BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN ACTUARÍA

VALUACIÓN DE OPCIONES EXÓTICAS CON IMPLEMENTACIÓN EN EXCEL (VBA)

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA:

ALEJANDRA CORTÉS GUEVARA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VÍCTOR HUGO VÁZQUEZ GUEVARA

OCTUBRE 2019

Dedicado a mis papás
Susana Guevara S. y Gabriel Cortés S.

Agradecimientos

A Dios, por permitirme culminar esta meta que alguna vez creí inalcanzable.

A mis padres, por el apoyo que me han dado y que sé que siempre me daran, por cada día que han hecho algo por mí y que he pasado desapercibido, pero que con el paso del tiempo fue contribuyendo a este logro.

A Gabriela C., por siempre creer en mí y sacar mi mejor versión, por apoyarme cuando más la necesitaba, porque cuando yo creía que este sueño era imposible, ella siempre me dejó en claro que ve en mí a una excelente profesionista.

A mi director de tesis, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara a quien admiro y respeto por su labor como docente e investigador. Gracias por el apoyo, paciencia, conocimientos transmitidos y tiempo brindado.

A mis sinodales, Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, Mtra. Brenda Zavala López y Dra. Martha Miranda Muñoz, por los conocimientos transmitidos, por haber aceptado revisar este trabajo y por sus aportaciones al mismo.

Introducción

En la actualidad los productos derivados son cada vez más utilizados y no sólo por los miembros del mercado, como bancos y agencias de valores, sino también por inversionistas individuales y empresas.

La importancia del estudio de las opciones es debido a que son instrumentos financieros con los cuales se pueden realizar diversas operaciones. Son instrumentos que permiten fijar hoy el precio de compra o venta de un bien subyacente para ser pagado o entregado en una fecha futura, esto da la posibilidad de planear, cubrir y administrar riesgos financieros así como optimizar el rendimiento de los portafolios.

Las opciones son contratos que generan derechos u obligaciones para las partes involucradas, uno de sus principales objetivos es reducir el riesgo en las transacciones efectuadas entre dos entes financieros, dicho riesgo es causado por diversos fectores, tales como la inestabilidad de la economía de los países. La idea más generalizada de que las opciones equivalen a innovación financiera oculta una larga historia, aún no suficientemente analizada. Retrocediendo en el tiempo, conviene señalar que los fenicios, los griegos y los romanos negociaban contratos con cláusulas de opción sobre las mercaderías que transportaban en sus naves. Por ejemplo, Katz (1990) [16] describe la anécdota de la importante ganancia que obtuvo el famoso filósofo, matemático y astrónomo griego Thales invirtiendo en opciones sobre «aceitunas» basándose en una previsión acertada de la cosecha. Al margen de esta anécdota y otras similares que uno puede encontrar en la literatura financiera, en lo que coinciden los historiadores es en el hecho de que el primer mercado de opciones con cierto nivel de «organización» apareció en Holanda en el siglo XVII. En dicho mercado se negociaban opciones para comprar o vender bulbos de tulipán en una fecha futura predeterminada. Mediante estos contratos los comerciantes holandeses aseguraban el precio de las partidas de tulipanes que deberían servir a sus clientes en el futuro y los agricultores podían comprar el derecho de vender su cosecha futura a un precio predeterminado. En 1640, el mercado conoció una época de fuertes oscilaciones de precios que provocó la quiebra de muchos especuladores y el incumplimiento de compromiso de otros en las opciones que habían vendido, lo que extendió la idea en Europa de que los mercados de opciones eran muy peligrosos y excesivamente especulativos [18].

El primer mercado organizado de opciones se inaguró en Chicago el 25 de abril de 1973. Se trata del *"Chicago Board Options Exchange"*, conocido por las siglas CBOE. Su espectacular éxito hizo que pronto otras bolsas siguieran su ejemplo, tales como la *"American Stock Exchange"* (AMEX) de Nueva York, y la *"Philadelphia-Boston-Washington Exchange"* (PBW) en Estados Unidos. Posteriormente se desarrollaron otras bolsas de opciones en Gran Bretaña, Canadá y en los Países Bajos [5].

La popularidad alcanzada por la Bolsa de Opciones de Chicago no se debe tan sólo al hecho de que fuera la pionera, sino al gran volumen de contratación de opciones que tiene lugar en ella. Esta circunstancia viene explicada en gran parte por el hecho de que en la CBOE se negocia uno de los contratos de opciones más conocidos y más utilizados por la comunidad financiera internacional: la opción sobre el índice S&P 100 (*"Standard and Poor's"* de 100 acciones), cuyo volumen de negociación por sí sólo supera al de cualquier otra bolsa de opciones del mundo.

La puesta en operaciones del Mercado Mexicano de Derivados el 15 de diciembre de 1998, constituyó uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del Sistema Financiero Mexicano. El esfuerzo constante de equipos multidisciplinarios integrados por profesionales de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB) y la S.D. Indeval, permitió el desarrollo de la arquitectura operativa, legal y de sistemas necesarios para el cumplimiento de los requisitos jurídicos, operativos, tecnológicos y prudenciales, establecidos de manera conjunta por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores y el Banco de México (las autoridades financieras).

Organismos financieros internacionales como el *"International Monetary Fund"* (IMF) y la *"International Finance Corporation"* (IFC) destacan la importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa, con el propósito de promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas [27].

Por otro lado, los modelos de valuación de opciones también tienen una larga historia. Louis Bachelier presentó el primer trabajo en finanzas, el cual modela la dinámica de los precios de acciones de la bolsa de valores de París a través del movimiento Browniano. Sin embargo, su trabajo tenía limitaciones ya que los precios de los activos podían tomar valores negativos. Este inconveniente es corregido años más tarde por Paul Samuelson, él introduce el concepto de movimiento Browniano económico, lo que hoy se conoce como movimiento Browniano geométrico, este nuevo concepto corrige las deficiencias en el modelo de Bachelier, pues éste sólo considera precios positivos. En 1973, Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton publicaron un modelo de valuación, dicho modelo da valores teóricos para las opciones put y call Europeas sobre acciones que no pagan dividendos [25].

Otra técnica muy popular dentro de la valuación de opciones son los árboles binomiales, que surgen poco después de la fórmula de Black, Scholes y Merton, este modelo es descrito por John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein en 1979. Este modelo describe el comportamiento del precio del bien subyacente en tiempo discreto, sin necesidad de usar cálculo estocástico. El Modelo Binomial no considera en sus supuestos el hecho de que la distribución de los precios del bien subyacente sea un movimiento Browniano geométrico, la única suposición sobre la dinámica de los precios del bien es que se mueven en el esquema de alzas y bajas por un factor de u y d respectivamente. El Modelo Binomial permite valuar opciones tipo Americano.

Existe gran variedad de opciones y por desgracia no todas pueden ser valuadas con el mismo método, es por ello que se han desarrollado diferentes modelos, entre los cuales destaca el Método de Monte Carlo. El cual es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se define qué es una opción, se da su clasificación, se citan las opciones Exóticas a estudiar, también se presenta el problema que existe en los contratos opción, por último se explica dónde y cómo se negocian.

En el segundo capítulo se explica a detalle cada una de las opciones Exóticas que se estudian, se presentan sus funciones de pago, finalmente se dan a conocer algunos resultados y consecuencias de ellas.

En el tercer capítulo se analizan los modelos de valuación de opciones. El Modelo Binomial de Cox, Ross y Rubinstein, el Modelo de Black, Scholes y Merton y el Método de Monte Carlo.

En el cuarto capítulo se presenta el programa realizado en Excel (VBA) para valuar las opciones estudiadas. Con el análisis hecho en el segundo Capítulo y los métodos presentados en el tercero, lo que se intenta hacer en este Capítulo es resolver el problema que existe en los contratos opción, es decir, encontrar el valor de la *prima*, así mismo comprobar algunos resultados dados.

Finalmente, se presentan los resultados y conclusiones.

En este trabajo se presenta un tratamiento balanceado entre lo técnico y lo numérico sobre la valuación de opciones y sus métodos, en particular de tipo Europea, Americana, Asiática, Barrera, Bermuda y Parisina. Se exponen también algunas relaciones de tipo paridad entre algunas de ellas. Finalmente, se implementó un programa en Excel (VBA) para realizar valuaciones de las opciones antes mencionadas. Sin embargo, dado que el objetivo de estudio fue en su mayoría opciones Exóticas, no fue posible comparar los resultados obtenidos, ya que los posibles valores de referencia (en caso de existir) se encontrarán en el mercado *"Over-The-Counter"*.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En años recientes, las opciones se han convertido en una alternativa conveniente para invertir dinero. Por tanto, los mercados de instrumentos financieros se han vuelto importantes en el mundo de las finanzas. Se ha alcanzado el punto donde es esencial que los profesionales en finanzas entiendan cómo es que trabajan estos mercados, cómo pueden ser usados y qué determina el precio de estos instrumentos [12]. El propósito de este capítulo es analizar el funcionamiento de las opciones, familiarizarse con su dinámica, así como con su terminología.

Se presentan las siguientes definiciones para llevar a cabo el estudio de opciones financieras.

1.1. ¿Qué son las opciones?

Definición 1.1.1 (Opción). *Contrato entre dos partes (comprador y vendedor), mediante el cual otorga a su comprador el derecho, pero no la obligación de comprar o vender cierta cantidad de bienes subyacentes en una fecha preestablecida y a un precio fijado al momento de ser firmado.*

En un contrato opción se estipulan diversos parámetros que serán denotados de la siguiente manera:

- S_0 denota el precio del bien subyacente al inicio del contrato,

- $S(t_i)$ indica el precio del bien en las fechas tomadas como referencia (por ejemplo, en t_i con $i = 0, ..., n$),
- E indica el precio de ejercicio al cual se comprará o venderá posiblemente el bien subyacente,
- r es la tasa de interés libre de riesgo,
- T es la fecha de expiración,
- σ^2 denota la volatilidad.

Como se mencionó anteriormente, en todo contrato opción intervienen 2 partes. Una de ellas es el *tenedor* que asume una posición larga (es decir, compró la opción). La otra parte es el *escritor* que asume una posición corta (es decir, vendió la opción).

Hay cuatro tipos de posiciones en las opciones:

1. Una posición larga en una opción de compra. Se adquiere el **derecho** de comprar el bien subyacente bajo los términos establecidos en el contrato.
2. Una posición larga en una opción de venta. Se adquiere el **derecho** de vender el bien subyacente bajo los términos establecidos en el contrato.
3. Una posición corta en una opción de compra. Se adquiere la **obligación** de vender el bien subyacente bajo los términos establecidos en el contrato.
4. Una posición corta en una opción de venta. Se adquiere la **obligación** de comprar el bien subyacente bajo los términos establecidos en el contrato [5] y [15].

Las opciones se dividen en opciones de compra (*call*) y opciones de venta (*put*).

Definición 1.1.2 (Opción call). *Las opciones call otorgan al tenedor el derecho de comprar cierta cantidad de bienes, en una fecha de expiración, a un precio de ejercicio previamente establecido.*

Definición 1.1.3 (Opción put). *Las opciones put otorgan al tenedor el derecho de vender cierta cantidad de bienes, en una fecha de expiración, a un precio de ejercicio previamente establecido.*

En el mundo de las finanzas existen consecuencias derivadas del uso de opciones, tales como:

- Realizar ganancias. El comprador de una opción puede anticipar un cambio en el precio del bien. El comprador de un call se ve favorecido por una subida del bien subyacente y el comprador de un put por una baja. En ambos casos el inversionista puede generar más ganancias con la inversión en opciones que usando la misma cantidad invertida en los bienes. A esta característica se le llama apalancamiento. En ambos casos la pérdida máxima es la cantidad invertida.

- Obtener ingresos adicionales. Un inversionista puede decidir vender opciones call o put simplemente porque su expectativa sobre la dirección que seguirá el precio del bien subyacente, le sugiere que podrá conservar las primas recibidas, producto de la venta de opciones.

- Protección contra movimientos de precios. Comprando opciones, el inversionista puede protegerse contra un incremento en el precio de los bienes en el caso de la compra de calls, y contra una disminución en el precio de los mismos en el caso de la compra de puts.

- Comprando opciones se fija el precio de compra o de venta de un bien. La inversión en opciones se puede usar para fijar anticipadamente el precio al cual comprar el bien subyacente en el futuro. Si el inversionista quiere fijar el precio máximo al que estaría dispuesto a comprar un bien, debería comprar calls, y un inversionista que quiera fijar el precio mínimo al que vendería el bien subyacente, debería comprar puts.

- Comprando opciones se puede "vender más caro" o "comprar más barato". Cuando un inversionista tiene expectativas de caída en el precio de cierto bien subyacente, le interesará comprar una opción put, de esta manera si ejerce su derecho, venderá el bien más caro de lo que éste se encuentra en el mercado. Si el inversor tiene expectativas de subida en el precio de un bien, adquirirá una opción call, si decide ejercer su derecho, comprará el bien más barato de lo que éste se encuentra en el mercado.

Dentro del mercado de derivados se negocia con distintos tipos de opciones financieras, de los cuales las más comunes son Europeas y Americanas.

Definición 1.1.4 (**Opción Europea**). *Tipo de opción que sólo se puede ejercer en la fecha de expiración.*

Definición 1.1.5 (**Opción Americana**). *Tipo de opción que se puede ejercer en cualquier fecha igual o anterior a la de expiración.*

Las opciones call y put, Europea y Americana se denominan opciones *plain vanilla* [8].

Otro tipo de opciones son las denominadas *Exóticas,* y aunque no existe unanimidad sobre lo que se entiende por ellas, se puede entender por opciones Exóticas a todas aquellas no tradicionales, entendiendo por tradicionales las opciones que tienen un precio de ejercicio fijo y cuyo valor depende del precio del bien subyacente en la fecha de expiración [2].

