. Newman y Ulam desarrollaron esta técnica extensivamente para calcular integrales complejas. Ulam ha explicado cómo se le ocurrió la idea mientras jugaba un solitario durante una enfermedad. Advirtió que resulta mucho más simple tener una

idea del resultado general del solitario haciendo pruebas múltiples con las cartas y contando las proporciones de los resultados que computar todas las posibilidades de combinación formalmente. Se le ocurrió que esta misma observación debía aplicarse a su trabajo de Los Álamos sobre difusión de neutrones, para la cual resulta prácticamente imposible solucionar las ecuaciones íntegro-diferenciales que gobiernan la dispersión, la absorción.

El método de Monte Carlo puede ser utilizado no sólo para la solución de problemas estocásticos, sino también para la solución de problemas determinísticos. Un problema determinístico puede ser resuelto por el método de Monte Carlo si tiene la misma expresión formal que algún proceso estocástico.

Otro campo de aplicación de los métodos de Monte Carlo es el muestreo de las variables aleatorias de las distribuciones de probabilidad. El método de Monte Carlo es ahora la técnica más poderosa y comúnmente utilizada para analizar problemas complejos. Recientemente, la gama de aplicaciones se ha ido ampliando, y la complejidad y el esfuerzo computacional requerido ha ido aumentando, porque el realismo está asociado con descripciones de problemas más complejos y extensos.

Existen aplicaciones, como "@Risk" de Palisade, donde se puede observar la correlación entre las variables, y también crear un análisis de riesgo de un proyecto mediante simulación Monte Carlo.

La simulación por ordenador a menudo nos permite inducir la correlación entre las secuencias de números aleatorios para mejorar el análisis estadístico de la salida de una simulación. La simulación no requiere que un modelo sea presentado en un formato particular. Permite un grado considerable de libertad para que un modelo pueda tener una estrecha correspondencia con el sistema que se estudia. Los resultados obtenidos de la simulación son muy similares a las observaciones o mediciones que se pudieron haber hecho en el sistema.

Se ha definido la simulación como una técnica de realizar experimentos de muestreo sobre el modelo del sistema. Esta definición general se denomina a menudo simulación en un sentido amplio, mientras que la simulación en sentido estricto, o simulación estocástica, se define como una experimentación con el modelo a lo largo del tiempo, incluye el muestreo de variaciones estocásticas de la distribución de probabilidad.

Por lo tanto, la simulación estocástica es en realidad un experimento de muestreo estadístico con el modelo. Este muestreo involucra todos los problemas del análisis del diseño estadístico. Debido a que la distribución particular de muestreo implica el uso de números aleatorios, la simulación estocástica se denomina simulación de Monte Carlo. Históricamente, el método de Monte Carlo se consideró una técnica, utilizando números aleatorios o pseudoaleatorios, para la solución de un modelo. Los números aleatorios son variables aleatorias esencialmente independientes uniformemente distribuidas sobre el intervalo unitario [0, 1]. En realidad, lo que está disponible son códigos aritméticos para generar secuencias de 10 dígitos pseudoaleatorios, donde cada dígito (0 a 9) ocurre con probabilidad aproximadamente igual. Tales códigos se llaman generadores de números aleatorios. Agrupados, estos dígitos generados producen o números pseudoaleatorios explicados en el apartado 2.2 de este capitulo.

2.2. Pruebas Estadísticas de Números Pseudoaleatorios

[1] Este apartado explica los métodos de generación de números aleatorios en ordenadores digitales, principalmente en @Risk, herramienta para realizar la simulación de pensionados del IMSS.
La importancia de los números aleatorios en el método de Monte Carlo y la simulación se ha discutido en el apartado anterior. El énfasis está principalmente en las propiedades de los números asociados con variaciones aleatorias uniformes. En los últimos años se han sugerido, probado y utilizado muchas técnicas para generar números aleatorios. Algunos de ellos se basan en fenómenos aleatorios, otros en procedimientos de recurrencia determinista. Inicialmente, se usaron métodos manuales, incluyendo técnicas tales como lanzamiento de monedas, rodadura de dados, barajado de cartas y ruedas de ruleta. Se creía que sólo los dispositivos mecánicos podían producir números “verdaderamente” al azar. Estos métodos eran demasiado lentos para el uso general, y además, las secuencias generadas por ellos no podían ser una reproducción. Poco después de la aparición de la computadora, fue posible obtener números aleatorios con su ayuda. Un método para generar números aleatorios en un ordenador digital consiste en preparar una tabla y almacenarla en la memoria del ordenador.
En vista de estas dificultades, Jhon Neumman sugirió un método, usando las operaciones aritméticas de una computadora. Su idea era tomar el cuadrado del número aleatorio precedente y extraer los dígitos del medio. Por ejemplo, si estamos generando números de cuatro dígitos y llegamos a 5232, lo

cuadramos obtenemos 27,373,824. El siguiente número consta de los cuatro dígitos centrales, es decir, 3738 y se repite el procedimiento. Esto plantea una pregunta lógica: ¿cómo pueden tales secuencias, definidas de una manera completamente determinista, ser aleatorias? La respuesta es que no son realmente al azar, pero sólo parecen así, y se conocen como pseudoaleatorias o cuasialeatorias. El método de Von Neumann también resultó lento y torpe para el análisis estadístico, además las secuencias tienden a ciclicidad y una vez que se encuentra un cero la secuencia termina. Se dice que los números aleatorios generados por este o cualquier otro método son "buenos"si están uniformemente distribuidos, estadísticamente independientes y reproducibles. Un buen método es, además, necesariamente rápido y requiere una capacidad mínima de memoria.
Esta sección describe algunas pruebas estadísticas para comprobar la independencia y la uniformidad de una secuencia de números pseudoaleatorios producidos por un programa de computadora (@Risk de Palisade). Una secuencia de números pseudoaleatorios es completamente determinista, pero en la medida en que pasa el conjunto de pruebas estadísticas, puede tratarse como uno de los números "verdaderamente" aleatorios, es decir, como una muestra de U(0,1). El objeto en esta sección es proporcionar alguna idea de estas pruebas.

2.2.1. Prueba Chi-Cuadrada

La prueba de bondad de ajuste chi-cuadrada, propuesta por Pearson, es quizás la más conocida de todas las pruebas estadísticas.
Sea $x_1, ..., x_N$ una muestra de una población con función de distribución acumulada (f.d.a) $F_X(x)$ desconocida.
Se desea probar la hipótesis nula

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x), \text{ para todo } x$$

donde $F_0(x)$ es una f.d.a completamente especificada, contra la alternativa

$$H_1 : F_X(x) \neq F_0(x), \text{ para algún } x$$

Supóngase que las N observaciones se han agrupado en k categorias mutuamente excluyentes, y se denota por N_j y Np_j^0 el número observado de resultados de ensayo y el número esperado para la categoría j-ésima, $j = 1, ..., k$,

respectivamete, cuando H_0 es verdadera.
El criterio de prueba sugerido por Pearson utiliza la siguiente estadística:

$$Y = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - Np_j^0)^2}{N \cdot p_j^0}, \quad \sum_{j=1}^{k} N_j = N \tag{2.1}$$

Lo que tiende a ser pequeño cuando H_0 es verdadera y grande cuando H_0 es falsa. La distribución exacta de la variable aleatoria Y es bastante complicada, pero para muestras grandes su distribución es aproximadamente chi-cuadrada con $k-1$ grados de libertad.
Bajo la hipótesis H_0 se espera

$$P(Y > \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha \tag{2.2}$$

donde α es el nivel de significancia, sea 0.05 o 0.1; el cuantil $\chi_{1-\alpha}$ que corresponde a la probabilidad $1-\alpha$ observado en las tablas de distribución chi-cuadrada.
Cuando se prueba la uniformidad, se divide el intervalo $[0,1]$ en k subintervalos no superpuestos de longitud $\frac{1}{k}$ de modo que $Np_j^0 = \frac{N}{k}$. En este caso se tiene

$$Y = \frac{k}{N} \sum_{j=1}^{k} \left(N_j - \frac{N}{k} \right)^2 \tag{2.3}$$

Puede aplicarse de nuevo para probar generadores de números aleatorios. Para asegurar las propiedades asintóticas de Y, a menudo se recomienda en la literatura elegir $N > 5k$ y $k > 1000$, donde $k = 2^\beta$ y $k = 10^\beta$ para un ordenador binario y decimal, respectivamente.

2.2.2. Prueba Kolmogorov-Smirnov

Otra prueba bien conocida en la literatura estadística es la propuesta por Kolmogorov y desarrollada por Smirnov. Donde $X_1, ..., X_N$ denotan nuevamente una muestra aleatoria de f.d.a $F_X(x)$ desconocida. La función de distribución acumulada de la muestra, denotada por $F_N(x)$, se define como

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N}(\text{número de } X_i \text{ menores o iguales que } x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_{(-\infty,x)}(X_i) \end{aligned}$$

Donde $I_{(-\infty,x)}(X)$ es la variable aleatoria indicadora, que es,

$$I_{(-\infty,x)}(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\infty < X \leq x \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{2.4}$$

Para un x fijo, $F_N(x)$ es en sí misma una v.a., ya que es una función de la muestra.
Se desea demostrar que $F_N(x)$ tiene la misma distribución que la media muestral de una distribución Bernoulli, es decir.

$$P\left[F_N(x) = \frac{k}{N}\right] = \binom{n}{k}\left[F_x(x)\right]^k\left[1 - F_x(x)\right]^{N-k} \tag{2.5}$$

Se denota $V_i = I_{(-\infty,x)}(X_i)$; entonces V_i tiene una distribución Bernoulli con el parámetro $P(V_i = 1) = P(X_i \leq x) = F_X(x)$. Dado que $\sum_{i=1}^{N} V_i$ tiene una distribución binomial con los parámetros N y $F_X(x)$, y dado que $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i$, el resultado sigue inmediatamente.
De (2.5)vemos que

$$E[F_N(x)] = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N}\binom{N}{k}[F_X(x)]^k[1 - F_X(x)]^{N-k} = F_X(x) \tag{2.6}$$

y

$$VarF_N(x) = \frac{1}{N}F_X(x)[1 - F_X(x)] \tag{2.7}$$

Las ecuaciones (2.6) y (2.7) muestran que para x fijo, $F_N(x)$ es un estimador insesgado y consistente de $F_X(x)$ independientemente de la forma de $F_X(x)$. Dado que $F_N(x)$ es la media muestral de las variables aleatorias $I_{(-\infty,x)}(X_i),\ i = 1, ..., N$ se deduce del teorema de límite central que $F_N(x)$ es asintóticamente distribuido normalmente con la media $F_X(x)$ y varianza $\left(\frac{1}{N}\right) F_X(x)[1 - F_(x)]$. Estamos interesados en estimar $F_X(x)$ para cada x (o mejor dicho, para una x fija) y en encontrar qué tan cerca $F_N(x)$ es a $F_X(x)$ conjuntamente sobre todos los valores x.
El resultado

$$\lim_{N\to\infty} P\left[\sup_{-\infty<x<\infty} |F_N(x) - F_X(x)| > \epsilon\right] = 0 \tag{2.8}$$

Es conocido como el teorema de Glivenko-Cantelli, que establece que para cada $\epsilon > 0$ la función de paso $F_N(x)$ converge uniformemente a la función de

distribución $F_X(x)$. Por lo tanto, para el N grande la desviación $|F_N(x) - F_X(x)|$ entre la función verdadera $F_X(x)$ y su imagen estadística $F_N(x)$ deben ser pequeños para todos los valores de x.
La variable aleatoria

$$D_N = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_N(x) - F_X(x)| \tag{2.9}$$

Lo que mide hasta qué punto $F_N(x)$ se desvía de $F_X(x)$ se denomina estadística Kolmogorov-Smirnov de una muestra. Kolmogorov y Smirnov demostraron que, para cualquier distribución continua $F_X(x)$,

$$\lim_{N\to\infty} P(\sqrt{N}D_N \leq x) = \left[1 - 2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\exp(-2j^2x^2)\right] = H(x) \tag{2.10}$$

La función $H(x)$ se ha tabulado y se ha encontrado que la aproximación es suficientemente cercana para aplicaciones prácticas, siempre que N exceda a 35.

La f.d.a. $H(x)$ no depende de aquel de donde se extrajo la muestra; que es la distribución límite de $\sqrt{N}D_N$ es distribución-libre. Este hecho permite que D_N se utilice ampliamente como una estadística para la bondad de ajuste. Por ejemplo, supongase que se tiene la muestra $X_1, ..., X_N$ y se desea probar
$H_0 : F_X(x) = F_0(x)$ para todo x
donde $F_0(x)$ es una f.d.a. completamente especificada (en este caso $F_0(x)$ es la distribución uniforme en el intervalo (0,1)). Si H_0 es verdadera, lo que significa que se tiene un buen generador de números aleatorios, entonces

$$\sqrt{N}D_N = \sqrt{N} \sup_{-\infty<x<\infty} |F_N(x) - F_X(x)| \tag{2.11}$$

se distribuye aproximadamente como la f.d.a $H(x)$.
Si H_0 es falsa, lo que significa que al tener un generador de números aleatorios erróneo, entonces $F_N(x)$ tiende a estar cerca de la verdadera f.d.a. $F_X(x)$ en lugar de cerca $F_0(x)$, y por consiguiente $\sup_{-\infty<x<\infty} |F_N(x) - F_0(x)|$ tenderá a ser grande. Por lo tanto, un criterio de prueba razonable es rechazar H_0 si $\sup_{-\infty<x<\infty} |F_N(x) - F_0(x)|$ es grande. La prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov con nivel de significancia α rechaza H_0 si y solo si $\sqrt{N}D_N > x_{1-\alpha}$ donde el cuantil $x_{1-\alpha}$ se da en las tablas de $H(x)$.

Antes de de dejar las pruebas de chi-cuadrada y de Kolmogorov-Smirnov, una palabra está en orden sobre la semejanza y la diferencia entre ellos. La similitud radica en el hecho de que ambas indican cuán bien un determinado conjunto de observaciones (números pseudoaleatorios) encaja en alguna distribución especificada (en este caso la distribución uniforme). La diferencia es que la prueba de Kolmogorov-Smirnov se aplica a f.d.a continuas (sin saltos) y la de chi-cuadrada a distribuciones consistentes exclusivamente de saltos (ya que todas las observaciones están divididas en k categorías). Todavía la prueba de chi-cuadrada puede aplicarse a $F_X(x)$ continuas, siempre que su dominio esté dividido en k partes y las variables dentro de cada parte sean despreciadoras. Esto es esencialmente lo que se hizo antes al probar si la secuencia obtenida del número aleatorio proviene o no de la distribución uniforme. Cuando se aplique la prueba de chi-cuadrada se debe tener en cuenta su sensibilidad al número de clases y sus anchos, elegidos arbitrariamente por el estadístico. Otra diferencia es que chi-cuadrada requiere datos agrupados mientras que Kolmogorov-Smirnov no lo requiere. Por lo tanto, cuando la distribución hipotética es continua Kolmogorov-Smirnov permite examinar la bondad de ajuste para cada una de las n observaciones, en lugar de sólo para k, donde $k \leq n$. En este sentido, Kolmogorov-Smirnov hace un uso más completo de los datos disponibles.
En cuanto a la eficiencia de las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y la de chi-cuadrada, actualmente existen pocos resultados teóricos para permitir un juicio significativo.

2.2.3. Prueba Anderson-Darling

[2] Esta prueba es similar a la prueba de Kolmogorov-Smirnov, pero utiliza una medida diferente en la diferencia entre las dos funciones de distribución, la prueba estadística es:

$$A^2 = n \int_t^u \frac{[F_n(x) - F^*(x)]^2}{F^*(x)[1 - F^*(x)]} f^*(x)dx \tag{2.12}$$

Esto es, un promedio ponderado de las diferencias cuadradas entre las funciones empíricas y de distribución del modelo. Se debe tomar en cuenta que cuando x está cerca de u, los valores pueden ser muy grandes debido al pequeño valor de uno de lo factores en el denominador. Esta prueba tiende a poner un mayor énfasis en las colas que en el centro de la distribución. Calculado con esta fórmula parece ser un reto. De cualquier forma, para datos individuales, la integral simplifica a

$$A^2 = -nF^*(u) + n\sum_{j=0}^{k}[1 - F_n(y_j)]^2\{\ln[1 - F^*(y_j)] - \ln[1 - F^*(y_{j+1}]\}$$
$$+ n\sum_{j=1}^{k} F_n(y_j)^2[\ln F^*(y_{j+1}) - \ln F^*(y_j)] \tag{2.13}$$

donde los únicos puntos de datos no censurados son $t = y_0 < y_1 < ... < y_k < y_{k+1} = u$.
Cuando $u = \infty$ el último término de la primera suma es cero.

2.2.4. Prueba de Akaike (AIC)

[3]El criterio de información de Akaike es una medida de la bondad de ajuste de un modelo estadístico. Se puede decir que describe la relación entre el sesgo y varianza en la construcción del modelo, o hablando de manera general acerca de la exactitud y complejidad del modelo. El AIC no es una prueba del modelo en el sentido de prueba de hipótesis. Más bien, proporciona un medio para la comparación entre los modelos de una herramienta para la selección del modelo. Dado un conjunto de datos, varios modelos candidatos pueden ser clasificados de acuerdo a su AIC, con el modelo que tiene el mínimo AIC es la mejor. A partir de los valores de la AIC también se puede inferir que, por ejemplo, los dos primeros modelos están más o menos empatados y el resto son mucho peores.

1 En general, el AIC se define como:

$$AIC = 2k - 2 \times ln(L) \tag{2.14}$$

Donde:

1) k es el número de parámetros del modelo
2) $ln(L)$ es la función de log-verosimilitud para el modelo estadístico.

2 Para los conjuntos de datos más pequeños, la AIC_c se aplica la corrección de segundo orden:

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{N-k-1} = \frac{2 \times N \times k}{N-k-1} - 2 \times ln(L) \tag{2.15}$$

Donde:

1) N es el tamaño de la muestra de datos

2) k es el número de parámetros del modelo

2.2.5. Prueba Bayesiana (BIC)

[3] El criterio de información Bayesiana (BIC) propuesto por Schwarz en (1978), ha sido uno de los métodos más populares usado para la selección de modelos. Este es un criterio de evaluación de modelos en términos de sus probabilidades posteriores. Una motivación detrás del BIC junto con un bosquejo de la derivación de este se presenta en seguida. Se tiene el problema de seleccionar, dentro de un conjunto de r modelos no necesariamente anidados, el que mejor describa a un conjunto de datos $x_n^* = (x_1, ..., x_n)'$, donde la densidad condicional de estos dado por el i-ésimo modelo candidato (M_i) y su correspondiente vector de parámetros (θ^i), está dada por $f_i(x_n^*|\theta^i) =: f(x_n^*|M_i, \theta^i)(\theta^i \in \Theta_i \subset R^{k_i})$.

Sea $\pi_i(\theta)$ la densidad apriori para el vector(θ^i) dado el modelo M_i, y $p(M_i)$ una densidad de probabilidad discreta a priori que asigna probabilidad positiva a cada uno de los modelos $M_i, ..., M_r$. Dado estos supuestos, por el teorema de Bayes de probabilidad total, la probabilidad a posteriori del i-ésimo modelo está dada por

$$\begin{aligned} P(M_i|x_n^*) &= \frac{P(M_i)f(x_n^*|M_i)}{f(x_n^*)} \\ &= \frac{P(M_i)\int_{\Theta_i} f(x_n^*|M_i, \theta)\pi_i(\theta)d\theta}{f(x_n^*)} \\ &= \frac{P(M_i)\int_{\Theta_i} f_i(x_n^*|\theta)\pi_i(\theta)d\theta}{f(x_n^*)} \\ &= \frac{P(M_i)f_i(x_n^*)}{f(x_n^*)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde

$$f_i(x_n^*) = \int_{\Theta_i} f_i(x_n^*|\theta)\pi_i(\theta)d\theta \tag{2.17}$$

La probabilidad condicional $P(M|x_n^*)$ dada en (2.16) se interpreta como la probabilidad de que los datos sean generados por el modelo M_i dado que se ha observado x_n^*, entonces desde un punto de vista Bayesiano es natural adoptar como mejor modelo el que tenga mayor probabilidad a posteriori. Para comparar diferentes modelos a través de sus probabilidades a posteriori, $f(x_n^*)$ no es importante ya que es un término común para todos los modelos, y al ignorarse, tal comparación resulta equivalente a realizarla con solamente el numerador de (2.16), es decir, usando $P(M_i)f_i(x_n^*)$. Además, si asume que las probabilidades a priori $P(M_i)$ son iguales para todos los modelos, entonces el modelo que maximice (2.17) es el que debe seleccionarse como el mejor. En la práctica los valores de (2.17) son difíciles de calcular, además de que para ello se requiere de la especificación de las densidades a priori $\pi_i(\theta)$. Una aproximación del logaritmo de (2.17) está dada por

$$\begin{aligned} log[f_i(x_n^*)] &\approx log[f_i(x_n^*|\hat{\theta_n^i})] - \frac{k_i}{2}log(n) \\ &= l_{n,i}(\hat{\theta_n^i}) - \frac{k_i}{2}log(n) \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $\hat{\theta_n^i}$ es el EMV de θ^i y $l_{n,i}(\theta^i) = log[f_i(x_n^*|\theta^i)]$ es la log-verosimilitud correspondiente al modelo M_i (Konishi y Kitagawa, 2008; Claeskens y Hjort, 2008; Burnham y Anderson, 2002). Así, ya que la función logaritmo es monótona creciente, seleccionar como mejor modelo el que maximice (2.17) equivale aproximadamente a seleccionar al que maximice (2.18), lo que a su vez equivale a seleccionar el modelo que minimice

$$BIC =: \ -2l_{n,i}(\hat{\theta_n^i}) + k_i log(n) \tag{2.19}$$

el llamado criterio de información Bayesiana.

2.3. Generadores de Variables Aleatorias

[1] En este capítulo se consideran algunos procedimientos para generar variables aleatorias de diferentes distribuciones. Estos procedimientos están basados en los siguientes tres métodos: el método de la transformada inversa,

el método de composición y el método de aceptación-rechazo, los cuales son descritos posteriormente.

Por conveniencia se hace referencia al muestreo de una distribución particular escribiendo la palabra generación antes del nombre de la distribución de la variable aleatoria. Por ejemplo, la generación exponencial denota el muestreo de una distribución exponencial.
Por simplicidad U es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad (f.d.p)

$$f_U(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

V es ua variable exponencial estándar con f.d.p.

$$f_V(v) = \begin{cases} e^{-v}, & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y Z es una variable normal estándar con f.d.p.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < z < \infty$$

X usualmente denota la variable aleatoria con f.d.p. $f_X(x)$ de la cual se desea generar un valor.

2.3.1. Método de la Transformada Inversa

Sea X una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad acumulada $F_X(x)$. Dado que $F_X(x)$ es una función no decreciente, la función inversa $F_X^{-1}(y)$ puede ser definida para cualquier valor y entre 0 y 1 como: $F_X^{-1}(y)$ es el x más pequeño que satisface $F_X(x) \geq y$, esto es,

$$F_X^{-1}(y) = \inf\{x : F_X(x) \geq y\}, \quad 0 \leq y \leq 1. \tag{2.20}$$

Demostrar que si U es distribuida uniformemente sobre el intervalo (0,1), entonces

$$X = F_X^{-1}(U) \tag{2.21}$$

Tiene función de distribución acumulada $F_X(x)$.

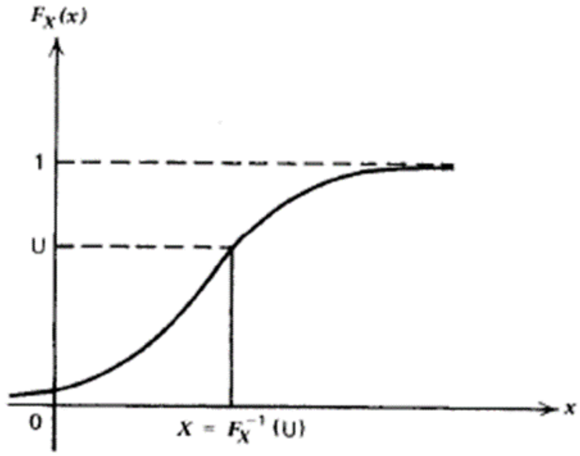


Figura 2.1: Gráfica del método de transformada inversa

La prueba es directa:

$$P(X \leq x) = P[F_X^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F_X(x)] = F_X(x) \tag{2.22}$$

Por lo que para obtener un valor, sea x, de una variable aleatoria X, se obtiene un valor, sea u, de una variable aleatoria U, se calcula $F_X^{-1}(u)$, y se iguala a x.

El algoritmo IT-1

1. Generar U de $U(0,1)$.
2. $X \leftarrow F_X^{-1}(U)$.
3. Obtener X.

Ejemplo 1. Generar una variable aleatoria con f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{2.23}$$

La función de distribución acumulada es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x 2x dx = x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Aplicando (2.21), se tiene

$$X = F_X^{-1}(U) = U^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leq u \leq 1.$$

Por lo tanto para generar una variable X de la f.d.p. (2.23) se genera de $U(0,1)$ y entonces se toma la raiz cuadrada de U.
Ejemplo 2. Generar una v.a. de la distribución uniforme $U(a,b)$, esto es,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La función de distribución acumulada es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{si } x > b \end{cases}$$

Y $X = F_X^{-1}(U) = a + (b-a)U$

Ejemplo 3. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) con distribución $F_X(x)$. Se define $Y_n = \text{máx}(X_1, ..., X_n)$ y $Y_1 = \text{mín}(X_1, ..., X_n)$. Generar Y_n y Y_1. Las distribucione de Y_n y Y_1 son, respectivamente,

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n$$

Y

$$F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n$$

Aplicando (2.21), se obtiene

$$Y_n = F_X^{-1}(U^{\frac{1}{n}})$$

Y

$$Y_1 = F_X^{-1}(1 - U^{\frac{1}{n}})$$

En el caso particular donde $X = U$ se tiene

$$Y_n = U^{\frac{1}{n}}$$

Y

$$Y_1 = 1 - U^{\frac{1}{n}}$$

Para aplicar este método $F_X(x)$ debe existir de forma que la trasformada inversa correspondiente pueda ser encontrada analíticamente. Distribuciones en este grupo son la exponencial, uniforme, Weibull, logística y Cauchy. Desafortunadamente, para muchas distribuciones de probabilidad es imposible o extremadamente difícil encontrar la transformada inversa, esto es, resolver,

$$U = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

con respecto a x.
Aún en el caso cuando F_X^{-1} existe en una forma explícita, el método de la transformada inversa no es necesariamente el método más eficiente para generar variables aleatorias.
Ejemplo 4. Generar una variable aleatoria a partir de la f.d.p. constante a trozos

$$f_X(x) = \begin{cases} C_i, & x_{i-1} \leq x \leq x_i; \quad i = 1, 2, ..., n \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

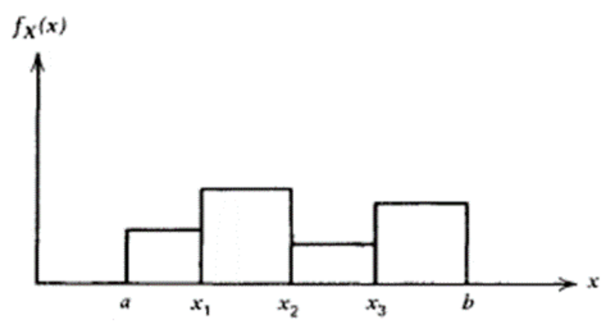


Figura 2.2: f.d.p. constante a trozos

Donde $C_i \geq 0$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Se denota $P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_X(x)dx$, $i = 1, ..., n$, y $F_i = \sum_{j=1}^{i} P_j$, $F_0 = 0$; entonces

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{i-1} P_j + \int_{x_i-1}^{x} C_i dx = F_{i-1} + C_i(x - x_{i-1})$$

Donde $i = \text{máx}_j\{j : x_{j-1} \leq x\}$
Ahora resolviendo $F_X(X) = U$ con respecto a X, se obtiene

$$X = x_{i-1} + \frac{U - F_{i-1}}{C_i}, \quad \text{donde } F_{i-1} \leq U < F_i$$

Para llevar a cabo el método:

1 Generar U de $U(0,1)$.

2 Encontrar i de $\sum_{j=1}^{i-1} P_j < U \leq \sum_{j=1}^{i} P_j, \quad i = 1, ..., n.$

3 $X \leftarrow x_{i-1} + \frac{U - \sum_{j=1}^{i-1} P_j}{C_i}$.

4 Obtener X.

2.3.2. Método de Composición

En esta técnica $f_X(x)$, la f.d.p de la distribución a simular, es expresada como una mezcla de funciones de densidad de probabilidad adecuadamente seleccionadas. Matemáticamente, sea $g(x|y)$ una familia de funciones de densidad de un parámetro, donde y es el parámetro que identifica a una única g(y). Si un valor de y es extraído de una función acumulativa continua $F_Y(y)$ y entonces si X es muestreado de $g(x)$ para ese y elegido, la función de densidad para X será

$$f_X(x) = \int g(x|y) dF_Y(y) \tag{2.24}$$

Si y es un parámetro entero, entonces

$$f_X(x) = \sum_i P_i g(x|y = i) \tag{2.25}$$

donde

$$\sum_i P_i = 1, \qquad P_i > 0;\ i = 1, 2, ...;\ P_i = P(y = i)$$

Utilizando esta técnica algunas distribuciones importantes pueden ser generadas. Esta técnica puede ser aplicada para generar distribuciones complejas a partir de distribuciones más simples que son a su vez fácilmente generadas por la técnica de la transformada inversa o por la técnica de aceptación-rechazo. Otra ventaja de esta técnica es que en ocasiones se puede encontrar una descomposición que asigne altas probabilidades P_i a funciones de densidad de las cuales el muestreo X no es costoso y asigna concomitantemente bajas probabilidades P_i a funciones de densidad de las cuales el muestreo X

es costoso.
Ejemplo 1. Generar una variable aleatoria de

$$f_X(x) = \frac{5}{6}[1 + (x-1)^4]. \quad 0 \le x \le 2$$

La cual se puede escribir como

$$f_X(x) = \frac{5}{6}f_1(x) + \frac{1}{6}f_2. \quad 0 \le x \le 2$$

donde

$$f_1(x) = \frac{1}{2}, \quad f_2(x) = \frac{5}{2}(x-1)^4, \quad 0 \le x \le 2$$

Por lo tanto

$$x = \begin{cases} 2u_2, & \text{si } u_1 < \frac{5}{6} \\ \\ 1 + \sqrt[5]{2u_2}, & \text{si } u_1 \ge \frac{5}{6} \end{cases}$$

Ejemplo 2. Generar una v.a. de

$$f_X(x) = n\int_1^\infty y^{-n}e^{-xy}dy$$

Sea

$$dF_Y(y) = \frac{n\ dy}{y^{n+1}}, \quad 1 < y < \infty;\ n \ge 1$$

Y $g(x|y) = ye^{-yx}$. Una variable es ahora extraída de la distribución $F_Y(y)$. Una vez que esta y es seleccionada, esta determina un particular $g(x) = ye^{-yx}$. La variable deseada de $f_X(x)$ es entonces simplemente una variable generada por $g(x) = ye^{-yx}$.
El método de composición se lleva acabo de la siguiente manera:

1. Generar U_1, U_2 de $U(0,1)$.
2. $Y \leftarrow U_1^{\frac{-1}{n}}$.
3. $X \leftarrow \frac{1}{Y}\ln U_2$.
4. Obtener X.

Ejemplo 3. Generar una variable aleatoria de

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i x^i, \quad 0 \le x \le 1$$

donde $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1,\ P_i \ge 0$.

2.3.3. Método de Aceptación-Rechazo

Este método se debe a Von Neumann y consiste en muestrear una variable aleatoria de una distribución apropiada y sometiéndola a una prueba para determinar si es aceptable o no para su uso.

Caso de una variable

Sea X generada a partir de $f_X(x),\ x \in I$. Para llevar a cabo el método representamos $f_X(x)$ como

$$f_X(x) = Ch(x)g(x) \tag{2.26}$$

donde $C \geq 1,\ h(x)$ es también una f.d.p., y $0 < g(x) \leq 1$. Entonces generamos dos variables aleatorias U y Y de $U(0,1)$ y $h(y)$, respectivamente, y se hace la prueba para ver si la desigualdad $U \leq g(Y)$ se mantiene o no:

1. Si la desigualdad se mantiene, entonces se acepta Y como variable generada por $f_X(x)$.

2. Si la desigualdad se rompe, se rechaza el par $U,\ Y$ y se intenta nuevamente.

La teoría detrás de este método está basada en lo siguiente.

Teorema 2.1. *Sea X una variable aleatoria distribuida con f.d.p. $f_X(x),\ x \in I$ la cual se representa como*

$$f_X(x) = Cg(x)h(x)$$

donde $C \geq 1,\ 0 < g(x) \leq 1$, y $h(x)$ es también una f.d.p. Sea U y Y distribuidas $U(0,1)$ y $h(y)$, respectivamente. Entonces

$$f_Y(x|U \leq g(Y)) = f_X(x) \tag{2.27}$$

Prueba. Por la fórmula de Bayes

$$f_Y(x|U \leq g(Y)) = \frac{P(U < g(Y)|Y = x)h(x)}{P(U \leq g(Y)} \tag{2.28}$$

Directamente se puede calcular

$$P(U \leq g(Y)|Y = x) = P(U \leq g(x)) = g(x) \tag{2.29}$$

$$
\begin{aligned}
P(U \leq g(Y)) &= \int P(U \leq g(Y|Y=x))h(x)dx \\
&= \int g(x)h(x)dx = \int \frac{f_X(x)}{C}dx = \frac{1}{C}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Al sustituir (2.29) y (2.30) en (2.28), se obtiene

$$f_Y(x|U \leq g(Y)) = Cg(x)h(x) = f_X(x)$$

Lo cual se quería demostrar.

La eficiencia del método de aceptación-rechazo está determinada por la desigualdad $U \leq g(Y)$. Dado que los ensayos son independientes, la probabilidad de éxito en cada ensayo es $p = \frac{1}{C}$. El número de ensayos N antes de que un éxito del par U, Y sea encontrado tiene una distribución geométrica:

$$P_N(n) = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.31}$$

Con el número esperado de ensayos igual a C.

El algoritmo AR-1 describe los pasos necesarios.
Algoritmo AR-1

1. Generar U de $U(0,1)$.
2. Generar Y de la f.d.p. $h(y)$.
3. Si $U \leq g(Y)$, tomar Y como la variable generada por $f_X(x)$.
4. Ir al paso 1.

Para que este método sea de interés práctico el siguiente criterio debe ser usado en la selección de $h(x)$.

1 Debería ser fácil de generar una v. a. de $h(x)$.

2 La eficiencia del procedimiento $\frac{1}{C}$ debería ser grande, esto es, C debería ser cercano a 1 (lo cual ocurre cuando $h(x)$ es similar a $f_X(x)$ en forma).

Para ilustrar este método se elige C tal que $f_X(x) \leq Ch(x)$ para todo $x \in I$, donde $C \geq 1$.

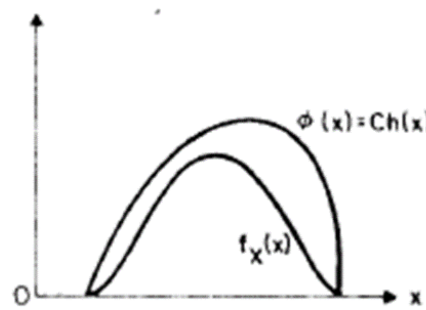


Figura 2.3: Ilustración del procedimiento de Von Neumann.

El problema entonces es encontrar una función $\phi(x) = Ch(x)$ tal que $\phi(x) \geq f_X(x)$ y una función $h(x) = \frac{\phi(x)}{C}$, de la cual las variables aleatorias pueda generarse fácilmente.
La máxima eficiencia se logra cuando $f_X(x) = \phi(x),\ \forall x \in I$. En este caso $\frac{1}{C} = C = 1,\ g(x) = 1$, y ya no es necesario el método de aceptación-rechazo porque $h(x) = f_X(x)$ (para generar una variable de $f_X(x)$ es lo mismo que de $h(x)$).
Hay un número infinito de formas de elegir $h(x)$ para satisfacer (2.26). Muchos documentos sobre la elección de $h(x)$ han sido escritos.
En el caso particular cuando $\phi(x) = M,\ a \leq x \leq b$, y

$$h(x) = \frac{1}{b-a} \tag{2.32}$$

Se obtiene de (2.26)

$$C = M(b-a) \tag{2.33}$$

$$g(x) = \frac{f_X(x)}{M}, \quad a \leq x \leq b \tag{2.34}$$

Von Neumann primero consideró el método de aceptación-rechazo para este caso particular, y su algoritmo puede describirse como sigue.

Algoritmo AR-2

1. Generar U_1 y U_2 de $U(0,1)$.
2. $Y \leftarrow a + U_2(b-a)$.
3. Si
$$U_1 \leq g(Y) = \frac{f_X(Y)}{M} = \frac{f_X[a+(b-a)U_2]}{M}$$
tomar Y como variable generada de $f_X(x)$.
4. Ir al paso 1.

Se considerarán ahora tres ejemplos. Los dos primeros son relacionados al algoritmo AR-2 y el tercero al algoritmo AR-1.

Ejemplo 1. Generar una variable aleatoria de

$$f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Aquí $M = 2,\ a = 0,\ b = 1$. Para aplicar el algoritmo AR-2:

1. Generar dos variables aleatorias uniformes U_1 y U_2 de $U(0,1)$.
2. Probar para ver si $U_1 \leq U_2^2$.
3. Si la desigualdad se cumple, se acepta U_2 como variable generada de $f_X(x)$.
4. Si la desigualdad no se cumple, se rechazan U_1 y U_2 y se repiten los pasos 1 a 3.

Ejemplo 2. Generar una variable aleatoria a partir de

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

Asumiendo $M = \frac{2}{\pi R}$; entonces el algoritmo AR-2 es como sigue:

1. Generar dos variables aleatorias uniformes U_1 y U_2 de $U(0,1)$.
2. Calcular $Y = (2U_2 - 1)R$.
3. Si $U_1 \leq \frac{f_X(Y)}{M}$, lo cual es equivalente a $(2U_2-1)^2 \leq 1 - U_1^2$, entonces se acepta $Y = (2U_2-1)R$ como la variable generada de $f_X(x)$.

4. Si la desigualdad no se cumple, se rechaza U_1 y U_2 y se repiten los pasos 1 a 3.

El número esperado de ensayos $C = \frac{4}{\pi}$ y la eficiencia $\frac{1}{C} = \frac{\pi}{4}$=0.785.
Ejemplo 3. Generar una variable aleatoria de

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1; \; x \geq 0$$

Para aplicar el método de aceptación-rechazo se usa la desigualdad

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leq \begin{cases} x^{\alpha-1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Lo cual es lo mismo que

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \leq \phi(x) = Ch(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Aquí

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(\frac{1}{\alpha}) + (\frac{1}{e})}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{(\frac{1}{e}) + (\frac{1}{\alpha})}, & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$C = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{e} \right)$$

Y se obtiene de (2.26)

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^{\alpha-1}, & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$$

Para generar una variable aleatoria de $f_X(x)$ se generan dos variables aleatorias U y Y de $U(0,1)$ y $h(y)$, respectivamente, y se aplica la regla de aceptación $U \leq g(Y)$.
Note que la variable aleatoria Y puede ser fácilmente generada por el método de la transformada inversa. Para aplicar el algoritmo AR-1:

1. Generar U de $U(0,1)$.

2. Generar Y de $h(y)$.
3. Si

$$U \leq \begin{cases} e^{-Y}, & \text{si } 0 \leq Y \leq 1 \\ Y^{\alpha-1}, & \text{si } 1 < Y < \infty \end{cases}$$

   Tomar Y como variable generada de $f_X(x)$.
4. Ir al paso 1

La probabilidad de éxito es

$$\frac{1}{C} = \frac{\alpha + e}{\alpha e \Gamma(\alpha)}$$

y el número medio de ensayos es

$$C = \frac{\alpha e \Gamma(\alpha)}{\alpha + e}$$

Supongase que $h(x)$ es conocida hasta el parámetro β, esto es, $h(x) = h(x, \beta)$. El óptimo β, que proporciona el mínimo para C, se logra mediante

$$\min_{\beta} \max_{X} \frac{f_X(x)}{h(x, \beta)} \tag{2.35}$$

2.4. Técnicas de Reducción de Varianza

[1] La reducción de la varianza puede ser vista como un medio para utilizar la información conocida sobre el problema. De hecho, si no se conoce nada sobre el problema, la reducción de la varianza no puede lograrse. En el otro extremo, esto es, si se tiene completo conocimiento, la varianza es igual a cero y no hay necesidad de simulación. La reducción de la varianza no se puede obtener de la nada, es simplemente una forma de no perder información. Una manera de obtener esta información es a través de una simulación directa del proceso. Los resultados de esta simulación se pueden entonces utilizar para definir técnicas de reducción de varianza que refinarán y mejorarán la eficiencia de una segunda simulación. Por lo tanto cuanto más se conoce acerca del problema, más eficaces son las técnicas de reducción de varianza que se pueden utilizar. Por lo tanto siempre es importante definir claramente lo que se conoce sobre el problema. El conocimiento de un proceso a ser simulado puede ser cualitativo, cuantitativo o ambos.

2.4.1. Muestreo por Importancia

Se considera el problema de estimar la integral múltiple

$$I = \int g(x)dx, \quad x \in D \subset R^n \tag{2.36}$$

Supongase que $g \in L^2(x)$ (en otras palabras, que $\int g^2(x)dx$ existe y por lo tanto, que I existe).
La idea básica de esta técnica consiste en centrar la distribución de los puntos de muestreo en las partes de la región D que son de mayor "importancia" en lugar de extenderlas uniformemente. Se puede representar la integral (2.36) como

$$I = \frac{g(x)}{f_X(x)} f_X(x)dx = E\left[\frac{g(X)}{f_X(X)}\right] \tag{2.37}$$

Aquí X es cualquier vector aleatorio con f.d.p. $f_X(x)$, tal que $f_X(x) > 0$ para cada $x \in D \subset R^n$. La función $f_X(x)$ es llamada la distribución de muestreo por importancia. Es obvio de (2.37) que $\zeta = \frac{g(X)}{f_X(X)}$ es un estimador insesgado de I, con la varianza

$$Var\zeta = \int \frac{g^2(x)}{f_X(x)} dx - I^2 \tag{2.38}$$

Con el fin de estimar la integral tomamos una muestra $X_1, ..., X_N$ de la f.d.p. $f_X(x)$ y sustituyendo estos valores en la fórmula de la media muestral

$$\theta_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{g(X_i)}{f_X(X_i)} \tag{2.39}$$

Ahora se muestra cómo elegir la distribución de la variable aleatoria X con el fin de minimizar la varianza de ζ, que es lo mismo que minimizar la varianza de θ_3.

Teorema 2.2. *El mínimo de $var\zeta$ es igual a*

$$var\zeta_0 = \left(\int |g(x)dx\right)^2 - I^2 \tag{2.40}$$

y ocurre cuando la variable aleatoria X es distribuida con f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{|g(x)|}{\int |g(x)|dx} \tag{2.41}$$

Prueba. La fórmula (2.40) resulta directamente si se sustituye (2.41) en (2.38). Con el fin de probar que $var\zeta_0 \leq var\zeta$ es suficiente probar que

$$\left(\int |g(x)|dx\right)^2 \leq \int \frac{g^2(x)}{f_X(x)}dx \tag{2.42}$$

lo cual puede obtenerse de la desigualdad Cauchy-Schwarz.
En efecto

$$\begin{aligned}\left(\int |g(x)|dx\right)^2 &= \left(\int \frac{|g(x)|}{[f_X(x)]^{\frac{1}{2}}}[f_X(x)]^{\frac{1}{2}}dx\right)^2 \\ &\leq \int \frac{g^2(x)}{f_X(x)}dx \int f_X(x)dx = \int \frac{g^2(x)}{f_X(x)}dx\end{aligned} \tag{2.43}$$

Lo cual se quería demostrar.

Corolario. Si $g(x) > 0$, entonces la f.d.p. óptima es

$$f_X(x) = \frac{g(x)}{I} \tag{2.44}$$

y $var\zeta = 0$. Este método es desafortunadamente inservible, ya que la densidad óptima contiene la integral $\int |g(x)|dx$, que es prácticamente equivalente a calcular I. En el caso donde $g(x)$ tiene signo constante es precisamente equivalente a calcular I. Pero si ya se conoce I, no son necesarios los métodos de Monte Carlo para estimarla.
Sin embargo, no todo está perdido. La varianza puede reducirse esencialmente si $f_X(x)$ es elegida de manera que tenga una forma similar a la de $|g(x)|$. Al elegir $f_X(x)$ de esa manera se debe tomar en consideración las dificultades de muestreo de esa f.d.p., especialmente si $|g(x)|$ no es una función con buen comportamiento. En la estimación de la integral, se puede ahorrar tiempo de CPU si la muestra $X_1, ..., X_N$ es tomada en la subregión $D' = \{x : g(x) \neq 0\}$ de D. Esto es lo mismo que definir

$$f_X(x) > 0, \text{ si } g(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad f_X(x) = 0, \text{ si } g(x) = 0 \tag{2.45}$$

Considerando el problema de elegir los parámetros de la distribución $f_X(x)$ de una mánera óptima. Se asume que la f.d.p. $f_X(x)$ está determinada hasta el vector de parámetros α, esto es, $f_X(x, \alpha)$. Por ejemplo, si $f_X(x)$ representa una distribución normal unidimensional, esto es, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces los parámetros desconocidos pueden ser el valor esperado μ y la varianza σ^2. Se quiere elegir el vector de parámetros α para minimizar la varianza de θ_3, esto es,

$$\min_{\alpha} var\left[\theta_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{g(X_i)}{f_X(x_i,\alpha)}\right] = \frac{1}{N}\min_{\alpha}\left[\int \frac{g^2(x)}{f_X(x,\alpha)}dx - I^2\right] \tag{2.46}$$

El último problema es equivalente a

$$\min_{\alpha}\int \frac{g^2(x)}{f_X(x,\alpha)}dx \tag{2.47}$$

Para la función

$$\int \frac{g^2(x)}{f_X(x,\alpha)}dx \tag{2.48}$$

generalmente es difícil de encontrar el óptimo α.

2.4.2. Muestreo Correlacionado

El muestreo correlacionado es una de las más poderosas técnicas de reducción de varianza. Frecuentemente, el objetivo primario de un estudio de simulación es determinar el efecto de un pequeño cambio en el sistema. El método Monte Carlo de muestra-media haría dos simulaciones independientes, con y sin el cambio en el sistema que está siendo simulado, y restar los resultados obtenidos. Desafortunadamente, la diferencia que se calcula es en ocasiones pequeña comparada con los resultados separados, mientras la varianza de la diferencia será la suma de las varianzas en las dos simulaciones, que usualmente es significativa. Si, en lugar de ser independientes, las dos simulaciones usan los mismos números aleatorios, los resultados pueden ser correlacionados muy positivamente, que proporciona una reducción en la varianza. Otra forma de ver el muestreo correlacionado mediante el control de números aleatorios es darse cuenta de que el uso de los mismos números aleatorios genera historias idénticas en aquellas partes de los dos sistemas que son iguales. Así el objetivo del muestreo correlacionado es producir una alta correlación positiva entre dos procesos similares de manera que la varianza de la diferencia sea considerablemente más pequeña de lo que sería si los dos procesos fueran estadísticamente independientes. Desafortunadamente, no hay un procedimiento general que puede ser implementado en el muestreo correlacionado. Sin embargo, en las siguientes dos situaciones el muestreo correlacionado puede ser exitosamente empleado.

1. El valor de un pequeño cambio en el sistema debe calcularse.
2. La diferencia en un parámetro en dos o más casos similares es de mayor interés que su valor absoluto.

Supongamos que se desea estimar

$$\triangle I = I_1 - I_2 \tag{2.49}$$

donde

$$I_1 = \int g_1(x) f_1(x) dx, \quad x \in D_1 \subset R^n \tag{2.50}$$

$$I_2 = \int g_2(x) f_2(x) dx, \quad x \in D_2 \subset R^n \tag{2.51}$$

Entonces el procedimiento para el muestreo correlacionado es como sigue:

1. Generar $X_1, ..., X_N$ de $f_1(x)$ y $Y_1, ..., Y_N$ de $f_2(x)$.
2. Estimar $\triangle I$ usando

$$\triangle\theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_1(X_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_2(Y_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \triangle_i \tag{2.52}$$

   donde

$$\triangle_i = g_1(X_1) - g_2(Y_1)$$

La varianza de $\triangle\theta$ es

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \tag{2.53}$$

donde

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_1(X_i) \tag{2.54}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_2(Y_i) \tag{2.55}$$

$$\sigma_1^2 = E(\hat{\theta}_1 - I_1)^2 \tag{2.56}$$

$$\sigma_2^2 = E(\hat{\theta}_2 - I_2)^2 \tag{2.57}$$

y

$$cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = E[(\hat{\theta}_1 - I_1)(\hat{\theta}_2 - I_2)] \tag{2.58}$$

Ahora, si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son estadísticamente independientes, entonces

$$cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0 \tag{2.59}$$

y

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{2.60}$$

Ahora bien, si las variables aleatorias X y Y son correlacionadas positivamente y si $g_1(x)$ es similar a $g_2(x)$ en forma, entonces las variables aleatorias $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ serán también correlacionadas positivamente, esto es, $cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) > 0$, y la varianza de $\triangle\theta$ puede reducirse en gran medida.
Por lo tanto la clave para reducir la varianza de $\triangle\theta$ es asegurar una correlación positiva entre las estimaciones de $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$. Esto se puede lograr de distintas maneras. La manera más fácil es obtener muestras correlacionadas a través del control de números aleatorios. Específicamente, esto puede lograrse usando la misma (común) secuencia de números aleatorios $U_1, ..., U_N$ en ambas simulaciones, esto es, las secuencias $X_1, ..., X_N$ y $Y_1, ..., Y_N$ son generadas usando $X_i = F_1^{-1}(U_i)$ y $Y_i = F_2^{-1}(U_i)$, respectivamente. Claramente, si f_X es similar a f_Y, las variables aleatorias X_i y Y_i serán altamente correlacionadas positivamente ya que ambas usaron los mismos números aleatorios.
Es difícil ser específico sobre cómo el control de números aleatorios debería ser aplicado generalmente. Como una regla, sin embargo, para lograr una máxima correlación deberían ser usados números aleatorios comunes siempre que las similitudes en la estructura del problema permitan esto.

2.4.3. Variables de Control

El uso de variables de control es otra técnica de reducción de varianza. En esta técnica, en lugar de estimar directamente un parámetro, se considera la diferencia entre el problema de interés y algún modelo analítico.
Una variable aleatoria C es una variable de control para Y si está correlacionada con Y y si su esperanza μ_C es conocida. La variable de control C

es usada para construir un estimador para μ que tenga una varianza más pequeña que el estimador Y. Para cualquier β

$$Y(\beta) = Y - \beta(C - \mu_C) \tag{2.61}$$

es un estimador insesgado de μ. Ahora

$$var[Y(\beta)] = var[Y] - 2\beta cov[Y, C] + \beta^2 var[C] \tag{2.62}$$

Por lo tanto si

$$2\beta cov[Y, C] > \beta^2 var[C]$$

se logra la reducción de la varianza. El valor de β que minimiza $var[Y(\beta)]$ es fácil de encontrarse como

$$\beta^* = \frac{cov[Y, C]}{var[C]}$$

Y la mínima varianza es igual a

$$var[Y(\beta^*)] = (1 - \rho_{YC}^2)var[Y] \tag{2.63}$$

Donde ρ_{YC} es el coeficiente de correlación entre Y y C. Por lo tanto entre más esté correlacionado C con Y, mayor será la reducción de varianza. Otro tipo de variable de control es una para la cual la media $E(C)$ es desconocida pero es igual a μ, esto eso, $E(C) = E(Y) = \mu$. Cualquier combinación lineal

$$Y(\beta) = \beta Y + (1 - \beta)C$$

es también un estimador insesgado de μ, y si Y y C están correlacionadas, se logra la reducción de varianza.
Ahora se extienden los resultados anteriores al caso de más de una variable de control. Sea $C = (C_1, ..., C_Q)$ un vector de Q variables de control, sea μ_C el vector medio conocido correspondiete a C, esto es, $\mu_C = (\mu_1, ..., \mu_Q)$, donde $\mu_q = E[C_q]$, y sea β cualquier vector. Entonces

$$Y(\beta) = Y - \beta^t(C - \mu_C) \tag{2.64}$$

es un estimador insesgado de μ. Aquí t es el operador de transposición. El vector β^* que minimiza $var[Y(\beta)]$ es

$$\beta^* = \sigma_{YC} \sum\nolimits_C^{-1} \tag{2.65}$$

donde $\sum_C$ es la matriz de covarianza de C y σ_{YC} es un vector Q-dimensional cuyos componentes son las covarianzas entre Y y $C_q{}'s$. La varianza mínima resultante es

$$var[Y(\beta^*)] = (1 - R^2_{YC})var[Y] \tag{2.66}$$

donde

$$R^2_{YC} = \frac{\sigma^t_{YC} \sum_C^{-1} \sigma_{YC}}{var[Y]} \tag{2.67}$$

Como antes entre mayor sea e coeficiente de correlación múltiple R^2_{YC} entre C y Y, mayor es la reducción de la varianza.
Nuevamente, si $Y_1, ..., Y_{Q+1}$ son $Q+1$ diferentes estimadores insesgados de μ desconocida, entonces

$$\sum_{i=1}^{Q+1} \beta_i Y_i \tag{2.68}$$

donde $\sum_{i=1}^{Q+1} \beta_i = 1$ es también un estimador insesgado de μ.
Para la aplicación práctica de variables de control hay dos problemas clave. Primero, se deben encontrar variables de control que estén altamente correlacionadas con los estimadores de interés. Segundo, dado que el vector σ_{YC} y la matriz $\sum_C$ en general son desconocidos, el vector de coeficientes óptimo β^* es desconocido y debe ser estimado.
Además, esta estimación debe ser incorporada en procedimientos estadísticos efectivos, y ahora centramos nuestra atención a estos problemas.
Sea $Y_k,\ k = 1, ..., K$ una muestra de $f_Y(y)$. Un estimador de μ es

$$\bar{Y} = \left(\frac{1}{K}\right) \sum_{k=1}^{K} Y_k$$

La varianza de $\bar{Y}$ es igual a

$$\sigma^2(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2(Y)}{K}$$

y es estimada por

$$\hat{\sigma}^2(\bar{Y}) = \frac{\hat{\sigma}^2(Y)}{K} = \left(\frac{1}{K(K-1)}\right) \sum_{k=1}^{K} (Y_k - \bar{Y})^2 \tag{2.69}$$

La variable aleatoria

$$\frac{(\bar{Y} - \mu)}{\hat{\sigma}(\bar{Y})}$$

tiene aproximadamente una distribución t con $K - 1$ grados de libertad. El intervalo de confianza puede ser encontrado de

$$prob\{\bar{Y} - t_{K-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}(\bar{Y}) \leq \mu \leq \bar{Y} + t_{K-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}(\bar{Y})\} \approx 1 - \alpha \quad (2.70)$$

Sea C_k el valor de C para la k-ésima ejecución. Entonces si el óptimo vector de coeficientes β^* se conociera, usaríamos el estimador

$$Y_k(\beta^*) = Y_k - \beta^{*t}(C_k - \mu_C) \quad (2.71)$$

Para la k-ésima replicación. El estimador basado en K sería

$$\bar{Y}(\beta^*) = \left(\frac{1}{K}\right)\sum_{k=1}^{K} Y_k(\beta^*)$$

y un intervalo de confianza podría obtenerse reemplazando $\bar{Y}$ y Y_k por $\bar{Y}(\beta^*)$ y $Y_k(\beta^*)$, respectivamente, en (2.69) y (2.70). En este caso (β^* conocido).

$$\frac{\sigma^2(\bar{Y}(\beta^*))}{\sigma^2(\bar{Y})} = 1 - R^2_{YC} \quad (2.72)$$

Y la reducción de varianza dada por (2.66) podría obtenerse. Además, el radio del ancho medio del intervalo de confianza sería proporcional al radio de las desviaciones estándar, y por lo tanto el ancho del intervalo de confianza se reduciría en aproximadamente $(1 - R^2_{YC})^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, en la práctica β^* es desconocido y por lo tanto debe ser estimado. Es estimado por la muestra de (2.65), esto es, por

$$\beta^* = \hat{\sigma}_{YC}\hat{\sum}_C^{-1} \quad (2.73)$$

donde $\hat{\sigma}_{YC}$ y $\hat{\sum}_C$ son el vector de covarianza muestral y la matriz de covarianza muestral cuyos elementos son dados por

$$(\hat{\sigma}_{YC})_q = \left(\frac{1}{K-1}\right)\sum_{k-1}^{K}(Y_k - \bar{Y})(C_{qk} - \bar{C}_q)$$

y

$$(\hat{\sum}_C)_{qr} = \left(\frac{1}{K-1}\right)\sum_{k-1}^{K}(C_{qk}-\bar{C}_q)(C_{rk}-\bar{C}_r)$$

donde C_{qk} es el q-ésimo elemento de C_k y $\bar{C}_q$ es el promedio de $C_{qk},\ k = 1, ..., K$. Sustituyendo $\hat{\beta}^*$ por β^* en (2.71), obtenemos

$$Y_k(\hat{\beta}^*) = Y_k - \hat{\beta}^{*t}(C_k - \mu_C)$$

y

$$\bar{Y}(\hat{\beta}^*) = \left(\frac{1}{K}\right)\sum_{k=1}^{K} Y_k(\hat{\beta}^*)$$

En general, $\bar{Y}(\hat{\beta}^*)$ es un estimador sesgado de μ dado que $\hat{\beta}^*$ y $\bar{C}$ son dependientes. También, los $Y_k(\hat{\beta}^*)$ son dependientes, así que no se puede usar directamente el estadístico t para obtener un intervalo de confianza para μ. Sin embargo, si se asume que $Z = \binom{Y}{C}$ tiene una distribución normal multivariada, entonces se muestra que $\bar{Y}(\beta^*)$ es un estimador insesgado de μ y

$$\frac{\bar{Y}(\hat{\beta}^*) - \mu}{\hat{\sigma}(\bar{Y}(\hat{\beta}^*))} \tag{2.74}$$

tiene una distribución t con $K - Q - 1$ grados de libertad. Por lo tanto un intervalo de confianza puede ser obtenido como

$$\begin{aligned} prob\{\bar{Y}(\hat{\beta}^*) - t_{K-Q-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}(\bar{Y}(\hat{\beta}^*)) \\ \leq \mu \leq \bar{Y}(\hat{\beta}^*) + t_{K-Q-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\sigma}(\bar{Y}(\hat{\beta}^*))\} = 1-\alpha \end{aligned} \tag{2.75}$$

Además, el cociente $\sigma^2(\bar{Z})(\bar{Y}(\hat{\beta}^*))/\sigma^2(\bar{Y})$ es dado por

$$\frac{\sigma^2(\bar{Y}(\hat{\beta}^*))}{\sigma^2(\bar{Y})} = \left(\frac{K-2}{K-Q-2}\right)(1-R^2_{YC}) \tag{2.76}$$

Se puede ver de (2.76) que existe una equivalencia entre $(K-2)/(K-Q-2)$ y $1 - R^2_{YC}$. En un extremo, si K no es grande con respecto a Q, el factor $(K-2)/(K-Q-2)$ puede anular la reducción potencial de la varianza. En el otro extremo se espera que el factor $1 - R^2_{YC}$ sea una función decreciente con respecto a Q. Sería interesante encontrar el óptimo Q como función de K

haciendo algunas suposiciones sobre R_{YC}. El mayor costo involucrado en la aplicación de variables de control es el esfuerzo requerido para desarrollar un conjunto razonable de variables de control. Esto requiere entender el modelo con suficiente detalle para definir posibles variables de control y estimadores de interés.

Solo hay pocos reportes publicados que describen la aplicación de variables de control para problemas prácticos. Sin embargo, a juzgar por ellos se espera que la reducción de la varianza en el rango 0.25 a 0.75 pudiera realizarse en situaciones prácticas. Ahora se considera cómo las variables de control pueden utilizarse para estimar la integral

$$I = E[g(X)] = \int g(x) f_X(x) dx \tag{2.77}$$

Sea $g_0(x)$ una función que aproxima bien $g(x)$ y sea la esperanza $E[g_0(x)]$ conocida. La función $g_0(x)$ es una variable de control para $g(x)$. Denotando $Y = g(x),\ C = g_0(x)$ y $\mu_C = \int g_0(x) f_X(x) dx$, se tiene para cualquier β

$$Y(\beta) = Y - \beta(C - \mu_C)$$

El cual es un estimador insesgado de la integral I. Tomando una muestra $X_1, ..., X_N$ de $f_X(x)$, se puede estimar la integral por

$$\theta_5 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [g(X_i) - \beta^* g_0(X_i)] + \beta^* \mu_C$$

donde β^* es el óptimo β, el cual minimiza $var[Y(\beta)]$. La eficiencia de este método depende de lo bien que $g_0(x)$ aproxime $g(x)$. Pero en ocasiones es difícil encontrar una $g_0(x)$ que aproxime a $g(x)$ lo suficientemente bien y tal que $E[g_0(x)]$ sea conocida. En muchos casos no se conoce una aproximación para $g(x)$. Esto puede ser superado simulando algunos valores de X (haciendo una prueba piloto) y trazando los resultados.

La extensión al caso de Q variables de control para calcular la integral I es como sigue. Sea $\phi(X) = [\phi_1(X), ..., \phi_Q(X)]$ un vector de variables de control, con vector medio μ_ϕ, esto es, $\mu_q = E[\phi_q(X)]$.

Entonces para cualquier vector β

$$Y(\beta) = g(X) - \beta(\phi(X) - \mu_\phi) \tag{2.78}$$

es un estimador insesgado de μ. Denotando $Y = g(X),\ \phi(X) = C,\ \mu_\phi = \mu_C$, se obtiene la fórmula (2.64).

2.4.4. Muestreo Estratificado(Muestreo Latino Hipercúbico)

Esta técnica es bien conocida en estadística. Para el muestreo estratificado se parte la región D en m subregiones disjuntas D_i. $i = 1, 2, ..., m$, esto es $D = \cup_{i=1}^{m} D_i, D_k \cap D_j = \emptyset,\ k \neq j$, donde $\emptyset$ es un conjunto vacío. Entonces se define

$$I_i = \int_{D_i} g(x) f_X(x) dx \tag{2.79}$$

Que puede ser estimada por separado mediante el método de Monte Carlo (por ejemplo, mediante la muestra-media Monte Carlo).
La idea de esta técnica es similar a la idea del muestreo por importancia: también se toman más observaciones (muestras) en las partes de la región D que son más "importantes", pero el efecto de reducir la varianza se logra al concentrar más muestras en las subregiones D_i más importantes, en lugar de elegir la f.d.p. óptima.
Se define

$$P_i = \int_{D_i} f_X(x) dx \tag{2.80}$$

Es claro que $\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$ y

$$I = \int_D g(x) f_X(x) dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} g(x) f_X(x) dx = \sum_{i=i}^{m} I_i \tag{2.81}$$

Introduciendo

$$g_i(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in D_i \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{2.82}$$

podemos reescribir la integral I_i como

$$I_i = \int_{D_i} P_i g(x) \frac{f_X(x)}{P_i} dx = P_i \int_D g_i(x) \frac{f_X(x)}{P_i} dx = P_i E[g_i(X)] \tag{2.83}$$

donde

$$\int_{D_i} \frac{f_X(x)}{P_i} dx = 1$$

En la medida en que I_i se expresa como un valor esperado, el estimador de muestra-media para I_i, puede escribirse como

$$Y_i = P_i g(X_i) \tag{2.84}$$

donde la v.a. X_i se distribuye de acuerdo a $f_X(x)/P_i$ en D_i.
La integral I_i puede ser estimada por

$$\tau_i = \frac{P_i}{N_i} \sum_{k_i=1}^{N_i} g(X_{k_i}), \quad k_i = 1, ..., N_i, \; i = 1, ..., m \tag{2.85}$$

y la integral I por

$$\theta_6 = \sum_{i=1}^{m} \tau_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i}{N_i} \sum_{k_i}^{N_i} g(X_{k_i}) \tag{2.86}$$

Fácilmente se puede verificar que

$$var\theta_6 = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i^2}{N_i} var \; g(X_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i^2 \sigma_i^2}{N_i} \tag{2.87}$$

donde

$$\sigma_i^2 = var \; g(X_i) = \frac{1}{P_i} \int_{D_i} g^2(x) f_X(x) dx - \frac{I_i^2}{P_i^2}$$

Si la estratificación se lleva a cabo correctamente, la varianza de θ_6 puede ser menor que la varianza del método de muestra-media θ_4 con $\sum_{i=1}^{m} N_i = N$.
Una vez que las subregiones $D_1, ..., D_m$ son seleccionadas, el siguiente requisito es definir el número de muestras a asignar a cada intervalo. Más específicamente, sea N_i el número de muestras asignadas a la subregión D_i donde

$$\sum_{i=1}^{m} N_i = N \tag{2.88}$$

El siguiente teorema dice cómo estratificar de una manera óptima.

Teorema 2.3. *Para una partición dada* $D = \cup_{i=1}^{m} D_i$

$$min \left(var\theta_6 = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i^2}{N_i} \sigma_i^2 \right) \tag{2.89}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{m} N_i = N$$

ocurre cuando

$$N_i = N\frac{P_i\sigma_i}{\sum_{j=1}^{m} P_j\sigma_j} \tag{2.90}$$

y es igual a

$$\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{m} P_i\sigma_i\right]^2 \tag{2.91}$$

Por lo tanto cuando se prescriben las regiones de estratificación, la mínima varianza de θ_6 se produce cuando los N_i son proporcionales a $P_i\sigma_i$.
Este teorema no tiene una aplicación directa importante porque los valores de σ_i usualmente son desconocidos.
Una sugerencia práctica es hacer una pequeña prueba "piloto" para obtener estimaciones aproximadas para σ_i. Dichas estimaciones serían de ayuda para determinar el óptimo N_i, con el equilibrio adecuado entre el costo del muestreo y el grado de precisión deseado.
Elegimos $N_i = P_iN$ (asumiendo que P_i se puede calcuar analíticamente).

Proposición. $var\theta_6 \leq var\theta_4$, esto es, si el tamaño de muestra N_i en cada subregión D_i es proporcional a P_i (es decir, si $N_i = NP_i$), entonces la varianza del método de muestreo estratificado será menor o igual a la varianza del método de muestra-media.

Prueba. Sustituyedo $N_i = NP_i$ en(2.87), obtenemos

$$var\theta_6 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} P_i var\ g(X_i) \tag{2.92}$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$I^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} I_1\right)^2 = \left[\sum_{i=1}^{m}\frac{I_i}{\sqrt{P_i}}\sqrt{P_i}\right]^2 \tag{2.93}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\frac{I_i^2}{P_i}\sum_{i=1}^{m} P_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{I_i^2}{P_i}$$

Multiplicando (2.87) por P_i y sumando sobre i de 1 hasta m, obteniendo

$$\sum_{i=1}^{m} P_i var\ g(X_i) = \int_D g^2(x)f_X(x)dx - \sum_{i=1}^{m}\frac{I_i^2}{P_i} \tag{2.94}$$

que junto con (2.93) pueden escribirse como

$$\sum_{i=1}^{m} P_i var\ g(X_i) \leq \int_D g^2(x) f_X(x)dx - I^2 = N var\theta_4 \tag{2.95}$$

Comparando (2.92) y (2.95), inmediatamente se tiene la prueba de esta proposición. Lo cual se quería demostrar.
En otras palabras la proposición dice: no hay una función $g(x) \in L_2(D_i, f)$ tal que el método de muestreo estratificado sea peor que el método de muestra-media mientras se elija $N_i = P_i N$. Por supuesto, si la última suposición no se cumple, el muestreo estratificado podría ser peor que el método de muestra-media.
Se puede probar que la eficiencia del muestreo estratificado en comparación con el método de muestra-media es aproximadamente m^2. En el caso particular cuando $P_i = 1/m$ y $N_i = N/m$, se obtiene el denominado método de muestreo sistemático.
El procedimiento para el muestreo sistemático es como sigue:

1. Dividir el rango [0,1] de la distribución acumulativa en m intervalos cada uno de ancho $1/m$.
2. Generar $\{U_{k_i},\ k_i = 1, ..., \frac{N}{m};\ i = 1, ..., m\}$ de $U(0,1)$.
3. $Y_{k_i} \leftarrow \frac{i-1+U_{k_i}}{m};\ k_i = 1, ..., \frac{N}{m};\ i = 1, ..., m.$
4. $X_{k_i} \leftarrow F^{-1}(Y_{k_i})$.

El estimador de la integral I es

$$\theta_6 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N/m} [g(X_{k_i})]$$

y la varianza muestral es

$$S^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \theta_k - \theta_6 \right)^2$$

donde $\theta_k = (1/m) \sum_{i=1}^{m} g(X_{k_i})$.

Capítulo 3

Marco Referencial

3.1. Sistemas Actuales en el Mundo

[13] A pesar de la diferencia de la legislación entre cada país, existen tres tipos de sistemas de pensiones en el mundo: de reparto, de capitalización individual y mixto.

Capitalización individual:

Este sistema, que existe actualmente en México, funciona mediante el ahorro individual de cada afiliado, en donde mes a mes los afiliados ponen parte de su sueldo en cuentas individuales que luego se invierten en la bolsa para que ganen rentabilidad. De esta forma la pensión depende del monto que se haya aportado durante el tiempo laboral y la rentabilidad del ahorro acumulado, que son administradas por instituciones como las AFP(Administradoras de fondos para pensiones). Este sistema es el que rige para Perú y Australia. En el caso de Perú gracias a una reforma, los pensionados pueden retirar hasta 95.5 % de los fondos de AFP. Además, existen dos sistemas de protección social, uno de carácter público (Sistema Nacional de Pensiones, SNP) y el otro privado (Sistema Privado de Pensiones, SPP).

Reparto:

Este sistema se usa en Dinamarca y Estados Unidos. Este sistema ha funcionado de forma exitosa en Dinamarca, proporcionando altos montos de pensiones, debido a los altos impuestos cobrados a los trabajadores activos. En este sistema, la pensión se recibe después de cotizar 40 años, teniendo como edad mínima para retiro 67 años.

Mixto:

El sistema mixto, también llamado sistema de tripartito. Es una combinación del aporte del estado con ahorros individuales en una institución privada, según se haya convenido con la institución empleadora. El país más destacado en este sistema es Nueva Zelanda, y busca jubilar a todas las personas en edad de retiro a través de impuestos pagados por la población activa y un sistema de ahorro voluntario por parte del estado como complemento. Mediante el financiamiento de la empresa y los empleados. El sistema de pensiones de Nueva Zelanda difiere con el de otros países en que el monto ahorrado durante la etapa laboral no se entrega mensualmente, sino que recibe un único monto cuando llega a la edad de retiro a los 65 años, existe la posibilidad de que retire estos ahorros de manera anticipada, por motivos de dificultades económicas o tener que pagar una enfermedad considerada grave. Suiza es otro de los países con sistema de triparto, en este país se vuelve obligatorio realizar cotizaciones para personas de 20 años en adelante, las contribuciones realizadas son divididas entre la empresa y el trabajador en partes iguales. También existen planes para retiro privados, donde las contribuciones se deducen de impuestos, y el monto a percibir depende del tipo de póliza contratada. Para la pensión pública, el monto de la pensión se obtiene según los ingresos y el tiempo de vida laboral en el sistema.

3.2. Futuro para los Sistemas de Pensiones

[13] Los problemas financieros en las pensiones del mundo no solo son para los sistemas de Reparto sino también se prevén según la OCDE problemas para los sistemas de capitalización y privados, por lo que se han hecho reformas en diferentes países.

El problema que enfrentan los sistemas se refiere a lo ya mencionado anteriormente, que trata sobre el aumento en los años de vida en las personas, y aún no se esta ahorrando lo suficiente para cubrir las necesidades de las personas en la vejez a un mayor plazo.