Las opciones Exóticas que se estudiarán son las siguientes:

Definición 1.1.6 (**Opción Asiática**). *Tipo de opción para la cual la función de pago, depende del promedio de los valores que ha alcanzado el precio del bien subyacente a lo largo de la vida de la opción. También son conocidas como opciones promedio.*

Definición 1.1.7 (**Opción Barrera**). *Tipo de opción que se puede ejercer si durante la vida de la misma, el precio del bien subyacente es siempre mayor o siempre menor que cierto valor B (la barrera), o de manera alternativa, si la barrera es alcanzada por el precio del bien durante la vida de la opción.*

Los cuatro tipos de opciones Barrera más negociados son:

Opción down-and-out: La opción caduca sin valor si el precio del bien subyacente cae hasta la barrera B, esto significa que la barrera es alcanzada desde arriba antes de la fecha de expiración.

Opción down-and-in: La opción caduca sin valor a menos que la barrera B, sea alcanzada desde arriba por el precio del bien subyacente antes de la fecha de expiración.

Opción up-and-out: La opción caduca sin valor si el precio del bien subyacente sube hasta la barrera B, esto significa que la barrera es alcanzada desde abajo antes de la fecha de expiración.

Opción up-and-in: La opción caduca sin valor a menos que la barrera B, sea alcanzada desde abajo por el precio del bien subyacente antes de la fecha de expiración.

Definición 1.1.8 (Opción Bermuda). *Tipo de opción en la cual el ejercicio temprano es permitido únicamente en un conjunto predeterminado de fechas.*

Definición 1.1.9 (Opción Parisina). *Tipo de opción que se puede ejercer si durante la vida de la misma, el precio del bien subyacente es mayor o menor que cierto valor B^* (nivel de excursión), durante un intervalo de tiempo D (periodo de excursión).*

El uso de opciones es principalmente por los individuos que están expuestos a un riesgo y desean protegerse traspasándolo a un agente que esté dispuesto a aceptarlo. El objetivo de administrar el riesgo consiste en asegurarse que una empresa o inversionista no sufra pérdidas económicas.

Supóngase un gestor de riesgos de un fondo de pensiones, el cual ha sido invertido en títulos con cierto riesgo. El gestor sabe que en T años, el fondo debe valer x millones para lograr pagar a cada uno de sus inversionistas cierta cantidad destinada a su jubilación.

Se tiene el riesgo de que el valor del fondo al tiempo T no sea exactamente x millones.

El gestor, con el objetivo de proteger el valor del fondo, decide adquirir un contrato que le dé la oportunidad de venderlo en x millones si éste al tiempo T valiera menos. Es así que adquiriría una opción *put Europea*.

El precio de ejercicio E para este ejemplo es x millones ($E = x$ millones) y $S(T)$ el precio del fondo de pensiones al tiempo T.

Si en la fecha de expiración se tiene que $E > S(T)$, entonces el gestor ejerce su derecho vendiendo el fondo al precio E; situación que muestra que de no haber adquirido la opción, al tiempo T no se tendría el dinero requerido para pagar a los inversionistas. Caso contrario, si $S(T) > E$, al gestor no le conviene ejercer su derecho ya que puede vender el fondo por $S(T)$ en el mercado.

En ambos casos la escena es desventajosa para el escritor del contrato, ya que si el gestor decide ejercer su derecho, el escritor debe comprar el fondo por encima del precio del mercado. Es por esta razón que el gestor debe compensar monetariamente al escritor con una *prima* para equilibrar la situación.

El problema que existe en los contratos de opciones, se debe a que el escritor de la opción tiene la **obligación** de comprar (o vender) el bien subyacente y el tenedor de la opción tiene el **derecho** de comprarlo (o venderlo); por esa falta de simetría, a forma de compensación, se debe pagar al escritor por adelantado una cantidad monetaria denominada *prima*, ésta siempre será pagada con independencia de que se ejerza o no la opción.

El tenedor de una opción, ejercerá su derecho si lo que se conoce como valor intrínseco de la opción es positivo. El valor intrínseco de una opción call, es el valor máximo entre la diferencia del valor del subyacente en la fecha de expiración T y el precio de ejercicio E, o cero. Por tanto, para que al tenedor de la opción call le convenga ejercer el derecho de comprar el subyacente, se debe cumplir:

$$C = \text{máx}(S(T) - E, 0) > 0.$$

Se dice que la opción call se encuentra *"in the money"* si el precio de ejercicio E es menor que el valor del bien subyacente $S(T)$, es decir, $S(T) > E$. Por otro lado si el precio de ejercicio E es mayor que el del bien, $E > S(T)$, entonces se dice que la opción call está *"out of the money"*. Finalmente, si estos dos valores son iguales, es decir, $E = S(T)$, entonces la opción de compra está *"at the money"*.

De manera semejante a la opción call, el valor intrínseco de una opción put, es el valor máximo entre la diferencia del precio de ejercicio E y el valor del subyacente en la fecha de expiración T, o cero. Por tanto, para que al tenedor de la opción le convenga ejercer el derecho de vender el subyacente, se debe cumplir:

$$P = \text{máx}(E - S(T), 0) > 0.$$

Para una opción put, si el precio de ejercicio E es mayor que el valor del bien subyacente $S(T)$, $E > S(T)$, entonces la opción put se encuentra *"in the money"*. Por el contrario, si el valor del bien $S(T)$ es mayor que el precio de ejercicio E, $S(T) > E$, la opcion put está *"out the money"*. Finalmente, si los dos valores son iguales, $E = S(T)$, la opción de venta está exactamente *"at the money"*.

En las Figuras 1.1 y 1.2 se observa que en el caso de una opción call, el valor intrínseco es positivo a partir del momento en que el precio del bien subyacente $S(T)$ es superior al precio de ejercicio E, y en el caso de un put, cuando el precio del bien subyacente es menor al precio de ejercicio.

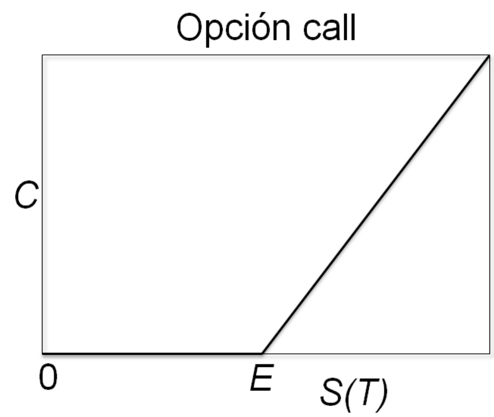

Figura 1.1: Diagrama de la función de pago para una opción call.

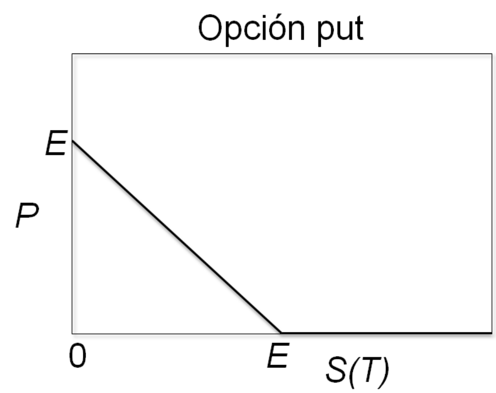

Figura 1.2: Diagrama de la función de pago para una opción put.

Una relación importante que se da entre la prima de una opción call y una put, ambas opciones Europeas con la misma fecha de expiración y precio de ejercicio, se denomina *paridad Put-Call*.

La paridad Put-Call es una relación importante en opciones, ya que permite conocer el valor de una opción put conociendo el valor de una opción call y viceversa.

Sean dos opciones, call y put ambas Europeas que poseen el mismo precio de ejercicio E y fecha de expiración T, considerando los siguientes dos portafolios,

P_A: Contiene una opción call más el efectivo Ee^{-rT}.

P_B: Contiene una opción put más una unidad del activo.

En la fecha de expiración T, el portafolio P_A tendrá el valor:

$$\max(S(T)-E,0)+E,$$

lo cual es igual a:

$$\max(S(T),E).$$

Por otro lado, el portafolio P_B costará:

$$\max(E-S(T),0)+S(T),$$

que es lo mismo que:

$$\max(E,S(T)).$$

Se dice que los dos portafolios tienen los mismos pagos si tienen el mismo valor al tiempo cero, esto es, si se cumple la siguiente relación

$$C+Ee^{-rT}=P+S.$$

Las estrategias con opciones son muy variadas, dependiendo de los objetivos del inversor, de las restricciones a las que se encuentra, así como a las distintas perspectivas que tiene con respecto a la evolución del mercado. Sin embargo, a efecto de estudio se pueden agrupar en estrategias de cobertura y estrategias complejas.

Existen dos estrategias básicas de cobertura con opciones, denominadas en el mercado como *"covered call"* y *"protective put"*.

El *"covered call"*, consiste en adquirir una opción de compra cuando se tiene una posición corta en algún bien subyacente.

El *"protective put"*, consiste en adquirir una opción de venta cuando se tiene una posición larga en algún bien subyacente.

Las estrategias complejas son aquellas que representan combinaciones de las posibles posiciones que pueden tomar las opciones. Dichas combinaciones son muy variadas, tales como: los *"spreads"*, *"straddles"*, *"straps"*, *"strips"*, etc. [5], [10].

Los *"spreads"* son la combinación de opciones del mismo tipo asociadas al mismo subyacente, de las cuales unas se compran y otras se venden, con diferentes precios de ejercicio o con diferentes fechas de expiración, o con ambas cosas a la vez.

Los *"straddles"* consisten en la compra o venta simultánea de opciones de compra y de venta sobre el mismo bien.

Los *"straps"* son combinaciones que consisten en la compra o venta simultánea de dos opciones de compra y una de venta sobre el mismo bien subyacente.

Los *"strips"* son combinaciones que consisten en la compra o venta simultánea de una opción de compra y dos de venta sobre el mismo subyacente.

1.2. ¿Dónde se negocian las opciones?

Tradicionalmente los productos derivados que se cotizan tanto en la bolsa de Chicago como en la de México, iniciaron mediante el sistema llamado de "viva voz", que consiste en reunir a un grupo de operadores en un lugar denominado piso de remates para que todos tuvieran información del mercado en tiempo real, y así las operaciones fueran del conocimiento de todos de manera transparente y justa, ya que éstas debían pactarse a las posturas más competitivas.

No obstante lo anterior, durante la década de 1990 algunas bolsas en el mundo, tanto de valores como de productos derivados, migraron su sistema de negociación hacia uno electrónico. Los sistemas electrónicos se caracterizan porque los operadores se encuentran frente a computadoras conectadas en red, para colocar posturas de compra o venta y pactar transacciones, de manera que ya no es necesario que todos los operadores se encuentren físicamente reunidos en un piso de remates.

Las opciones son productos derivados que se pueden negociar en mercados organizados (bursátiles) o bien en mercados extrabursátiles (también conocidos como *"Over-The-Counter", OTC*).

El mercado bursátil de México en donde se negocian opciones, futuros y swaps lleva por nombre **(MexDer) Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V.**

La creación del Mercado de Derivados listados, inició en 1994 cuando la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y la S.D. Indeval asumieron el compromiso de crear este mercado. La BMV financió el proyecto de crear la bolsa de opciones y futuros que se denomina MexDer. Por su parte Indeval tomó la responsabilidad de promover la creación de la Cámara de Compensación de derivados que se denomina Asigna, Compensación y Liquidación.

MexDer inició operaciones el 15 de diciembre de 1998 al listar contratos de futuros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable autorizada por el gobierno federal a través de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público(SHCP).

Como parte de una nueva etapa para MexDer, en 2004 empezó a listar contratos de opciones.

Las instituciones que participan en el mercado son:

MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. (bolsa de derivados).

Asigna, Compensación y Liquidación (Cámara de Compensación).

Socios liquidadores de Asigna.

Miembros operadores y formadores del mercado [27].

Cámara de Compensación ASIGNA

La función de la Cámara de Compensación en los mercados de derivados listados o estandarizados es fundamental. Esta entidad es la contraparte real y, por tanto, garante de todas las obligaciones financieras que se desprenden de la operación de los contratos que se cotizan en la bolsa organizada. Esta función la cumple ASIGNA, Compensación y Liquidación, que es la Cámara de Compensación para todas las transacciones que se realizan en MexDer.

ASIGNA es un fideicomiso de administración establecido en BBVA Bancomer [10].

Socios liquidadores de ASIGNA

Es el fideicomiso que es miembro de Asigna y participa en su patrimonio. Su finalidad es liquidar y, en su caso, celebrar por cuenta de clientes, contratos de futuro y contratos de opción operados en MexDer.

Existen 3 tipos de socios liquidadores:

SL de Posición Propia

Fideicomiso que compensa y liquida exclusivamente operaciones por cuenta de sus instituciones de banca múltiple, casas de bolsa y demás entidades del grupo financiero al que pertenezcan, así como del operador en cuyo capital participen cualquiera de las instituciones antes señaladas.

SL de Posición de Terceros

Fideicomiso que compensa y liquida operaciones por cuenta de clientes.

SL Integral

Ambas figuras: Terceros/clientes y propia en un solo fideicomiso.

MexDer tiene 4 socios liquidadores, mismos que se muestran en la Figura 1.3:

Figura 1.3: Socios liquidadores de MexDer.

Miembros operadores

Son instituciones de crédito, casas de bolsa y demás personas morales, que tienen acceso al Sistema Electrónico de Negociación de MexDer (MoNeT) para la celebración de contratos de futuros, opciones y swaps.