Estados Unidos cuenta con un sistema de pensiones que solo cubre a las personas con gran necesidad. Si otros individuos con diferente posición económica desean tener una pensión es el mismo individuo que debe hacerse cargo de aportaciones propias a sistemas de pensiones privadas. La situación para Canadá es similar. Los países en América con modelo de capitalización son México, Perú, Costa Rica, Uruguay y Republica Dominicana, con algunas variaciones, en Brasil el sistema de Capitalización es voluntario.

Países de Europa como España, Italia y Portugal tienen un sistema de reparto que depende del sector público y pueden ser complementados con planes de pensiones privados.

El informe de la OCDE de 2015 en su cuadro “Pensions at a Glance 2015” muestra como la mayoría de los países experimentarán en los próximos años un gran aumento en gasto público por pensiones de envejecimiento.

3.3. Países con Mejores Sistemas de Pensiones en el Mundo.

Según reportes de la OCDE los países con mejores sistemas de pensiones son Holanda, Suiza, Australia, Dinamarca y Suecia.

Dinamarca.
Como ya se había mencionado antes, el sistema en este país es muy eficiente, en realidad se considera como el más eficiente de los sistemas en el mundo. Basado en pensiones publicas complementadas con privadas. La parte de pensión publica otorga hasta un 17 % del salario y el resto de la pensión es por parte de instituciones privadas con contribuciones obligatorias y voluntarias de los trabajadores.

Holanda.
El sistema de pensiones en Holanda se compone de dos partes. La primera es pensión publica equivalente al salario mínimo en el país. La segunda es por medio de aportaciones voluntarias a instituciones privadas. La pensión es prácticamente para todos los trabajadores una vez teniendo la edad de 65 años, teniendo una reforma para el 2021, con edad de retiro de 67 años. Además de que esta reforma aprobada, ajustará las edades de retiro según los cambios en la esperanza de vida. Los holandeses cuentan con el menor porcentaje en todo el mundo de población en la tercera edad por debajo del límite de pobreza.
Australia.
Como se había mencionado anteriormente, en Australia se cuenta con un sistema de Capitalización con un porcentaje de cotización del 9 % obligatoria de su sueldo. Adicional a las aportaciones voluntarias de los empleados y del fondo otorgado por el Estado. De esta forma se asegura que los montos de las jubilaciones no estén muy por debajo del que habrían recibido con el sistema anterior. Sus pensiones promedio equivalen a $20,000 mexicanos.

Suiza.

Las pensiones suizas dependen de tres aspectos; del estado, fondos de las empresas y fondos privados. Las pensiones básicas estatales son obligatorias para mayores de 20 años a pesar de que trabajen de forma independiente o estén desempleados. La edad de pensión es de 65 años para los hombres y de 64 años para las mujeres con una contribución mínima de un año. El monto de la pensión se obtiene mediante el promedio de los ingresos y los años de contribución en el sistema. La pensión se recibe cuando la persona cumpla la edad de retiro y que haya contribuido al sistema la misma cantidad de años que otros que nacieron en el mismo año. Existen formas de obtener la pensión anticipadamente pero con una disminución del 3.4 % y un 6.8 % por cada año, por el contrario si esperas entre 1 y 5 años más que los requeridos para jubilación, la pensión aumenta entre un 5.2 y un 31.5 %.

El segundo aspecto, es decir, las pensiones de las empresas son la base del sistema, donde la gran mayoría de los empleados están obligados contribuir a este plan. Puede ser mediante la empresa u otra institución privada. Los montos de las contribuciones van aumentando con la edad. Esta pensión se puede obtener a partir de los 65 años para los hombres y de los 63 para las mujeres, con derecho a la pensión si se ha contribuido continuamente desde la edad de 25 años. El tercer y último aspecto es mediante un deducible de las contribuciones en el impuesto sobre la renta.

Suecia.

El sistema de pensiones de Suecia es mediante cuentas individuales, cada individuo recibe una pensión según lo que haya cotizado durante su tiempo laboral. Haciendo una combinación de pensiones públicas con privadas, donde una parte de los montos cotizados es para pagar la pensiones y la otra parte es la aportación del ahorro individual. El monto de las pensiones se obtiene dependiendo el saldo acumulado en su cuenta individual, producto de las cotizaciones y de los rendimientos que se hayan generado en la cuenta hasta el periodo de jubilación. De esta forma las personas pueden jubilarse a la edad que deseen, según los ahorros y rendimientos de su cuenta. El modelo de pensiones en Suecia se basa en garantizar una pensión mínima a mayores de 65 años, a pesar de no haber alcanzado el mínimo con sus cotizaciones. Para completar lo que falta en estos casos se tiene la aportación del Estado. Al sistema de contribuciones definidas los empleados aportan el 7 % de su salario bruto a su ahorro individual, la empresa aporta el 10 % del salario bruto y el resto de los aportes los realiza el estado. Teniendo un total del 18.5 % . De este porcentaje, el estado deposita el 16 % en fondos de reserva públicos de pensiones y el 2.5 % en las pensiones individuales.

3.4. Tasa de Reemplazo

La Tasa de Reemplazo muestra el nivel de las pensiones en retiro en comparación con el ingreso del trabajo.

La OCDE, en su reporte “Pensions at a Glance, 2015” reporta las tasas de reemplazo en los diferentes países del mundo, teniendo como mejor tasa reemplazo a Dinamarca y con más bajo nivel de tasa de reemplazo a Indonesia, en la tabla 3.1 México muestra una TR neta sobre el ingreso promedio de toda la vida laboral para un trabajador hombre que gana en el promedio de la distribución de ingresos de su país de 21.7 % (54.8 puntos por debajo del promedio de OCDE).

	Indicador		tasa neta de pensiones de reemplazo, masculino, 0,50 de AW	tasa neta de pensiones de reemplazo, masculino, 1,00 de AW	tasa neta de pensiones de reemplazo, masculino, 1,50 de AW	tasa de reemplazo pensión neta, Mujer, 0,50 de AW	tasa de reemplazo pensión neta, Mujer, 1,00 de AW	tasa de reemplazo pensión neta, Mujer, 1,50 de AW
			Porcentaje	Porcentaje	Porcentaje	Porcentaje	Porcentaje	Porcentaje
	Undiad							
	Country		103.2	66.4	57.2	103.2	66.4	57.2
1	Denmark		105.9	76.4	76.4	105.9	58.1	58.1
2	Las economías no OCDE							
3								
4	Netherlands		102.2	80.5	73.6	94	75	69
5	Las economías no OCDE	China (People's Republic of)	98.4	88.6	83.7	98.4	88.6	83.7
6	Luxembourg		85.7	68.8	50.3	77.4	61.9	45.2
7	Israel		90.5	76.7	76.3	90.5	76.7	76.3
8	Iceland		89.1	89.5	89.3	89.1	89.5	89.3
9	Spain		96.4	87.5	80.8	104	87.3	78.4
10	Las economías no OCDE	Argentina	80.8	43	30.4	80.8	43	30.4
11	New Zealand		82.9	72.9	73.3	82.9	72.9	73.3
12	Greece		88.6	58	45.9	84.6	53.4	40.9
13	Australia		93.1	63.8	51.9	93.1	63.8	51.9
14	Czech Republic		92.1	91.6	88.9	92.1	91.6	88.9
15	Austria		98	104.8	109.9	98	104.8	109.9
16	Turkey		86.4	86.4	86.4	73.7	73.7	73.7
17	Las economías no OCDE	Russia	87.7	89.5	88.4	87.7	89.5	88.4
18	Portugal		84	80.6	79.4	84	80.6	79.4
19	Slovak Republic		80.7	70.9	66.4	80.4	70.7	66.2
20	European Union (28 countries)		70.1	42.2	32.5	70.1	42.2	32.5
21	Ireland		82.2	79.7	81.6	82.2	79.7	81.6
22	Italy		74.1	63.2	58.5	73.7	62.7	58
23	OCDE - Promedio		80.1	60.2	48.6	80.1	60.2	48.6
24	Norway		76.1	59.8	53.5	76.1	59.8	53.5
25	Estonia		65.4	65.4	65.4	65.4	65.4	65.4
26	Las economías no OCDE	Saudi Arabia	89.6	89.6	89.6	89.6	89.6	89.6
27	Hungary		64.3	45	34.4	64.3	45	34.4
28	Korea		66.9	67.7	62	66.9	67.7	62
29	France		56.7	55.8	70.1	56.7	55.8	70.1
30	Sweden		66.6	63.5	65	66.6	63.5	65
31	Finland		61.4	46.9	31.5	60.7	46.5	31.2
32	Switzerland		58.5	47.9	34.1	58.5	47.9	34.1
33	Canada		53.3	40.4	35.5	53.3	40.4	35.5
34	Japan		64.2	60.9	49.1	64.2	60.9	49.1
35	Belgium		57.6	57.4	55.1	60.6	60.4	57.6
36	Slovenia		54.3	44.8	38.9	54.3	44.8	38.9
37	United States		51.7	28.5	20.3	51.7	28.5	20.3
38	United Kingdom		54	52.8	52.4	54	52.8	52.4
39	Poland		48.7	37.7	38	45.3	33.1	33.4
40	Chile		53.4	50	49	53.4	50	49
41	Germany		35.5	28.4	28.1	35.5	26.2	26
42	Mexico		21.7	11.8	8.3	21.7	11.8	8.3
43	Las economías no OCDE	South Africa	13.8	13.8	13.9	12.5	12.5	12.6
44	Las economías no OCDE	Indonesia						

Figura 3.1: Tasa de reemplazo OCDE 2015.

Capítulo 4

Caso de Estudio

4.1. Datos Históricos de Afiliados al IMSS y Pensionados.

El Instituto Mexicano del Seguro Social a través de su pagina oficial tiene disponibles las bases de datos de las personas afiliadas al IMSS desde el año 2000 hasta el año 2016, las bases de datos son actualizadas mensualmente. Los datos con los que se cuenta en las bases son: edad, rango salarial, entidad federativa, patrón, sector económico y sexo, entre otros subgrupos. Las edades están definidas en 14 niveles:

	Notación
Menores de 15 años de edad.	E1
Mayor o igual a 15 y menor a 20 años de edad.	E2
Mayor o igual a 20 y menor a 25 años de edad.	E3
Mayor o igual a 25 y menor a 30 años de edad.	E4
Mayor o igual a 30 y menor a 35 años de edad.	E5
Mayor o igual a 35 y menor a 40 años de edad.	E6
Mayor o igual a 40 y menor a 45 años de edad.	E7
Mayor o igual a 45 y menor a 50 años de edad.	E8
Mayor o igual a 50 y menor a 55 años de edad.	E9
Mayor o igual a 55 y menor a 60 años de edad.	E10
Mayor o igual a 60 y menor a 65 años de edad.	E11
Mayor o igual a 65 y menor a 70 años de edad.	E12
Mayor o igual a 70 y menor a 75 años de edad.	E13
75 o más años de edad.	E14

Figura 4.1: Notación de rangos de edad.

Los rangos salariales son 25, que van desde 1 salario mínimo hasta 25 salarios mínimos de cotización. En la base de datos están incluidas las personas afiliadas al IMSS que están cotizando y las afiliadas que no cotizan como los estudiantes, hijos, esposas u otros dependientes de los afiliados.

La siguiente imagen nos muestra la forma en la que se dividen los datos :

Ejemplo del archivo

tamaño_patron	sexo	rango_edad	rango_salarial	asegurados	no_trabajadores	ta
S2	1	E6	W25	1	0	1
S2	1	E6	W5	1	0	1
S2	1	E7	W3	1	0	1
S2	1	E8	W2	1	0	1
S2	1	E8	W5	1	0	1
S2	1	E9	W5	1	0	1
S2	2	E2	W3	1	0	1
S2	2	E3	W2	1	0	1
S2	2	E3	W4	2	0	2
S2	2	E3	W5	1	0	1
S2	2	E4	W4	1	0	1
S2	2	E4	W7	1	0	1
S2	2	E5	W3	1	0	1
S2	2	E5	W4	1	0	1
S2	2	E5	W5	1	0	1
S2	2	E6	W8	1	0	1
S3	1	E10	W3	1	0	1
S3	1	E10	W5	2	0	2
S3	1	E11	W4	1	0	1
S3	1	E14	W3	1	0	1
S3	1	E3	W2	2	0	2
S3	1	E3	W3	3	0	3
S3	1	E3	W4	4	0	4
S3	1	E3	W5	2	0	2
S3	1	E4	W2	1	0	1
S3	1	E4	W3	4	0	4
S3	1	E4	W4	3	0	3
S3	1	E4	W6	1	0	1
S3	1	E4	W7	1	0	1
S3	1	E5	W15	1	0	1
S3	1	E5	W2	4	0	4
S3	1	E5	W3	5	0	5
S3	1	E5	W4	3	0	3
S3	1	E5	W5	5	0	5
S3	1	E5	W6	4	0	4
S3	1	E6	W11	1	0	1
S3	1	E6	W2	3	0	3

Figura 4.2: Ejemplo de base de datos.

Nota: la variable “ta” se refiere a los trabajadores asegurados y “no_trabajadores” a asegurados no trabajadores.

Como los grupos de edades que aparecen son por periodos quinquenales, es decir, no se tiene un dato exacto de cuántas personas hay por cada edad, sino de las que hay en un rango de 5 edades, se toman bases de datos de cada 5 años a partir del año 2001 hasta el 2016, teniendo como muestra el mes de abril de cada uno de los quinquenios.

Para ajustar la base de datos a las necesidades de la investigación se filtran y se eliminan los datos de las personas aseguradas al IMSS que no cotizan, posteriormente se ordenan los datos en diferentes bases según sus características de la siguiente forma:

$$\bigcup_{i=1}^{14} E_i \bigcup_{j=1}^{25} W_j$$

Una vez teniendo los datos ordenados, se suma cada uno de los datos de las personas con la misma edad y mismo salario E_iW_j, para realizar una matriz con las sumas de los valores para cada uno de los años de la muestra:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	1028	117253	220474	225073	192045	164819	132460	104444	78328	59857	20358	12752	6394	5462
W2	1739	464595	805186	673858	510998	409033	309507	229751	161609	115676	40274	21811	9757	6946
W3	363	190981	536592	492699	351236	255330	177691	122198	79503	53130	17468	8531	3333	2217
W4	64	39090	247457	313417	241489	170623	115365	74968	47329	30379	9772	4342	1555	1086
W5	29	10765	116476	196034	164639	123552	87712	57664	34357	20169	6089	2709	904	592
W6	16	3684	60001	127154	114317	87719	63716	43422	25902	14552	4122	1603	557	357
W7	7	1342	30584	82184	81762	65102	48242	31896	17974	9668	2802	1113	359	193
W8	4	593	17443	55894	60291	51108	39041	25320	14498	7557	2099	817	265	238
W9	2	326	10877	40724	42497	36318	30555	21166	11570	5706	1624	638	224	114
W10	4	170	7682	31503	33612	27614	22133	15075	8298	4207	1182	446	148	124
W11	3	117	4979	23620	26323	22427	17661	11754	6354	3392	986	364	141	99
W12	1	77	3643	18845	20979	17946	15298	10963	5478	2694	750	290	97	72
W13	0	60	2650	15499	18346	15789	12797	8934	4950	2492	696	282	93	64
W14	1	28	1853	12282	15495	14236	12000	8184	4156	2062	602	234	77	51
W15	1	15	1295	9796	12652	13963	15007	9372	4111	1734	516	186	59	35
W16	1	10	1010	8096	10235	9797	10353	10492	5219	1978	472	197	58	46
W17	0	11	760	7052	9048	8200	7336	6357	4505	2305	560	147	64	24
W18	0	17	596	5934	7672	7062	6081	4889	2976	1445	412	149	48	40
W19	2	7	439	4783	6471	5787	5215	3833	2062	1075	354	124	46	31
W20	0	6	335	3843	5531	4987	4253	3472	1816	905	255	106	40	18
W21	0	8	261	3116	4827	4590	3861	3106	1836	871	279	81	34	13
W22	1	9	233	2727	4361	4265	3629	2856	1680	834	262	96	40	23
W23	0	4	165	2332	3854	3701	3259	2512	1492	638	196	73	27	19
W24	0	7	178	2196	4208	4011	3505	2641	1610	920	257	115	44	32
W25	3	27	827	14024	34866	39086	34919	26579	16954	8861	2766	1230	411	276
SUMA	3269	829202	2071996	2372685	1977754	1567065	1181596	841848	544567	353107	115153	58436	24775	18172

Figura 4.3: Afiliados al IMSS abril 2001

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	82	18775	47879	49464	49181	44031	38844	31735	25999	19687	9249	3744	1977	1686
W2	726	301227	838492	729288	643443	526177	423586	318925	234802	165036	78510	28051	12197	8756
W3	240	122282	574232	565099	472052	361540	270002	187065	126908	83178	39459	13608	5549	3526
W4	47	22784	243733	360325	324031	246944	179291	122967	80832	49912	23557	7868	3000	1837
W5	18	5201	104717	217609	211127	167946	125548	86271	55071	33747	15212	5160	2285	1941
W6	14	1814	52395	143193	148380	118370	88845	63916	40522	23276	9621	2975	1001	599
W7	1	664	26633	89766	99562	83495	63698	44520	26899	14818	6031	1677	510	299
W8	1	281	14522	64370	78148	68086	54104	40192	24131	13348	5108	1348	451	242
W9	2	136	8415	41845	53663	47540	38509	30196	17468	8971	3462	1005	324	198
W10	1	87	5577	30614	41522	36303	29199	22573	13317	6830	2631	823	240	131
W11	2	52	3590	23596	33705	29909	23927	17821	10459	5666	2241	709	210	119
W12	3	34	2181	17817	27136	24231	19830	15701	9454	4639	1810	509	157	100
W13	2	12	1593	13654	22003	19669	15458	12278	7737	3934	1519	461	117	91
W14	0	12	950	10448	18228	16832	13078	10127	6174	3171	1194	326	102	50
W15	0	15	779	8616	16085	16494	14981	12919	7238	3020	1129	334	106	47
W16	0	13	578	6782	13100	13304	13036	13252	8131	3266	1002	289	69	43
W17	0	9	369	5215	10903	10789	9732	8981	8086	3898	1125	264	76	38
W18	0	12	307	4353	9330	9329	8221	7119	4890	2326	794	223	73	27
W19	0	8	219	3490	7790	7882	6688	5590	4017	1865	669	172	70	31
W20	0	0	159	2859	6839	6593	5518	4700	3324	1596	627	164	55	47
W21	0	4	117	2281	5785	5799	4789	4070	2960	1383	562	138	44	42
W22	1	2	114	1936	4892	5280	4610	3795	2755	1407	523	150	46	22
W23	0	4	83	1493	4420	4597	4115	3407	2456	1314	498	136	40	26
W24	0	1	60	1277	3906	4131	3634	3106	2158	1218	505	185	41	40
W25	3	24	417	8862	36452	49420	45077	36922	25433	13836	5837	1762	540	359
SUMA	1143	473453	1928111	2404252	2341683	1924691	1504320	1108148	751221	471342	212875	72081	29280	20297

Figura 4.4: Afiliados al IMSS abril 2006

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	50	11266	36420	39882	36984	37420	33349	28426	23243	19063	8806	3316	1468	1198
W2	398	238359	924728	863375	735409	685979	563422	441723	322616	230467	108232	41378	14256	9249
W3	122	77935	538570	558184	463185	411028	324297	237918	159050	105013	46974	14865	5404	3175
W4	41	14214	227035	353361	308754	268421	204894	146281	97364	63883	28766	8642	2867	1585
W5	16	3295	99161	219759	206401	180312	135941	95868	62455	39758	17495	5021	1610	897
W6	17	1193	49542	154884	159402	145323	114915	85686	57678	36190	16641	5588	2429	2359
W7	7	495	26897	103015	110801	98928	77610	55233	36066	21889	9026	2456	760	411
W8	7	210	15010	74132	85137	75365	60721	46245	30081	17105	6595	1634	485	257
W9	5	111	8787	50031	62908	59751	49937	37738	24501	14430	5810	1468	428	201
W10	1	73	5466	35881	47082	44495	37219	29239	19572	10732	3988	1060	305	153
W11	0	37	3534	25751	37158	35486	29425	21495	14211	8207	3175	908	235	121
W12	3	28	2453	20527	29722	30176	25614	18878	12218	7050	2684	755	235	123
W13	0	19	1610	15820	24565	24951	20755	16834	11267	6366	2237	622	182	87
W14	0	15	1032	11518	20194	20123	16420	12788	8808	4911	1889	504	150	60
W15	2	18	757	9505	17653	19168	15852	12139	8235	4980	1843	473	142	76
W16	1	8	533	7666	14206	16710	15580	13047	8636	4467	1528	367	96	54
W17	0	6	412	5919	11268	12913	11841	11638	9388	5014	1407	310	83	42
W18	0	2	267	4476	9429	11032	9803	8606	9018	5677	1748	357	76	46
W19	1	3	232	3728	8201	9707	8444	7362	6049	3727	1231	300	66	40
W20	0	4	157	2993	6801	8251	7061	5753	4621	2646	982	217	71	50
W21	0	1	160	2531	5960	7586	6498	5521	4202	2493	943	226	63	29
W22	0	1	75	1951	4923	6580	6108	5388	4285	2700	1004	259	71	55
W23	0	0	78	1550	4196	5499	5234	4549	3519	2112	894	258	68	40
W24	0	1	39	1276	3548	4851	4453	3830	2972	1728	691	192	43	23
W25	1	12	612	9461	32948	55153	57215	47427	36110	22211	9496	2641	764	423
SUMA	672	347306	1943567	2577176	2446835	2275208	1842608	1399612	976165	642819	284085	93817	32357	20754

Figura 4.5: Afiliados al IMSS abril 2011

2016	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	0	471	1162	1097	1057	844	1197	1077	895	674	479	190	114	118
W2	233	353255	1153855	1083999	908601	563845	761570	612813	471658	335255	148368	50832	19149	10850
W3	61	147325	687227	646486	512418	325461	402875	307936	217967	144470	57013	16432	5686	3106
W4	6	28412	302726	398317	332569	204462	249342	184659	126724	81502	30507	8072	2604	1446
W5	6	7348	140915	257877	230621	144798	167573	121759	82685	54131	20567	5174	1692	850
W6	2	2492	74299	174446	165596	103317	123405	91064	61511	39101	13868	3406	1041	541
W7	0	1087	44671	132984	134715	85027	105337	79078	55504	35482	12788	3734	1404	1104
W8	3	436	25684	96714	106985	67970	79975	61679	43084	26818	10538	3665	1765	1952
W9	1	177	14470	61264	74822	49871	60111	45668	30726	19217	5874	1384	381	202
W10	0	102	9389	44211	54848	36972	45286	36954	25280	14994	4818	1177	348	180
W11	0	89	6236	32714	44058	29830	35480	27297	18293	11304	3743	855	269	122
W12	1	54	4369	25554	35916	26124	30225	23132	15695	9234	3102	784	233	119
W13	1	37	2752	19358	28067	20647	25025	20011	13234	7971	2619	598	186	87
W14	0	22	1774	15681	25705	17680	20183	16221	11280	6926	2324	517	129	69
W15	0	20	1286	12525	22095	15965	17956	14036	9721	6063	2155	528	145	62
W16	0	12	1066	10285	21304	17145	18682	13842	9246	5364	1772	428	105	38
W17	1	7	702	7764	14984	12518	16284	13388	9130	5116	1577	336	97	51
W18	0	11	479	6380	12462	9775	12213	11237	9608	6528	1994	346	81	39
W19	0	9	400	5106	10500	8263	10265	8795	7314	5253	1700	331	95	35
W20	0	6	292	3940	8900	7620	9091	7664	5908	3690	1263	238	84	44
W21	0	2	235	3162	7309	6429	8143	6331	4800	3400	1129	259	66	40
W22	0	5	167	2570	6222	5737	8143	5815	4536	3064	1214	287	88	35
W23	1	5	133	2115	5474	4793	6226	4926	3897	2664	944	250	65	23
W24	0	7	149	1995	5290	5486	7206	6227	4829	4020	2056	512	134	63
W25	1	23	878	12696	41090	49217	67830	57176	42735	27581	11540	2984	850	433
SUMA	317	541414	2475316	3059240	2811608	1819796	2289623	1778785	1286260	859822	343952	103319	36811	21609

Figura 4.6: Afiliados al IMSS abril 2016

4.2. Simulación de Afiliados al IMSS y Pensionados para el periodo 2016 - 2061.

Una vez que se tienen estas 4 matrices con los totales de trabajadores asegurados según sus edades y salarios, se analiza el comportamiento de los datos mediante la herramienta “ajuste de distribución”del programa @Risk.

Como primer paso se obtienen el porcentaje que representa cada E_iW_j del total de personas con edad E_i y se obtienen las siguientes matrices de porcentajes:

PROPORCIÓN	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	31.45%	14.14%	10.64%	9.49%	9.71%	10.52%	11.21%	12.41%	14.38%	16.95%	17.68%	21.82%	25.81%	30.06%
W2	53.20%	56.03%	38.86%	28.40%	25.84%	26.10%	26.19%	27.29%	29.68%	32.76%	34.97%	37.32%	39.38%	38.22%
W3	11.10%	23.03%	25.90%	20.77%	17.76%	16.29%	15.04%	14.52%	14.60%	15.05%	15.17%	14.60%	13.45%	12.20%
W4	1.96%	4.71%	11.94%	13.21%	12.21%	10.89%	9.76%	8.91%	8.69%	8.60%	8.49%	7.43%	6.28%	5.98%
W5	0.89%	1.30%	5.62%	8.26%	8.32%	7.88%	7.42%	6.85%	6.31%	5.71%	5.29%	4.64%	3.65%	3.26%
W6	0.49%	0.44%	2.90%	5.36%	5.78%	5.60%	5.39%	5.16%	4.76%	4.12%	3.58%	2.74%	2.25%	1.96%
W7	0.21%	0.16%	1.48%	3.46%	4.13%	4.15%	4.08%	3.79%	3.30%	2.74%	2.43%	1.90%	1.45%	1.06%
W8	0.12%	0.07%	0.84%	2.36%	3.05%	3.26%	3.30%	3.01%	2.66%	2.14%	1.82%	1.40%	1.07%	1.31%
W9	0.06%	0.04%	0.52%	1.72%	2.15%	2.32%	2.59%	2.51%	2.12%	1.62%	1.41%	1.09%	0.90%	0.63%
W10	0.12%	0.02%	0.37%	1.33%	1.70%	1.76%	1.87%	1.79%	1.52%	1.19%	1.03%	0.76%	0.60%	0.68%
W11	0.09%	0.01%	0.24%	1.00%	1.33%	1.43%	1.49%	1.40%	1.17%	0.96%	0.86%	0.62%	0.57%	0.54%
W12	0.03%	0.01%	0.18%	0.79%	1.06%	1.15%	1.29%	1.30%	1.01%	0.76%	0.65%	0.50%	0.39%	0.40%
W13	0.00%	0.01%	0.13%	0.65%	0.93%	1.01%	1.08%	1.06%	0.91%	0.71%	0.60%	0.48%	0.38%	0.35%
W14	0.03%	0.00%	0.09%	0.52%	0.78%	0.91%	1.02%	0.97%	0.76%	0.58%	0.52%	0.40%	0.31%	0.28%
W15	0.03%	0.00%	0.06%	0.41%	0.64%	0.89%	1.27%	1.11%	0.75%	0.49%	0.45%	0.32%	0.24%	0.19%
W16	0.03%	0.00%	0.05%	0.34%	0.52%	0.63%	0.88%	1.25%	0.96%	0.56%	0.41%	0.34%	0.23%	0.25%
W17	0.00%	0.00%	0.04%	0.30%	0.46%	0.52%	0.62%	0.76%	0.83%	0.65%	0.49%	0.25%	0.26%	0.13%
W18	0.00%	0.00%	0.03%	0.25%	0.39%	0.45%	0.51%	0.58%	0.55%	0.41%	0.36%	0.25%	0.19%	0.22%
W19	0.06%	0.00%	0.02%	0.20%	0.33%	0.37%	0.44%	0.46%	0.38%	0.30%	0.31%	0.21%	0.19%	0.17%
W20	0.00%	0.00%	0.02%	0.16%	0.28%	0.32%	0.36%	0.41%	0.33%	0.26%	0.22%	0.18%	0.16%	0.10%
W21	0.00%	0.00%	0.01%	0.13%	0.24%	0.29%	0.33%	0.37%	0.34%	0.25%	0.24%	0.14%	0.14%	0.07%
W22	0.03%	0.00%	0.01%	0.11%	0.22%	0.27%	0.31%	0.34%	0.31%	0.24%	0.23%	0.16%	0.16%	0.13%
W23	0.00%	0.00%	0.01%	0.10%	0.19%	0.24%	0.28%	0.30%	0.27%	0.18%	0.17%	0.12%	0.11%	0.10%
W24	0.00%	0.00%	0.01%	0.09%	0.21%	0.26%	0.30%	0.31%	0.30%	0.26%	0.22%	0.20%	0.18%	0.18%
W25	0.09%	0.00%	0.04%	0.59%	1.76%	2.49%	2.96%	3.16%	3.11%	2.51%	2.40%	2.10%	1.66%	1.52%

Figura 4.7: Proporciones Salariales con respecto a la edad 2001

PROPORCIÓN	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	7.17%	3.97%	2.48%	2.06%	2.10%	2.29%	2.58%	2.86%	3.46%	4.18%	4.34%	5.19%	6.75%	8.31%
W2	63.52%	63.62%	43.49%	30.33%	27.48%	27.34%	28.16%	28.78%	31.26%	35.01%	36.88%	38.92%	41.66%	43.14%
W3	21.00%	25.83%	29.78%	23.50%	20.16%	18.78%	17.95%	16.88%	16.89%	17.65%	18.54%	18.88%	18.95%	17.37%
W4	4.11%	4.81%	12.64%	14.99%	13.84%	12.83%	11.92%	11.10%	10.76%	10.59%	11.07%	10.92%	10.25%	9.05%
W5	1.57%	1.10%	5.43%	9.05%	9.02%	8.73%	8.35%	7.79%	7.33%	7.16%	7.15%	7.16%	7.80%	9.56%
W6	1.22%	0.38%	2.72%	5.96%	6.34%	6.15%	5.91%	5.77%	5.39%	4.94%	4.52%	4.13%	3.42%	2.95%
W7	0.09%	0.14%	1.38%	3.73%	4.25%	4.34%	4.23%	4.02%	3.58%	3.14%	2.83%	2.33%	1.74%	1.47%
W8	0.09%	0.06%	0.75%	2.68%	3.34%	3.54%	3.60%	3.63%	3.21%	2.83%	2.40%	1.87%	1.54%	1.19%
W9	0.17%	0.03%	0.44%	1.74%	2.29%	2.47%	2.56%	2.72%	2.33%	1.90%	1.63%	1.39%	1.11%	0.98%
W10	0.09%	0.02%	0.29%	1.27%	1.77%	1.89%	1.94%	2.04%	1.77%	1.45%	1.24%	1.14%	0.82%	0.65%
W11	0.17%	0.01%	0.19%	0.98%	1.44%	1.55%	1.59%	1.61%	1.39%	1.20%	1.05%	0.98%	0.72%	0.59%
W12	0.26%	0.01%	0.11%	0.74%	1.16%	1.26%	1.32%	1.42%	1.26%	0.98%	0.85%	0.71%	0.54%	0.49%
W13	0.17%	0.00%	0.08%	0.57%	0.94%	1.02%	1.03%	1.11%	1.03%	0.83%	0.71%	0.64%	0.40%	0.45%
W14	0.00%	0.00%	0.05%	0.43%	0.78%	0.87%	0.87%	0.91%	0.82%	0.67%	0.56%	0.45%	0.35%	0.25%
W15	0.00%	0.00%	0.04%	0.36%	0.69%	0.86%	1.00%	1.17%	0.96%	0.64%	0.53%	0.46%	0.36%	0.23%
W16	0.00%	0.00%	0.03%	0.28%	0.56%	0.69%	0.87%	1.20%	1.08%	0.69%	0.47%	0.40%	0.24%	0.21%
W17	0.00%	0.00%	0.02%	0.22%	0.47%	0.56%	0.65%	0.81%	1.08%	0.83%	0.53%	0.37%	0.26%	0.19%
W18	0.00%	0.00%	0.02%	0.18%	0.40%	0.48%	0.55%	0.64%	0.65%	0.49%	0.37%	0.31%	0.25%	0.13%
W19	0.00%	0.00%	0.01%	0.15%	0.33%	0.41%	0.44%	0.50%	0.53%	0.40%	0.31%	0.24%	0.24%	0.15%
W20	0.00%	0.00%	0.01%	0.12%	0.29%	0.34%	0.37%	0.42%	0.44%	0.34%	0.29%	0.23%	0.19%	0.23%
W21	0.00%	0.00%	0.01%	0.09%	0.25%	0.30%	0.32%	0.37%	0.39%	0.29%	0.26%	0.19%	0.15%	0.21%
W22	0.09%	0.00%	0.01%	0.08%	0.21%	0.27%	0.31%	0.34%	0.37%	0.30%	0.25%	0.21%	0.16%	0.11%
W23	0.00%	0.00%	0.00%	0.06%	0.19%	0.24%	0.27%	0.31%	0.33%	0.28%	0.23%	0.19%	0.14%	0.13%
W24	0.00%	0.00%	0.00%	0.05%	0.17%	0.21%	0.24%	0.28%	0.29%	0.26%	0.24%	0.26%	0.14%	0.20%
W25	0.26%	0.01%	0.02%	0.37%	1.56%	2.57%	3.00%	3.33%	3.39%	2.94%	2.74%	2.44%	1.84%	1.77%

Figura 4.8: Proporciones Salariales con respecto a la edad 2006

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	7.44%	3.24%	1.87%	1.55%	1.51%	1.64%	1.81%	2.03%	2.38%	2.97%	3.10%	3.53%	4.54%	5.77%
W2	59.23%	68.63%	47.58%	33.50%	30.06%	30.15%	30.58%	31.56%	33.05%	35.85%	38.10%	44.11%	44.06%	44.56%
W3	18.15%	22.44%	27.71%	21.66%	18.93%	18.07%	17.60%	17.00%	16.29%	16.34%	16.54%	15.84%	16.70%	15.30%
W4	6.10%	4.09%	11.68%	13.71%	12.62%	11.80%	11.12%	10.45%	9.97%	9.94%	10.13%	9.21%	8.86%	7.64%
W5	2.38%	0.95%	5.10%	8.53%	8.44%	7.93%	7.38%	6.85%	6.40%	6.18%	6.16%	5.35%	4.98%	4.32%
W6	2.53%	0.34%	2.55%	6.01%	6.51%	6.39%	6.24%	6.12%	5.91%	5.63%	5.86%	5.96%	7.51%	11.37%
W7	1.04%	0.14%	1.38%	4.00%	4.53%	4.35%	4.21%	3.95%	3.69%	3.41%	3.18%	2.62%	2.35%	1.98%
W8	1.04%	0.06%	0.77%	2.88%	3.48%	3.31%	3.30%	3.30%	3.08%	2.66%	2.32%	1.74%	1.50%	1.24%
W9	0.74%	0.03%	0.45%	1.94%	2.57%	2.63%	2.71%	2.70%	2.51%	2.24%	2.05%	1.56%	1.32%	0.97%
W10	0.15%	0.02%	0.28%	1.39%	1.92%	1.96%	2.02%	2.09%	2.00%	1.67%	1.40%	1.13%	0.94%	0.74%
W11	0.00%	0.01%	0.18%	1.00%	1.52%	1.56%	1.60%	1.54%	1.46%	1.28%	1.12%	0.97%	0.73%	0.58%
W12	0.45%	0.01%	0.13%	0.80%	1.21%	1.33%	1.39%	1.35%	1.25%	1.10%	0.94%	0.80%	0.73%	0.59%
W13	0.00%	0.01%	0.08%	0.61%	1.00%	1.10%	1.13%	1.20%	1.15%	0.99%	0.79%	0.66%	0.56%	0.42%
W14	0.00%	0.00%	0.05%	0.45%	0.83%	0.88%	0.89%	0.91%	0.90%	0.76%	0.66%	0.54%	0.46%	0.29%
W15	0.30%	0.01%	0.04%	0.37%	0.72%	0.84%	0.86%	0.87%	0.84%	0.77%	0.65%	0.50%	0.44%	0.37%
W16	0.15%	0.00%	0.03%	0.30%	0.58%	0.73%	0.85%	0.93%	0.88%	0.69%	0.54%	0.39%	0.30%	0.26%
W17	0.00%	0.00%	0.02%	0.23%	0.46%	0.57%	0.64%	0.83%	0.96%	0.78%	0.50%	0.33%	0.26%	0.20%
W18	0.00%	0.00%	0.01%	0.17%	0.39%	0.48%	0.53%	0.61%	0.92%	0.88%	0.62%	0.38%	0.23%	0.22%
W19	0.15%	0.00%	0.01%	0.14%	0.34%	0.43%	0.46%	0.53%	0.62%	0.58%	0.43%	0.32%	0.20%	0.19%
W20	0.00%	0.00%	0.01%	0.12%	0.28%	0.36%	0.38%	0.41%	0.47%	0.41%	0.35%	0.23%	0.22%	0.24%
W21	0.00%	0.00%	0.01%	0.10%	0.24%	0.33%	0.35%	0.39%	0.43%	0.39%	0.33%	0.24%	0.19%	0.14%
W22	0.00%	0.00%	0.00%	0.08%	0.20%	0.29%	0.33%	0.38%	0.44%	0.42%	0.35%	0.28%	0.22%	0.27%
W23	0.00%	0.00%	0.00%	0.06%	0.17%	0.24%	0.28%	0.33%	0.36%	0.33%	0.31%	0.28%	0.21%	0.19%
W24	0.00%	0.00%	0.00%	0.05%	0.15%	0.21%	0.24%	0.27%	0.30%	0.27%	0.24%	0.20%	0.13%	0.11%
W25	0.15%	0.00%	0.03%	0.37%	1.35%	2.42%	3.11%	3.39%	3.70%	3.46%	3.34%	2.82%	2.36%	2.04%