Existen 3 tipos de miembros operadores:

Operador por Cuenta Propia

Son instituciones de crédito, casas de bolsa y demás personas morales que realizan operaciones únicamente con recursos de su propia entidad financiera o de su propia empresa.

Operador por Cuenta de Terceros

Son instituciones de crédito, casas de bolsa y demás personas morales que realizan operaciones con fondos, clientes que pueden ser de diversas entidades financieras, personas morales o personas físicas.

Operador por Cuenta Propia y Terceros

Son instituciones de crédito, casas de bolsa y demás personas morales que cuentan con las facultades de los dos anteriores.

MexDer actualmente cuenta con 28 miembros operadores [27].

Formadores del mercado

Se obligan a presentar posturas de compra o venta para la celebración de un número determinado de operaciones por cuenta propia y dentro de un diferencial de precios, a efecto de otorgar mayor liquidez al mercado.

En MexDer existen 14 formadores del mercado [27].

¿Cómo participar en MexDer?

Al inicio de este mercado y hasta el 8 de mayo de 2000, la negociación era de "viva voz", actualmente las operaciones son electrónicas, concentrándose en el sistema de negociación "Monet-Derivados" (Motor de Negociación Transaccional).

MexDer posee un sistema de Registro y Asignación de Cuenta, el cual provee a cada cliente una clave única, esto hace que sea un mercado anónimo, lo que permite igualdad de oportunidad a todos los participantes.

Para comprar o vender en MexDer es necesario contactar a algún miembro operador o socio liquidador del mercado, ante el cual se debe abrir una cuenta. Los operadores de MexDer cuentan con personal calificado que ha sido acreditado por la Bolsa, ellos tienen el deber de asesorar y diseñar estrategias acorde a las necesidades del cliente.

La Figura 1.4 explica a grandes rasgos los pasos a seguir cuando se planea abrir una cuenta en MexDer,

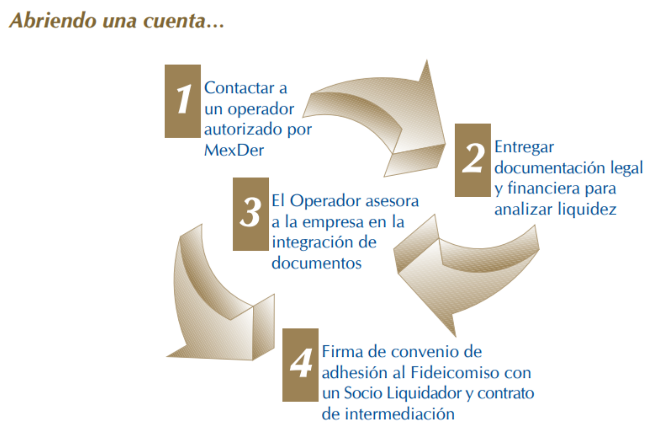

Figura 1.4:
Esquema de procedimiento para abrir una cuenta en MexDer.

Los operadores y/o socios liquidadores que efectuan operaciones por cuenta de terceros, deben suscribir un contrato de intermediación con cada cliente, el cual debe establecer, por lo menos los siguientes aspectos:

Descripción de los riesgos a los que está expuesto el cliente al participar en la celebración de contratos cotizados en MexDer y su aceptación.

Reconocimiento del cliente de las disposiciones contenidas en los reglamentos interiores de MexDer y ASIGNA, así como de las reglas expedidas por las autoridades financieras.

Los medios de comunicación que serán utilizados para el envío, recepción y confirmación de órdenes para la celebración de operaciones por cuenta del cliente.

Reconocimiento y aceptación por parte del cliente de las posiciones límites para la celebración de contratos con productos derivados.

Reconocimiento y aceptación por parte del cliente de que ASIGNA, será su contraparte en todos los contratos con productos derivados cotizados en MexDer.

Hasta ahora sólo se ha hablado sobre cómo abrir una cuenta y algunos de los requisitos, la Figura 1.5 explica de manera breve el proceso que sigue una vez que ya se tiene una cuenta y cómo operarla,

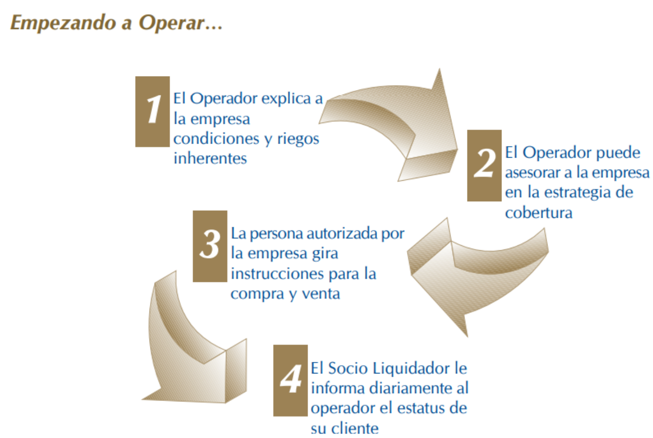

Figura 1.5:
Esquema de manejo de una cuenta en MexDer.

En MexDer se encuentran listados contratos de opciones sobre los siguientes subyacentes financieros:

DIVISAS	• Dólar de los Estados Unidos de América (DEUA)
ÍNDICES	• Futuros del Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC)
ACCIONES	• América Móvil L. • Cemex CPO (CX). • FEMSA UBD (FE) • GMéxico B (GM) • Lala B (LL) • Naftrac 02 (NA) • Walmex V (WA) • NAFTRAC (NA) • ALFA • ICA • MEXICHEM • PEÑOLES • PINFRA

Figura 1.6: Opciones cotizadas en MexDer.

Como se mencionó anteriormente, no todos los instrumentos financieros se negocian en un mercado organizado. Un volumen importante de instrumentos se cotizan en los mercados extrabursátiles, también conocidos en el medio financiero como *"Over-The-Counter", OTC*. De hecho, el mayor volumen de operaciones de productos derivados en el mundo se realiza fuera de bolsa, mediante sistemas de teléfono y sistemas de cómputo en red que unen a distintos participantes [10].

La característica más importante de los contratos negociados en este mercado, es que los atributos que acuerdan las partes son adaptables a las necesidades tanto del comprador como del vendedor. No se tienen que apegar a características de contratos estándar como en el caso de los mercados organizados. Sin embargo, la desventaja que presentan es que existe el riesgo de incumplimiento de la contraparte, ya que en este mercado no existe una Cámara de Compensación que asuma dicho riesgo [10].

Capítulo 2

Opciones financieras

En el presente capítulo, se analiza cada una de las opciones definidas en el capítulo anterior. El objetivo es conocer su función de pago y algunas de sus consecuencias.

Los contratos de opción son una de las piezas fundamentales de un mercado financiero moderno. La idea más generalizada entre los inversores y profesionales es que las opciones tienen una vida corta y que constituyen uno de los elementos más representativos, quizás, el más importante del proceso de innovación financiera [18].

Las opciones incorporan derechos de compra o de venta, por lo que una primera clasificación que se realiza es entre opciones de compra (call) y opciones de venta (put). Los términos *"call"* y *"put"* tienen su origen en el mercado *"Over-The-Counter"* de opciones, que comenzó en el siglo XIX en los Estados Unidos, y eran las denominaciones utilizadas por los operadores [18].

2.1. Opciones Americanas

Las opciones Americanas forman parte de las opciones *plain vanilla*, se puede decir que son opciones clásicas. Su principal característica es la facilidad que ofrecen al poderse ejercer (si es conveniente), en cualquier momento anterior o igual a la fecha de expiración T.

Para ciertas opciones cuya función de pago se comporta como una función convexa, como lo es para opciones call sobre algún bien subyacente que no paga dividendos, una política óptima para ejercerlas es esperar hasta la fecha de expiración T, sin embargo, para opciones put esta política no necesariamente aplica. En esta sección se estudiarán las políticas óptimas para ejercer opciones call y put Americanas [19].

Dentro del modelo de Black-Scholes, el cual se estudiará en el capítulo siguiente, los valores que puede tomar el precio del bien subyacente siguen un proceso $S(t)$ que se comporta, bajo la medida neutral al riesgo Q, como un movimiento Browniano geométrico [22]:

$$S(t) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)}, \tag{2.1.1}$$

en donde $0 \leq r \leq 1$, es la tasa de interés libre de riesgo y constante. $W(t)$ es un proceso estándar de Wiener bajo Q.

Para toda opción Americana sobre un bien subyacente, una política admisible de ejercicio debe ser en *tiempos de paro* con respecto a la filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ del proceso de Wiener $W(t)$.

Si $F(s)$ es la función de pago de una opción Americana que es ejercida cuando el precio del bien es s y T la fecha de expiración, entonces el valor de la opción V_t en cualquier momento $t \leq T$ es:

$$V_t = \underset{\tau : t\leq\tau\leq T}{sup} \mathbb{E}(F(S(\tau))e^{-r(\tau-t)} \mid \mathcal{F}_t). \tag{2.1.2}$$

El siguiente argumento y proposición muestran por qué nunca es óptimo ejercer una opción call Americana antes de la fecha de expiración.

Se sabe que la función de pago de una opción call es:

$$\text{máx}(S(t) - E, 0), \tag{2.1.3}$$

cuando el precio del bien subyacente es *S(t)* y E el precio de ejercicio. Nótese que para cada E, la función (2.1.3) es convexa para $S(t)$.

Se emplearán las siglas c.s. para referir “casi seguramente”.

Proposición 2.1.1. *La política óptima para ejercer una opción call Americana es hacerlo hasta la fecha de expiración, es decir,* $\tau = T$ *c.s.*

Demostración. Sea $\tau \leq T$, si la opción call Americana se ejerce al tiempo τ, su función de pago es $\max(S(\tau) - E, 0)$, de esta manera, el valor presente de la opción es:

$$\mathbb{E}(\max(S(\tau) - E, 0)e^{-r\tau}),$$

se sigue entonces la siguiente desigualdad

$$\mathbb{E}(\max(S(\tau) - E, 0)e^{-r\tau}) \leq \mathbb{E}(\max(S(\tau)e^{-r\tau} - Ee^{-rT}, 0)), \qquad \forall \tau \epsilon (0, T)$$

usando el hecho de que $\tau \leq T$. Ahora, recordar que el valor presente del proceso de los posibles valores que puede tomar el precio del bien subyacente $(S(t)e^{-rt})_{t\geq 0}$ es una martingala [19].

Así, como la función $x \to \max(x - \mathcal{H}, 0)$, para cada $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ es convexa, el Lema 2.1.2 implica que:

$$\mathbb{E}(\max(S(\tau)e^{-r\tau} - Ee^{-rT}, 0)) \leq \mathbb{E}(\max(S(T)e^{-rT} - Ee^{-rT}, 0)).$$

De este modo, el valor presente de la opción call Americana que se ejerció al tiempo τ, no sería mayor que el valor presente de una call Europea, ambas con precio de ejercicio E y fecha de expiración T. Se sigue de (2.1.2) que el valor de una opción call Americana es igual al de una call Europea. Se concluye que es óptimo ejercer (si es conveniente) la opción de compra Americana hasta la fecha de expiración.

□

Lema 2.1.2. *Sea* $(M(t))_{0\leq t\leq T}$ *una martingala relativa a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*, y sea* $\tau \leq T$ *un tiempo de paro. Entonces para cualquier función convexa* φ*,*

$$\mathbb{E}\varphi(M(\tau)) \leq \mathbb{E}\varphi(M(T)). \tag{2.1.4}$$

Demostración. Ver [19].

La política de ejercicio óptimo para las opciones call Americanas no aplica para su contraparte, las put Americanas. A continuación se analiza la relación que existe entre las opciones put Europeas y Americanas.

La función de pago de una opción put es:

$$\max(E - S(t), 0),$$

cuando el precio del bien subyacente es *S(t)* y E el precio de ejercicio. Se denota por $V_E(t, S(t))$ y $V_A(t, S(t))$ los precios al tiempo $t \leq T$ de una opción Europea y una Americana respectivamente, ambas opciones de venta con precio de ejercicio E y fecha de expiración T.

La siguiente proposición muestra que el valor de una opción put Americana es mayor que el de una put Europea.

Proposición 2.1.3. *Si la tasa de interés libre de riesgo r es positiva, entonces para cada $t < T$ se cumple que,*

$$V_E(t, S(t)) < V_A(t, S(t)). \tag{2.1.5}$$

Demostración. Para probar (2.1.5), es suficiente considerar el caso $t_0 = 0$. Se toma en cuenta la siguiente (no necesariamente óptima) política de ejercicio para una opción put Americana: ejercer al $\min(\tau, T)$, tal que

$$\tau = \min(t \geq 0 : Ee^{r(t-T)} \leq E - S(t)). \tag{2.1.6}$$

Caso 1. $(\tau < T)$. La opción se ejercerá al tiempo τ tal que,

$$Ee^{r(\tau-T)} \leq E - S(\tau),$$

así el valor de la función de pago de la opción es al menos $Ee^{r(t-T)}$. Si este pago se invierte en el bien subyacente libre de riesgo por el tiempo restante $\tau \leq t \leq T$, entonces ese valor al tiempo T será E y este valor es mayor que cualquier posible pago de una opción put Europea con precio de ejercicio E, con $S(T) > 0$ con probabilidad 1.

Caso 2. $(\tau \geq T)$. La opción se ejercerá en la fecha de expiración T y el pago será exactamente el mismo que para una opción put Europea.

Se observa que en ambos casos, el valor de la función de pago (en la fecha de expiración T) de la opción put Americana es al menos el de la función de pago de una opción put Europea y en el caso $\tau < T$, el valor de la función de pago de la opción Americana es mayor estricto que el de la opción Europea.

Como el caso $\tau < T$ tiene probabilidad positiva, independientemente del precio inicial del bien subyacente (S_0), se concluye que el pago esperado de una opción put Americana que se ejerció de acuerdo con la política descrita anteriormente, es mayor que el de una opción put Europea.

$\square$

Como consecuencia de esta proposición, se tiene que la política de ejercicio óptimo para una opción put Americana, es no esperar hasta la fecha de expiración. Formalmente, para cierta función diferenciable estrictamente creciente $s_*(t)$, (para la cual desafortunadamente no hay una expresión simple) la opción se debe ejercer al primer tiempo $\tau \leq T$ tal que,

$$S(\tau) \leq s_*(\tau). \tag{2.1.7}$$

Si (2.1.7) no ocurre para la fecha de expiración T, entonces lo óptimo es dejar que la opción expire sin valor alguno [19].

Con los resultados anteriores, se concluye que para opciones Americanas, únicamente es relevante la valuación de opciones **put**.

El Modelo Binomial de Cox-Ross-Rubinstein se presenta a detalle en el capítulo siguiente, donde se verá que es un modelo muy versátil para valuar opciones, es por ello que realizando una adaptación directa en él, puede ser usado para valuar opciones Americanas.

2.2. Opciones Exóticas

Uno de los aspectos atractivos de los mercados extrabursátiles es el número de productos Exóticos negociados que han sido creados por ingenieros financieros.

En esta sección se describen diferentes tipos de opciones Exóticas y se discute su valuación.

En las opciones Exóticas se distinguen diferentes modalidades, entre las cuales están las opciones cuyo valor es dependiente de la evolución histórica de los precios del bien subyacente. A esta categoría pertenecen las opciones

Asiáticas, Barrera y Parisinas.

2.2.1. Opciones Asiáticas

Fue en 1978 cuando David Spaughton y Mark Standish estando en Tokyo, desarrollaron la primera fórmula de valuación de opciones relacionadas con el precio promedio del petróleo. Ellos decidieron llamar a estas opciones *Asiáticas* debido a que se encontraban en Asia.

La ventaja que presentan las opciones Asiáticas es que suelen ser más baratas que las opciones tradicionales (Europeas y Americanas) [28].

Las opciones Asiáticas más negociadas son las que en la fecha de expiración T ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio medio del bien subyacente $A(0,T)$ y el precio de ejercicio E. Se les denomina opciones de *precio de ejercicio fijo* (*"Fixed strike"*) o simplemente Asiáticas [2] [28].

Las funciones de pago para opciones call y put Asiáticas respectivamente se describen a continuación:

$$C = \text{máx}(A(0,T) - E, 0), \tag{2.2.1}$$

$$P = \text{máx}(E - A(0,T), 0). \tag{2.2.2}$$

El promedio $A(0,T)$ puede ser calculado de varias maneras, normalmente se utiliza el promedio aritmético:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i). \tag{2.2.3}$$

también se suele emplear el promedio geométrico:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{2.2.4}$$

siendo $S(t_i)$ el precio del bien subyacente en la fecha t_i.

Sin embargo, también se negocian, aunque menos, opciones Asiáticas en las que en la fecha de expiración T ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio del bien subyacente en la fecha de expiración $S(T)$ y la media de los precios que el subyacente ha alcanzado durante la vida de la opción. A éstas se les denomina opciones de *precio de ejercicio flotante* (*"Floating strike"*) o Pseudo-asiáticas [2] [28].

Las funciones de pago para opciones call y put Pseudo-asiáticas respectivamente son las siguientes:

$$C = \max(S(T) - eA(0,T), 0), \tag{2.2.5}$$

$$P = \max(eA(0,T) - S(T), 0), \tag{2.2.6}$$

en donde $e \in (0,1]$, usualmente su valor es 1 y por tanto es omitido.

2.2.2. Opciones Barrera

Las opciones *Barrera* tienen una función de pago que inicia o expira dependiendo de si el valor del bien subyacente cruza la barrera B durante la vida de la opción.

Un número importante de opciones Barrera se comercia regularmente en mercados extrabursátiles, estas opciones son atractivas para algunos participantes del mercado ya que son menos caras que las *plain vanilla* [15].

A continuación se describe la función de pago para opciones call Barrera.

Opción call down-and-out. Tiene una función de pago con valor cero si el precio del bien cruza la barrera B, con $B < S_0$, en algún momento antes de la fecha de expiración. Si la Barrera no es cruzada, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea*, es decir, $\max(S(T) - E, 0)$. En la Figura 2.1 se muestra gráficamente una opción call Barrera down-and-out.

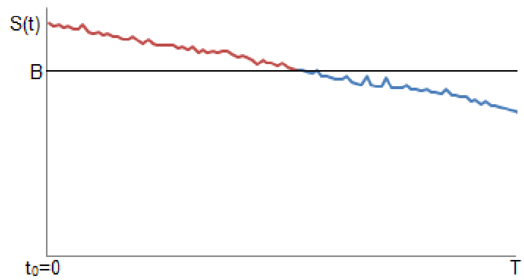

Figura 2.1: Gráfica de opción Barrera down-and-out. La trayectoria del bien subyacente inicia por encima de B, conforme avanza cruza la barrera y por tanto la opción vale 0.

Opción call down-and-in. Tiene una función de pago con valor cero a menos que el precio del bien cruce la barrera B, con $B < S_0$, en algún momento antes de la fecha de expiración. Si la barrera es cruzada, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea*, es decir, $\max(S(T) - E, 0)$. En la Figura 2.2 se muestra gráficamente una opción call Barrera down-and-in.

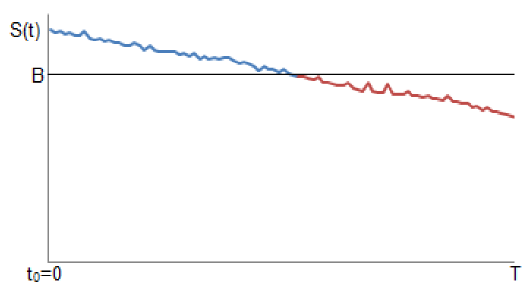

Figura 2.2: Gráfica de opción Barrera down-and-in. La trayectoria del bien subyacente inicia por encima de B, conforme avanza cruza la barrera y por tanto la opción tiene como función de pago la misma que para una opción Europea.

Opción call up-and-out. Tiene una función de pago con valor cero si el precio del bien cruza la barrera B, con $B > S_0$, en algún momento antes de la fecha de expiración. Si la barrera no es cruzada, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea*, es decir, $\max(S(T) - E, 0)$. En la Figura 2.3 se muestra gráficamente una opción call Barrera up-and-out.

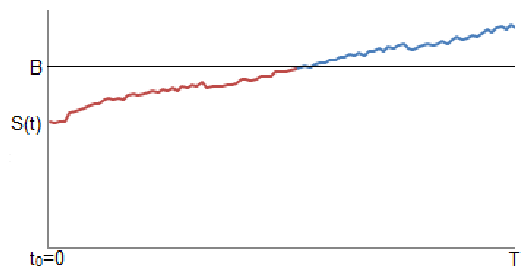

Figura 2.3: Gráfica de opción Barrera up-and-out. La trayectoria del bien subyacente inicia por debajo de B, conforme avanza cruza la barrera y por tanto la opción vale 0.

Opción call up-and-in. Tiene una función de pago con valor cero a menos que el precio del bien cruce la barrera B, con $B > S_0$, en algún momento antes de la fecha de expiración. Si la barrera es cruzada, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea*, es decir, $\max(S(T) - E, 0)$. En la Figura 2.4 se muestra gráficamente una opción call Barrera up-and-in.

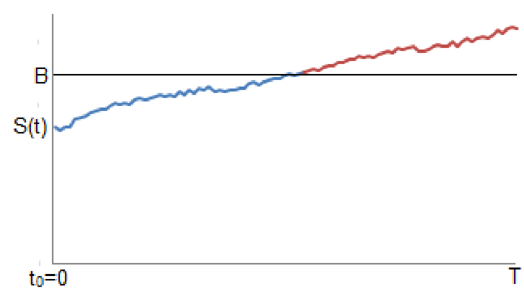

Figura 2.4: Gráfica de opción Barrera up-and-in. La trayectoria del bien subyacente inicia por debajo de B, conforme avanza cruza la barrera y por tanto la opción tiene como función de pago la misma que para una opción Europea.

Una relación importante que se da entre la *prima* de opciones Barrera y opciones Europeas, ambas con la misma fecha de expiración T y precio de ejercicio E, es la siguiente:

$$C_{up-in} + C_{up-out} = C = e^{T-t}\mathbb{E}(\max(S(T) - E, 0)),$$

$$C_{down-in} + C_{down-out} = C = e^{T-t}\mathbb{E}(\max(S(T) - E, 0)),$$

$$P_{up-in} + P_{up-out} = P = e^{T-t}\mathbb{E}(\text{máx}(E - S(T), 0)),$$
$$P_{down-in} + P_{down-out} = P = e^{T-t}\mathbb{E}(\text{máx}(E - S(T), 0)).$$

Siendo C y P el valor de una opción call y put Europea respectivamente [6]. Por consiguiente, para definir los cuatro tipos de opciones Barrera restantes, basta con reemplazar la palabra call por put en cada una de las definiciones anteriores.

Otras variedades de las opciones Barrera que no se estudiarán aquí, pero que vale la pena mencionar, son las opciones con doble barrera, es decir, opciones con barrera por arriba y por abajo, las cuales pierden valor al tocar cualquiera de las barreras o que adquieren valor al cruzar cualquiera de ellas. Otros ejemplos son las opciones con barrera externa o arcoíris con barrera, que son opciones cuya activación o desactivación depende del comportamiento de un bien subyacente distinto al que se refiere la función de pago de la opción.

2.2.3. Opciones Bermuda

El término *Bermuda* proviene del hecho de que este tipo de opciones son un híbrido entre una opción Europea y una Americana, ya que en el Océano Atlántico las islas Bermudas están ubicadas entre América y Europa.

La característica principal de estas opciones es que permiten ejercicio temprano en un conjunto finito de fechas, por ejemplo, mensualmente, trimestralmente, anualmente, etc; sólo una vez. Esta cualidad cede al tenedor la posibilidad de crear y comprar un contrato híbrido, en otras palabras esto le proporciona mayor control sobre cuándo ejercer la opción [30].

Las opciones Bermuda son usualmente negociadas en mercados extrabursátiles sobre bienes subyacentes tales como tasas de interés, monedas extranjeras y con propósitos de cobertura [21].

Las opciones Bermuda a diferencia de las Americanas no tienen la flexibilidad de poder ser ejercidas en cualquier momento menor o igual a la fecha de expiración T, como resultado de esto, las opciones Americanas son más caras que las Bermudas, mientras que las Europeas son más baratas, ya que ofrecen menos flexibilidad, es decir, la prima de una opción Bermuda es menor que la de una Americana, pero mayor que la de una Europea [29].

Ya que estas opciones permiten realizar ejercicio temprano, si el conjunto finito de fechas para efectuarlo se redujera a $\{T\}$ siendo T la fecha de expiración de la opción, entonces lo que se tiene es una opción Europea. Por otro lado, si el conjunto es $\{k\Delta : k = 1, 2, ..., [T/\Delta]\} \cup \{T\}$ donde $\Delta > 0$ y además pequeño, entonces la opción se aproxima a una opción Americana. Debido a esto último se intuye que las políticas óptimas para ejercer una opción Bermuda son las mismas que para una opción Americana, es por ello que se ha decidido estudiar únicamente opciones **put** Bermuda.

La siguiente proposición muestra que el valor de una opción put Bermuda converge al valor de una put Americana cuando las fechas permitidas para realizar ejercicio temprano son muy cercanas una de la otra.

Proposición 2.2.1. *Conforme $\Delta \downarrow 0$, el valor al tiempo cero $V_B(0, S_0)$ de una opción put Bermuda B_Δ converge al valor $V_A(0, S_0)$ de una opción put Americana.*

Demostración. Ver [19].

Nótese que debido a que las opciones Europeas y Americanas en este trabajo se valúan mediante el Modelo Binomial de Cox-Ross-Rubinstein, las opciones Bermuda también son valuadas con dicho modelo y es por ello que su función de pago tiene la siguiente forma:

El valor de la opción en las fechas permitidas para realizar ejercicio temprano es la misma que para una opción put Americana:

$$\text{máx}[\text{máx}(E - S_0 u^j d^{i-j}, 0), e^{-r\Delta t}(pV_{j+1}^{i+1} + (1-p)V_j^{i+1})],$$

en otro caso, es la misma que para una opción put Europea:

$$e^{-r\Delta t}(pV_{j+1}^{i+1} + (1-p)V_j^{i+1}).$$

Con $0 \leq i \leq n-1$ y $0 \leq j \leq i$.

2.2.4. Opciones Parisinas

Parece ser que cada vez es más común encontrar opciones con diversas modificaciones para cumplir las necesidades de los inversionistas, un ejemplo de ello son las opciones *Parisinas*, ya que éstas fueron introducidas con el fin de conseguir una versión más flexible de las opciones Barrera. Las opciones Parisinas aparecen originalmente en Chesney, Jeanblanc-Piqué y Yor (1997) [23], donde se usó la teoría de excursiones Brownianas y definieron el valor de estas opciones en términos de una integral expresada como una transformada de Laplace-inversa.

De la Definición 1.1.9 se sabe que el valor de estas opciones depende de si el precio del bien subyacente está por encima (o debajo) del nivel de excursión B^* durante cierto periodo de excursión D.

Para iniciar con el estudio de las opciones Parisinas, se toma en cuenta su variedad, así como sus características, mismas que se presentan a continuación.