Figura 4.9: Proporciones Salariales con respecto a la edad 2011

PROPORCIÓN	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.2%	0.3%	0.5%
W2	73.5%	65.2%	46.6%	35.4%	32.3%	31.0%	33.3%	34.5%	36.7%	39.0%	43.1%	49.2%	52.0%	50.2%
W3	19.2%	27.2%	27.8%	21.1%	18.2%	17.9%	17.6%	17.3%	16.9%	16.8%	16.6%	15.9%	15.4%	14.4%
W4	1.9%	5.2%	12.2%	13.0%	11.8%	11.2%	10.9%	10.4%	9.9%	9.5%	8.9%	7.8%	7.1%	6.7%
W5	1.9%	1.4%	5.7%	8.4%	8.2%	8.0%	7.3%	6.8%	6.4%	6.3%	6.0%	5.0%	4.6%	3.9%
W6	0.6%	0.5%	3.0%	5.7%	5.9%	5.7%	5.4%	5.1%	4.8%	4.5%	4.0%	3.3%	2.8%	2.5%
W7	0.0%	0.2%	1.8%	4.3%	4.8%	4.7%	4.6%	4.4%	4.3%	4.1%	3.7%	3.6%	3.8%	5.1%
W8	0.9%	0.1%	1.0%	3.2%	3.8%	3.7%	3.5%	3.5%	3.3%	3.1%	3.1%	3.5%	4.8%	9.0%
W9	0.3%	0.0%	0.6%	2.0%	2.7%	2.7%	2.6%	2.6%	2.4%	2.2%	1.7%	1.3%	1.0%	0.9%
W10	0.0%	0.0%	0.4%	1.4%	2.0%	2.0%	2.0%	2.1%	2.0%	1.7%	1.4%	1.1%	0.9%	0.8%
W11	0.0%	0.0%	0.3%	1.1%	1.6%	1.6%	1.5%	1.5%	1.4%	1.3%	1.1%	0.8%	0.7%	0.6%
W12	0.3%	0.0%	0.2%	0.8%	1.3%	1.4%	1.3%	1.3%	1.2%	1.1%	0.9%	0.8%	0.6%	0.6%
W13	0.3%	0.0%	0.1%	0.6%	1.0%	1.1%	1.1%	1.1%	1.0%	0.9%	0.8%	0.6%	0.5%	0.4%
W14	0.0%	0.0%	0.1%	0.5%	0.9%	1.0%	0.9%	0.9%	0.9%	0.8%	0.7%	0.5%	0.4%	0.3%
W15	0.0%	0.0%	0.1%	0.4%	0.8%	0.9%	0.8%	0.8%	0.8%	0.7%	0.6%	0.5%	0.4%	0.3%
W16	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	0.8%	0.9%	0.8%	0.8%	0.7%	0.6%	0.5%	0.4%	0.3%	0.2%
W17	0.3%	0.0%	0.0%	0.3%	0.5%	0.7%	0.7%	0.8%	0.7%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.2%
W18	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.5%	0.5%	0.6%	0.7%	0.8%	0.6%	0.3%	0.2%	0.2%
W19	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.5%	0.4%	0.5%	0.6%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.2%
W20	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.4%	0.4%	0.4%	0.5%	0.4%	0.4%	0.2%	0.2%	0.2%
W21	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%
W22	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.4%	0.3%	0.4%	0.4%	0.4%	0.3%	0.2%	0.2%
W23	0.3%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.3%	0.3%	0.3%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%	0.1%
W24	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.3%	0.4%	0.4%	0.5%	0.6%	0.5%	0.4%	0.3%
W25	0.3%	0.0%	0.0%	0.4%	1.5%	2.7%	3.0%	3.2%	3.3%	3.2%	3.4%	2.9%	2.3%	2.0%

Figura 4.10: Proporciones Salariales con respecto a la edad 2016

Teniendo estos porcentajes de cada uno de los E_iW_j, son las variables de la muestra que será usada para ajustarse a una variable aleatoria y a partir de eso generar nuevos valores aleatorios para el comportamiento de los E_iW_j de los años a simular. Mediante @Risk los datos se someten a la prueba de bondad de ajuste de Akaike la cual nos arroja una distribución uniforme con parámetros mínimos y máximos que se muestran en las siguientes matrices:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.2%	0.3%	0.5%
W2	53.2%	56.0%	38.9%	28.4%	25.8%	26.1%	26.2%	27.3%	29.7%	32.8%	35.0%	37.3%	39.4%	38.2%
W3	11.1%	22.4%	25.9%	20.8%	17.8%	16.3%	15.0%	14.5%	14.6%	15.0%	15.2%	14.6%	13.5%	12.2%
W4	1.9%	4.1%	11.7%	13.0%	11.8%	10.9%	9.8%	8.9%	8.7%	8.6%	8.5%	7.4%	6.3%	6.0%
W5	0.9%	0.9%	5.1%	8.3%	8.2%	7.9%	7.3%	6.8%	6.3%	5.7%	5.3%	4.6%	3.6%	3.3%
W6	0.5%	0.3%	2.5%	5.4%	5.8%	5.6%	5.4%	5.1%	4.8%	4.1%	3.6%	2.7%	2.2%	2.0%
W7	0.0%	0.1%	1.4%	3.5%	4.1%	4.2%	4.1%	3.8%	3.3%	2.7%	2.4%	1.9%	1.4%	1.1%
W8	0.1%	0.1%	0.8%	2.4%	3.0%	3.3%	3.3%	3.0%	2.7%	2.1%	1.8%	1.4%	1.1%	1.2%
W9	0.1%	0.0%	0.4%	1.7%	2.1%	2.3%	2.6%	2.5%	2.1%	1.6%	1.4%	1.1%	0.9%	0.6%
W10	0.0%	0.0%	0.3%	1.3%	1.7%	1.8%	1.9%	1.8%	1.5%	1.2%	1.0%	0.8%	0.6%	0.6%
W11	0.0%	0.0%	0.2%	1.0%	1.3%	1.4%	1.5%	1.4%	1.2%	1.0%	0.9%	0.6%	0.6%	0.5%
W12	0.0%	0.0%	0.1%	0.7%	1.1%	1.1%	1.3%	1.3%	1.0%	0.8%	0.7%	0.5%	0.4%	0.4%
W13	0.0%	0.0%	0.1%	0.6%	0.9%	1.0%	1.0%	1.1%	0.9%	0.7%	0.6%	0.5%	0.4%	0.4%
W14	0.0%	0.0%	0.0%	0.4%	0.8%	0.9%	0.9%	0.9%	0.8%	0.6%	0.5%	0.4%	0.3%	0.2%
W15	0.0%	0.0%	0.0%	0.4%	0.6%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.5%	0.4%	0.3%	0.2%	0.2%
W16	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	0.5%	0.6%	0.8%	0.8%	0.7%	0.6%	0.4%	0.3%	0.2%	0.2%
W17	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.5%	0.5%	0.6%	0.8%	0.7%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.1%
W18	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.5%	0.5%	0.6%	0.5%	0.4%	0.4%	0.3%	0.2%	0.1%
W19	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.4%	0.4%	0.5%	0.4%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%	0.2%
W20	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.3%	0.4%	0.4%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%	0.2%	0.1%
W21	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.3%	0.4%	0.3%	0.2%	0.2%	0.1%	0.1%	0.1%
W22	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.3%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%	0.2%	0.2%	0.1%
W23	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.2%	0.3%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%	0.1%	0.1%	0.1%
W24	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.2%	0.3%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%	0.1%	0.1%
W25	0.1%	0.0%	0.0%	0.4%	1.3%	2.4%	3.0%	3.2%	3.1%	2.5%	2.4%	2.1%	1.7%	1.5%

Figura 4.11: Mínimo de proporciones Salariales.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
W1	31.4%	14.1%	10.6%	9.5%	9.7%	10.5%	11.2%	12.4%	14.4%	17.0%	17.7%	21.8%	25.8%	30.1%
W2	73.5%	68.6%	47.6%	35.4%	32.3%	31.0%	33.3%	34.5%	36.7%	39.0%	43.1%	49.2%	52.0%	50.2%
W3	21.0%	27.2%	29.8%	23.5%	20.2%	18.8%	17.9%	17.3%	16.9%	17.6%	18.5%	18.9%	19.0%	17.4%
W4	6.1%	5.2%	12.6%	15.0%	13.8%	12.8%	11.9%	11.1%	10.8%	10.6%	11.1%	10.9%	10.2%	9.1%
W5	2.4%	1.4%	5.7%	9.1%	9.0%	8.7%	8.3%	7.8%	7.3%	7.2%	7.1%	7.2%	7.8%	9.6%
W6	2.5%	0.5%	3.0%	6.0%	6.5%	6.4%	6.2%	6.1%	5.9%	5.6%	5.9%	6.0%	7.5%	11.4%
W7	1.0%	0.2%	1.8%	4.3%	4.8%	4.7%	4.6%	4.4%	4.3%	4.1%	3.7%	3.6%	3.8%	5.1%
W8	1.0%	0.1%	1.0%	3.2%	3.8%	3.7%	3.6%	3.6%	3.3%	3.1%	3.1%	3.5%	4.8%	9.0%
W9	0.7%	0.0%	0.6%	2.0%	2.7%	2.7%	2.7%	2.7%	2.5%	2.2%	2.0%	1.6%	1.3%	1.0%
W10	0.1%	0.0%	0.4%	1.4%	2.0%	2.0%	2.0%	2.1%	2.0%	1.7%	1.4%	1.1%	0.9%	0.8%
W11	0.2%	0.0%	0.3%	1.1%	1.6%	1.6%	1.6%	1.6%	1.5%	1.3%	1.1%	1.0%	0.7%	0.6%
W12	0.4%	0.0%	0.2%	0.8%	1.3%	1.4%	1.4%	1.4%	1.3%	1.1%	0.9%	0.8%	0.7%	0.6%
W13	0.3%	0.0%	0.1%	0.7%	1.0%	1.1%	1.1%	1.2%	1.2%	1.0%	0.8%	0.7%	0.6%	0.4%
W14	0.0%	0.0%	0.1%	0.5%	0.9%	1.0%	1.0%	1.0%	0.9%	0.8%	0.7%	0.5%	0.5%	0.3%
W15	0.3%	0.0%	0.1%	0.4%	0.8%	0.9%	1.3%	1.2%	1.0%	0.8%	0.6%	0.5%	0.4%	0.4%
W16	0.1%	0.0%	0.0%	0.3%	0.8%	0.9%	0.9%	1.2%	1.1%	0.7%	0.5%	0.4%	0.3%	0.3%
W17	0.3%	0.0%	0.0%	0.3%	0.5%	0.7%	0.7%	0.8%	1.1%	0.8%	0.5%	0.4%	0.3%	0.2%
W18	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	0.4%	0.5%	0.5%	0.6%	0.9%	0.9%	0.6%	0.4%	0.2%	0.2%
W19	0.1%	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.5%	0.5%	0.5%	0.6%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.2%
W20	0.0%	0.0%	0.0%	0.2%	0.3%	0.4%	0.4%	0.4%	0.5%	0.4%	0.4%	0.2%	0.2%	0.2%
W21	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%
W22	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%	0.3%	0.2%	0.3%
W23	0.3%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.3%	0.3%	0.4%	0.3%	0.3%	0.3%	0.2%	0.2%
W24	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.3%	0.3%	0.4%	0.4%	0.5%	0.6%	0.5%	0.4%	0.3%
W25	0.3%	0.0%	0.0%	0.6%	1.8%	2.7%	3.1%	3.4%	3.7%	3.5%	3.4%	2.9%	2.4%	2.0%

Figura 4.12: Máximo de proporciones Salariales.

Así se genera aleatoriamente el porcentaje del E_iW_j de cada año según los parámetros obtenidos en la prueba, se denota el valor porcentual como e_iw_j. La condición adicional al generar los porcentajes de valores aleatorios es que la suma en cada $e_i \bigcup_{j=1}^{25} w_j$, sea de 100 %. A e_iw_j se le asignará un porcentaje que se obtiene mediante generadores de variables aleatorias con distribución U $(\text{mín}\, e_iw_j, \text{máx}\, e_iw_j)$. Para obtener los E_iW_j de los años a simular primero se calcula el total de la población de cada E_i del año x. La forma de calcular los valores de E_i para el año x es por medio de dos factores de crecimiento-decrecimiento; como primer factor tenemos la mortalidad y el segundo factor es calculado mediante el comportamiento de los datos de la muestra.

Edad	q_x	Edad	q_x
12	0.000396	57	0.011119
13	0.000427	58	0.011967
14	0.000460	59	0.012879
15	0.000495	60	0.013860
16	0.000533	61	0.014914
17	0.000575	62	0.016048
18	0.000619	63	0.017265
19	0.000667	64	0.018574
20	0.000718	65	0.019980
21	0.000773	66	0.021490
22	0.000833	67	0.023111
23	0.000897	68	0.024851
24	0.000966	69	0.026720
25	0.001041	70	0.028724
26	0.001121	71	0.030874
27	0.001207	72	0.033180
28	0.001300	73	0.035651
29	0.001400	74	0.038300
30	0.001508	75	0.041136
31	0.001624	76	0.044174
32	0.001749	77	0.047424
33	0.001884	78	0.050902
34	0.002029	79	0.054619
35	0.002186	80	0.058592
36	0.002354	81	0.062834
37	0.002535	82	0.067362
38	0.002730	83	0.072190
39	0.002940	84	0.077337
40	0.003166	85	0.082817
41	0.003410	86	0.088649
42	0.003672	87	0.094850
43	0.003954	88	0.101436
44	0.004258	89	0.108424
45	0.004585	90	0.115832
46	0.004938	91	0.123677
47	0.005317	92	0.131973
48	0.005725	93	0.140737
49	0.006164	94	0.149983
50	0.006637	95	0.159723
51	0.007145	96	0.169970
52	0.007693	97	0.180733
53	0.008282	98	0.192020
54	0.008915	99	0.203837
55	0.009597	100	1.000000
56	0.010330		

Figura 4.13: Tabla de mortalidad de la CNSF.

Para el primer factor se usa una tabla de mortalidad tomada de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, como se muestra en la imagen.

La tabla fue convertida a periodos quinquenales, para poder aplicarla a los datos de la muestra y a las proyecciones futuras obteniendo el siguiente resultado [5]:

EDAD	lx	5Lx	5Px	5Qx
15-19	99871.755	498638.2808	0.9964681	0.0035319
20-24	99583.558	496877.1365	0.9948848	0.0051152
25-29	99167.297	494335.5076	0.9925953	0.0074047
30-34	98566.906	490675.125	0.9892868	0.0107132
35-39	97703.144	485418.4404	0.9845155	0.0154845
40-44	96464.232	477901.9988	0.9776525	0.0223475
45-49	94696.567	467222.088	0.9678152	0.0321848
50-54	92192.268	452184.6386	0.9537911	0.0462089
55-59	88681.588	431289.6918	0.9339462	0.0660538
60-64	83834.289	402801.3782	0.9061665	0.0938335
65-69	77286.262	365005.1167	0.8678775	0.1321225
70-74	68715.785	316779.744	0.8162384	0.1837616
75-79	57996.113	258567.7849	0.7486614	0.2513386
80-84	45431.001	193579.712	0.6637802	0.3362198
85-89	32000.884	128494.377	0.562772	0.437228
90-94	19396.867	72313.03369	0.4504968	0.5495032
95-99	9528.3466	32576.78845	0.2687779	0.7312221
100+	3502.3688	8755.921989	0	1

Figura 4.14: Tabla de mortalidad de periodos quinquenales.

La forma de convertir la tabla a periodos quinquenales es obteniendo ${}_5L_x$ que significa el tiempo vivido entre el periodo x y $x+n$.

La fórmula es la siguiente:

$${}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + {}_nk_x \cdot {}_nd_x$$

como se distribuye uniformemente.

$$k = \frac{n}{2}$$

y desarrollando, la fórmula queda

$${}_nL_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})$$

por último

$${}_np_x = \frac{{}_nL_{x+n}}{{}_nL_x} \quad \text{y} \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x.$$

Posteriormente, para el segundo factor F_2 se tiene que $E_{ix} = \sum_{j=1}^{25} W_{jx}$ para cada año x de la muestra como se observa en la tabla.

	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
P_1 (2001-2006)	1.33	0.16	-0.01	-0.03	-0.04	-0.06	-0.11	-0.13	-0.40	-0.37	-0.50	-0.18	727.75
P_2 (2006-2011)	3.11	0.34	0.02	-0.03	-0.04	-0.07	-0.12	-0.14	-0.40	-0.56	-0.55	-0.29	732.26
P_3 (2011-2016)	6.13	0.57	0.09	-0.26	0.01	-0.03	-0.08	-0.12	-0.46	-0.64	-0.61	-0.33	838.74
MAXIMO	3.11	0.57	0.09	-0.03	0.01	-0.03	-0.08	-0.12	-0.40	-0.37	-0.50	-0.18	838.74
MINIMO	1.33	0.16	-0.01	-0.26	-0.04	-0.07	-0.12	-0.14	-0.46	-0.64	-0.61	-0.33	727.75

Figura 4.15: Proporciones de crecimiento en los periodos quinquenales.

El segundo factor se obtiene al saber cuántas personas pasan de ser E1 en el periodo x a E2 en el periodo $x+1$, el crecimiento porcentual obtenido de este cambio es nuestro segundo factor.

De esta forma se obtienen los crecimientos de la tabla, los valores de la muestra se ajustan a una distribución Uniforme.

Finalmente mediante generadores de v.a. con distribución U (mín F_2, máx F_2) y el ${}_5Q_i$ correspondiente según el grupo, se simulan los E_i con $i = (1, ..., 14)$ para cada periodo x , se calcula la siguiente ecuación según el valor del segundo factor obtenido por 50,000 simulaciones realizadas .

$$E_{i,x} = E_{i-1,x-1} \times (1 - {}_5Q_i) \times (1 + F2)$$

A partir de la ecuación se obtienen los siguientes resultados:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
Factor Crecimiento	....	1.737117905	0.481637375	0.03731686	-0.179738548	-0.017180777	-0.058862577	-0.089135331	-0.133262429	-0.42383469	-0.476357895	-0.589203676	-0.301465893	814.8603349
Factor Mortalidad	0.002	0.003531908	0.005115206	0.007404652	0.010713167	0.015484458	0.022347491	0.0321848	0.046208882	0.066053778	0.093833496	0.132122457	0.18376162	0.25133863
2016	333	541552	2477694	3065023	2820673	1826572	2308648	1800276	1308030	882293	358343	109904	39977	24713
2021	317	735522	1477056.358	3652265.888	3155857.683	2288902.391	1767392.528	2124199.405	1587030.918	1081330.869	474768.4049	170036.2387	39183.07354	22793.69998
2026	317	929630	2006099.962	2177267.472	3760504.036	2560895.997	2214743.784	1626187.343	1872585.165	1311977.188	581872.1581	225280.9008	60621.47371	22341.02666
2031	317	1123738	2535519.955	2957108.691	2241792.73	3051550.704	2477925.015	2037797.632	1433563.293	1548041.057	705984.6525	276102.3745	80317.35063	34564.56673
2036	317	1317846	3064939.947	3737504.728	3044745.237	1819156.187	2952682.902	2279952.094	1796417.797	1185107.56	833012.3705	334994.6139	98436.26842	45794.57172
2041	317	1511954	3594359.939	4517900.765	3848269.005	2470731.153	1760216.982	2716779.372	2009888.741	1485074.515	637715.1647	395270.1471	119432.5829	56125.44138
2046	317	1706062	4123779.931	5298296.802	4651792.772	3122769.682	2390681.44	1619585.084	2394973.248	1661548.084	799129.6074	302600.2685	140922.0705	68096.91729
2051	317	1900170	4653199.924	6078692.838	5455316.54	3774808.21	3021594.442	2199678.812	1427743.081	1979892.284	894091.3431	379192.541	107883.3215	80349.58593
2056	317	2094278	5182619.916	6859088.875	6258840.307	4426846.739	3652507.444	2780185.249	1939123.937	1180296.068	1065394.718	424252.5432	135190.0679	61511.87094
2061	317	2288386	5712039.908	7639484.912	7062364.075	5078885.267	4283420.445	3360691.685	2450868.615	1603047.768	635126.0655	505537.1824	151254.9006	77081.36798

Figura 4.16: Población por edad simulada.

El proceso se realiza desde $E2$ ya que los valores de los años muestra de personas menos de 15 años cotizando en el IMSS no son datos representativos.

Una vez que se tienen todos los valores E_i de cada quinquenio x, se hace una matriz con el mismo orden de factores que las matrices quinquenales de la muestra, para cada x simulado y los valores $e_i w_j$ se sustituyen por $E_i W_j = e_i w_j \times E_i$, esto significa que los porcentajes obtenidos en la matriz mediante la generación de v.a. $U(\text{mín } e_i w_j, \text{máx } e_i w_j)$ se multiplican por el total de la población que tiene la misma edad, y así se obtiene el porcentaje de cada rango de salario por edad. Las poblaciones son divididas en la matriz por cada $E_i W_j$ correspondiente.

Al realizar la suma del total de la población $A_x = \sum_{i=1}^{14} E_{ix} \sum_{j=1}^{25} W_{jx}$ de cada año se obtiene un crecimiento de afiliados al IMSS como se muestra en la tabla y gráfica siguientes:

	MIEMBROS IMSS	TOTAL DE POBLACIÓN	PROPORCIÓN	Crecimineto IMSS	Crecimineto Total
2001	11959625	103300000	12%		
2006	13242897	104874282	13%	11%	2%
2011	14882981	114890670	13%	12%	10%
2016	17427872	122273473	14%	17%	6%
2021	18016869.51	128230519	14%	3%	5%
2026	19287614.87	133614190	14%	7%	4%
2031	20844880.56	138383142	15%	8%	4%
2036	22996296.51	142538744	16%	10%	3%
2041	25470164.89	146072453	17%	11%	2%
2046	28589179.96	148984509	19%	12%	2%
2051	32286558.83	150916407	21%	13%	1%
2056	36438492.39	152873356	24%	13%	1%
2061	39228096.86	154855681	25%	8%	1%

Figura 4.17: Población Total en México (CONAPO), población IMSS (simulación).

Figura 4.18: Crecimiento de Afiliados al IMSS.

Luego, se toman proyecciones de CONAPO [14] de la población total en México hasta el año referencia y se compara con la proyección del crecimiento del total de la población del IMSS hasta el 2061, para hacer una comparación de las proporciones desde el 2001 hasta el año 2061.

En la tabla se muestra que la población del IMSS en el año 2001 representaba un 12 % de la población total y se estima que para el año 2061 la población del IMSS represente el 25 % de la población total de México con un nivel de confianza del 95 %.

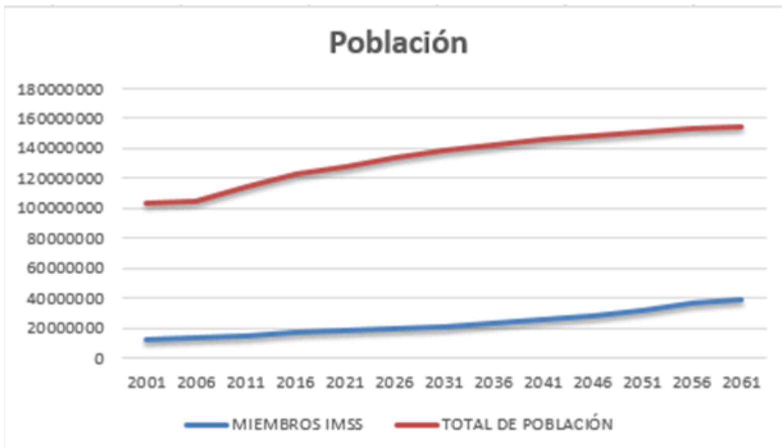


Figura 4.19: Gráfica de crecimiento de población IMSS en comparación a la población total en México.

El pronóstico de personas afiliadas al IMSS mediante el método Monte Carlo comparado con el pronóstico de la población total en México de CONAPO, muestra que el crecimiento de la población total en México no es significativo debido al cambio mencionado en la introducción de esta investigación, que menciona sobre la disminución en la tasa de natalidad en el país, lo que justifica el crecimiento de la proporción de personas miembros al IMSS con respecto al total de la población por cada quinquenio proyectado.

Esto implica un crecimiento acumulado de la siguiente manera:

Se tiene que el porcentaje de crecimiento acumulado del IMSS es de 85 % mientras que el total de la población en México es de un 24 %.

Una vez que se tienen los valores de las proyecciones de cada quinquenio de personas activas en el IMSS hasta el año 2061 se calcula el número de personas retiradas hasta el mismo año de la siguiente forma: si se tiene que en E_iW_j del periodo x es igual a N cantidad de personas y en $E_{i+5}W_j$ del mismo periodo es igual a M cantidad de personas, primero se calcula cuántas personas de edad i llegan con vida a la edad $i+5$ mediante su valor ${}_5Q_x$ en la tabla de mortalidad dada en el apartado 4.2 , si $(N \times {}_5Q_x) \neq M$ entonces la diferencia de estos valores $(M - N \times {}_5Q_x) > 0$, es la cantidad de personas retiradas. Si $(M - N \times {}_5Q_x) < 0$ se toma el valor de 0.

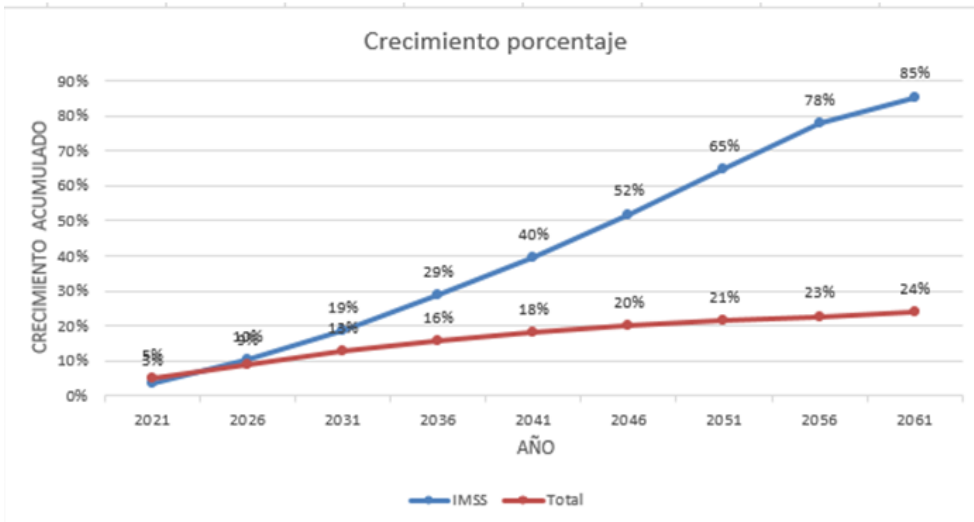


Figura 4.20: Crecimiento acumulado a partir del año 2016 para IMSS y el total de la población.

4.3. Caso 1. Cálculo de Pensiones con el Supuesto de Beneficio Definido al Total de la Población Proyectada, del Año 2016 al Año 2061.

Para realizar el cálculo de pensiones a las personas proyectadas retiradas en cada periodo quinquenal a partir del periodo E11 o 60 años de edad se crea una función en Visual Basic para Excel llamada "pension1" (Anexo III), esta función calcula la pensión de cada una de las personas proyectadas dependiendo de sus características principales como edad, salario, y densidad de cotización según el sistema de reparto de la ley 73. Para la densidad de cotización la cual es desconocida, la CONSAR dice que se comporta de la siguiente forma:

Sub Grupo	% de personas	% Densidad
E_iW_jA	20.9	1 a 24.9
E_iW_jB	17.8	25 a 49.9
E_iW_jC	18.2	50 a 74.9
E_iW_jD	43.2	75 a 100

Figura 4.21: Proporción de densidad de cotización en el IMSS.

Como se desconoce la densidad de cotización de cada una de las personas, se les asigna una distribución de probabilidad uniforme, dividiendo a cada grupo E_iW_j en 4 subgrupos con los diferentes porcentajes de población que proporciona la CONSAR y a cada grupo se le asigna una f.d.p. , $E_iW_jA \sim U(1,24.9)$, $EiWjB \sim U(25,49.9)$, $E_iW_jC \sim U(50,74.9)$, $EiWjD \sim U(75,100)$. Para todo x_i en el subconjunto correspondiente, así la simulación devuelve una densidad de cotización para cada x_i(Ver en anexos el código para la generación de densidad mediante generadores de números aleatorios con distribución uniforme) .

Para el cálculo de la cuantía básica por tratarse de periodos quinquenales se hace un promedio de 85 % para las personas de entre 60 y 64 años (E11) según lo indicado en la Tabla 1.2, de cuantía de las pensiones. Para el porcentaje de cuantía básica dependiendo los salarios de cotización, se realiza también un promedio por salarios completos de 1 a 6 y de 6 en adelante permanecen con un valor constante hasta los 25 salarios (ver Anexo III).

La función, finalmente toma este dato generado aleatoriamente para cada persona y le calcula su pensión. Como resultado la función devuelve la suma en pesos de los montos de las pensiones mensuales de todos los individuos a los que se les calculó y nos dice cuántos de ellos no obtuvo una pensión. El código de la función creada se encuentra en el anexo.

Una vez obtenido el dato para cada E_iW_j de 2021, 2026, 2031,2036, 2041, 2046, 2051, 2056 y 2061, se calcula el promedio de las pensiones para cada E_iW_j desde $i = 1$ hasta 14 y $j = 1$ hasta 25, se grafican los E_iW_j de cada quinquenio al que le correspondan los mismos valores de i y j. Por ejemplo $E_{11}W_{12}$, en este caso todas las personas que tienen de 60 a 64 años y su salario antes de retirarse era equivalente a 12 salarios mínimos; se toman estos mismos datos de cada uno de los años proyectados y se grafican los promedios, también se grafican cuántas personas de cada tipo de E_iW_j del quinquenio x no obtuvieron pensión y se compara con el E_iW_j correspondiente del resto de los quinquenios proyectados.

Para el monto del salario de cada grupo W_j se toma el salario mínimo constante de $73.04, correspondiente al mes de Abril del año 2016, se asume que todos los individuos en etapa de jubilación comenzaron a cotizar en cuando se encontraban entre las edades 20 a 25(E3) .

4.4. Caso 2. Cálculo de Pensiones por Beneficio Definido y Contribución Definida, según el Año de Ingreso de los Pensionados del 2016 al 2061.

Para este caso se toma el pronóstico de beneficio definido hasta el año 2040, debido a que antes de este año no es representativa la cantidad de personas que puedan jubilarse mediante contribución definida. Luego, a partir del año 2041 hasta el 2061 se calcula a la misma proyección de datos resultantes de la simulación, su pensión con el sistema de capitalización de la ley 97. Es importante mencionar que para este cálculo se considera una variable adicional, el sexo de las personas, como se explicó en el capítulo 1 en la sección de cálculo de pensiones por contribución definida existe una variable PNSS (prima neta del seguro de sobrevivencia), la cual maneja un valor diferente dependiendo si se trata de un hombre o de una mujer. Para calcular la pensión a las personas jubiladas a partir del año 2041 se programaron dos funciones en Visual Basic llamadas “Aforesh” y “Aforesm” para calcular la pensión para hombres y mujeres, respectivamente (el código se encuentra en el Anexo III). Los valores que devuelven estas funciones son 4; la suma total de los montos de ahorros de las personas que no cotizaron suficiente para obtener una pensión, cuántas personas no obtuvieron su pensión, suma de los montos mensuales de las pensiones de cada retirado jubilado y finalmente cuántos de ellos sí obtuvieron una pensión. Estas funciones se aplican para cada E_iW_j de las bases de datos.

Antes de comenzar con el cálculo de la pensión, al numero de E_iW_j se le aplica la generación de v.a. con distribución Bernoulli(0.0248,0.742) con

24,8 % de ser mujer y 74,25 % de ser hombre (estos parámetros se tomaron según informes de proporciones de sexo a la edad de retiro de la CONAPO), y de esta forma calcularle su pensión con la función que le corresponda, debido a la prima neta del seguro de sobrevivencia mencionada en la metodología de cálculo para obtener la pensión de una persona en el apartado 1.1.3.

Como se desconoce la densidad de cotización de cada una de las personas, se les asigna una distribución de probabilidad uniforme, dividiendo a cada grupo de igual forma que se hace para el caso de beneficio definido, así la simulación devuelve una densidad de cotización para cada x_i (ver anexo III).

Al igual que en el pronóstico de beneficio definido se asume la edad de ingreso a IMSS de los trabajadores en el periodo E3 y el salario mínimo constante de $73.04.

4.5. Comparación de nivel de Pobreza para cada caso.

Una vez que se tiene la cantidad de jubilados del pronóstico (apartado 4.2), se toma la suma total de personas que no obtuvieron pensión calculadas por las funciones correspondientes a cada una de las leyes y se realiza la comparación.

4.5.1. Sin Pensión.

La siguiente tabla señala el resultado del pronóstico, a la misma cantidad de personas con mismas características se les calcula su pensión, según cada caso de simulación (beneficio definido al total de la población o dependiendo la ley a la que correspondan), si la ley del sistema de reparto estuviera vigente, 536,195 personas de un total de 3,170,881 no serían candidatas a obtener una pensión, mientras que con la ley 97 el número de personas sin pensión aumenta a 1,339,257 personas del total.

	JUBULADOS	SIN PENSION LEY 73	SIN PENSION LEY 97
2016	712,475	119,809	119,809
2021	923,673	154,459	154,459
2026	1,119,430	186,927	186,927
2031	1,293,722	215,826	215,826
2036	951,108	151,857	151,857
2041	1,081,157	178,418	445,539
2046	1,372,968	226,085	564,739
2051	1,708,196	285,213	727,917
2056	1,873,453	312,865	781,589
2061	3,170,881	536,195	1,339,257

Figura 4.22: Personas retiradas sin obtener una pensión para cada uno de los sistemas de pensiones.

En la gráfica se puede observar el cambio en la cantidad de retirados sin pensión desde el año 2041.

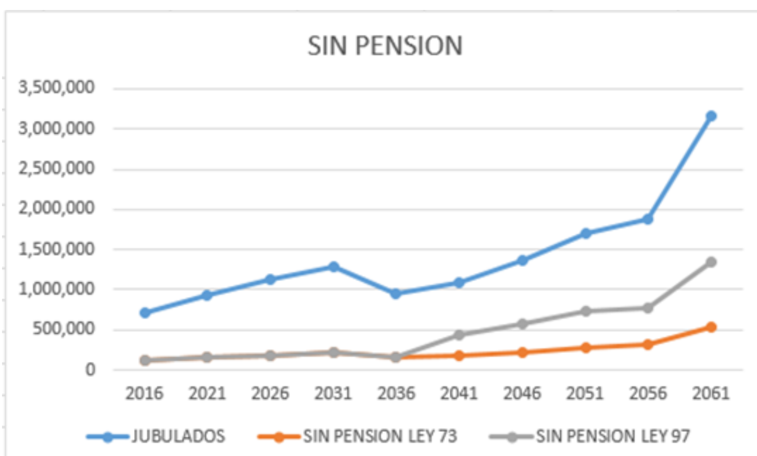


Figura 4.23: Retirados sin pensión.