Al igual que las opciones Barrera, las opciones Parisinas se dividen en opciones *down-and-out, down-and-in, up-and-out* y *up-and-in*, éstas a su vez se dividen en opciones de compra (call) y opciones de venta (put), obteniendo un total de 8 diferentes tipos de opciones Parisinas.

Adicionalmente, las opciones Parisinas también se clasifican según se permita ejercicio temprano o no [3].

Ya que estas opciones pueden tener tantas características como se desee, se ha decidido estudiar únicamente opciones Parisinas con ejercicio permitido hasta la fecha de expiración. Es por ello que ahora se presenta su función de pago [7].

Opción call down-and-out. Tiene una función de pago con valor cero si el precio del bien cruza el nivel de excursión B^* y permanece por debajo de dicho nivel por un intervalo de tiempo mayor que el periodo de excursión

D, antes de la fecha de expiración. Si no ocurre lo anterior, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea,* es decir, $\max(S(T) - E, 0)$.

Opción call down-and-in. Tiene una función de pago con valor cero a menos que el precio del bien cruce el nivel de excursión B^* y permanezca por debajo de dicho nivel por un intervalo de tiempo mayor que el periodo de excursión D, antes de la fecha de expiración. Si ocurre lo anterior, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea*, es decir, $\max(S(T) - E, 0)$.

Opción call up-and-out. Tiene una función de pago con valor cero si el precio del bien cruza el nivel de excursión B^* y permanece por encima de dicho nivel por un intervalo de tiempo mayor que el periodo de excursión D, antes de la fecha de expiración. Si no ocurre lo anterior, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea,* es decir, $\max(S(T) - E, 0)$.

Opción call up-and-in. Tiene una función de pago con valor cero a menos que el precio del bien cruce el nivel de excursión B^* y permanezca por encima de dicho nivel por un intervalo de tiempo mayor que el periodo de excursión D, antes de la fecha de expiración. Si ocurre lo anterior, entonces la función de pago es la misma que para una opción *call Europea,* es decir, $\max(S(T) - E, 0)$.

Por consiguiente, para definir los cuatro tipos de opciones Parisinas restantes, basta con reemplazar la palabra call por put en cada una de las definiciones anteriores.

En la Figura 2.5 se muestra como ejemplo una opción Parisina up-and-in cuya trayectoria del bien subyacente inicia por debajo de B^*, conforme avanza cruza el nivel de excursión, sin embargo, el periodo de tiempo que permanece por encima no es mayor que D y por tanto la opción hasta ese momento vale 0. Posteriormente, el precio del bien cruza de nuevo el nivel de excursión y permance por encima un periodo de tiempo mayor que D, entonces la opción tiene como función de pago la misma que para una opción Europea.

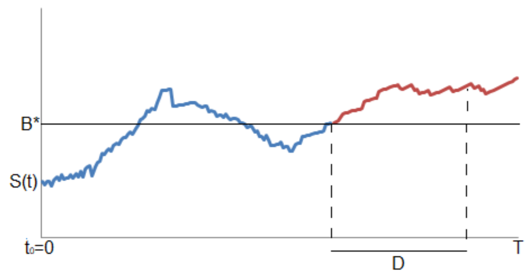

Figura 2.5: Gráfica de opción Parisina up-and-in.

El periodo de excursión D juega un papel importante en estas opciones, incluso algunas consecuencias se derivan de su tamaño, pero éstas se exponen más adelante, ahora se presenta otra clasificación de las opciones Parisinas que está relacionada con la forma en que se obtiene el periodo de tiempo total que el precio del bien subyacente ha estado por encima o debajo del nivel de excursión B^*.

Opciones Parisinas acumulativas

Una opción Parisina acumulativa es aquella para la cual el precio del bien subyacente tiene que estar por encima o debajo del nivel de excursión B^* por un periodo de tiempo D (periodo de excursión) **acumulativamente** para activar la clasificación (down-and-in, up-and-in, down-and-out o up-and-out), es decir, cuando se adicionan los intervalos de tiempo en los que el precio del bien subyacente cumple la condición requerida de la opción Parisina, la cuenta no vuelve a cero cada vez.

Opciones Parisinas consecutivas

Una opción Parisina consecutiva es ligeramente diferente de su contraparte acumulativa. En una opción Parisina consecutiva el precio del bien subyacente tiene que estar por encima o debajo del nivel B^* por un periodo de tiempo D (periodo de excursión) **continuamente** para activar la clasificación (down-and-in, up-and-in, down-and-out o up-and-out), es decir, el tiempo se empieza a contar desde cero cada vez que se adicionan intervalos de tiempo en los que el precio del bien subyacente cumple la condición requerida de la opción Parisina.

Para ser concretos, se puede decir que D en esta variación de opción Parisina, se calcula de forma continua.

La Figura 2.6 se toma como ejemplo para comparar gráficamente las opciones Parisinas acumulativas y consecutivas. Una opción Parisina up-and-in acumulativa con fecha de expiración $T = 200$ días y periodo de excursión $D = 80$ días, dado que el precio del bien subyacente estuvo por encima de B^*, 20 días y posteriormente 70 días dando un total de 90, entonces la opción tiene como función de pago la misma que para una opción Europea, sin embargo, para una opción Parisina up-and-in consecutiva con misma fecha de expiración y periodo de excursión, la opción vale 0 ya que en ambos periodos durante los cuales el precio del bien subyacente estuvo por encima de B^* ninguno de estos es mayor que 80 por sí sólo.

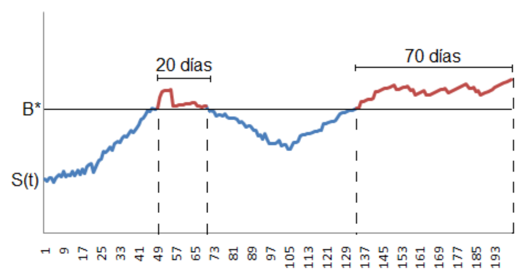

Figura 2.6: Gráfica de opción Parisina up-and-in con fecha de expiración $T = 200$ días y periodo de excursión $D = 80$ días.

Existe una comparación importante entre la prima de una opción Parisina acumulativa y una consecutiva, ambas con parámetros idénticos. La prima de una opción Parisina consecutiva es mayor que la de una acumulativa, esto se debe a que en la consecutiva es más difícil activar la clasificación (down-and-in, up-and-in, down-and-out o up-and-out) [26].

Así mismo, una consecuencia derivada del tamaño del periodo de excursión D, es cuando cuando la longitud de éste es muy pequeña, entonces el valor de las opciones Parisinas acumulativas y consecutivas se aproxima al de una opción Barrera con los mismos parámetros y misma clasificación. Se intuye que en caso contrario, es decir, cuando la longitud del periodo de excursión es muy grande, entonces el valor de ambas opciones Parisinas se aproximan a 0.

Dejando a un lado la longitud del periodo de excursión D, en general, una opción Parisina tiene una prima menor que una *plain vanilla*, pero mayor que una Barrera, todas con los mismos parámetros [26]. Esto se debe a que el precio del bien subyacente tiene que estar por encima o debajo del nivel de excursión B^* por un periodo de tiempo a diferencia de sólo tocar dicho nivel, la oportunidad de activar la clasificación (down-and-in, down-and-out, up-and-in o up-and-out) es menor que para una Barrera, es así que se tiene una prima mayor.

En el programa realizado para valuar opciones en Excel (VBA), las opciones Parisinas que se valúan son opciones acumulativas con ejercicio permitido hasta la fecha de expiración.

Existe un gran número de opciones Exóticas tales como Look-back, Binarias, Rusas, Paylater, etc. sin embargo éstas no se abordaron en este trabajo [14], [24], [30].

Capítulo 3

Métodos de Valuación

En este capítulo se presenta un modelo muy versátil para valuar opciones, el Modelo Binomial de Cox-Ross-Rubinstein. En 1979, el modelo de árboles binomiales fue introducido por primera vez por John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein en el artículo *"Option Pricing: A Simplified Approach"* en el *"Journal of Financial Economics"*. El modelo es simple, sin embargo, es una poderosa herramienta que sirve para encontrar el valor de un extenso número de opciones.

El Modelo Binomial CRR resulta ser una versión simplificada del modelo más antiguo para valuar opciones europeas, el Modelo de Black, Scholes y Merton, publicado un año después de haber sido formulado en 1973.

Como se describió en el capítulo anterior, existen las denominadas opciones Exóticas y cada una de ellas es distinguida por las siguientes condiciones:

- La forma en que la función de pago depende de la trayectoria del bien subyacente.
- Si el ejercicio temprano es permitido.

En muchos casos, no es posible obtener una expresión exacta para el valor de la opción y por lo tanto se debe recurrir a otros métodos.

Se han desarrollado diferentes modelos para valuar opciones, entre los métodos numéricos destaca el Método de Monte Carlo, es por ello que en este trabajo se incluye. Este método permite estimar valores que son difíciles de obtener analíticamente por medio de la repetición de un algoritmo computacional y el cómputo de los resultados obtenidos.

En el programa elaborado para valuar opciones en Excel (VBA), las opciones Europea, Americana y Bermuda son valuadas mediante el Modelo Binomial CRR y las opciones restantes, es decir, Asiática, Barrera y Parisina son valoradas mediante el Método de Monte Carlo.

3.1. Modelo Binomial de Cox-Ross-Rubinstein

3.1.1. Modelo Binomial de un Paso

En esta sección se estudia el Modelo Binomial en su forma más simple, el Modelo de un Paso (o de un Periodo), el cual consta de un árbol con dos ramas, éstas representan las posibles trayectorias que puede seguir el precio del bien subyacente durante la vida de la opción. Este modelo proporciona una fórmula de valuación teórica de una opción call Europea sobre un bien subyacente que no paga dividendos.

Al igual que en el Modelo de Black, Scholes y Merton, en la propuesta CRR se construye un portafolio que comprende al bien subyacente y una opción, que al final del periodo de inversión proporciona el mismo rendimiento en todas las posibles trayectorias que puede seguir el precio del subyacente, esto es debido a que un supuesto esencial sobre el cual descansa el modelo es que no existen oportunidades de arbitraje que sean libres de riesgo.

Para iniciar, se considerán dos instantes, el tiempo presente $t_0 = 0$ y la fecha de expiración T. El precio presente del bien subyacente en $t_0 = 0$ es S_0. En la fecha de expiración, es decir, en T el precio del bien subyacente puede incrementar con un factor u, donde $u > 1$ o disminuir con un factor d, donde $0 < d < 1$, a S_0u o S_0d respectivamente, de esta forma la opción también puede tomar dos valores distintos dependiendo del movimiento del precio del bien subyacente, y su valor es C_u o C_d. Este esquema se muestra en la Figura 3.1.

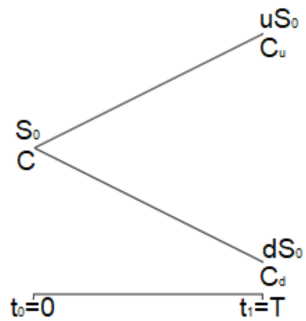

Figura 3.1: Árbol binomial de un paso.

Se considera un portafolio libre de riesgo compuesto por una posición larga de x cantidad de acciones del bien subyacente y de una posición corta de una opción. Lo que se busca es que el portafolio mantenga su valor esperado, independientemente de si el precio del subyacente sube o baja en T, esto se obtiene mediante la adecuada proporción de los bienes y de la opción. Se calcula el valor de x para que el portafolio no tenga riesgos, es decir, que ofrezca siempre los mismos pagos. Si el precio del bien subyacente sube, el valor del portafolio al final de la vida de la opción será: $xS_0u - C_u$, en caso contrario, si el precio del bien subyacente baja, el valor del portafolio en la fecha de expiración T será: $xS_0d - C_d$.

Como se quiere que el portafolio ofrezca siempre los mismos pagos, estas dos cantidades deben ser iguales

$$xS_0u - C_u = xS_0d - C_d,$$

de lo anterior se obtiene que

$$x = \frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d}. \tag{3.1.1}$$

En este caso, la ganancia del portafolio debe ser igual a la de una inversión con mismo valor que crece con una tasa de interés libre de riesgo r, ya que de lo contrario existirían oportunidades de arbitraje.

Así, el valor presente del portafolio es:

$$(xS_0u - C_u)e^{-rT}.$$

Por otro lado, el valor del portafolio al tiempo $t_0 = 0$ es:

$$xS_0 - C,$$

de lo anterior se obtiene que

$$xS_0 - C = (xS_0u - C_u)e^{-rT}, \tag{3.1.2}$$

que es equivalente a:

$$C = xS_0(1 - ue^{-rT}) + C_ue^{-rT},$$

sustituyendo x por (3.1.1) resulta que:

$$C = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d], \tag{3.1.3}$$

Nótese que C es la *prima* que el tenedor le debe pagar al escritor por el derecho de tener la opción.

3.1.2. Modelo Binomial de n Pasos

En esta sección se analiza el Modelo Binomial de n-Pasos. El objetivo al igual que en el apartado anterior, es calcular el valor de la opción en el nodo inicial del árbol (C). Esto se puede llevar acabo mediante la aplicación repetida de los principios establecidos anteriormente.

Para iniciar, se extiende el análisis del Modelo Binomial de un Paso a un árbol binomial de dos pasos (Figura 3.2). En éste, se observan los posibles movimientos que el precio del bien subyacente puede tener. El tamaño de cada paso para este árbol es $\Delta t = T/2$. Una suposición clave es, que durante cada etapa, el precio del bien puede subir o bajar con un factor u o d respectivamente. Por ejemplo, S_0ud denota que el precio del bien subyacente subió en la primera etapa y bajó en la segunda o equivalentemente que el precio del bien bajó en la primera etapa y subió en la segunda. El valor de la opción está expresado en los diversos niveles del árbol, por ejemplo, C_{ud}

denota el valor de la opción cuando el precio del bien bajó en la primera etapa y subió en la segunda.

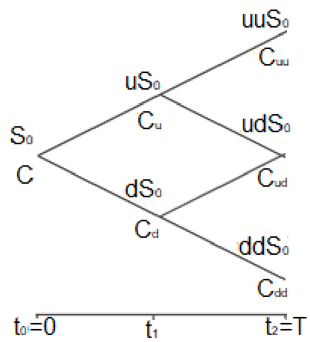

Figura 3.2: Árbol binomial de dos pasos.

Como cada árbol binomial de n-pasos está compuesto por varios árboles de un paso, la manera de encontrar el valor de la opción es por recursión, considerar los subárboles de un paso y repetir el análisis hecho en la sección (3.1.1). En las Figuras 3.3 y 3.4 se muestran los dos subárboles, en estos se calculan los valores de la opción C_u y C_d tomando en cuenta las mismas hipótesis del modelo de un paso.

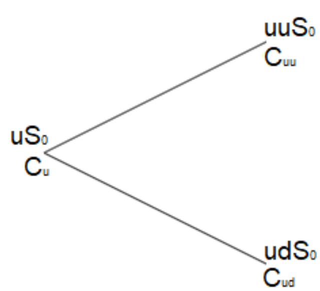

Figura 3.3: Rama superior del árbol.

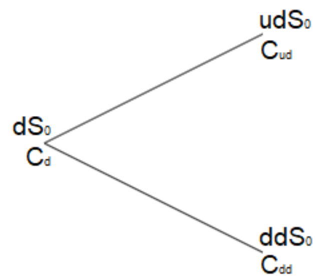

Figura 3.4: Rama inferior del árbol.

De esta forma el valor de la opción en estos nodos está dado por las siguientes expresiones:

$$C_u = e^{-r\Delta t}[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}],$$
$$C_d = e^{-r\Delta t}[pC_{ud} + (1-p)C_{dd}].$$

En donde p es la probabilidad de que el precio del bien subyacente suba y $(1-p)$ de que baje.

Una vez que ya se tienen los valores de C_u y C_d se procede a calcular el valor de la opción en el nodo inicial:

$$C = e^{-r\Delta t}[pC_u + (1-p)C_d],$$

sustituyendo los valores de C_u y C_d resulta:

$$C = e^{-r\Delta t}[p(e^{-r\Delta t}[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}]) + (1-p)(e^{-r\Delta t}[pC_{ud} + (1-p)C_{dd}])],$$
$$C = e^{-r2\Delta t}[p^2C_{uu} + p(1-p)C_{ud} + (1-p)pC_{ud} + (1-p)^2C_{dd}],$$
$$C = e^{-r2\Delta t}[p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}].$$

Como $\Delta t = T/2$, se obtiene una fórmula explícita para obtener el valor de una opción con un árbol binomial de dos pasos:

$$C = e^{-rT}[p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}]. \tag{3.1.4}$$

Este análisis se puede extender a n-pasos para la valuación de opciones.

Sea $\Delta t = T/n$ que indica el espacio entre cada etapa, donde n es el número de pasos del árbol, así, los precios del bien subyacente serán considerados en los instantes $t_i = i\Delta t$, con $0 \leq i \leq n$. Para realizar el cálculo de la opción, primero se construye el espacio de estados para los movimientos del precio del bien (se construye el árbol con los posibles precios que puede tomar el bien subyacente durante la vida de la opción), como se vió anteriormente en el tiempo t_1, S_0 puede tomar dos posibles valores, es decir, S_0u o S_0d, similarmente en t_2, se tienen tres valores, S_0uu, S_0ud o S_0dd.

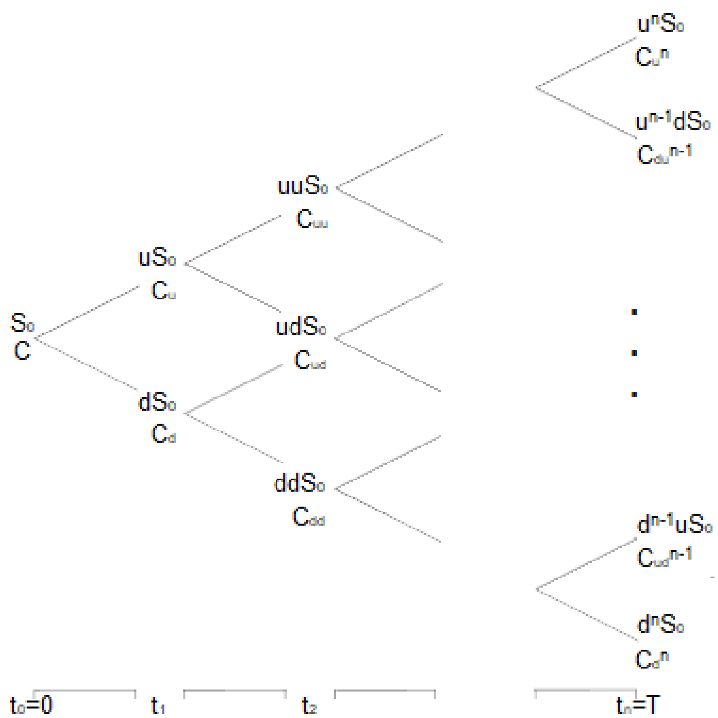

Figura 3.5: Árbol binomial de n-pasos.

En la Figura 3.5 se muestra un árbol binomial de n-pasos, se observa que, en el tiempo t_n existen n+1 posibles precios para el bien subyacente cuyo valor depende de los movimientos en el árbol. En general, al tiempo t_i, los precios del bien serán calculados mediante:

$$S_j^i = S_0 u^j d^{i-j} \quad \text{donde} \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{y} \quad 0 \leq j \leq i. \tag{3.1.5}$$

Las funciones que proporcionan el valor de la opción en el nodo inicial de un árbol de un paso y de dos pasos, respectivamente son:

$$C(S(1)) = e^{-r\Delta t}[pC_u + (1-p)C_d], \tag{3.1.6}$$

$$C(S(2)) = e^{-r2\Delta t}[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}]. \tag{3.1.7}$$

El patrón emergente de estas funciones es, que cada término que se encuentra dentro del corchete es caracterizado por un número k de movimientos hacia arriba del precio del bien subyacente, este número determina la potencia de p y la elección de la función de pagos. La potencia de $(1-p)$ es el número de movimientos del precio del bien hacia abajo (nótese que en $C(S(2))$ las potencias de $(1-p)$ están dadas por $n-k$, donde n es la etapa). Los coeficientes de cada término del corchete son el pago correspondiente de los caminos posibles que siguen los precios del subyacente dentro del árbol, existen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ de estos elementos [1]. De esto, se tiene que para un árbol de tres pasos la expresión que permite calcular el valor de la opción es:

$$C(S(3)) = e^{-r3\Delta t}[p^3 C_{uuu} + 3p^2(1-p)C_{uud} + 3p(1-p)^2 C_{udd} + (1-p)^3 C_{ddd}].$$

Realizando este proceso n-veces se obtiene un modelo para n-pasos. La función general para la valuación de opciones call y put Europea respectivamente, están dadas por:

$$C(S(n)) = e^{-rT} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[p^k (1-p)^{n-k} \text{máx}(S_0 u^k d^{n-k} - E, 0) \right], \tag{3.1.8}$$

$$P(S(n)) = e^{-rT} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[p^k (1-p)^{n-k} \text{máx}(E - S_0 u^k d^{n-k}, 0) \right]. \tag{3.1.9}$$

En donde E es el precio de ejercicio de la opción.

Nótese que las funciones (3.1.8) y (3.1.9) proporcionan el valor de la opción en el nodo inicial del árbol.

Como se mencionó anteriormente, realizando una adaptación en el Modelo Binomial se pueden encontrar las funciones generales para la valuación de opciones call y put Americanas, sin embargo, dado los resultados vistos en la Sección 2.1, sólo se procederá a encontrar la función para la valuación de opciones put Americanas.

Para iniciar, se considera el tiempo $t_0 = 0$ donde el valor del bien subyacente es S_0 y además conocido. En general, al tiempo t_i, los posibles valores que puede tomar el bien subyacente son calculados mediante (3.1.5).

Si se decide no ejercer la opción antes de la fecha de expiración T, entonces la función de pago de la opción put Americana es

$$\max(E - S_0 u^j d^{n-j}, 0), \quad 0 \leq j \leq n, \quad i = n.$$

Dado que en el Modelo Binomial el cálculo inicia en el tiempo de expiración T y se trabaja por recursión, si la opción no se ejerce en el tiempo t_i y el valor del bien subyacente es $S_0 u^j d^{i-j}$, entonces el valor de la opción put Americana en el nodo (i, j) está dado por:

$$V_j^i = e^{-r\Delta t}(pV_{j+1}^{i+1} + (1-p)V_j^{i+1}), \quad 0 \leq j \leq i, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (3.1.10)$$

Sin embargo, al ejercer la opción, se produce

$$\max(E - S_0 u^j d^{i-j}, 0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq i. \quad (3.1.11)$$

Por lo tanto, al escoger la mejor posibilidad se obtiene:

$$V_j^i = \max[\max(E - S_0 u^j d^{i-j}, 0), e^{-r\Delta t}(pV_{j+1}^{i+1} + (1-p)V_j^{i+1})], \quad (3.1.12)$$

con $0 \leq i \leq n-1$ y $0 \leq j \leq i$.

De esta forma se ha obtenido la función general para la valuación de una opciones put Americanas con el Modelo Binomial [14].

Hasta ahora no se ha tomado en cuenta el parámetro de la volatilidad del bien subyacente. La volatilidad se encuentra inmersa en los parámetros u y d, los cuales indican si el precio del bien se encuentra a la alza o a la baja.

El movimiento del precio del bien subyacente dentro del Modelo de Black, Scholes y Merton se describe de la siguiente manera,

$$S(t) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}Z}, \tag{3.1.13}$$

en donde $t \in [0, T]$ y $Z \sim N(0,1)$. Dentro del Modelo Binomial la variable aleatoria *S(t)*, para un árbol de un paso tendrá valor esperado de

$$pS_0u + (1-p)S_0d,$$

mientras que la esperanza del modelo (3.1.13) es $S_0e^{r\Delta t}$, igualando se obtiene que

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}.$$

De esta expresión se obtiene la probabilidad

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \tag{3.1.14}$$

Ahora, se procede con la varianza de los movimientos del precio del bien subyacente dentro del árbol, se obtiene que

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2,$$

lo cual se iguala con $\sigma^2\Delta t$, obteniendo

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2\Delta t, \tag{3.1.15}$$

lo cual implica que

$$p(1-p)(u-d)^2 = \sigma^2\Delta t,$$

al sustituir (3.1.14) en la expresión anterior, se obtiene que

$$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2\Delta t. \tag{3.1.16}$$

Las expresiones de u y d que satisface la ecuación anterior no son únicas [9]. Los valores que proponen Cox, Ross y Rubinstein (1979), que satisfacen la ecuación (3.1.16) son:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{3.1.17}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{3.1.18}$$

3.2. Modelo de Black, Scholes y Merton

Los modelos de valuación de opciones fueron muy simples e incompletos hasta que Fischer Black y Myron Scholes publicaron su artículo *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"* en el *"Journal of Political Economy"* en 1973. La investigación estuvo en proceso de dictaminación por dicho *"Journal"* durante casi 2 años. Robert Merton y otros economistas destacados ya habían revisado el trabajo de Black y Scholes y amparaban la relevancia del mismo.

En el artículo, Black y Scholes obtuvieron una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal, cuya solución es el precio de una opción Europea cuando la condición final es el valor intrínseco de la opción. Desde entonces, la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes ha sido muy popular, ya que representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados.

La fórmula que obtuvieron Black y Scholes descansa sobre el supuesto de equilibrio general (condiciones de no arbitraje), así mismo, dicha fórmula valúa una opción Europea sobre un bien subyacente que no paga dividendos y cuyo precio es conducido por un movimiento Browniano geométrico.

Sin duda, es también importante destacar el artículo de Robert Merton, *"Theory of Rational Option Pricing"*, publicado el mismo año en que Fischer Black y Myron Scholes publicaron el suyo, en el *"Bell Journal of Economics and Management Science"*, donde obtuvo resultados similares a los de Black y Scholes. Merton continuó su trabajo sobre valuación de opciones en una serie de artículos verdaderamente impresionantes.

Robert Merton y Myron Scholes se hicieron acreedores del premio Nobel de Economía en 1997, lamentablemente, el reconocido matemático y economista Fischer Black había fallecido 2 años antes, a saber, el 30 de agosto de 1995, razón por la cual no fue premiado, pero sin lugar a duda hubiera sido uno de los galardonados.

En consideración a las contribuciones de Merton, el Modelo de Black y Scholes, bien podría llamarse Black, Merton y Scholes.

El Modelo Black-Scholes considera los siguientes supuestos:

- El bien subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- El precio del bien subyacente es conducido por el movimiento Browniano geométrico, es decir, el precio tiene distribución lognormal.
- La volatilidad del precio del bien subyacente se mantiene constante a través del tiempo.
- Las ventas en corto del bien subyacente en cuestión son permitidas.
- El mercado del bien subyacente es líquido y divisible, esto es, el bien subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título.
- No hay costos de transacción (comisiones e impuestos).
- El mercado opera de forma continua (no hay sábados, domingos ni días festivos).
- Existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa).
- Todos los agentes comparten exactamente la misma información, esto quiere decir que la información es simétrica.
- Los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Bajo estos supuestos, el valor de la opción dependerá de los diferentes parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como: el precio de ejercicio E, la fecha de expiración T, el precio actual del bien subyacente S_0, la volatilidad σ y la tasa de interés r. Por tanto, el valor de la opción se puede escribir como

$$C = C(S_0, E, T, \sigma, r).$$

Uno de los supuestos del Modelo de Black-Scholes es que el precio del bien subyacente es conducido por el movimiento Browniano geométrico, es por ello que este supuesto se describe brevemente a continuación.