En la tabla se muestra la proporción de cuántas personas según el sistema, no obtuvieron una pensión en cada uno de los quinquenios proyectados, mientras en la antigua ley la proporción de personas sin pensión se pronostica con un 17 % de la población retirada, con la nueva ley 97 se pronostica hasta un 42 % de población retirada sin obtener una pensión.

	Ley 73	Ley 97
2016	17%	17%
2021	17%	17%
2026	17%	17%
2031	17%	17%
2036	16%	16%
2041	17%	41%
2046	16%	41%
2051	17%	43%
2056	17%	42%
2061	17%	42%

Figura 4.24: proporciones de retirados sin pensión.

Luego, con el factor de mortalidad ${}_5Q_x$ se calculan los jubilados acumulados, es decir, si en el quinquenio x se tienen N personas de edad E11 recién pensionadas, cuántas de estas personas sobrevivirán a la edad E12 al periodo $x+1$ más las personas que acaban de pensionarse a la edad E12. Se hace este proceso para cada periodo x, desde la edad E11 hasta la edad E14.

En la tabla se muestra la cantidad de jubilados acumulados por cada periodo quinquenal y los acumulados sin pensión por cada uno de los dos pronósticos.

Sin Pension	Jubilados Acumulados	Sin Pensión, Ley 73	Sin Pensión, Ley 97
2016	712,475	119,809	119,809
2021	1,513,973	254,395	254,395
2026	2,315,447	389,754	389,754
2031	2,963,040	501,286	501,286
2036	2,936,808	491,075	491,075
2041	2,918,147	488,478	895,497
2046	3,414,798	574,445	1,007,008
2051	3,501,232	587,572	1,283,647
2056	4,427,998	743,508	1,000,390
2061	6,089,430	1,031,574	1,495,835

Figura 4.25: Retirados sin pensión acumulados.

La gráfica de los datos muestra un comportamiento similar a la de los jubilados por periodo.

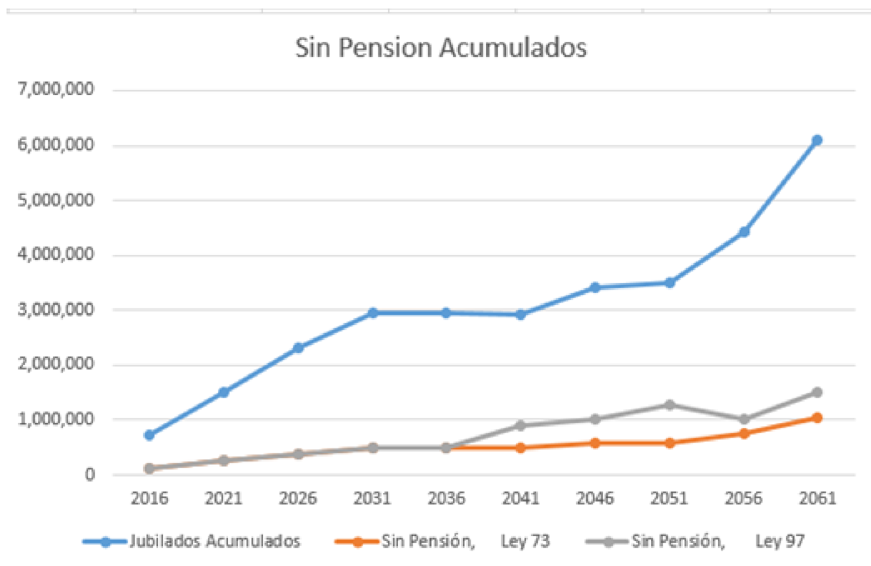


Figura 4.26: Comportamiento de retirados acumulados sin pensión.

Es importante recordar que con la ley 97 donde el sistema de ahorro es individual, si la persona no cotizó el tiempo necesario para ser candidato a una pensión en edad de retiro, entonces se le entrega en un solo pago el monto total de su ahorro durante el tiempo que cotizó en el instituto, estos datos también fueron pronosticados y la tabla muestra los promedios de los ahorros según su salario.

E11	Salario en Pesos Constantes	Ahorro	Periodos Salariales que cubre el ahorro	Años de subsistencia
w1	2400	171970.34	71.65430838	5.971192365
w2	4800	266283.44	55.47571751	4.622976459
w3	7200	357995.67	49.72162042	4.143468369
w4	9600	444180.37	46.2687881	3.855732341
w5	12000	536503.85	44.70865388	3.725721157
w6	14400	632090.12	43.89514704	3.65792892
w7	16800	711801.7	42.36914871	3.530762392
w8	19200	801845.17	41.76276941	3.480230784
w9	21600	893882.83	41.38346435	3.448622029
w10	24000	972904.67	40.53769444	3.378141203
w11	26400	1081794.6	40.97706798	3.414755665
w12	28800	1167654.3	40.54355179	3.378629316
w13	31200	1268583.6	40.65973024	3.388310853
w14	33600	1338549.6	39.83778629	3.319815524
w15	36000	1443937	40.10935986	3.342446655
w16	38400	1528383.4	39.80165135	3.316804279
w17	40800	1621364.4	39.73932329	3.311610274
w18	43200	1723754.3	39.90172058	3.325143382
w19	45600	1797082.3	39.40969986	3.284141655
w20	48000	1880828.7	39.18393038	3.265327532
w21	50400	1952052	38.7311904	3.2275992
w22	52800	2071978.1	39.2420104	3.270167533
w23	55200	2165095	39.22273551	3.268561292
w24	57600	2298127.7	39.89805115	3.324837596
w25	60000	2332109.4	38.86848968	3.239040807
Promedio			42.95614444	3.579678703

(a) en las edades de 60 a 64años.

E12	Salario en Pesos Constantes	Ahorro	Periodos Salariales que cubre el ahorro	Años de subsistencia
w1	2400	196768.39	81.986827	6.83223562
w2	4800	297183.74	61.913279	5.159439914
w3	7200	398938.74	55.408158	4.617346487
w4	9600	498775.96	51.955829	4.329652441
w5	12000	597878.76	49.82323	4.151935804
w6	14400	698523.67	48.508588	4.04238235
w7	16800	800809.9	47.667256	3.972271333
w8	19200	884151.6	46.049563	3.837463562
w9	21600	996337.13	46.126719	3.843893261
w10	24000	1084297.2	45.17905	3.764920806
w11	26400	1196677.8	45.328703	3.777391916
w12	28800	1290170.7	44.797595	3.733132927
w13	31200	1420107.2	45.516258	3.793021494
w14	33600	1512013.5	45.000401	3.750033424
w15	36000	1615703.2	44.880645	3.740053772
w16	38400	1712518.9	44.596847	3.716403936
w17	40800	1768658	43.349461	3.612455073
w18	43200	1932460.9	44.73289	3.727740874
w19	45600	1972162.6	43.24918	3.604098375
w20	48000	2119901.2	44.164608	3.680383992
w21	50400	2177740	43.209126	3.600760513
w22	52800	2380548.1	45.086139	3.757178221
w23	55200	2393011.4	43.351655	3.612637925
w24	57600	2542905.3	44.147661	3.678971753
w25	60000	2635049.8	43.917496	3.659791372
Promedio				3.999823886

(b) en las edades de 65 a 69años.

E13	Salario en Pesos Constantes	Ahorro	Periodos Salariales que cubre el ahorro	Años de subsistencia
w1	2400	218167.53	90.903136	7.575261363
w2	4800	332680.42	69.308421	5.775701738
w3	7200	447765.45	62.189646	5.182470474
w4	9600	555727.65	57.888297	4.824024714
w5	12000	669263.43	55.771952	4.647662693
w6	14400	783499.59	54.409694	4.534141134
w7	16800	895601.61	53.30962	4.442468309
w8	19200	995084.78	51.827332	4.318944361
w9	21600	1127008.6	52.176326	4.348027184
w10	24000	1230476.1	51.269836	4.272486294
w11	26400	1333928.8	50.527605	4.210633714
w12	28800	1440763.9	50.026524	4.168877027
w13	31200	1560837.8	50.026853	4.168904454
w14	33600	1673826.5	49.816266	4.151355494
w15	36000	1801199.1	50.033309	4.169442449
w16	38400	1968332.1	51.258648	4.271553973
w17	40800	2021392.3	49.543929	4.128660735
w18	43200	2121775.5	49.115173	4.092931063
w19	45600	2281896.4	50.041587	4.170132224
w20	48000	2423860.4	50.497091	4.208090921
w21	50400	2463219.7	48.873406	4.072783869
w22	52800	2586143	48.979981	4.081665099
w23	55200	2747326.6	49.77041	4.147534161
w24	57600	2863533.3	49.71412	4.14284331
w25	60000	2920174.2	48.669571	4.055797543
Promedio				4.486495772

(c) en las edades de 70 a 74años.

E14	Salario en Pesos Constantes	Ahorro	Periodos Salariales que cubre el ahorro	Años de subsistencia
w1	2400	251172.43	104.65518	8.721264786
w2	4800	376149.03	78.364382	6.530365176
w3	7200	501200.61	69.611196	5.800932958
w4	9600	616508.57	64.219642	5.35163685
w5	12000	745265.53	62.105461	5.175455078
w6	14400	864880.12	60.061119	5.005093272
w7	16800	1038408.7	61.810044	5.150836959
w8	19200	1155228.7	60.168159	5.014013282
w9	21600	1221634.1	56.557136	4.713094652
w10	24000	1326392.1	55.266337	4.60552811
w11	26400	1506901.5	57.079602	4.756633468
w12	28800	1572163.6	54.589013	4.549084377
w13	31200	1727671.2	55.374078	4.614506475
w14	33600	1872161.3	55.719085	4.643257113
w15	36000	2056607.7	57.127993	4.760666069
w16	38400	2084352.7	54.280018	4.523334829
w17	40800	2252122.2	55.199073	4.599922729
w18	43200	2269660.6	52.53844	4.378203365
w19	45600	2321615.5	50.91262	4.242718351
w20	48000	2691624.6	56.075512	4.672959339
w21	50400	2805410.1	55.662899	4.638574879
w22	52800	2919195.6	55.287795	4.607316279
w23	55200	3055770.4	55.358159	4.613179936
w24	57600	3212697	55.775989	4.6479991
w25	60000	3369623.6	56.160393	4.680032731
Promedio			59.998373	4.999864407

(d) en las edades de 75 a 79años.

Figura 4.27: Años promedio de duración del ahorro en AFORES para quienes no obtienen una pensión.

En las tablas se puede observar los promedios de los ahorros hechos por personas que no alcanzan a obtener una pensión desde las edades de 60 a 64 años (E11) hasta las edades de 75 a 79 años (E14). Con el supuesto de que las personas planean vivir con ese ahorro durante su vejez y desean administrarlo de manera salarial mensualmente, se observa que para los distintos rangos salariales a las personas de entre 60 y 64 años su ahorro en promedio les puede durar 3.57 años, pero su probabilidad de sobrevivir 5 años más según la tabla de mortalidad es de 0.905, por lo que para el 90.5 % de esta población no es suficiente este ahorro para vivir el tiempo que tiene de vida. Para las personas de entre 65 y 69 años en promedio su ahorro se puede administrar durante 3.99 años que es más tiempo que en el caso anterior y su probabilidad de mantenerse con vida hasta el siguiente periodo quinquenal es de 86.78 % por lo que tampoco sería suficiente si desea vivir el resto de su vida con este ahorro. Para las personas de 70 a 74 años el promedio de años de duración del ahorro es de 4.48 años y a las personas de entre 75 y 79 años con 4.99 años aún con probabilidad de sobrevivir cinco años más, existe mayor probabilidad de que su ahorro pueda cubrir sus necesidades el resto de su vida.

4.5.2. Pensión Promedio.

Para las personas que sí obtienen una pensión en ambos casos, se hace una comparación de los montos de las pensiones en cada uno de los quinquenios pronosticados, tomando en cuenta pesos constantes.

En la tabla 4.28 se observa que para las personas que perciben entre uno y dos salarios mínimos no reduce significativamente el monto de su pensión en ninguno de los dos casos, esto se debe a la pensión mínima garantizada de cada una de las leyes, es decir, si su salario es menor a la PMG automáticamente esta PMG será el monto de su pensión. Para las personas con más altos salarios, el monto promedio de la pensión por la antigua ley es correspondiente al 75 % del último salario cotizado, mientras que con el sistema de capitalización es de 25 %, el motivo por el que la pensión es muy baja en el sistema de capitalización con respecto al salario se debe a la tasa de ahorro obligatoria del 6.5 % del salario, descontando inflación se tiene una tasa real del 3.5 %.

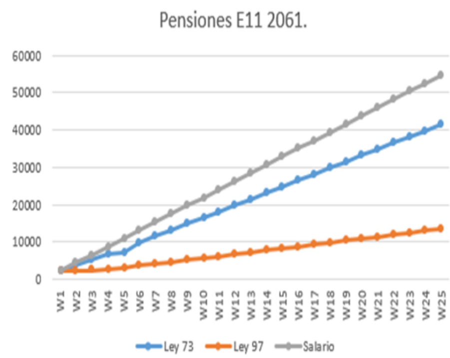
La gráfica 4.29 muestra el comportamiento de las pensiones en el sistema de capitalización con respecto al salario correspondiente, para cada grupo de edad de jubilación. (E11, E12, E13, E14).

La proporción del monto de la pensión respecto al salario según los dife-

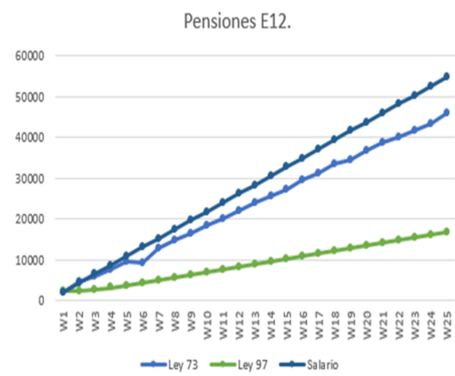
	2041		2046		2051		2056		2061				
	Ley 73	Ley 97	Ley 73	Ley 97	Ley 73	Ley 97	Ley 73	Ley 97	Ley 73	Ley 97	Salario	Proporción Ley 73.	Proporción Ley 97.
W1	2339.8187	2491.02	2332.4159	2491.02	2338.9148	2491.02	2338.9148	2491.02	2339.4297	2491.02	2191.2	106.76%	113.68%
W2	3812.6831	2491.02	3813.7141	2491.02	3811.7248	2491.02	3811.7248	2491.02	3812.7788	2491.02	4382.4	87.00%	56.84%
W3	5355.5276	2496.1272	5352.1308	2494.9969	5355.2287	2494.834	5355.2287	2494.7318	5354.706	2494.7641	6573.6	81.46%	37.95%
W4	6894.8269	2725.2316	6886.3773	2708.6265	6894.7825	2704.7537	6894.7825	2705.2204	6893.739	2704.6183	8764.8	78.65%	30.86%
W5	7134.9221	3167.3286	7120.4031	3143.9935	7147.6505	3138.5754	7147.6505	3140.4979	7134.2847	3140.0042	10956	65.12%	28.66%
W6	9940.2563	3679.1727	9942.2448	3644.5413	9941.9256	3637.2873	9941.9256	3639.9735	9946.7271	3640.8601	13147.2	75.66%	27.69%
W7	11599.267	4182.9098	11608.107	4149.6158	11581.77	4143.1883	11581.77	4140.5618	11587.05	4140.4063	15338.4	75.54%	26.99%
W8	13291.553	4712.4766	13249.226	4672.074	13292.196	4660.1168	13292.196	4667.6008	13270.077	4663.4155	17529.6	75.70%	26.60%
W9	14884.639	5239.0319	14922.11	5197.9594	14890.728	5184.1284	14890.728	5191.1115	14894.336	5189.5065	19720.8	75.53%	26.31%
W10	16575.129	5743.7048	16532.564	5697.8236	16480.388	5700.0624	16480.388	5695.0409	16561.969	5683.103	21912	75.58%	25.94%
W11	18210.623	6277.6438	18207.154	6227.5782	18236.727	6203.1833	18236.727	6201.4526	18175.458	6213.1634	24103.2	75.41%	25.78%
W12	19876.217	6799.7831	19882.471	6763.4109	19934.726	6730.1426	19934.726	6740.2648	19905.845	6742.6008	26294.4	75.70%	25.64%
W13	21691.684	7316.2983	21570.526	7282.3229	21591.1	7279.7817	21591.1	7256.6273	21539.599	7246.5035	28485.6	75.62%	25.44%
W14	23119.869	7820.8725	23212.012	7784.6397	24988.301	7783.3976	24988.301	7780.9026	23173.289	7792.6967	30676.8	75.54%	25.40%
W15	24902.981	8386.3329	24863.651	8308.5787	24857.197	8333.1987	24857.197	8310.9369	24883.403	8296.6405	32868	75.71%	25.24%
W16	26583.759	8907.1805	26404.489	8847.2777	26383.771	8827.7951	26383.771	8834.3289	26524.176	8828.5055	35059.2	75.66%	25.18%
W17	28060.508	9437.5176	28170.542	9362.0223	28221.651	9373.3141	28221.651	9350.5333	28171.35	9357.3098	37250.4	75.63%	25.12%
W18	29736.909	9985.8661	29917.098	9877.4358	29780.613	9885.188	29780.613	9877.0129	29843.411	9862.3095	39441.6	75.66%	25.00%
W19	31507.238	10451.843	31482.383	10427.296	31619.755	10412.846	31619.755	10372.945	31554.515	10421.219	41632.8	75.79%	25.03%
W20	32972.647	11065.135	33161.931	10936.768	33185.793	10924.752	33185.793	10907.734	33271.849	10883.147	43824	75.92%	24.83%
W21	34861.217	11554.352	34874.406	11461.935	34988.225	11429.313	34988.225	11479.554	34976.346	11446.288	46015.2	76.01%	24.88%
W22	36553	12075.201	36390.507	11978.522	29740.96	11982.164	29740.96	11980.815	36619.956	11980.779	48206.4	75.96%	24.85%
W23	37969.167	12552.201	37935.816	12490.863	38349.361	12476.375	38349.361	12497.212	38147.8	12479.668	50397.6	75.69%	24.76%
W24	39902.919	13107.262	39816.843	13046.163	39844.606	13096.546	39844.606	13048.828	39801.925	13009.172	52588.8	75.69%	24.74%
W25	41306.09	13676.79	2.6668612	13566.964	41464.706	13523.95	41464.706	13551.132	41387.856	13542.044	54780	75.55%	24.72%

Figura 4.28: Pensión promedio.

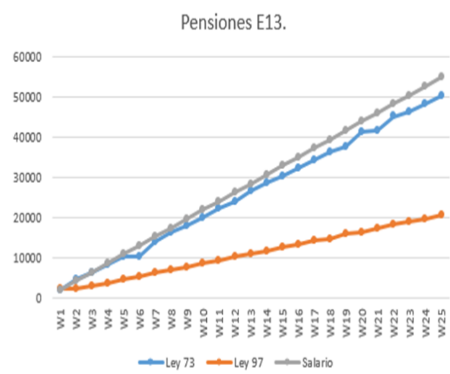
rentes niveles salariales crece si se jubilan con mayor edad, se puede observar en la tabla que a las personas de 60 años en promedio su pensión es del 25 % del salario y al final para las personas de 75 años llega en promedio al 50 % del salario. a pesar de este crecimiento no llega a compararse con el promedio de las pensiones de la antigua ley del 75 %.



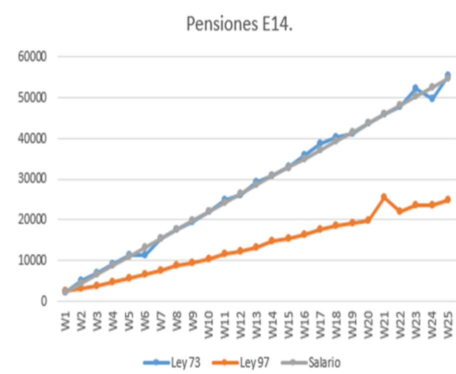
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.29: Pensiones según el sistema y la edad de retiro.

4.5.3. Suma de las Pensiones Anuales.

A partir de los datos obtenidos mediante las funciones creadas para calcular montos de las pensiones según la ley, se obtiene la suma de los montos mensuales de pensiones para aquellos que sí fueron candidatos a obtener una pensión. La tabla indica en pesos constantes, las sumas de las pensiones por quinquenio.

Los montos pagados en pensiones a partir del periodo 2041-2045 cuando comienzan las jubilaciones de la primera generación de la ley 97, son el 26 % de la suma de pensiones si permaneciera el sistema de reparto. Para el periodo de 2046-2050 se estima representará al 30.2 % , para el periodo 2051-2055 el 32.5 %, para el periodo 2056-2060 el 30.01 % y para 2061-2065 podría llegar

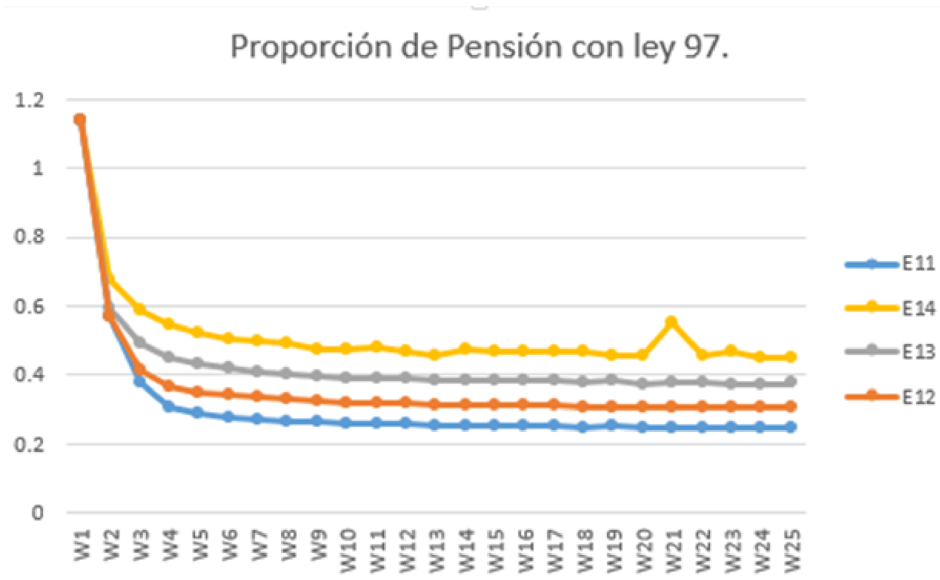


Figura 4.30: Proporción de pensiones con respecto al salario, según la edad de retiro con ley 97.

	Pensión Suma Quinquenal, Ley 73	Pensión Suma Quinquenal, Ley 97
2016-2020	$353,029,126,011.60	$353,029,126,011.60
2021-2025	$427,788,344,880.60	$427,788,344,880.60
2026-2030	$468,960,359,946.60	$468,960,359,946.60
2031-2035	$521,931,692,405.40	$521,931,692,405.40
2036-2040	$524,686,778,502.00	$524,686,778,502.00
2041-2045	$606,758,813,898.60	$159,178,381,870.80
2046-2050	$659,750,679,616.80	$199,680,054,912.00
2051-2055	$706,948,288,539.60	$229,762,430,517.60
2056-2060	$890,267,098,549.80	$267,245,374,673.40
2061-2065	$1,072,637,979,222.60	$437,425,426,996.20

Figura 4.31: Montos de pagos en pensiones por quinquenio.

hasta un 40 %. Estos montos indican la disminución de ingresos en personas en edad de retiro lo que provocaría un incremento en el nivel de pobreza para las personas de 60 años en adelante. El total del monto de las pensiones desde el año 2016 hasta el año 2061 según el pronóstico es de $6,232,759,161,573.60 para beneficio definido y $3,589,687,970,716.20 para contribuciones definidas,

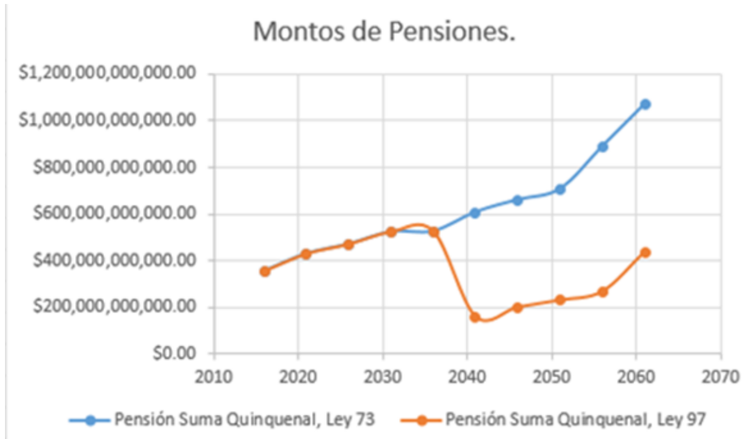


Figura 4.32: Cambio de montos pagados en pensiones por nueva Ley.

teniendo una pérdida de $2,643,071,190,857.40 en pagos de pensiones durante este periodo simulado.

Si bien se tiene como resultado un decremento en el nivel de pobreza para las personas de 60 años en adelante, debido a los montos de las pensiones que serán pagadas en comparación con los montos que pudieron ser obtenidos si se mantuviera el sistema de reparto el cual ya no es viable sostener. El problema principal de los montos tan bajos en las pensiones para el sistema de capitalización en México se debe al porcentaje de ahorro en AFORES y al escaso ahorro voluntario por lo que si el porcentaje incrementara al igual que la edad de retiro se obtendrían mayores montos en las pensiones.

Bibliografía

[1] Reuven Y. Rubinstein.(1981). Simulation and the Monte Carlo Method. Jhon Wiley and Sons.

[2] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot. (2008). Loss Models. New Jersey. Wiley and Sons.

[3] Konishi, S. and Kitagawa, G. (2008). Information Criteria and Statistical Modeling, Springer Series in Statistics. New York. Springer Verlag.

[4] Thomas N. Herzog,Graham Lord.. (2002). Applications of Monte Carlo Methods to Finance and Insurance. USA, Actex.

[5] Antonio Ortega. (2007). Tablas de Mortalidad. Costa Rica: Centro Latinoamericano de Estudios en Demografía.

[6] Michael Rees. (2015). Business Risk and Simulation Modelling in Practice Using Excel, VBA and @RISK. United Kingdom. Wiley.

[7] Insituto Mexicano del Seguro Social. (2001). Asegurados 2001. Septiembre 2016, de IMSS Sitio web: http://datos.imss.gob.mx/dataset/asegurados-2001.

[8] Insituto Mexicano del Seguro Social. (2006). Asegurados 2006. Septiembre 2016, de IMSS Sitio web: http://datos.imss.gob.mx/dataset/asegurados-2006.

[9] Insituto Mexicano del Seguro Social. (2011). Asegurados 2011. Septiembre 2016, de IMSS Sitio web: http://datos.imss.gob.mx/dataset/asegurados-2011.

[10] Insituto Mexicano del Seguro Social. (2016). Asegurados 2016. Septiembre 2016, de IMSS Sitio web: http://datos.imss.gob.mx/dataset/asegurados-2016.

[11] Instituto Mexicano del Seguro Social. (1973). Ley del Seguro Social. México: IMSS Sitio web: http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/leyes/4129.pdf

[12] Instituto Mexicano del Seguro Social. (1997). Ley del Seguro Social. México: IMSS.

[13] OECD. (2015). Pensions at a Glance : Design of pension systems. Diciembre 2016, de OECD Sitio web: http://stats.oecd.org http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=PAG

[14] Consejo Nacional de Población. (2010). Proyecciones de la Población 2010-2050. Enero 2017, de CONAPO Sitio web: http://www.conapo.gob.mx/es/CONAPO/Proyecciones.

Apéndice A

Anexo I: Método de Muestra-Media Monte Carlo

Otra forma de calcular la integral

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

es representarla como un valor esperado de alguna variable aleatoria. En efecto, se puede reescribir la integral como

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{f_X(x)} f_X(x)dx,$$

asumiendo que $f_X(x)$ es una f.d.p. tal que $f_X(x) > 0$ cuando $g(x) \neq 0$.

Entonces

$$I = E\left[\frac{g(X)}{f_X(x)}\right],$$

donde la variable aleatoria X es distribuida de acuerdo a $f_X(x)$.

Se asume por simplicidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

entonces

$$E[g(X)] = \frac{I}{b-a}$$

y

$$I = (b-a)E[g(X)].$$

Un estimador insesgado de I es la media muestral

$$\theta_2 = (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i).$$

La varianza de θ_2 es igual a $E(\theta_2^2) - [E(\theta_2)]^2$, así que

$$var\theta_2 = var\left[\frac{1}{N}(b-a)\sum_{i=1}^{N} g(X_i)\right] = \frac{1}{N}\left[(b-a)^2\int_a^b g^2(x)\frac{1}{b-a}dx - I^2\right]$$

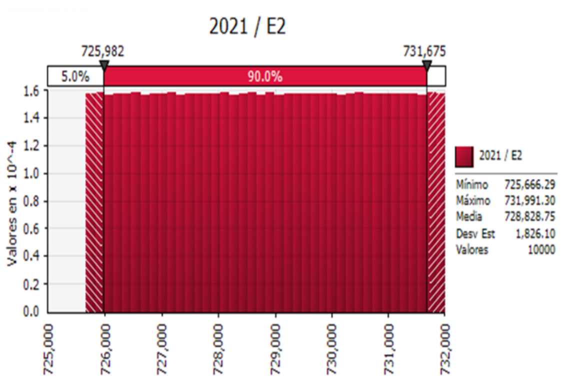
$$= \frac{1}{N}\left[(b-a)\int_a^b g^2(x)dx - I^2\right]$$

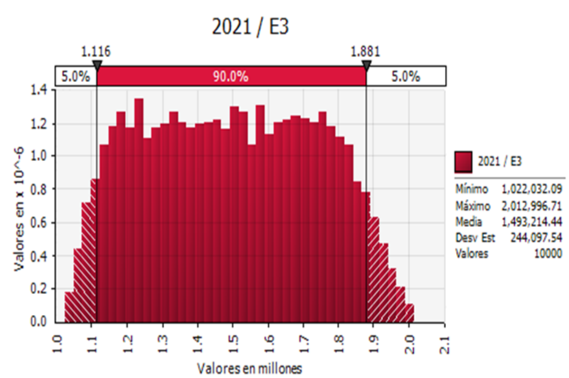
Algoritmo Muestra-Media Monte Carlo

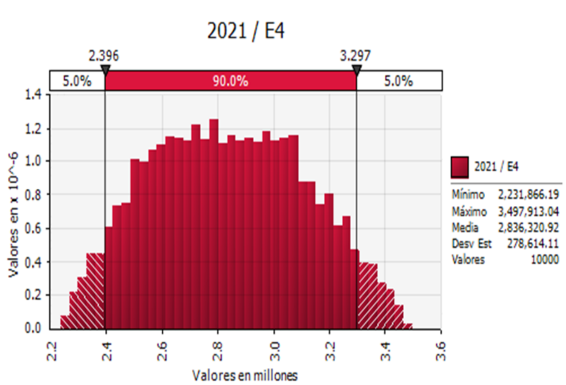
1. Generar una secuencia $\{U_i\}_{i=1}^{N}$ de N números aleatorios.
2. Calcular $X_i = a + U_i(b-a),\ i = 1, ..., N$.
3. Calcular $g(X_i),\ i = 1, ..., N$.
4. Calcular la media muestral θ_2 de acuerdo a la fórmula antes mencionada, la cual estima a I.

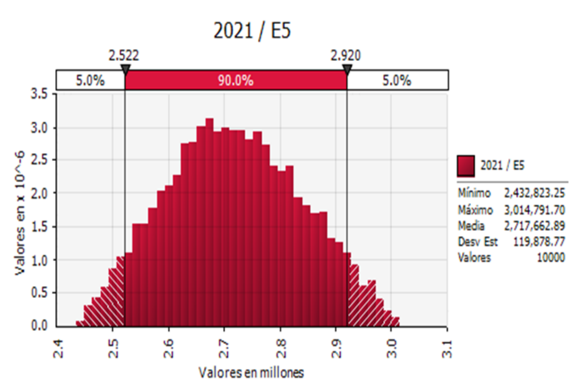
Apéndice B

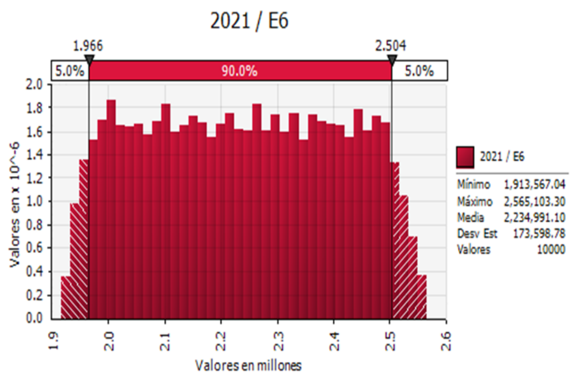
Anexo II: Resultados de la Simulación

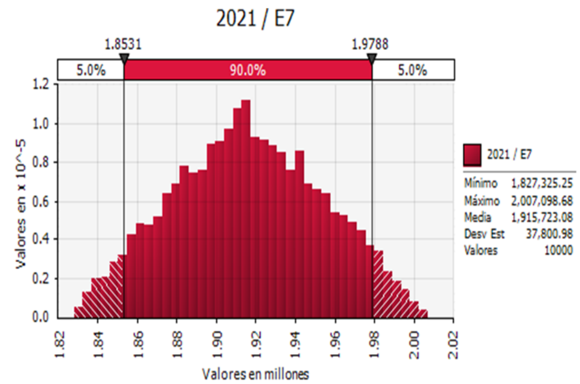


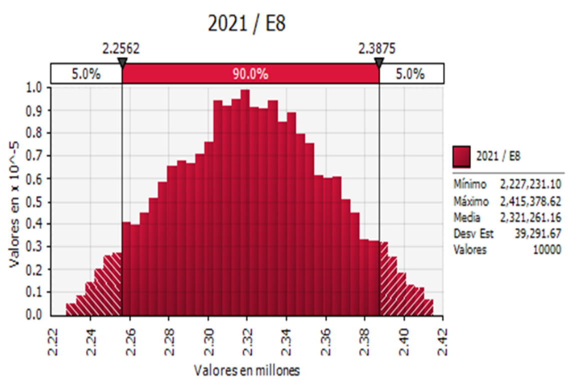


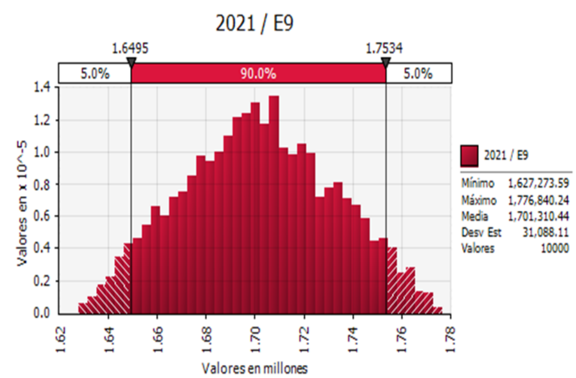


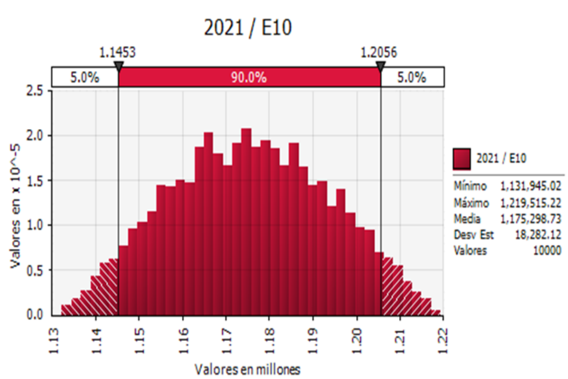


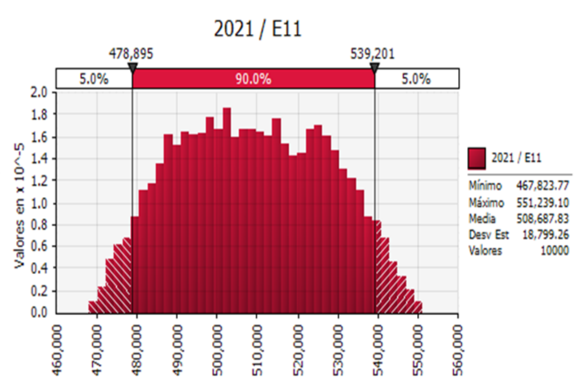

2021 / E6
1.966
2.504
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2021 / E6
Mínimo 1,913,567.04
Máximo 2,565,103.30
Media 2,234,991.10
Desv Est 173,598.78
Valores 10000

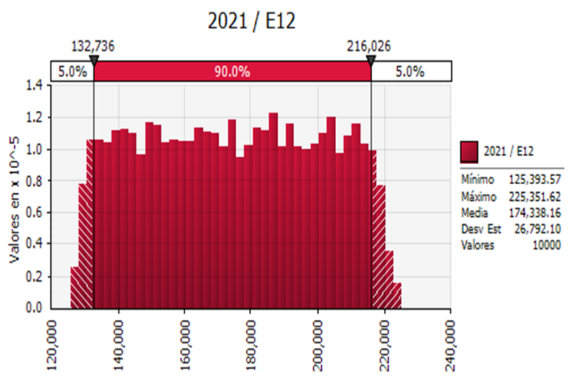

2021 / E7
1.8531
1.9788
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2021 / E7
Mínimo 1,827,325.25
Máximo 2,007,098.68
Media 1,915,723.08
Desv Est 37,800.98
Valores 10000

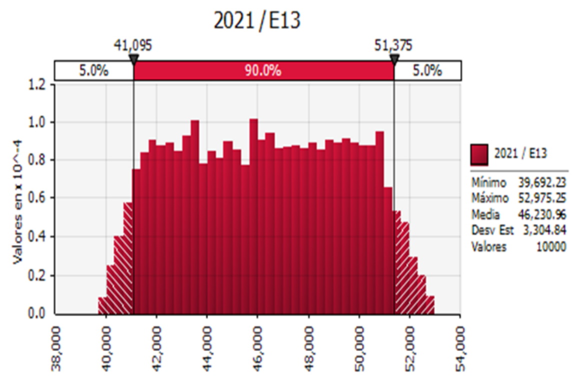

2021 / E8
2.2562
2.3875
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2021 / E8
Mínimo 2,227,231.10
Máximo 2,415,378.62
Media 2,321,261.16
Desv Est 39,291.67
Valores 10000

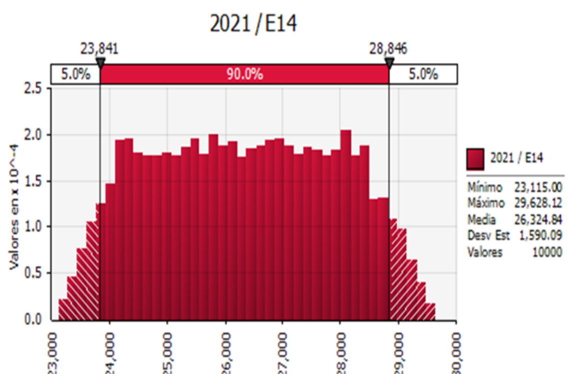

2021 / E9
1.6495
1.7534
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2021 / E9
Mínimo 1,627,273.59
Máximo 1,776,840.24
Media 1,701,310.44
Desv Est 31,088.11
Valores 10000

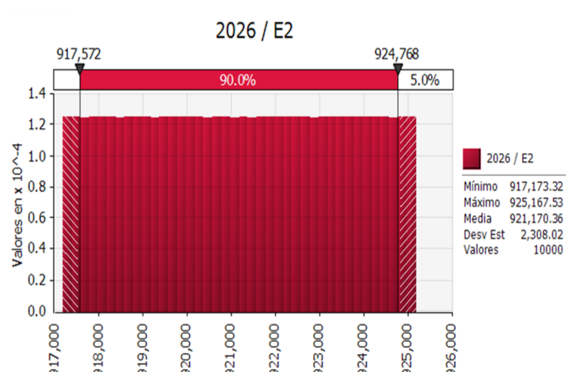

2021 / E10
1.1453
1.2056
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2021 / E10
Mínimo 1,131,945.02
Máximo 1,219,515.22
Media 1,175,298.73
Desv Est 18,282.12
Valores 10000

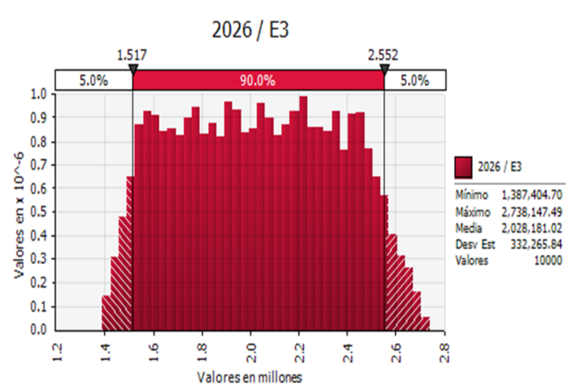

2021 / E11
478,895
539,201
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2021 / E11
Mínimo 467,823.77
Máximo 551,239.10
Media 508,687.83
Desv Est 18,799.26
Valores 10000

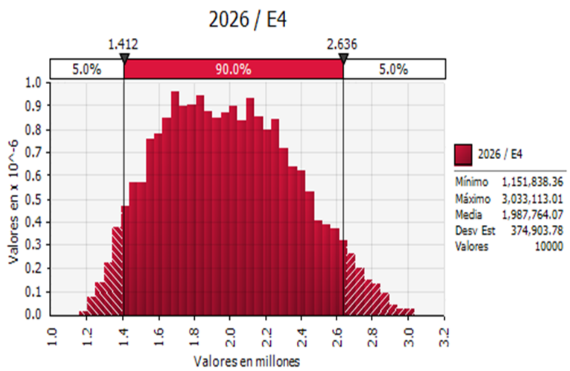

2021 / E12
132,736
216,026
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2021 / E12
Mínimo 125,393.57
Máximo 225,351.62
Media 174,338.16
Desv Est 26,792.10
Valores 10000

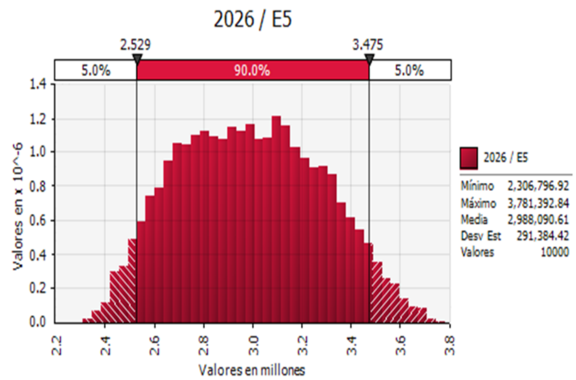

2021 / E13
41,095
51,375
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-4
2021 / E13
Mínimo 39,692.23
Máximo 52,975.25
Media 46,230.96
Desv Est 3,304.84
Valores 10000

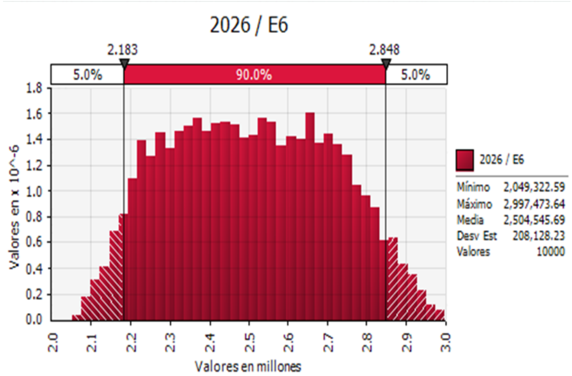

2021 / E14
23,841
28,846
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-4
2021 / E14
Mínimo 23,115.00
Máximo 29,628.12
Media 26,324.84
Desv Est 1,590.09
Valores 10000

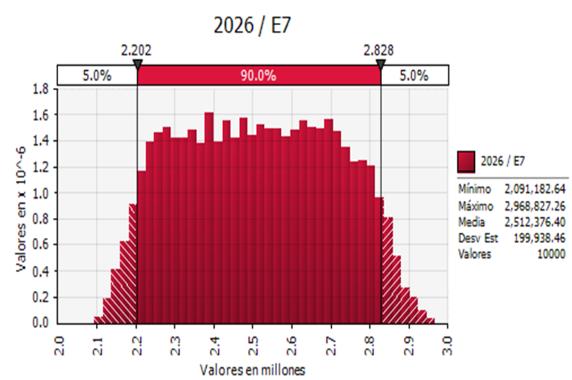

2026 / E2
917,572
924,768
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-4
2026 / E2
Mínimo 917,173.32
Máximo 925,167.53
Media 921,170.36
Desv Est 2,308.02
Valores 10000

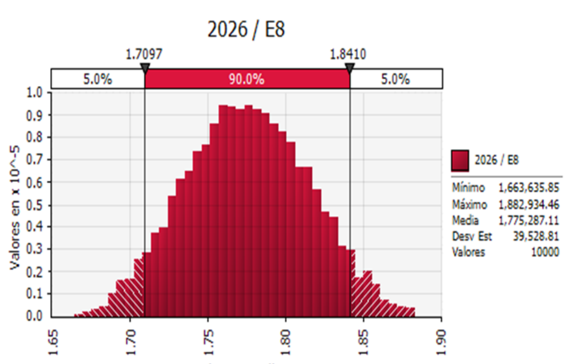

2026 / E3
1.517
2.552
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2026 / E3
Mínimo 1,387,404.70
Máximo 2,738,147.49
Media 2,028,181.02
Desv Est 332,265.84
Valores 10000

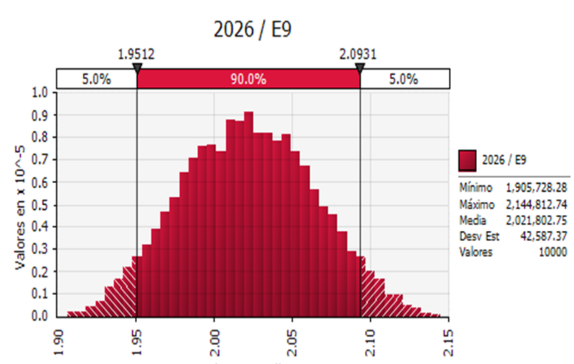

2026 / E4
1.412
2.636
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2026 / E4
Mínimo 1,151,838.36
Máximo 3,033,113.01
Media 1,987,764.07
Desv Est 374,903.78
Valores 10000

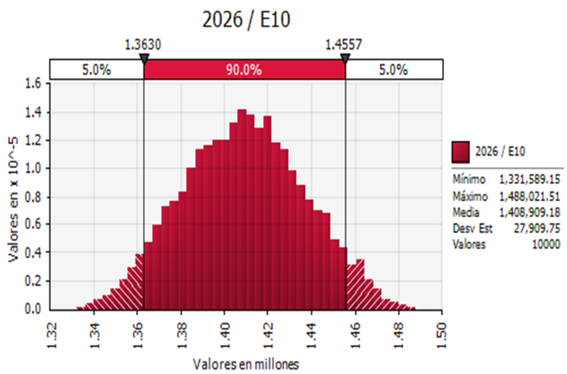

2026 / E5
2.529
3.475
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2026 / E5
Mínimo 2,306,796.92
Máximo 3,781,392.84
Media 2,988,090.61
Desv Est 291,384.42
Valores 10000

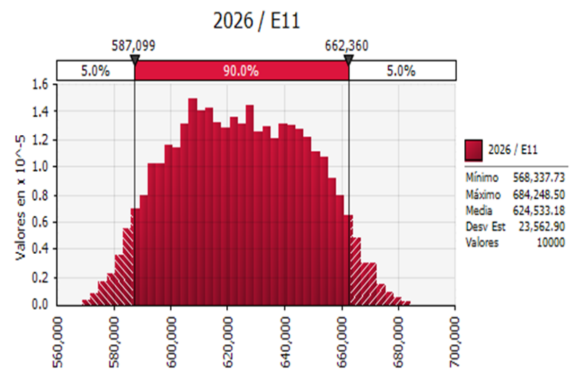

2026 / E6
2.183
2.848
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2026 / E6
Mínimo 2,049,322.59
Máximo 2,997,473.64
Media 2,504,545.69
Desv Est 208,128.23
Valores 10000

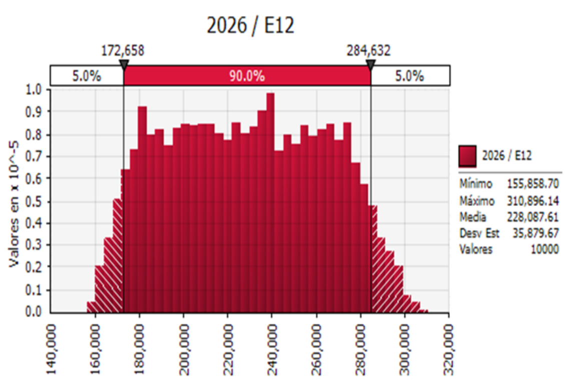

2026 / E7
2.202
2.828
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2026 / E7
Mínimo 2,091,182.64
Máximo 2,968,827.26
Media 2,512,376.40
Desv Est 199,938.46
Valores 10000

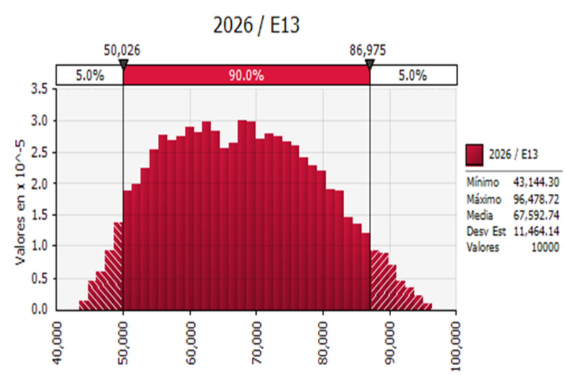

2026 / E8
1.7097
1.8410
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2026 / E8
Mínimo 1,663,635.85
Máximo 1,882,934.46
Media 1,775,287.11
Desv Est 39,528.81
Valores 10000

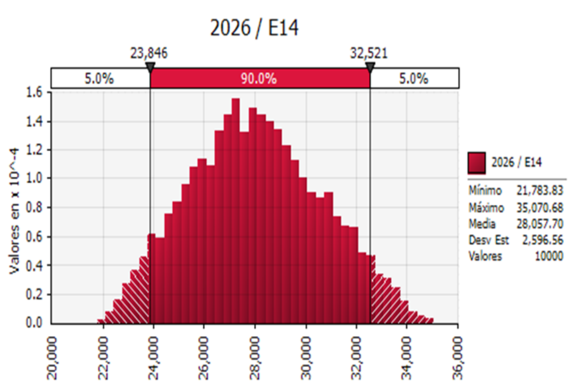

2026 / E9
1.9512
2.0931
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2026 / E9
Mínimo 1,905,728.28
Máximo 2,144,812.74
Media 2,021,802.75
Desv Est 42,587.37
Valores 10000

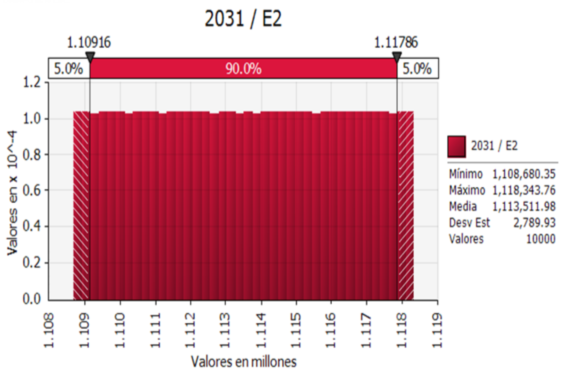

2026 / E10
1.3630
1.4557
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2026 / E10
Mínimo 1,331,589.15
Máximo 1,488,021.51
Media 1,408,909.18
Desv Est 27,909.75
Valores 10000

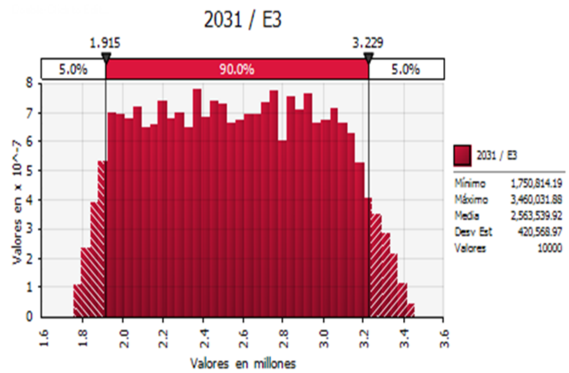

2026 / E11
587,099
662,360
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2026 / E11
Mínimo 568,337.73
Máximo 684,248.50
Media 624,533.18
Desv Est 23,562.90
Valores 10000

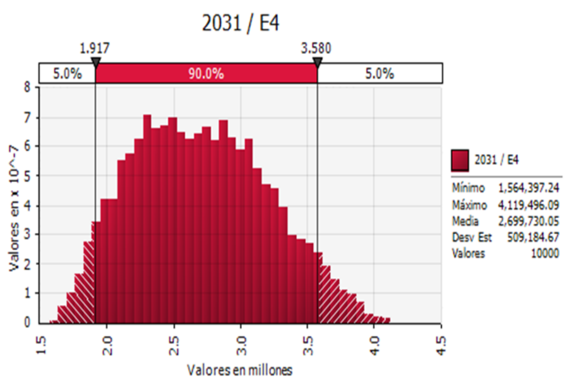

2026 / E12
172,658
284,632
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2026 / E12
Mínimo 155,858.70
Máximo 310,896.14
Media 228,087.61
Desv Est 35,879.67
Valores 10000

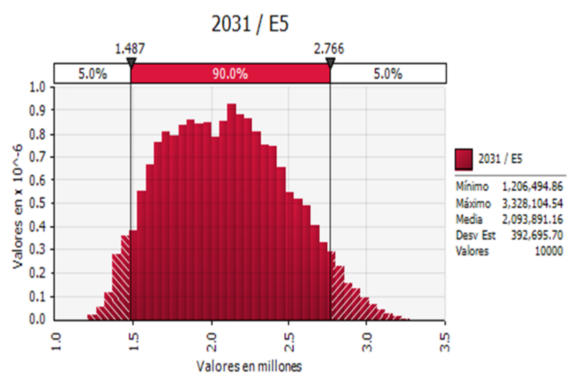

2026 / E13
50,026
86,975
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2026 / E13
Mínimo 43,144.30
Máximo 96,478.72
Media 67,592.74
Desv Est 11,464.14
Valores 10000

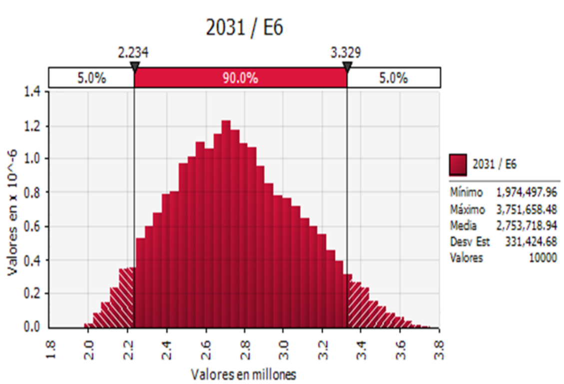

2026 / E14
23,846
32,521
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-4
2026 / E14
Mínimo 21,783.83
Máximo 35,070.68
Media 28,057.70
Desv Est 2,596.56
Valores 10000

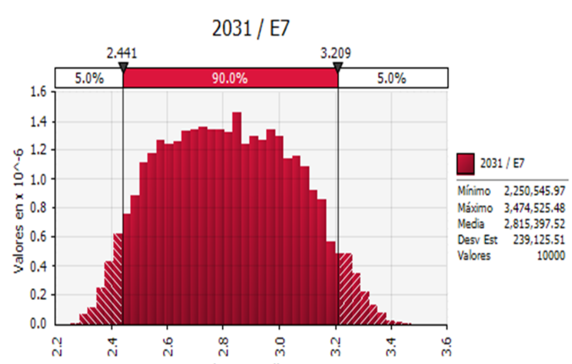

2031 / E2
1.10916
1.11786
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-4
Valores en millones
2031 / E2
Mínimo 1,108,680.35
Máximo 1,118,343.76
Media 1,113,511.98
Desv Est 2,789.93
Valores 10000

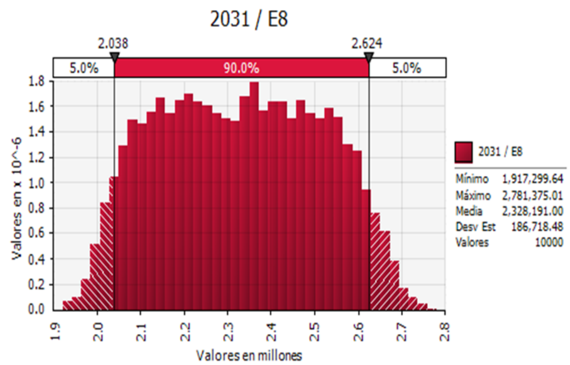

2031 / E3
1.915
3.229
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2031 / E3
Mínimo 1,750,814.19
Máximo 3,460,031.88
Media 2,563,539.92
Desv Est 420,568.97
Valores 10000

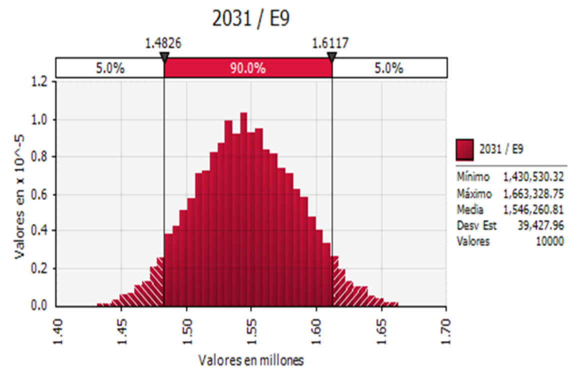

2031 / E4
1.917
3.580
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2031 / E4
Mínimo 1,564,397.24
Máximo 4,119,496.09
Media 2,699,730.05
Desv Est 509,184.67
Valores 10000

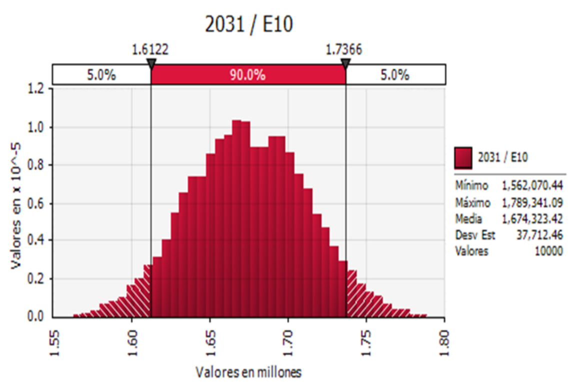

2031 / E5
1.487
2.766
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2031 / E5
Mínimo 1,206,494.86
Máximo 3,328,104.54
Media 2,093,891.16
Desv Est 392,695.70
Valores 10000

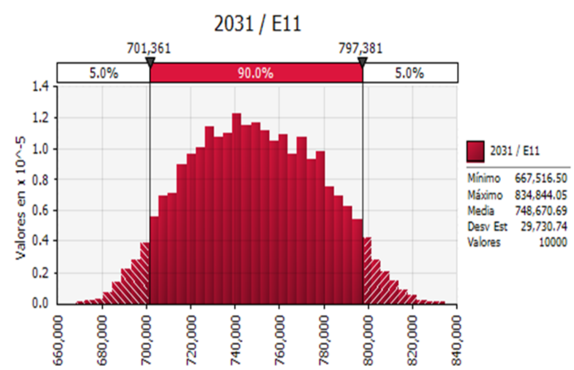

2031 / E6
2.234
3.329
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2031 / E6
Mínimo 1,974,497.96
Máximo 3,751,658.48
Media 2,753,718.94
Desv Est 331,424.68
Valores 10000

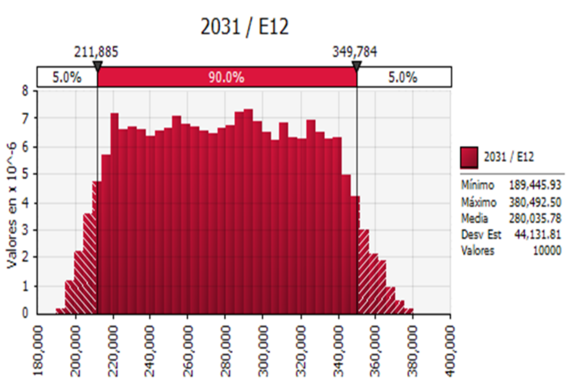

2031 / E7
2.441
3.209
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2031 / E7
Mínimo 2,250,545.97
Máximo 3,474,525.48
Media 2,815,397.52
Desv Est 239,125.51
Valores 10000

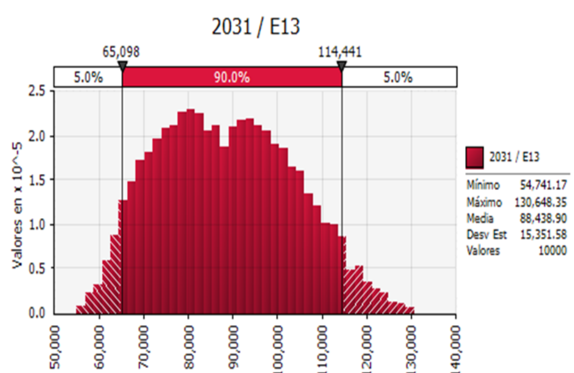

2031 / E8
2.038
2.624
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2031 / E8
Mínimo 1,917,299.64
Máximo 2,781,375.01
Media 2,328,191.00
Desv Est 186,718.48
Valores 10000
Valores en millones

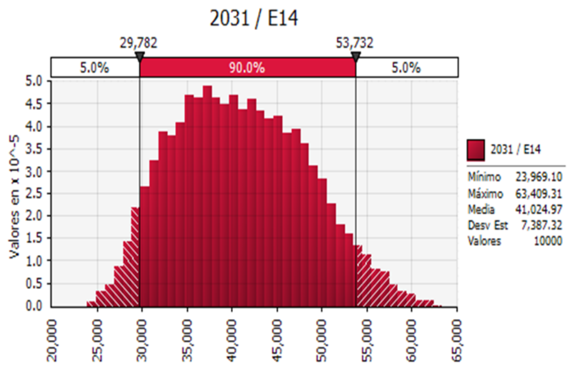

2031 / E9
1.4826
1.6117
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2031 / E9
Mínimo 1,430,530.32
Máximo 1,663,328.75
Media 1,546,260.81
Desv Est 39,427.96
Valores 10000
Valores en millones

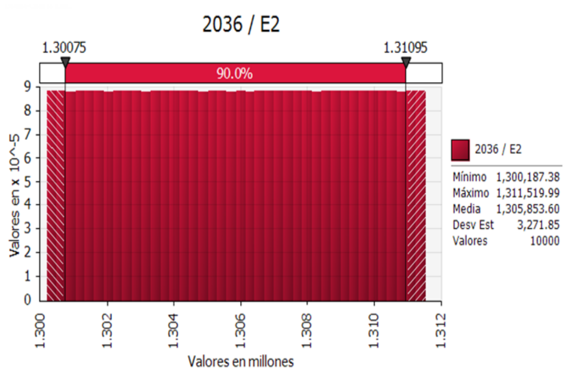

2031 / E10
1.6122
1.7366
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2031 / E10
Mínimo 1,562,070.44
Máximo 1,789,341.09
Media 1,674,323.42
Desv Est 37,712.46
Valores 10000
Valores en millones

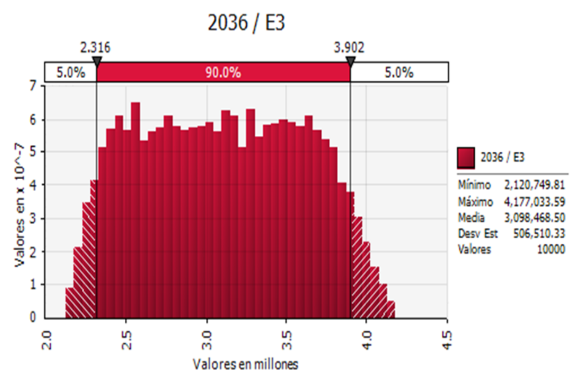

2031 / E11
701,361
797,381
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2031 / E11
Mínimo 667,516.50
Máximo 834,844.05
Media 748,670.69
Desv Est 29,730.74
Valores 10000

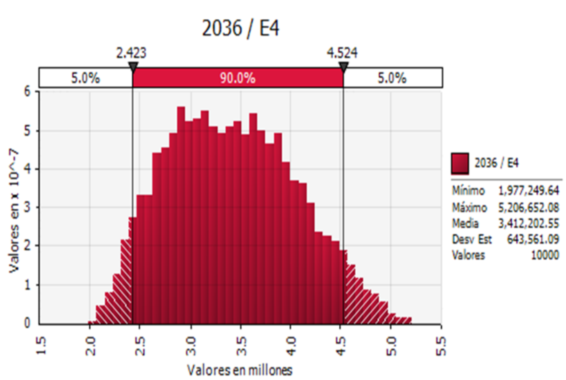

2031 / E12
211,885
349,784
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2031 / E12
Mínimo 189,445.93
Máximo 380,492.50
Media 280,035.78
Desv Est 44,131.81
Valores 10000

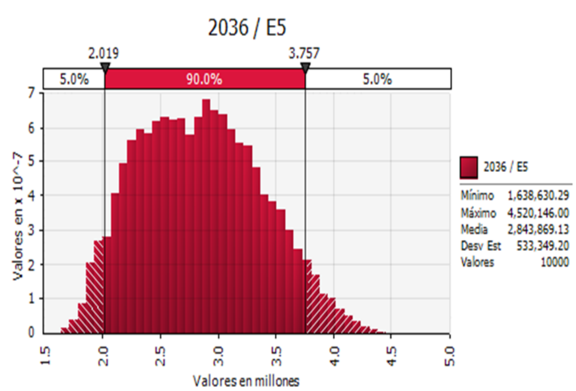

2031 / E13
65,098
114,441
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2031 / E13
Mínimo 54,741.17
Máximo 130,648.35
Media 88,438.90
Desv Est 15,351.58
Valores 10000

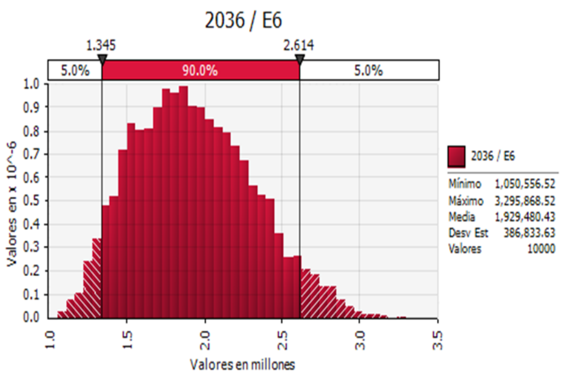

2031 / E14
29,782
53,732
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2031 / E14
Mínimo 23,969.10
Máximo 63,409.31
Media 41,024.97
Desv Est 7,387.32
Valores 10000

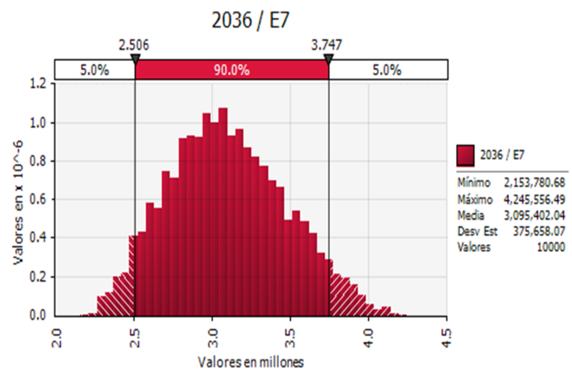

2036 / E2
1.30075
1.31095
90.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2036 / E2
Mínimo 1,300,187.38
Máximo 1,311,519.99
Media 1,305,853.60
Desv Est 3,271.85
Valores 10000

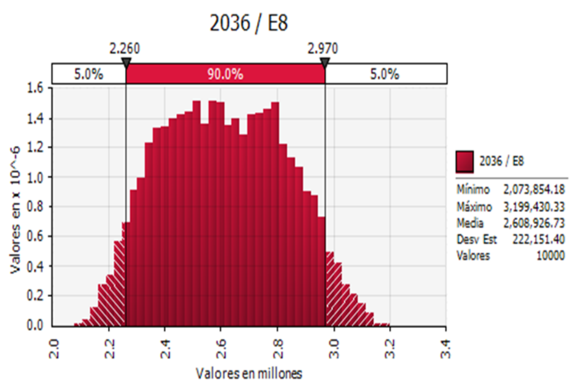

2036 / E3
2.316
3.902
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2036 / E3
Mínimo 2,120,749.81
Máximo 4,177,033.59
Media 3,098,468.50
Desv Est 506,510.33
Valores 10000

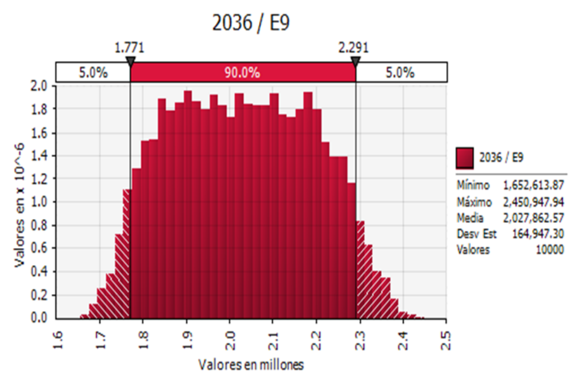

2036 / E4
2.423
4.524
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2036 / E4
Mínimo 1,977,249.64
Máximo 5,206,652.08
Media 3,412,202.55
Desv Est 643,561.09
Valores 10000

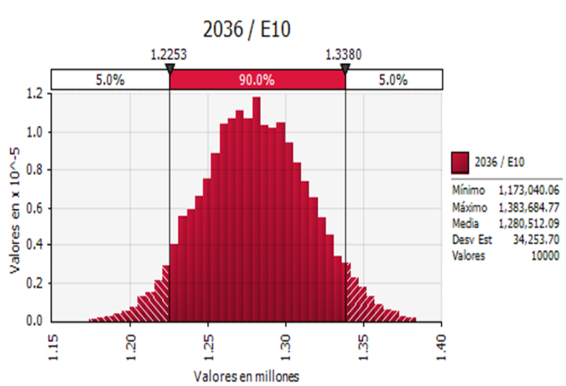

2036 / E5
2.019
3.757
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2036 / E5
Mínimo 1,638,630.29
Máximo 4,520,146.00
Media 2,843,869.13
Desv Est 533,349.20
Valores 10000

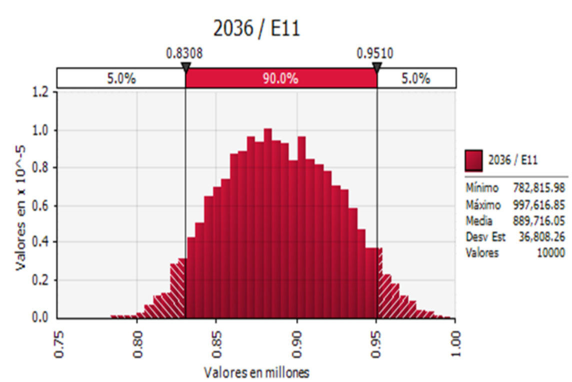

2036 / E6
1.345
2.614
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2036 / E6
Mínimo 1,050,556.52
Máximo 3,295,868.52
Media 1,929,480.43
Desv Est 386,833.63
Valores 10000