El Modelo de Black-Scholes describe el movimiento del precio del subyacente a través de la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = S(t)rdt + S(t)\sigma dW(t), \tag{3.2.1}$$

en donde W es un movimiento browniano estándar. Esta ecuación puede interpretarse como el modelado de los cambios porcentuales dS/S en el precio del bien subyacente como el incremento de un movimiento Browniano. El parámetro σ es la volatilidad del precio del bien y r es la tasa media de retorno. Al tomar la tasa de retorno como la tasa de interés se está describiendo implícitamente la dinámica de riesgo neutral del precio del bien [13].

La solución de la ecuación diferencial estocástica (3.2.1) es [22]:

$$S(T) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma W(T)}. \tag{3.2.2}$$

Con S_0 conocido. La variable aleatoria $W(T)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza T, esto también es la distribución de $\sqrt{T}Z$ si Z es una variable aleatoria normal estándar (media 0, varianza 1). Por lo tanto, se puede representar el precio del bien como

$$S(T) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z}. \tag{3.2.3}$$

El logaritmo del precio del bien se distribuye normal, y el precio del bien tiene una distribución lognormal [13].

Una vez descrita la dinámica del precio del bien subyacente se procede a a presentar la llamada ecuación diferencial parcial de Black-Scholes,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2 + \frac{\partial C}{\partial S(t)} rS(t) - rC = 0. \tag{3.2.4}$$

Las condiciones de frontera y final para determinar una única solución son:

$$C(0,t) = 0,$$

y

$$C(S,T) = \text{máx}(E - S, 0).$$

Dadas estas condiciones, la solución de (3.2.4) como se mencionó con anterioridad, caracteriza el precio de una opción Europea de compra sobre $S(t)$.

La solución de la ecuación es [25]:

$$C(S(t), t, E, T, \sigma, r) = S(t)\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{3.2.5}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S(t)}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S(t)}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

En donde Φ es la función de distribución acumulda de la variable aleatoria normal estándar.

Así mismo, en esta sección se menciona un resultado importante: la convergencia en distribución del Modelo Binomial CRR (3.1.2) al Modelo de Black, Scholes y Merton. Este resultado se basa fundamentalmente en el teorema del Límite Central, en particular en la convergencia de la distribución binomial a la distribución normal cuando el número de ensayos en la primera tiende a infinito. La demostración de la convergencia es, en general, una tarea sencilla aunque laboriosa.

La idea de la prueba es demostrar que cuando el número de periodos, n, en que se subdivide el horizonte de valuación, $[0,T]$, tiende a infinito, la fórmula de valuación binomial

$$e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[p^k(1-p)^{n-k}\,\text{máx}(S_0u^kd^{n-k} - E, 0)\right],$$

con

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d},$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

y

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

converge a la fórmula de Black y Scholes (3.2.5) [25].

3.3. Método de Monte Carlo

En 1949 nace el Método de Monte Carlo con el artículo titulado *"The Monte Carlo method"*. La creación de éste suele ligarse a los matemáticos norteamericanos J. von Neumann y S. Ulam [20].

El nombre de *Monte Carlo* se debe al de una población del principado de Mónaco, célebre por su casa de juego. Resulta que uno de los aparatos mecánicos más sencillos que permite obtener variables aleatorias es la ruleta.

La simulación de Monte Carlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

Para iniciar, se considera una variable aleatoria X, cuya esperanza es $\mathbb{E}(X) = a$ y varianza $Var(X) = b^2$, ambos valores desconocidos. Supóngase que

- se está interesado en calcular una aproximación de a (y posiblemente de b), y
- se generará una muestra aleatoria de X usando un generador de números pseudoaleatorios.

Se sabe que al calcular el promedio de una muestra de gran tamaño de la variable aleatoria en cuestión, se obtiene una buena aproximación de su esperanza, esto por la *Ley débil y fuerte de los grandes números.* De esta manera, si se tienen $X_1, X_2, ..., X_N$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, se espera entonces que

$$a_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (3.3.1)$$

sea una buena aproximación para a, la cual es insesgada, ya que

$$\mathbb{E}(a_N) = \mathbb{E}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a = a.$$

Para estimar la varianza de X, una buena elección es $(\sum_{i=1}^{N}(X_i - a_N)^2)/N$, pero dado que no tiene propiedades de insesgadez, conviene proponer un estimador que sí las tenga, de esta manera, un estimador insesgado apropiado para b^2 es:

$$b_N^2 := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - a_N)^2. \tag{3.3.2}$$

Por el Teorema del Límite Central, $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ tiene una distribución aproximadamente $N(Na, Nb^2)$, siendo así que

$$a_N - a \quad \text{es aproximadamente} \quad N\left(0, \frac{b^2}{N}\right). \tag{3.3.3}$$

Se puede decir que $a_n - a$ es aproximadamente una variable aleatoria $N(0,1)$ escalada por $b/\sqrt{N}$. Esto sugiere que muestreando a_N para N "grande", debería dar una aproximación a a que es correcto en $O(1/\sqrt{N})$.

Se puede hacer este argumento más cuantitativo usando la idea de intervalos de confianza. Si se tiene la igualdad en (3.3.3), entonces

$$\mathbb{P}\left(a - \frac{1.96b}{\sqrt{N}} \leq a_N \leq a + \frac{1.96b}{\sqrt{N}}\right) = 0.95.$$

Esto se puede reescribir como

$$\mathbb{P}\left(a_N - \frac{1.96b}{\sqrt{N}} \leq a \leq a_N + \frac{1.96b}{\sqrt{N}}\right) = 0.95. \tag{3.3.4}$$

El radio $b/\sqrt{N}$ que aparece en (3.3.4) es frecuentemente referido como error estándar. Reemplazando b por la aproximación b_N, se observa que el valor esperado desconocido de a está en el intervalo

$$\left[a_N - \frac{1.96b_N}{\sqrt{N}}, a_N + \frac{1.96b_N}{\sqrt{N}}\right], \tag{3.3.5}$$

con probabilidad aproximadamente de 0.95. En otras palabras (3.3.5) da un intervalo de confianza del 95 % para a.

Este análisis describe al método básico de Monte Carlo para aproximar $\mathbb{E}(X)$. Se calcula una muestra aleatoria de X y se obtiene a_N como en (3.3.1). Para monitorear el error, también se calcula b_N^2 como en (3.3.2). Tener b_N permite calcular un intervalo de confianza (3.3.5) (o en efecto, un intervalo de confianza para otro porcentaje, como 99 %).

Hay dos características clave a considerar.

- Para reducir el "error" en un factor de 10 se requiere un aumento de cien veces en el tamaño de la muestra [14]. Esto es una severa limitación que típicamente hace imposible obtener una precisión alta de una aproximación de Monte Carlo.
- El tamaño del intervalo de confianza es directamente proporcional a la desviación estándar. En la práctica, el problema de calcular $\mathbb{E}(X)$ se convierte en un problema de aproximar $\mathbb{E}(Z)$ donde Z es otra variable aleatoria con la misma media que X, pero con varianza menor. Esta idea es conocida como *reducción de varianza* y forma parte vital de los algoritmos de Monte Carlo [14].

Las opciones Asiáticas son posiblemente las opciones *"path-dependent"* más simples para las cuales el Método de Monte Carlo es una herramienta computacional competitiva. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, son opciones cuya función de pago depende del promedio de los precios del bien subyacente. Supóngase la función de pago de una opción call Asiática

$$C = \text{máx}(A(0,T) - E, 0), \tag{3.3.6}$$

con

$$A(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i). \tag{3.3.7}$$

Donde $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, son las fechas tomadas como referencia y T la fecha de expiración de la opción.

Para obtener el valor presente de (3.3.6), la función de pago se multiplica por un factor de descuento e^{-rT}, con r una tasa de interés libre de riesgo.

Se denota el valor presente esperado de (3.3.6) por:

$$\mathbb{E}[e^{-rT}\max(A(0,T)-E,0)] = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\max\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S(t_i)-E,0\right)\right] \tag{3.3.8}$$

Para que esta esperanza tenga significado, se necesita especificar la distribución de la variable aleatoria $S(t_i)$, siendo el precio del bien subyacente en la fecha t_i.

Por (3.2.3) se sabe que el movimiento del precio del subyacente se describe de la siguiente manera:

$$S(T) = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}.$$

Para calcular el valor presente esperado (3.3.8), se debe ser capaz de generar muestras del promedio $A(0,T)$. La manera más simple para hacer esto es simular la trayectoria $S(t_1),...,S(t_n)$ y después calcular el promedio. En (3.2.3) se muestra cómo simular $S(T)$ dado $S(0)$, simular $S(t_{j+1})$ dado $S(t_j)$ trabaja de la misma manera:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j)e^{([r-\frac{1}{2}\sigma^2](t_{j+1}-t_j)+\sigma\sqrt{t_{j+1}-t_j}Z_{j+1})}, \tag{3.3.9}$$

donde $Z_1,...,Z_N$ son variables aleatorias independientes normal estándar. Dada una trayectoria de valores, se calcula $A(0,T)$ y posteriormente

$$e^{-rT}\max(A(0,T)-E,0).$$

El siguiente algoritmo se tomó como base para realizar la valoración de opciones Asiáticas mediante el Método de Monte Carlo implementado en Excel (VBA)

for $i = 1,...,n$
for $j = 1,...,m$
generate $Z_{i,j}$
set $S_i(t_j) = S_i(t_{j-1})e^{([r-\frac{1}{2}\sigma^2](t_j-t_{j-1})+\sigma\sqrt{t_j-t_{j-1}}Z_{ij})}$
set $\overline{S_i} = (S_i(t_1)+...+S_i(t_m))/m$
set $C_i = e^{-rT}\max(\overline{S_i}-E,0)$

set $\hat{C}_n = (C_1, ..., C_n)/n$

Algunas consecuencias importantes de $\hat{C}_n$ se presentan a continuación.

Para cualquier $n \geq 1$, $\hat{C}_n$ es insesgado, es decir,

$$\mathbb{E}[\hat{C}_n] = C \equiv \mathbb{E}[e^{-rT} \max(A(0,T) - E, 0)].$$

Además $\hat{C}_n$ es un estimador *fuertemente consistente* [13], es decir, cuando $n \to \infty$,

$$\hat{C}_n \to C \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Para la valuación de opciones Barrera y Parisinas, el análisis es similar al de Asiáticas.

Para más detalles ver [13], [14].

Cabe mencionar que muchos problemas en Ciencias, Ingeniería, Estadística y Finanzas son resueltos hoy en día a través del Método de Monte Carlo, es decir, no sólo tiene aplicaciones en opciones financieras y por tanto su estudio es muy amplio. En este trabajo se intentó poner lo más esencial del tema y su aplicación para la valoración de opciones.

Capítulo 4

Implementación numérica

En este capítulo se describe el programa realizado en Excel (VBA) para valuar opciones Europea, Americana, Asiática, Barrera, Bermuda y Parisina. Posteriormente se presenta la valuación de dichas opciones por medio de éste.

El programa valúa las 6 opciones mencionadas, cada una con sus respectivas variantes (presentadas en el capítulo 2), dando un total de 26 opciones.

Para valuar las opciones Europea, Americana y Bermuda se utiliza el Modelo Binomial CRR, con el Método de Monte Carlo se valúan las opciones Asiática, Barrera y Parisina.

El activo sobre el que se contrata una opción se denomina *activo* o *bien subyacente*. Éste puede ser cualquier materia prima o *"commodities"*, como el oro, el trigo, el petróleo, o bien algún instrumento financiero. En el programa hecho, las opciones se instrumentan sobre acciones de las 30 empresas escogidas, algunas de ellas son Apple, Facebook, Google, Nike, Starbucks, etc.

El número de empresas se puede ampliar añadiendo el nombre de la nueva compañía al código del programa.

El programa inicia mostrando un formulario, en el cual se escoge la opción a valuar, si ésta es de compra o de venta y la empresa. Dependiendo de la opción elegida (de ser necesario) en el formulario se añaden botones, por ejemplo, si se decide valuar una opción Barrera, se añade el boton para elegir su clasificación (up-and-in, up-and-out, down-and-out o down-and-in), de esta manera el formulario se muestra en la Figura 4.1:

Figura 4.1: Formulario con botones extra ya que se elige una opción call Barrera up-and-in sobre una acción de Activision Blizzard.

Ahora bien, si se decide valuar una opción put Americana, el formulario que aparece es la Figura 4.2:

Figura 4.2: Formulario sin botones extra ya que se elige una opción put Americana.

Dado que los modelos utilizados para valuar opciones son el Modelo Binomial CRR y el Método de Monte Carlo, un dato que se desea conocer es el valor actual del bien subyacente S_0, es decir, el valor actual de las acciones de la empresa elegida. Para obtener dicho precio, el programa accede a Internet y en la página web Yahoo-Finance [31] obtiene el valor, así como los precios históricos de la empresa en cuestión. De igual manera, el programa entra al sitio web Banxico [32] para adquirir el valor de las tasas de cetes a 28, 91 y 182 días, es así que, se tienen 3 valores diferentes para escoger la tasa de interés r. Ambos valores aparecen en el segundo formulario del programa (Figura 4.3).