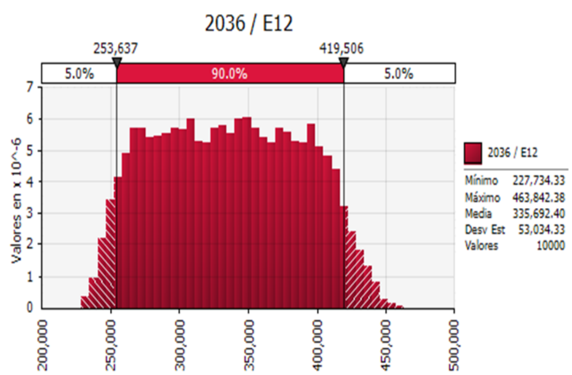

2036 / E7
2.506
3.747
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2036 / E7
Mínimo 2,153,780.68
Máximo 4,245,556.49
Media 3,095,402.04
Desv Est 375,658.07
Valores 10000

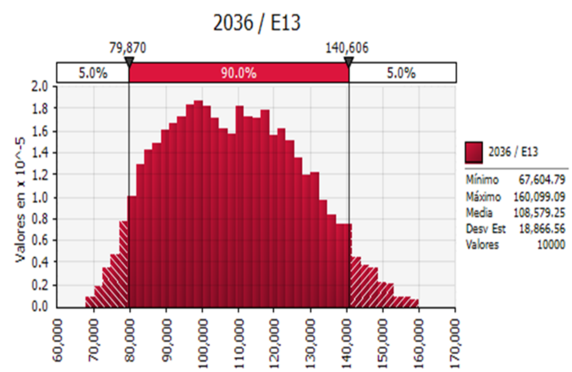

2036 / E8
2.260
2.970
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2036 / E8
Mínimo 2,073,854.18
Máximo 3,199,430.33
Media 2,608,926.73
Desv Est 222,151.40
Valores 10000

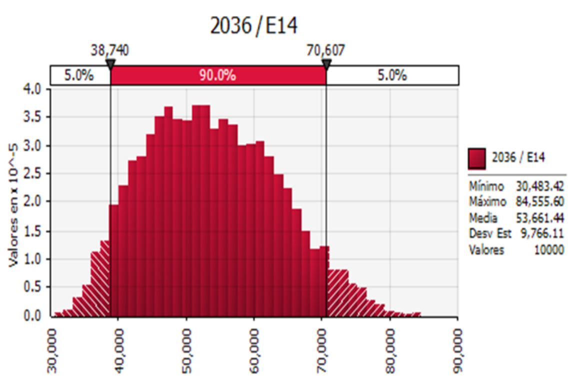

2036 / E9
1.771
2.291
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2036 / E9
Mínimo 1,652,613.87
Máximo 2,450,947.94
Media 2,027,862.57
Desv Est 164,947.30
Valores 10000

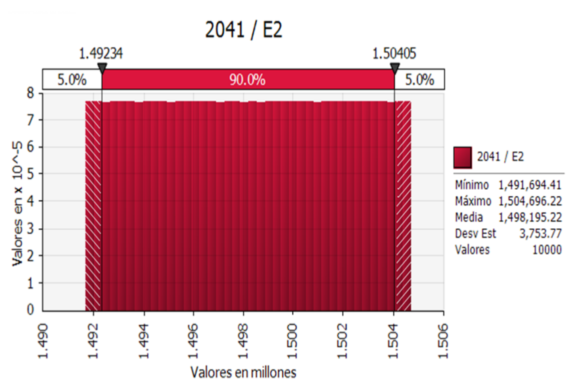

2036 / E10
1.2253
1.3380
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2036 / E10
Mínimo 1,173,040.06
Máximo 1,383,684.77
Media 1,280,512.09
Desv Est 34,253.70
Valores 10000

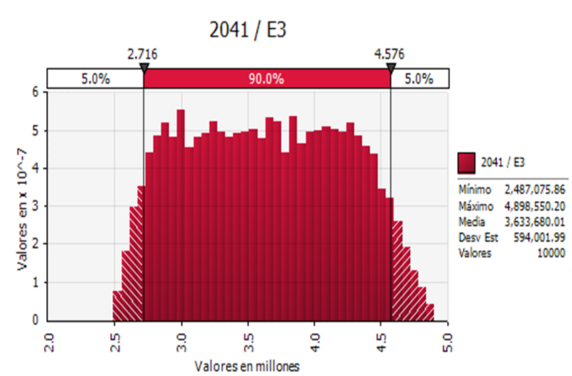

2036 / E11
0.8308
0.9510
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2036 / E11
Mínimo 782,815.98
Máximo 997,616.85
Media 889,716.05
Desv Est 36,808.26
Valores 10000

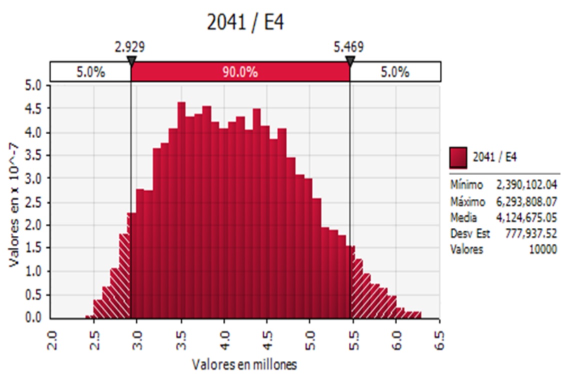

2036 / E12
253,637
419,506
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2036 / E12
Mínimo 227,734.33
Máximo 463,842.38
Media 335,692.40
Desv Est 53,034.33
Valores 10000

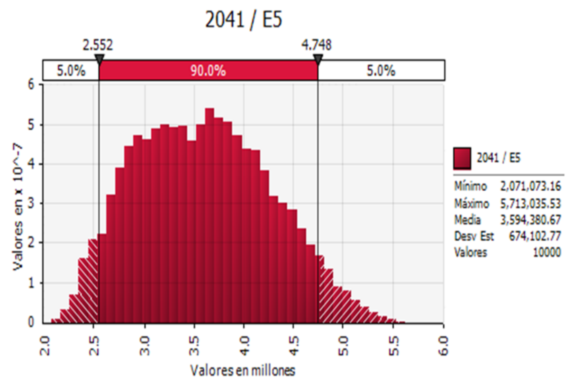

2036 / E13
79,870
140,606
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2036 / E13
Mínimo 67,604.79
Máximo 160,099.09
Media 108,579.25
Desv Est 18,866.56
Valores 10000

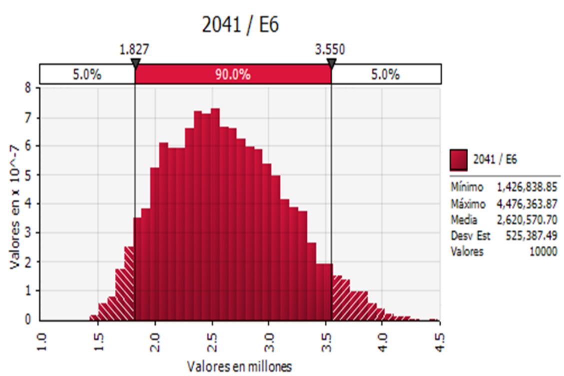

2036 / E14
38,740
70,607
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2036 / E14
Mínimo 30,483.42
Máximo 84,555.60
Media 53,661.44
Desv Est 9,766.11
Valores 10000

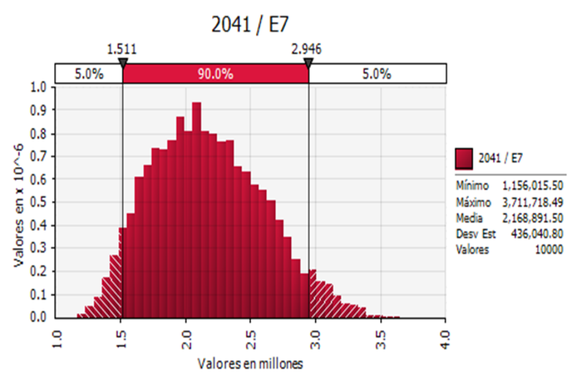

2041 / E2
1.49234
1.50405
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2041 / E2
Mínimo 1,491,694.41
Máximo 1,504,696.22
Media 1,498,195.22
Desv Est 3,753.77
Valores 10000

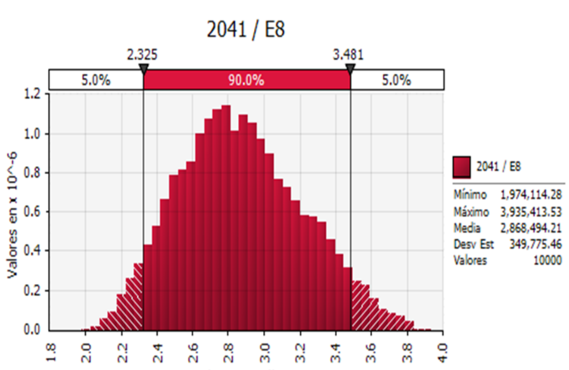

2041 / E3
2.716
4.576
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2041 / E3
Mínimo 2,487,075.86
Máximo 4,898,550.20
Media 3,633,680.01
Desv Est 594,001.99
Valores 10000

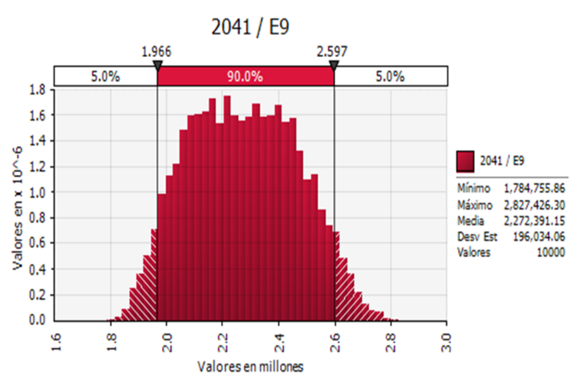

2041 / E4
2.929
5.469
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2041 / E4
Mínimo 2,390,102.04
Máximo 6,293,808.07
Media 4,124,675.05
Desv Est 777,937.52
Valores 10000

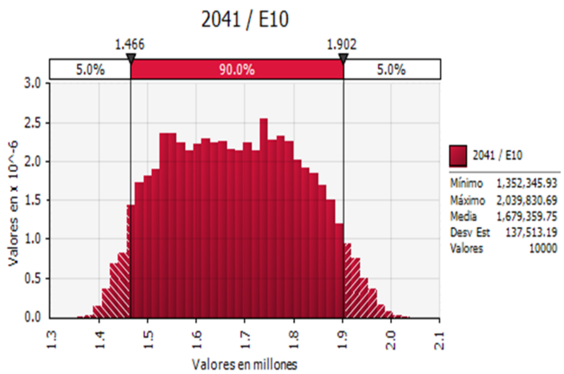

2041 / E5
2.552
4.748
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2041 / E5
Mínimo 2,071,073.16
Máximo 5,713,035.53
Media 3,594,380.67
Desv Est 674,102.77
Valores 10000

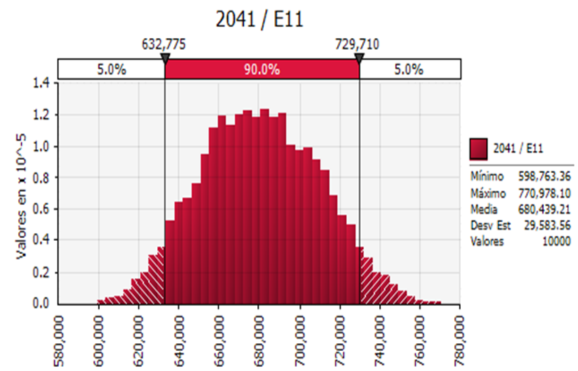

2041 / E6
1.827
3.550
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2041 / E6
Mínimo 1,426,838.85
Máximo 4,476,363.87
Media 2,620,570.70
Desv Est 525,387.49
Valores 10000

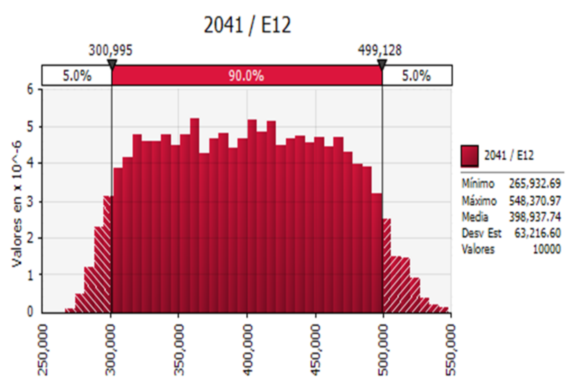

2041 / E7
1.511
2.946
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2041 / E7
Mínimo 1,156,015.50
Máximo 3,711,718.49
Media 2,168,891.50
Desv Est 436,040.80
Valores 10000

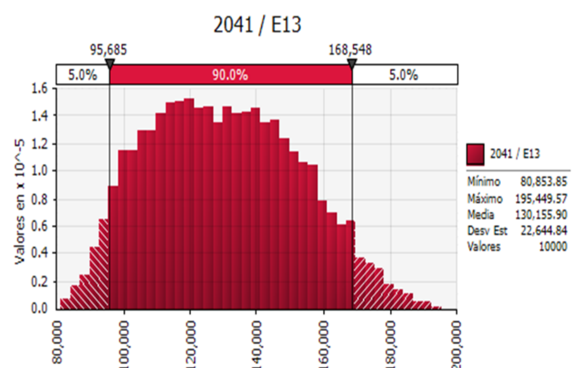

2041 / E8
2.325
3.481
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2041 / E8
Mínimo 1,974,114.28
Máximo 3,935,413.53
Media 2,868,494.21
Desv Est 349,775.46
Valores 10000

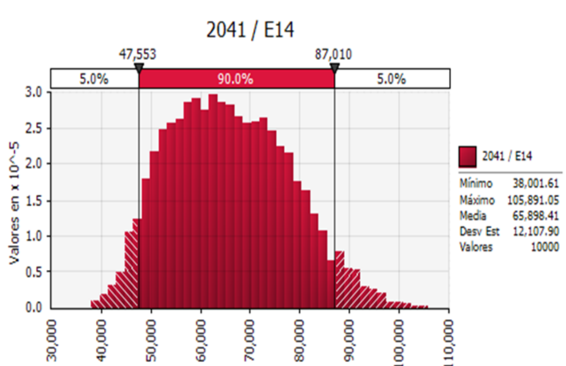

2041 / E9
1.966
2.597
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2041 / E9
Mínimo 1,784,755.86
Máximo 2,827,426.30
Media 2,272,391.15
Desv Est 196,034.06
Valores 10000

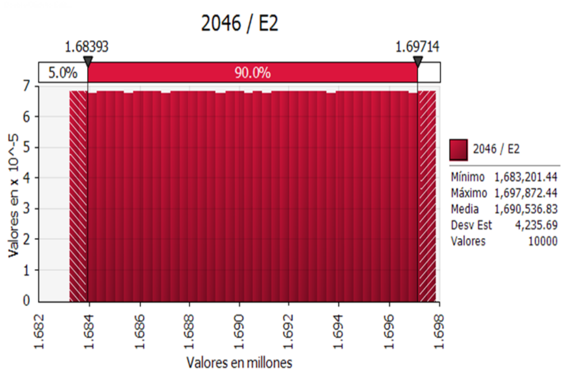

2041 / E10
1.466
1.902
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2041 / E10
Mínimo 1,352,345.93
Máximo 2,039,830.69
Media 1,679,359.75
Desv Est 137,513.19
Valores 10000

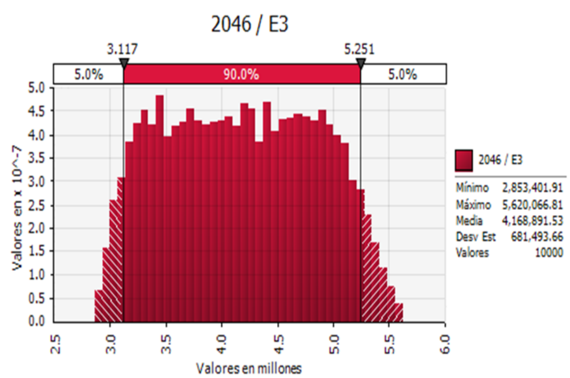

2041 / E11
632,775
729,710
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2041 / E11
Mínimo 598,763.36
Máximo 770,978.10
Media 680,439.21
Desv Est 29,583.56
Valores 10000

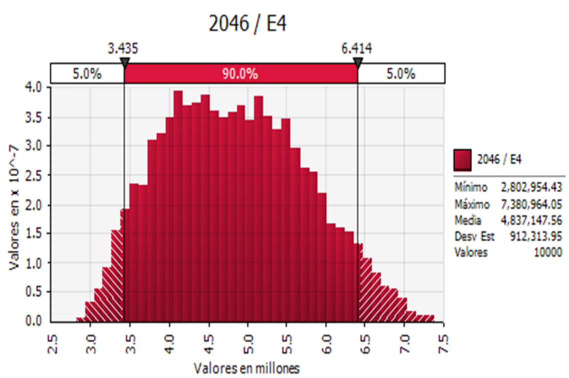

2041 / E12
300,995
499,128
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2041 / E12
Mínimo 265,932.69
Máximo 548,370.97
Media 398,937.74
Desv Est 63,216.60
Valores 10000

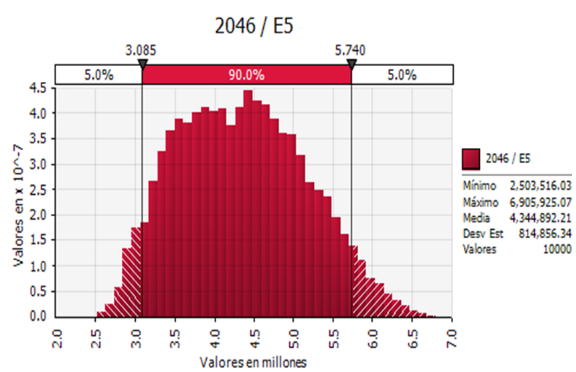

2041 / E13
95,685
168,548
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2041 / E13
Mínimo 80,853.85
Máximo 195,449.57
Media 130,155.90
Desv Est 22,644.84
Valores 10000

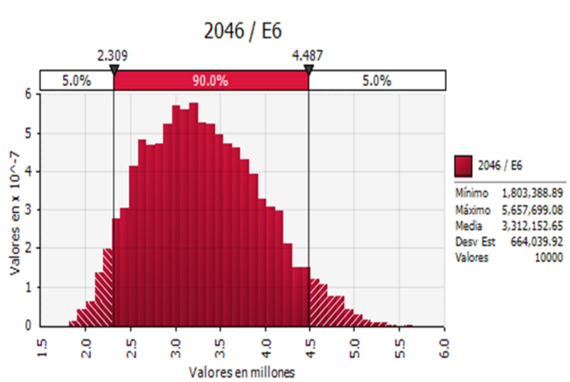

2041 / E14
47,553
87,010
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2041 / E14
Mínimo 38,001.61
Máximo 105,891.05
Media 65,898.41
Desv Est 12,107.90
Valores 10000

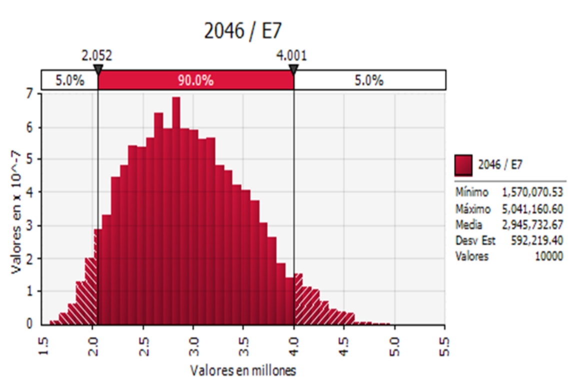

2046 / E2
1.68393
1.69714
5.0%
90.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2046 / E2
Mínimo 1,683,201.44
Máximo 1,697,872.44
Media 1,690,536.83
Desv Est 4,235.69
Valores 10000

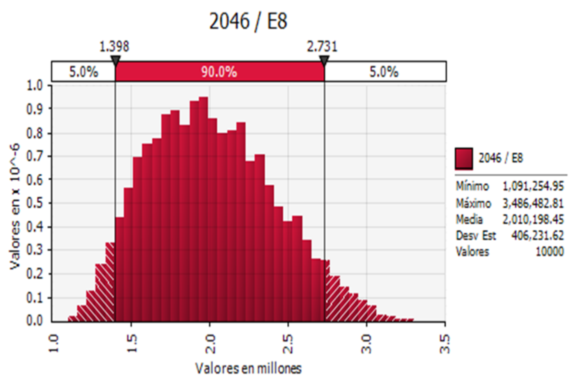

2046 / E3
3.117
5.251
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2046 / E3
Mínimo 2,853,401.91
Máximo 5,620,066.81
Media 4,168,891.53
Desv Est 681,493.66
Valores 10000

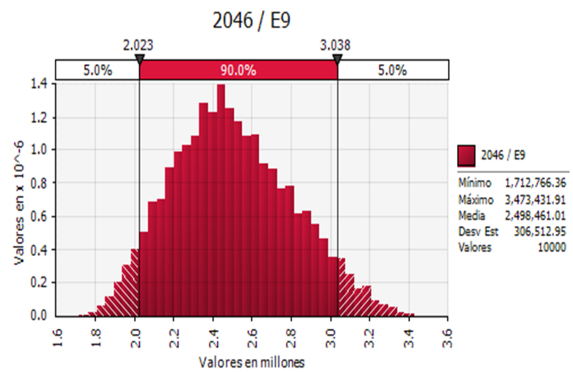

2046 / E4
3.435
6.414
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2046 / E4
Mínimo 2,802,954.43
Máximo 7,380,964.05
Media 4,837,147.56
Desv Est 912,313.95
Valores 10000

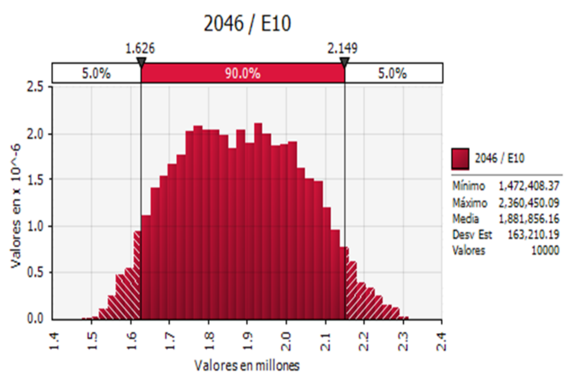

2046 / E5
3.085
5.740
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2046 / E5
Mínimo 2,503,516.03
Máximo 6,905,925.07
Media 4,344,892.21
Desv Est 814,856.34
Valores 10000

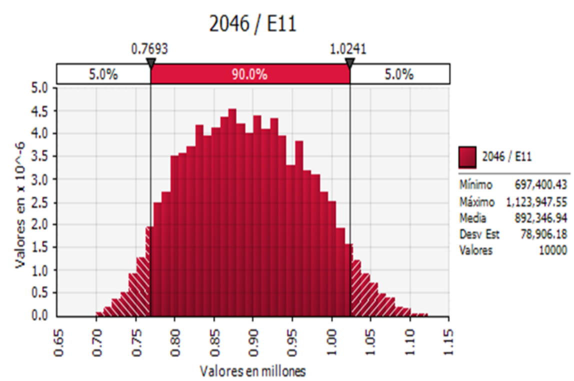

2046 / E6
2.309
4.487
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2046 / E6
Mínimo 1,803,388.89
Máximo 5,657,699.08
Media 3,312,152.65
Desv Est 664,039.92
Valores 10000

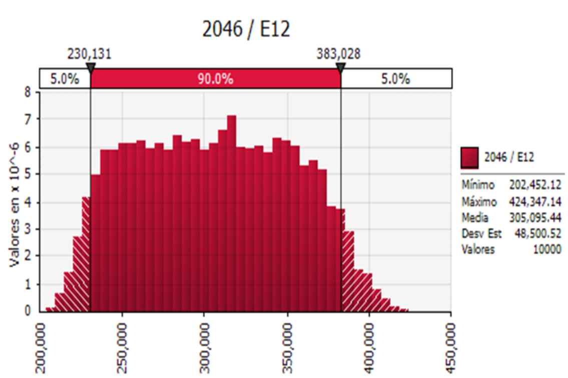

2046 / E7
2.052
4.001
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2046 / E7
Mínimo 1,570,070.53
Máximo 5,041,160.60
Media 2,945,732.67
Desv Est 592,219.40
Valores 10000

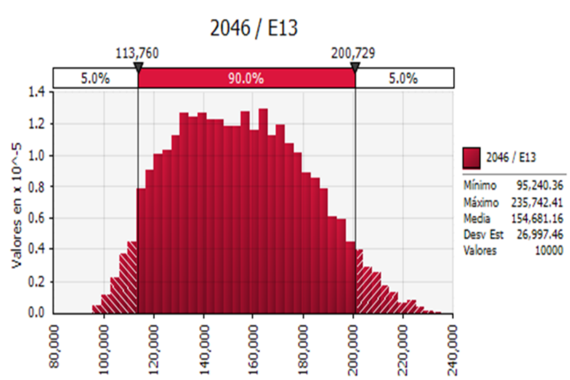

2046 / E8
1.398
2.731
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2046 / E8
Mínimo 1,091,254.95
Máximo 3,486,482.81
Media 2,010,198.45
Desv Est 406,231.62
Valores 10000

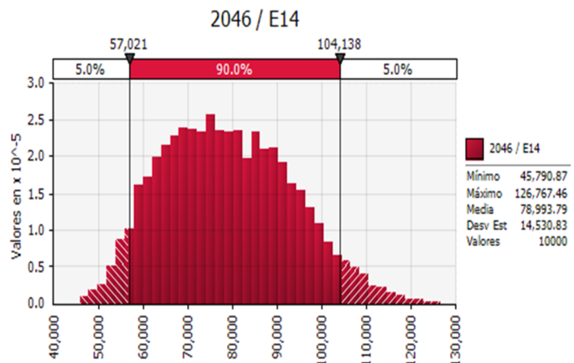

2046 / E9
2.023
3.038
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2046 / E9
Mínimo 1,712,766.36
Máximo 3,473,431.91
Media 2,498,461.01
Desv Est 306,512.95
Valores 10000

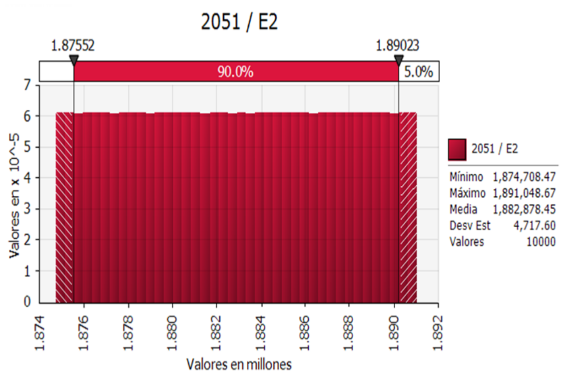

2046 / E10
1.626
2.149
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2046 / E10
Mínimo 1,472,408.37
Máximo 2,360,450.09
Media 1,881,856.16
Desv Est 163,210.19
Valores 10000

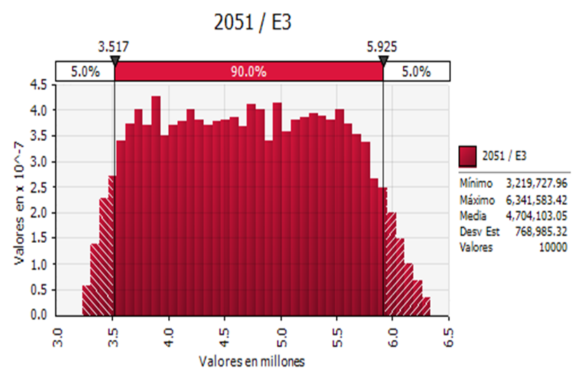

2046 / E11
0.7693
1.0241
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2046 / E11
Mínimo 697,400.43
Máximo 1,123,947.55
Media 892,346.94
Desv Est 78,906.18
Valores 10000

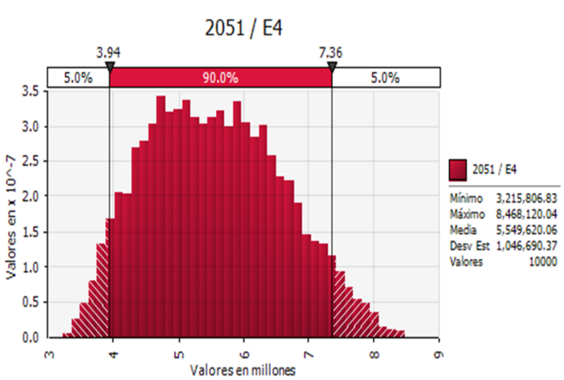

2046 / E12
230,131
383,028
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2046 / E12
Mínimo 202,452.12
Máximo 424,347.14
Media 305,095.44
Desv Est 48,500.52
Valores 10000

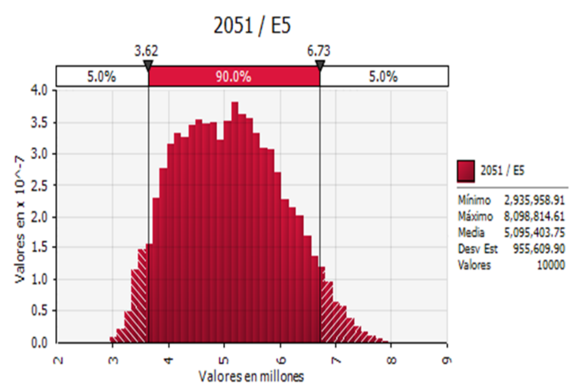

2046 / E13
113,760
200,729
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2046 / E13
Mínimo 95,240.36
Máximo 235,742.41
Media 154,681.16
Desv Est 26,997.46
Valores 10000

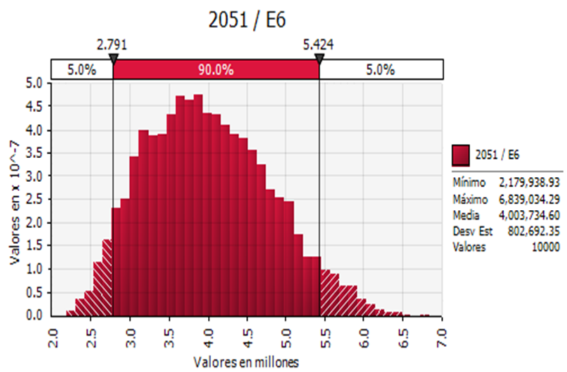

2046 / E14
57,021
104,138
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2046 / E14
Mínimo 45,790.87
Máximo 126,767.46
Media 78,993.79
Desv Est 14,530.83
Valores 10000

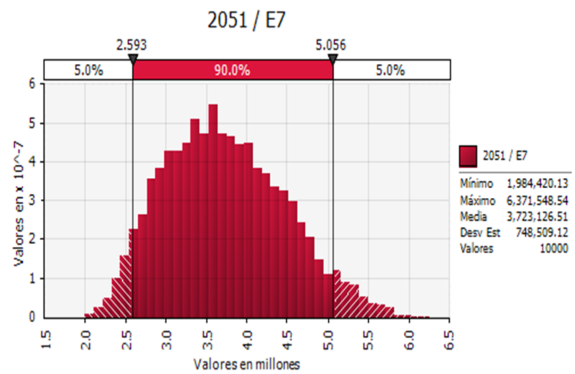

2051 / E2
1.87552
1.89023
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2051 / E2
Mínimo 1,874,708.47
Máximo 1,891,048.67
Media 1,882,878.45
Desv Est 4,717.60
Valores 10000

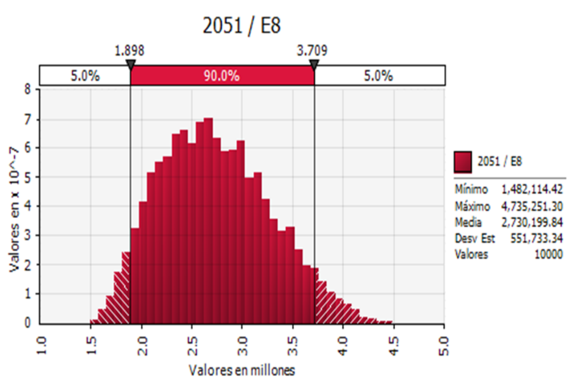

2051 / E3
3.517
5.925
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2051 / E3
Mínimo 3,219,727.96
Máximo 6,341,583.42
Media 4,704,103.05
Desv Est 768,985.32
Valores 10000

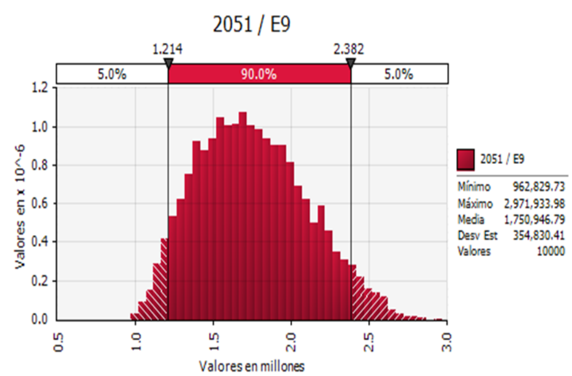

2051 / E4
3.94
7.36
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2051 / E4
Mínimo 3,215,806.83
Máximo 8,468,120.04
Media 5,549,620.06
Desv Est 1,046,690.37
Valores 10000

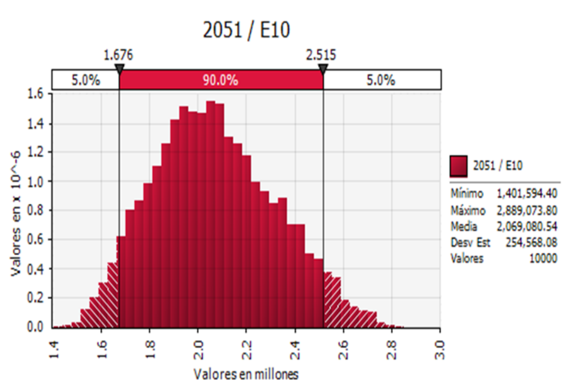

2051 / E5
3.62
6.73
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2051 / E5
Mínimo 2,935,958.91
Máximo 8,098,814.61
Media 5,095,403.75
Desv Est 955,609.90
Valores 10000

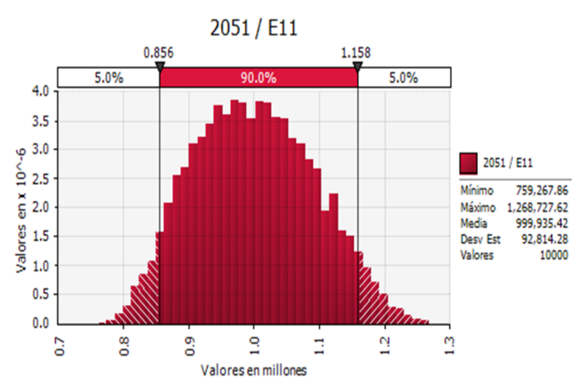

2051 / E6
2.791
5.424
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2051 / E6
Mínimo 2,179,938.93
Máximo 6,839,034.29
Media 4,003,734.60
Desv Est 802,692.35
Valores 10000

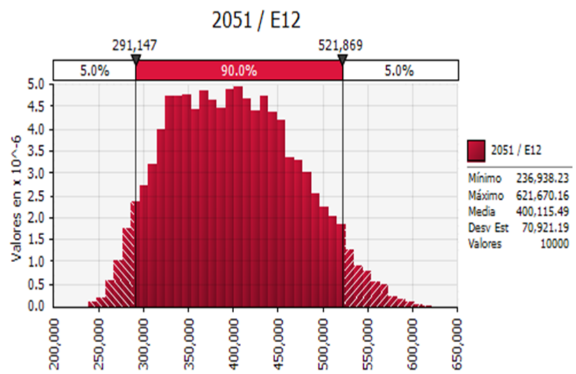

2051 / E7
2.593
5.056
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2051 / E7
Mínimo 1,984,420.13
Máximo 6,371,548.54
Media 3,723,126.51
Desv Est 748,509.12
Valores 10000

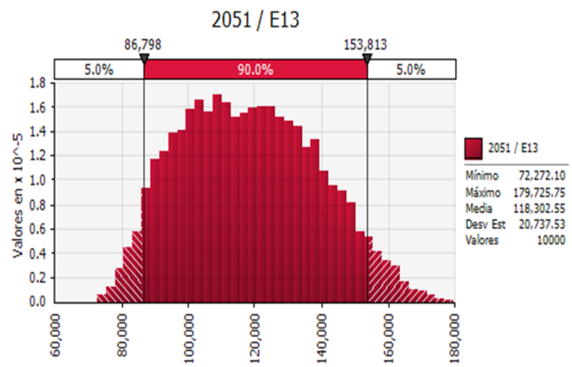

2051 / E8
1.898
3.709
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2051 / E8
Mínimo 1,482,114.42
Máximo 4,735,251.30
Media 2,730,199.84
Desv Est 551,733.34
Valores 10000

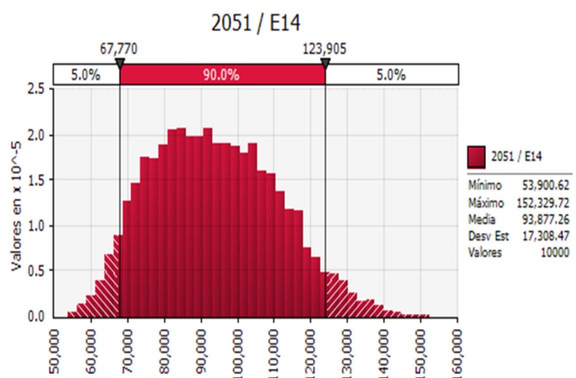

2051 / E9
1.214
2.382
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2051 / E9
Mínimo 962,829.73
Máximo 2,971,933.98
Media 1,750,946.79
Desv Est 354,830.41
Valores 10000

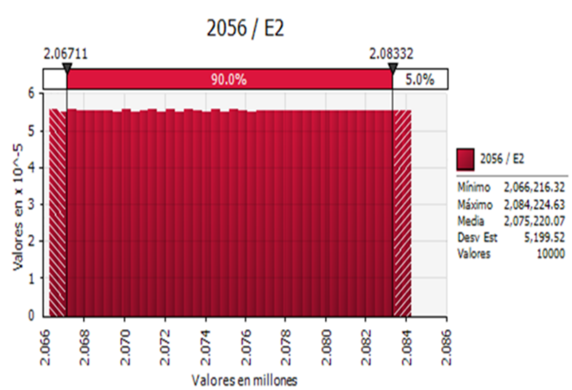

2051 / E10
1.676
2.515
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2051 / E10
Mínimo 1,401,594.40
Máximo 2,889,073.80
Media 2,069,080.54
Desv Est 254,568.08
Valores 10000

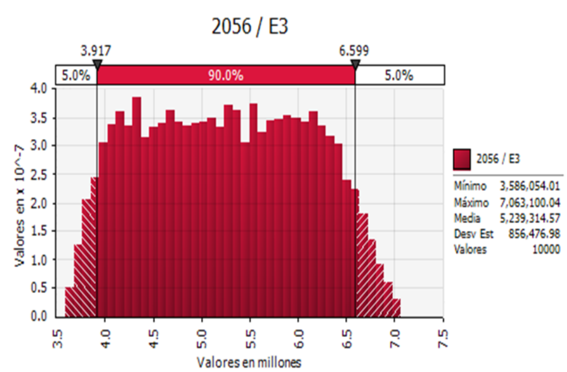

2051 / E11
0.856
1.158
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2051 / E11
Mínimo 759,267.86
Máximo 1,268,727.62
Media 999,935.42
Desv Est 92,814.28
Valores 10000

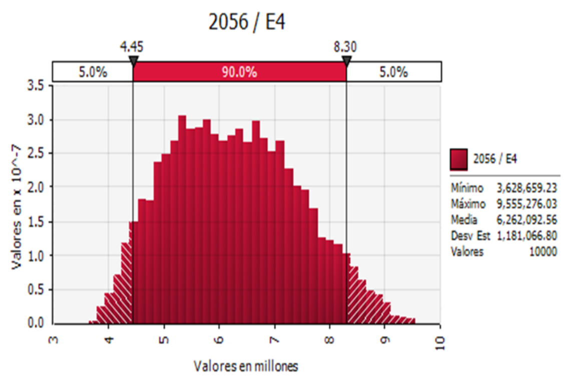

2051 / E12
291,147
521,869
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2051 / E12
Mínimo 236,938.23
Máximo 621,670.16
Media 400,115.49
Desv Est 70,921.19
Valores 10000

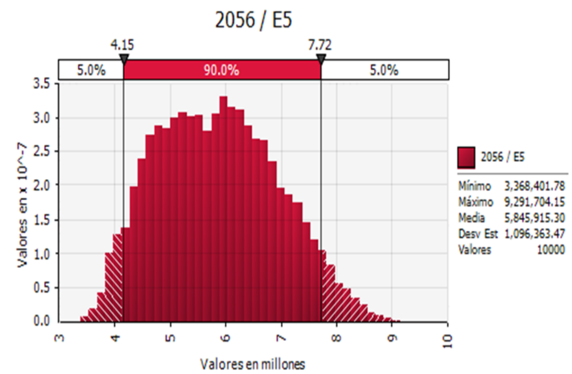

2051 / E13
86,798
153,813
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2051 / E13
Mínimo 72,272.10
Máximo 179,725.75
Media 118,302.55
Desv Est 20,737.53
Valores 10000

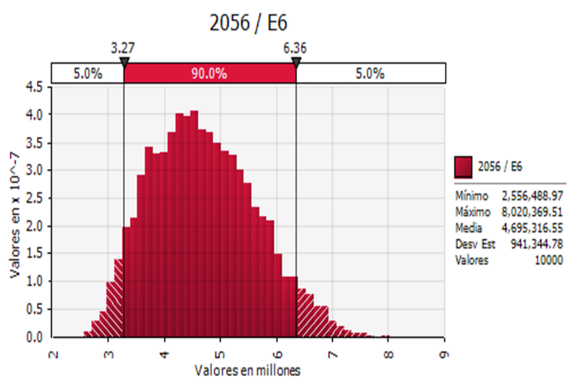

2051 / E14
67,770
123,905
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2051 / E14
Mínimo 53,900.62
Máximo 152,329.72
Media 93,877.26
Desv Est 17,308.47
Valores 10000

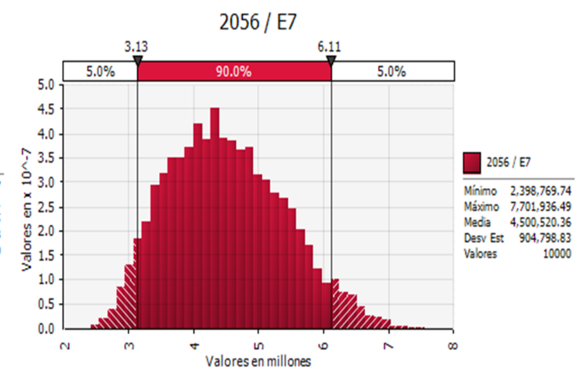

2056 / E2
2.06711
2.08332
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2056 / E2
Mínimo 2,066,216.32
Máximo 2,084,224.63
Media 2,075,220.07
Desv Est 5,199.52
Valores 10000

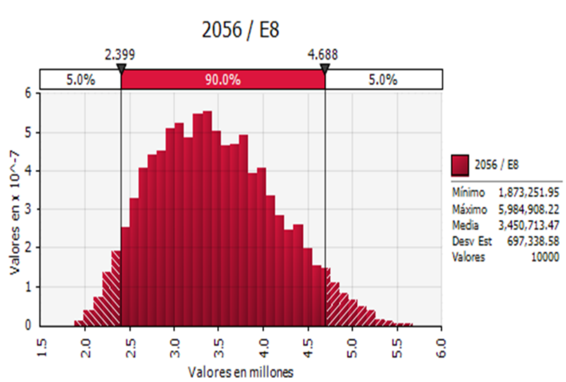

2056 / E3
3.917
6.599
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E3
Mínimo 3,586,054.01
Máximo 7,063,100.04
Media 5,239,314.57
Desv Est 856,476.98
Valores 10000

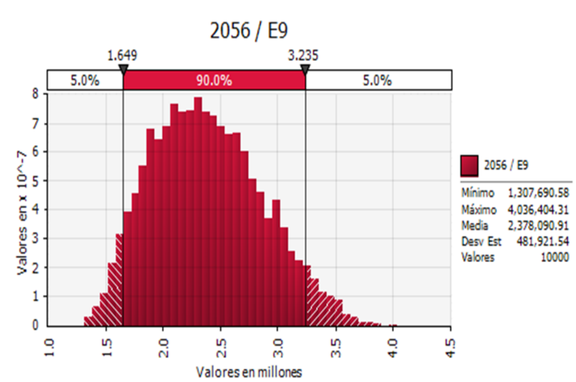

2056 / E4
4.45
8.30
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E4
Mínimo 3,628,659.23
Máximo 9,555,276.03
Media 6,262,092.56
Desv Est 1,181,066.80
Valores 10000

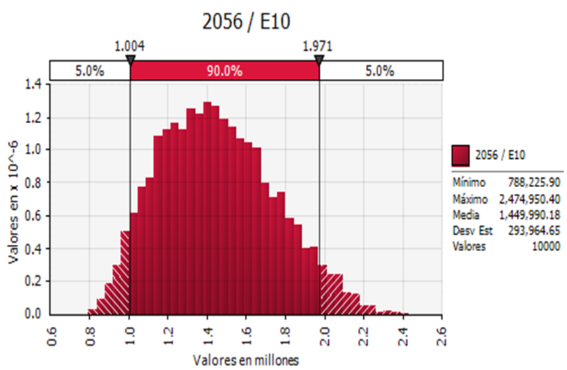

2056 / E5
4.15
7.72
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E5
Mínimo 3,368,401.78
Máximo 9,291,704.15
Media 5,845,915.30
Desv Est 1,096,363.47
Valores 10000

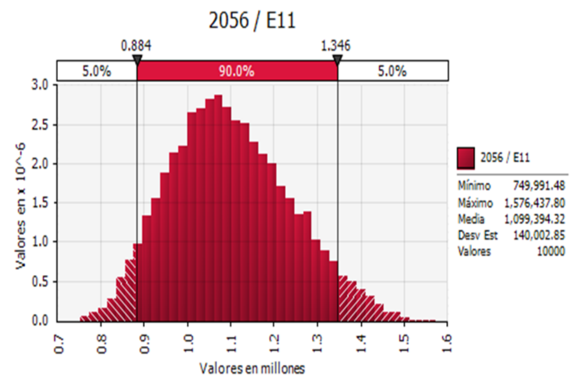

2056 / E6
3.27
6.36
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E6
Mínimo 2,556,488.97
Máximo 8,020,369.51
Media 4,695,316.55
Desv Est 941,344.78
Valores 10000

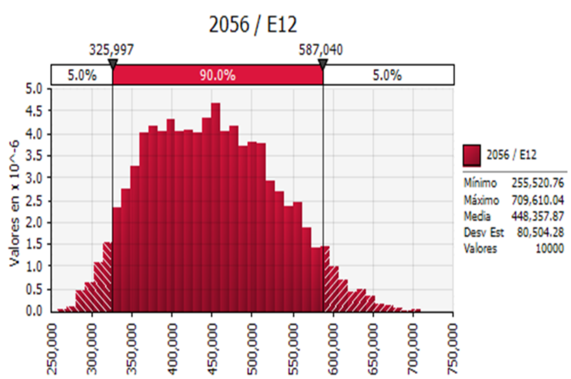

2056 / E7
3.13
6.11
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E7
Mínimo 2,398,769.74
Máximo 7,701,936.49
Media 4,500,520.36
Desv Est 904,798.83
Valores 10000

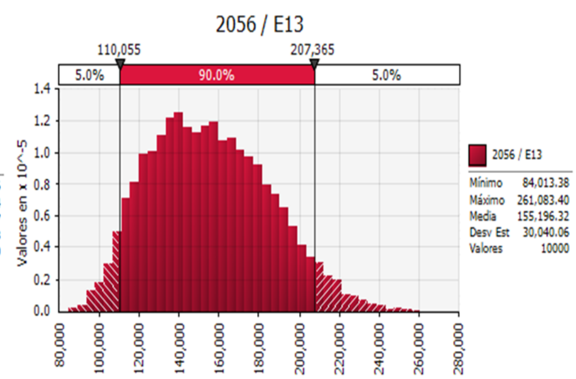

2056 / E8
2.399
4.688
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E8
Mínimo 1,873,251.95
Máximo 5,984,908.22
Media 3,450,713.47
Desv Est 697,338.58
Valores 10000

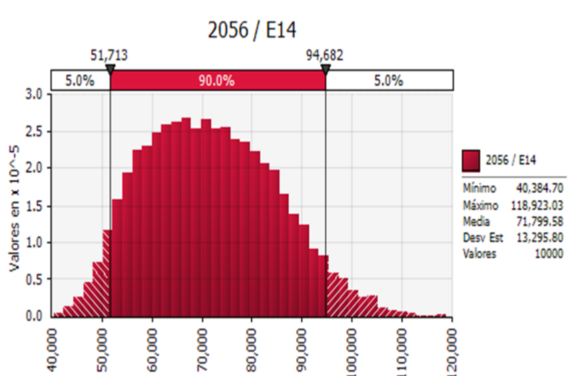

2056 / E9
1.649
3.235
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2056 / E9
Mínimo 1,307,690.58
Máximo 4,036,404.31
Media 2,378,090.91
Desv Est 481,921.54
Valores 10000

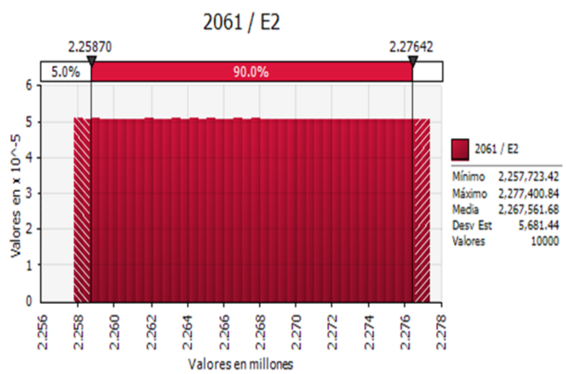

2056 / E10
1.004
1.971
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2056 / E10
Mínimo 788,225.90
Máximo 2,474,950.40
Media 1,449,990.18
Desv Est 293,964.65
Valores 10000

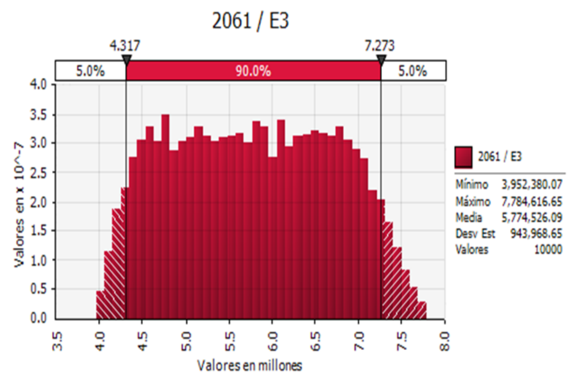

2056 / E11
0.884
1.346
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2056 / E11
Mínimo 749,991.48
Máximo 1,576,437.80
Media 1,099,394.32
Desv Est 140,002.85
Valores 10000

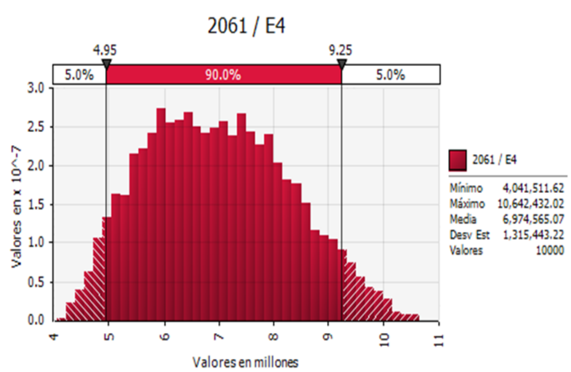

2056 / E12
325,997
587,040
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2056 / E12
Mínimo 255,520.76
Máximo 709,610.04
Media 448,357.87
Desv Est 80,504.28
Valores 10000

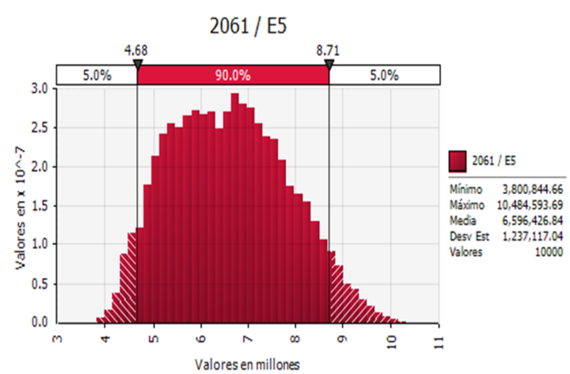

2056 / E13
110,055
207,365
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2056 / E13
Mínimo 84,013.38
Máximo 261,083.40
Media 155,196.32
Desv Est 30,040.06
Valores 10000

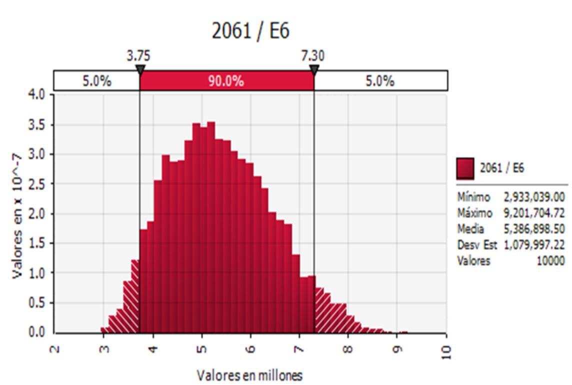

2056 / E14
51,713
94,682
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2056 / E14
Mínimo 40,384.70
Máximo 118,923.03
Media 71,799.58
Desv Est 13,295.80
Valores 10000

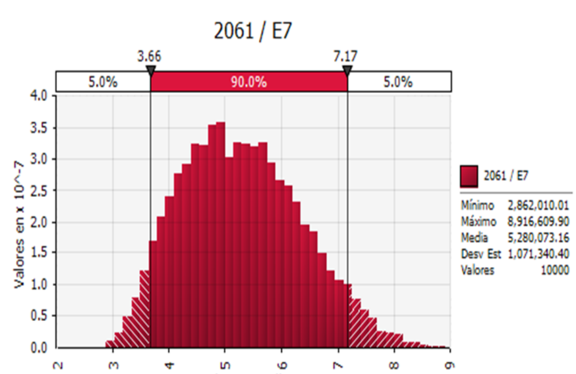

2061 / E2
2.25870
2.27642
5.0%
90.0%
Valores en x 10^-5
Valores en millones
2061 / E2
Mínimo 2,257,723.42
Máximo 2,277,400.84
Media 2,267,561.68
Desv Est 5,681.44
Valores 10000

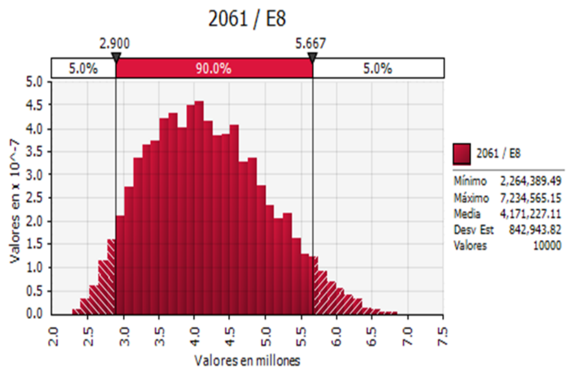

2061 / E3
4.317
7.273
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E3
Mínimo 3,952,380.07
Máximo 7,784,616.65
Media 5,774,526.09
Desv Est 943,968.65
Valores 10000

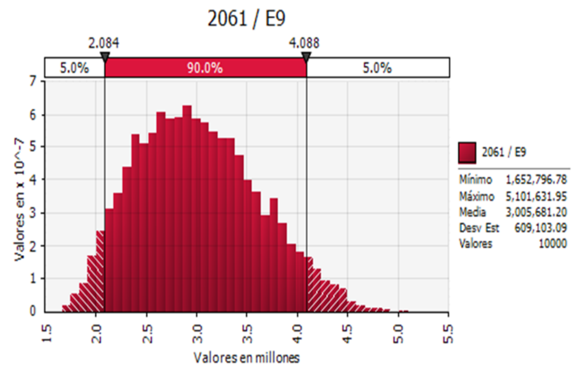

2061 / E4
4.95
9.25
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E4
Mínimo 4,041,511.62
Máximo 10,642,432.02
Media 6,974,565.07
Desv Est 1,315,443.22
Valores 10000

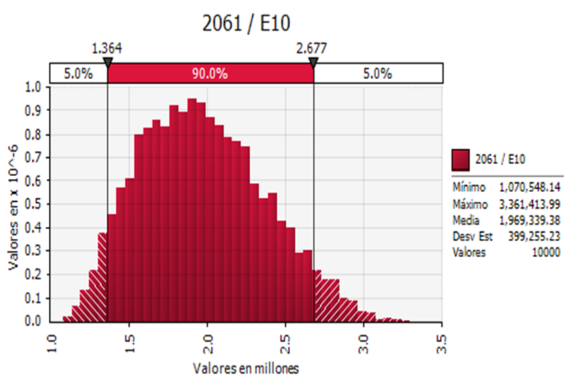

2061 / E5
4.68
8.71
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E5
Mínimo 3,800,844.66
Máximo 10,484,593.69
Media 6,596,426.84
Desv Est 1,237,117.04
Valores 10000

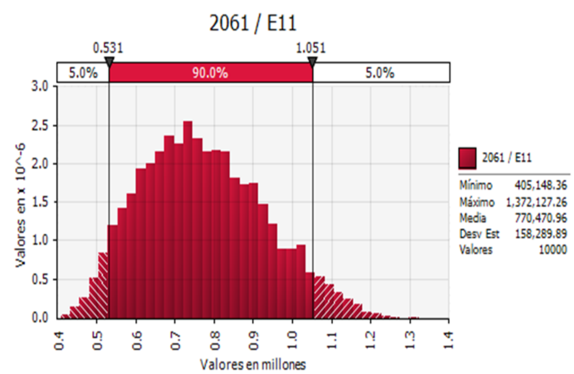

2061 / E6
3.75
7.30
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E6
Mínimo 2,933,039.00
Máximo 9,201,704.72
Media 5,386,898.50
Desv Est 1,079,997.22
Valores 10000

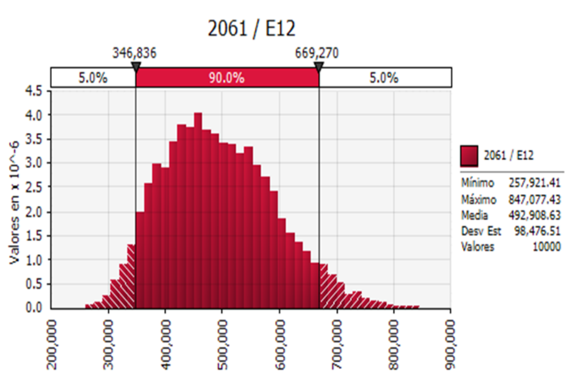

2061 / E7
3.66
7.17
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E7
Mínimo 2,862,010.01
Máximo 8,916,609.90
Media 5,280,073.16
Desv Est 1,071,340.40
Valores 10000

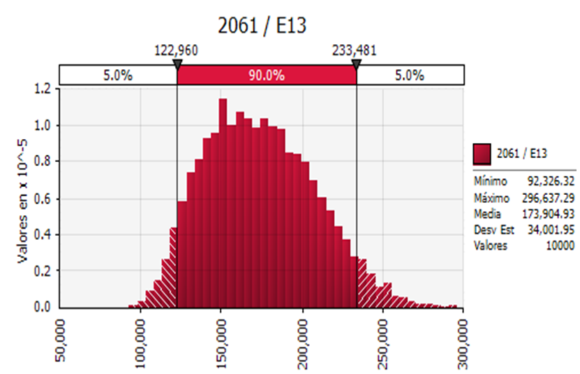

2061 / E8
2.900
5.667
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E8
Mínimo 2,264,389.49
Máximo 7,234,565.15
Media 4,171,227.11
Desv Est 842,943.82
Valores 10000

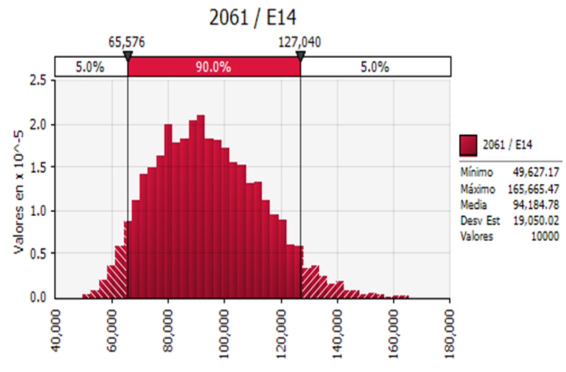

2061 / E9
2.084
4.088
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-7
Valores en millones
2061 / E9
Mínimo 1,652,796.78
Máximo 5,101,631.95
Media 3,005,681.20
Desv Est 609,103.09
Valores 10000


2061 / E10
1.364
2.677
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2061 / E10
Mínimo 1,070,548.14
Máximo 3,361,413.99
Media 1,969,339.38
Desv Est 399,255.23
Valores 10000


2061 / E11
0.531
1.051
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
Valores en millones
2061 / E11
Mínimo 405,148.36
Máximo 1,372,127.26
Media 770,470.96
Desv Est 158,289.89
Valores 10000


2061 / E12
346,836
669,270
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-6
2061 / E12
Mínimo 257,921.41
Máximo 847,077.43
Media 492,908.63
Desv Est 98,476.51
Valores 10000


2061 / E13
122,960
233,481
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2061 / E13
Mínimo 92,326.32
Máximo 296,637.29
Media 173,904.93
Desv Est 34,001.95
Valores 10000


2061 / E14
65,576
127,040
5.0%
90.0%
5.0%
Valores en x 10^-5
2061 / E14
Mínimo 49,627.17
Máximo 165,665.47
Media 94,184.78
Desv Est 19,050.02
Valores 10000

Apéndice C

Anexo III: Códigos VBA

Función para el cálculo de la pensión por la ley 73.

```
Function pension1(personas, semanas, salario)

sinpension = 0
monto = 0
personas1 = Round(0.209 * personas, 0)
personas2 = Round(0.178 * personas, 0)
personas3 = Round(0.182 * personas, 0)
personas4 = personas - personas1 - personas2 -
   personas3


For i = 1 To personas1
Total = Risk.Sample("RiskUniform(0.01,0.2499)")
    * semanas

If Total >= 500 Then
tiempo = (Total - 500) / 52
salariom = salario / (73.04 * 30)
If salariom >= 1 And salariom < 2 Then
porcentaje = 0.6613
incremento = 0.0099625
End If
If salariom >= 2 And salariom < 3 Then
porcentaje = 0.3612
```

```
incremento = 0.0179925
End If
If salariom >= 3 And salariom < 4 Then
porcentaje = 0.248
incremento = 0.0211825
End If
If salariom >= 4 And salariom < 5 Then
porcentaje = 0.189075
incremento = 0.022845
End If
If salariom >= 5 And salariom < 6 Then
porcentaje = 0.1528
incremento = 0.019092
End If
If salariom >= 6 Then
porcentaje = 0.13
incremento = 0.024415
End If
cuantia = porcentaje + incremento * tiempo
paso1 = salario * cuantia
paso2 = paso1 * 1.15
paso3 = (1 / 12) * paso1 + paso2
paso4 = paso3 * 1
paso5 = paso4 * 1.11
If paso5 < 2221.63 Then
paso6 = 2221.63
Else
paso6 = paso5
End If
Else
sinpension = sinpension + 1
paso6 = 0
End If
monto = monto + paso6
Next


For i = 1 To personas2
```

```
Total = Risk.Sample("RiskUniform(0.25,0.4999)")
    * semanas

If Total >= 500 Then
tiempo = (Total - 500) / 52
salariom = salario / (73.04 * 30)
If salariom >= 1 And salariom < 2 Then
porcentaje = 0.6613
incremento = 0.0099625
End If
If salariom >= 2 And salariom < 3 Then
porcentaje = 0.3612
incremento = 0.0179925
End If
If salariom >= 3 And salariom < 4 Then
porcentaje = 0.248
incremento = 0.0211825
End If
If salariom >= 4 And salariom < 5 Then
porcentaje = 0.189075
incremento = 0.022845
End If
If salariom >= 5 And salariom < 6 Then
porcentaje = 0.1528
incremento = 0.019092
End If
If salariom >= 6 Then
porcentaje = 0.13
incremento = 0.024415
End If
cuantia = porcentaje + incremento * tiempo
paso1 = salario * cuantia
paso2 = paso1 * 1.15
paso3 = (1 / 12) * paso1 + paso2
paso4 = paso3 * 0.85
paso5 = paso4 * 1.11
If paso5 < 2221.63 Then
paso6 = 2221.63
```

```
Else
paso6 = paso5
End If
Else
sinpension = sinpension + 1
paso6 = 0
End If
monto = monto + paso6
Next


For i = 1 To personas3
Total = Risk.Sample("RiskUniform(0.5,0.7499)")
   * semanas

If Total >= 500 Then
tiempo = (Total - 500) / 52
salariom = salario / (73.04 * 30)
If salariom >= 1 And salariom < 2 Then
porcentaje = 0.6613
incremento = 0.0099625
End If
If salariom >= 2 And salariom < 3 Then
porcentaje = 0.3612
incremento = 0.0179925
End If
If salariom >= 3 And salariom < 4 Then
porcentaje = 0.248
incremento = 0.0211825
End If
If salariom >= 4 And salariom < 5 Then
porcentaje = 0.189075
incremento = 0.022845
End If
If salariom >= 5 And salariom < 6 Then
porcentaje = 0.1528
incremento = 0.019092
End If
```

```
If salariom >= 6 Then
porcentaje = 0.13
incremento = 0.024415
End If
cuantia = porcentaje + incremento * tiempo
paso1 = salario * cuantia
paso2 = paso1 * 1.15
paso3 = (1 / 12) * paso1 + paso2
paso4 = paso3 * 0.85
paso5 = paso4 * 1.11
If paso5 < 2221.63 Then
paso6 = 2221.63
Else
paso6 = paso5
End If
Else
sinpension = sinpension + 1
paso6 = 0
End If
monto = monto + paso6
Next


For i = 1 To personas4
Total = Risk.Sample("RiskUniform(0.75,1)") *
   semanas

If Total >= 500 Then
tiempo = (Total - 500) / 52
salariom = salario / (73.04 * 30)
If salariom >= 1 And salariom < 2 Then
porcentaje = 0.6613
incremento = 0.0099625
End If
If salariom >= 2 And salariom < 3 Then
porcentaje = 0.3612
incremento = 0.0179925
End If
```

```
If salariom >= 3 And salariom < 4 Then
porcentaje = 0.248
incremento = 0.0211825
End If
If salariom >= 4 And salariom < 5 Then
porcentaje = 0.189075
incremento = 0.022845
End If
If salariom >= 5 And salariom < 6 Then
porcentaje = 0.1528
incremento = 0.023865
End If
If salariom >= 6 Then
porcentaje = 0.1331
incremento = 0.024415
End If
cuantia = porcentaje + incremento * tiempo
paso1 = salario * cuantia
paso2 = paso1 * 1.15
paso3 = (1 / 12) * paso1 + paso2
paso4 = paso3 * 0.85
paso5 = paso4 * 1.11
If paso5 < 2221.63 Then
paso6 = 2221.63
Else
paso6 = paso5
End If
Else
sinpension = sinpension + 1
paso6 = 0
End If
monto = monto + paso6
Next

monto1 = Round(monto, 2)
pension1 = monto1 & " " & sinpension

End Function
```

Función para el cálculo de pensión de ley 97 para hombres.

```
Function aforesh(edad, personas, sueldo,
   calculo, ingreso)

personas1 = Round(0.209 * personas, 0)
personas2 = Round(0.178 * personas, 0)
personas3 = Round(0.182 * personas, 0)
personas4 = personas - personas1 - personas2 -
   personas3
afore = calculo - ingreso
aportacion = 0.065
tasaafore = 0.035
salariosm = sueldo / 73.04 / 30
semanas = afore * 52
cbasica = sueldo * 0.35
cbasica2 = Application.WorksheetFunction.Max(
   cbasica, 2491.02)

If edad = 60 Then
pbss = 12.0289682
End If
If edad = 65 Then
pbss = 11.7242748
End If
If edad = 70 Then
pbss = 11.1200804
End If
If edad = 75 Then
pbss = 10.2289383
End If
pnss = cbasica2 * 1 * pbss

If salariosm = 1 Then
cuota = 5.04727
End If
```

```
If salariosm > 1 And salariosm <= 4 Then
cuota = 4.83697
End If
If salariosm > 4 And salariosm <= 7 Then
cuota = 4.62666
End If
If salariosm > 7 And salariosm <= 10 Then
cuota = 4.41636
End If
If salariosm > 10 Then
cuota = 4.20606
End If

sp = 0
sinpension = 0
saldosinpension = 0
conpension = 0
For i = 1 To personas1
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.01,.2499)
   ")

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
```

```
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 19.613))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next


For i = 1 To personas2
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.25,.4999)
   ")

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
```

```
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 19.613))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next

For i = 1 To personas3
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.5,.7499)"
    )

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 19.613))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
```

```
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next

For i = 1 To personas4
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.75,1)")

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 19.613))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
```

```
End If
End If

Next



aforesh = Round(saldosinpension, 2) & "␣" &
   sinpension & "␣" & Round(conpension, 2) & "␣
   " & sp

End Function
```

Función para el cálculo de pensión de ley 97 para mujeres.

```
Function aforesm(edad, personas, sueldo,
   calculo, ingreso)

personas1 = Round(0.209 * personas, 0)
personas2 = Round(0.178 * personas, 0)
personas3 = Round(0.182 * personas, 0)
personas4 = personas - personas1 - personas2 -
   personas3
afore = calculo - ingreso
aportacion = 0.065
tasaafore = 0.035
salariosm = sueldo / 73.04 / 30
semanas = afore * 52
cbasica = sueldo * 0.35
cbasica2 = Application.WorksheetFunction.Max(
   cbasica, 2491.02)

If edad = 60 Then
pbss = 6.19432585
End If
If edad = 65 Then
pbss = 5.80887418
End If
```

```
If edad = 70 Then
pbss = 5.27170311
End If
If edad = 75 Then
pbss = 4.5979654
End If
pnss = cbasica2 * 1 * pbss

If salariosm = 1 Then
cuota = 5.04727
End If
If salariosm > 1 And salariosm <= 4 Then
cuota = 4.83697
End If
If salariosm > 4 And salariosm <= 7 Then
cuota = 4.62666
End If
If salariosm > 7 And salariosm <= 10 Then
cuota = 4.41636
End If
If salariosm > 10 Then
cuota = 4.20606
End If

sp = 0
sinpension = 0
saldosinpension = 0
conpension = 0
For i = 1 To personas1
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.01,.2499)
   ")

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0
```

```
Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 21.1199))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next


For i = 1 To personas2
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.25,.4999)
   ")

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
```

```
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 21.1199))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next

For i = 1 To personas3
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.5,.7499)"
    )

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
```

```
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1200 Then
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1200 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 21.1199))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next

For i = 1 To personas4
aportacionb = sueldo * 2 * aportacion
cuotab = cuota * 60
aportacionbt = aportacionb + cuotab
densidad = Risk.Sample("riskuniform(0.75,1)")

aportacionbr = aportacionbt * densidad
periodo = 0
saldoi = 0

Do
periodo = periodo + 1
interes = saldoi * (tasaafore / 6)
saldoi = saldoi + interes + aportacionbr
Loop Until periodo = afore * 6


If semanas * densidad < 1250 Then
```

```
sinpension = sinpension + 1
saldosinpension = saldosinpension + saldoi
End If
If semanas * densidad >= 1250 Then
pension = ((saldoi - pnss) / (12 * 21.1199))
If pension < 2491.02 Then
conpension = conpension + 2491.02
sp = sp + 1
Else
conpension = conpension + pension
sp = sp + 1
End If
End If

Next




aforesm = Round(saldosinpension, 2) & "␣" &
   sinpension & "␣" & Round(conpension, 2) & "␣
   " & sp

End Function
```