Las páginas web Yahoo Finance y Banxico no son las únicas de donde se pueden obtener los valores anteriores, es decir, sitios web como Plus500 y Santander ofrecen precios históricos de empresas y tasas de interés, respectivamente.

Para valuar opciones es necesario conocer el valor de ciertos parámetros, tales como el precio actual del bien subyacente S_0, el precio de ejercicio E, el tiempo de vida de la opción T, la tasa de interés r, entre otros dependiendo de la opción. El segundo formulario que aparece en el programa se encarga de recabar esta información, pero dependiendo de la opción elegida (de ser necesario) en el formulario se añaden cuadros de texto, por ejemplo, si se decide valuar una opción put Parisina down-and-in, el formulario que aparece es la Figura 4.3:

Por el contrario, si se elige una opción call Europea, el formulario que aparece es la Figura 4.4.

Ahora el programa procede a valuar la opción seleccionada.

El tercer y último formulario muestra los resultados obtenidos, así como el valor de la opción **C.** La Figura 4.5 muestra los resultados de la valuación de una opción call Asiática sobre acciones de Nike.

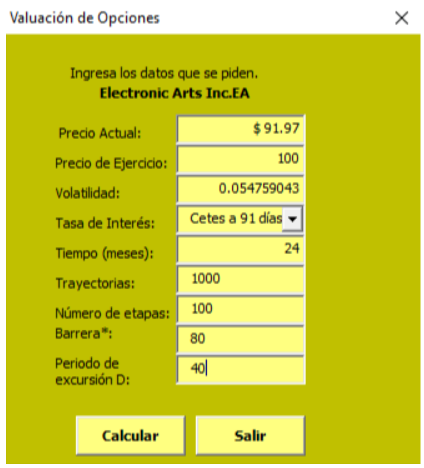

Figura 4.3: Formulario con cuadros de texto extra ya que se elige una opción put Parisina down-and-in sobre acciones de Electronic Arts.

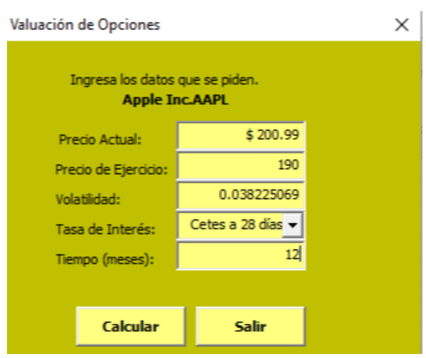

Figura 4.4: Formulario sin cuadros de texto extra ya que se elige una opción call Europea sobre acciones de Apple.

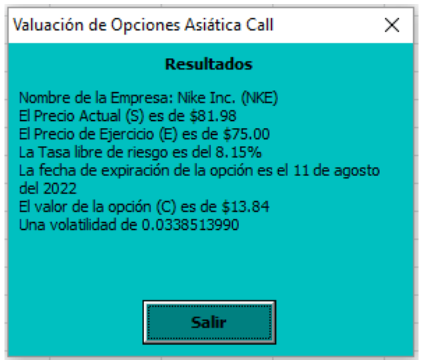

Figura 4.5: Formulario con el valor de una opción call Asiática.

Esta información también aparece en una hoja de Excel con nombre "Resultados" y dado que las opciones Asiáticas se valúan mediante el Método de Monte Carlo, en otra hoja con nombre "Valuación de opciones" aparecen las trayectorias generadas. La Figura 4.6 muestra lo anterior:

M	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1	82.638006	82.791238	82.501074	83.00746	83.454139	...
2	82.714932	82.621792	82.419775	82.499795	82.72379	...
3	82.187141	82.007021	81.303495	81.101799	81.335095	...
4	81.67397	82.530553	82.516132	82.556352	82.06192	...
5	82.145534	81.783845	81.862369	81.831663	83.389729	...
6	...	...	...	...	...	...

Figura 4.6: Resumen de trayectorias generadas mediante el Método Monte Carlo.

Si se elige una opción la cual se valúa mediante el Modelo Binomial CRR, en la hoja "Valuación de opciones" se generan 2 árboles binomiales, uno con los posibles precios que puede tener el bien subyacente durante la vida de la opción y el segundo con los posibles valores que puede tener la opción, nótese que en el nodo inicial aparece el valor de la opción C. La Figura 4.7 muestra lo anterior.

S^x_0	S^x_1	S^x_2	S^x_3	S^x_4	S^x_5	S^x_6
200.99	202.08497	203.1859	204.29282	205.40578	206.52481	...
	199.90097	200.99	202.08497	203.1859	204.29282	...
		198.81784	199.90097	200.99	202.08497	...
			197.74057	198.81784	199.90097	...
				196.66915	197.74057	...
					195.60353	...

C^x_0	C^x_1	C^x_2	C^x_3	C^x_4	C^x_5	C^x_6
194.1678786	165.032	166.48352	167.94386	169.41307	170.8912	...
	161.67728	163.11052	164.55249	166.00322	167.46277	...
		159.77397	161.19776	162.63022	164.07139	...
			157.87929	159.29367	160.71666	...
				155.99318	157.39819	...
					154.11559	...

Figura 4.7: Resumen de árboles binomiales generados mediante el Modelo Binomial CRR.

4.1. Valuación de opciones

A continuación, se presentan seis ejemplos en los cuales se intentará comprobar algunos de los resultados dados en los capítulos anteriores.

Ejemplo 4.1.1. *Un resultado importante del Modelo de Black, Scholes y Merton es la convergencia en distribución del Modelo Binomial CRR a éste, es por ello que se realizó la valuación de una opción call Europea sobre una acción de la empresa Dell Inc., ésta se llevó a cabo con diferente número de pasos, lo que se pretende es comprobar que el valor dado mediante el Modelo Binomial para un número mayor de pasos, sea cada vez más cercano al valor dado por la fórmula de Black, Scholes y Merton.*

Los parámetros son los siguientes:

- $S_0 = \$49.46$, *precio del bien subyacente al día 12 de agosto de 2019 [31],*
- $E = \$40$, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.15\,\%$ *(cetes a 28 días), al día 12 de agosto de 2019 [32],*
- $\sigma^2 = 0.0578152228$, *volatilidad del bien subyacente,*

- $T = 1$ *año, la fecha de expiración es el día 12 de agosto de 2020.*

En la Figura 4.8 se muestra gráficamente la valuación de la opción call Europea. Como se mencionó, la valuación se llevó a cabo con diferente número de pasos, para cambiar dicho valor es necesario hacerlo manualmente en el código, ya que de no ser así, todos los árboles binomiales que arroja el programa son de 100 pasos. Para iniciar, se realizó la valuación con un árbol binomial de 3 pasos, posteriormente de 5 pasos, 10 pasos, 15 pasos, etc., para finalizar con un árbol binomial de 50 pasos, cada uno con una diferencia de 5 entre sí. Con cada valuación realizada se obtuvo un valor diferente para el precio de la opción. En total el programa se corrió 11 veces para este Ejemplo.

El resultado que se obtuvo es el siguiente: El valor dado mediante el Modelo Binomial a partir de 20 pasos es muy cercano al valor dado por la fórmula de Black, Scholes y Merton, el cual está representado por la línea horizontal.

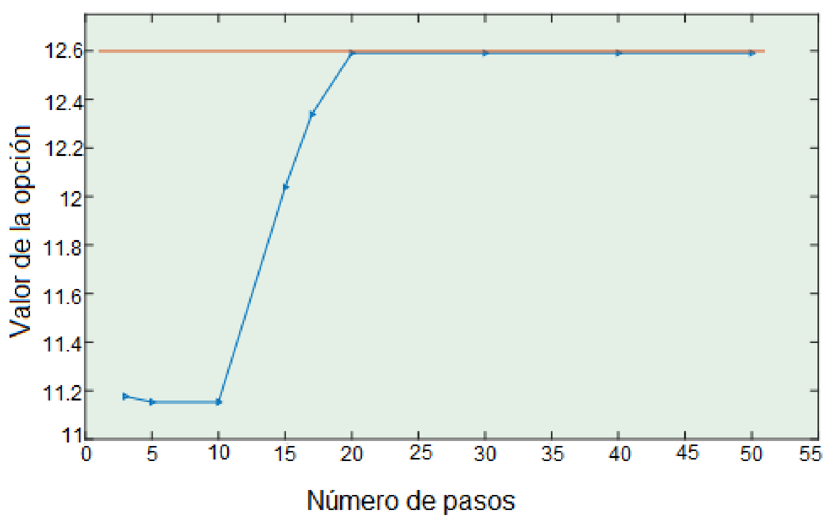

Figura 4.8: Valuación de opción call Europea.

Ejemplo 4.1.2. *Con los resultados dados en el Capítulo 2 se concluyó que para opciones Americanas únicamente es relevante la valuación de opciones put, es así que se realizó la valuación de una opción Americana de venta* *sobre una acción de la empresa Dell Inc.*

La valuación se hizo con diferente número de pasos, lo que se busca es observar el comportamiento de los valores de esta opción.

Los parámetros son los siguientes:

- $S_0 = \$48.60$, *precio del bien subyacente al día 14 de agosto de 2019 [31],*
- $E = \$80$, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.05\,\%$ *(cetes a 28 días), al día 14 de agosto de 2019 [32],*
- $\sigma^2 = 0.0571414746$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 4$ *años, la fecha de expiración es el día 14 de agosto de 2023.*

En la Tabla 4.1.3 se muestran los valores dados mediante el Método Binomial. Al igual que en el Ejemplo 4.1.1, la valuación se llevó a cabo con diferente número de pasos, es así que fue necesario entrar al código y cambiar dicho valor. Para iniciar, se realizó la valuación con un árbol binomial de 3 pasos, posteriormente de 5 pasos, 10 pasos, etc., para finalizar con un árbol binomial de 100 pasos. Con cada valuación realizada se obtuvo un valor diferente para el precio de la opción. En total el programa se corrió 14 veces para este Ejemplo.

El resultado que se obtuvo es el siguiente: Conforme el número de pasos aumenta el valor de la opción Americana tambén, para posteriormente estabilizarse.

Tabla 4.1.3. *Opción put Americana*

Número de pasos	*Valor de la opción*
3	*\$9.35*
5	*\$9.38*
10	*\$9.58*
15	*\$9.52*
17	*\$10.18*
20	*\$10.12*
30	*\$10.09*
40	*\$10.08*
50	*\$10.58*
60	*\$10.03*
70	*\$10.29*
80	*\$10.23*
90	*\$10.22*
100	*\$10.47*

Ejemplo 4.1.4. *Dado que las opciones Asiáticas se valúan mediante el Método de Monte Carlo, lo que se intenta es observar los valores de éstas conforme el número de trayectorias y etapas aumentan. Es así que se valúan dos opciones call y put Asiáticas sobre una acción de Nike.*

Los parámetros para la opción call son:

- $S_0 = \$81.65$, *precio del bien subyacente al día 12 de agosto de 2019 [31],*
- $E = \$70$, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.09\,\%$ *(cetes a 91 días), al día 12 de agosto de 2019 [32],*
- $\sigma^2 = 0.0333471202$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 2$ *años, la fecha de expiración es el día 12 de agosto de 2021.*

Los parámetros para la opción put son:

- $S_0 = \$83.32$, *precio del bien subyacente al día 13 de agosto de 2019 [31],*

- $E = \$95$, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.04\,\%$ *(cetes a 91 días), al día 13 de agosto de 2019 [32],*
- $\sigma^2 = 0.0345013497$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 2$ *años, la fecha de expiración es el día 13 de agosto de 2021.*

En las Figuras 4.9 y 4.10 se muestra gráficamente la valuación de opciones call y put Asiáticas, respectivamente. El segundo Userform del programa (Figura 4.3) tiene dos cuadros de texto en los cuales se escribe el número de etapas y trayectorias deseadas, de esta manera, para iniciar, se realizó la valuación con 200 trayectorias y 20 etapas, se continuó con 200 trayectorias y 40 etapas, de esta manera sucesivamente y se finalizó con 1000 trayectorias y 100 etapas. En total el programa se corrió 90 veces para este Ejemplo, es decir, se corrió 45 veces para la opción call Asiática y 45 para la opción put Asiática.

El resultado que se obtuvo es el siguiente: Se puede decir que a mayor número de etapas y trayectorias se obtiene una mejor aproximación del valor de la opción.

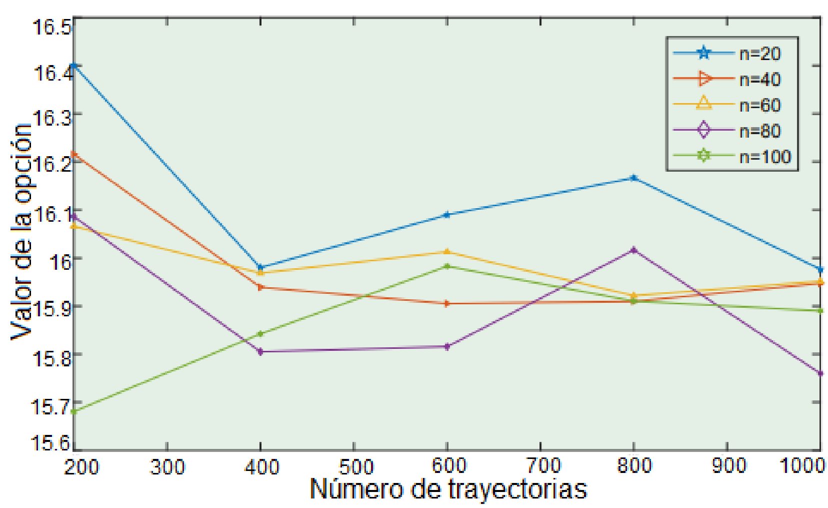

Figura 4.9: Valuación de opción call Asiática.

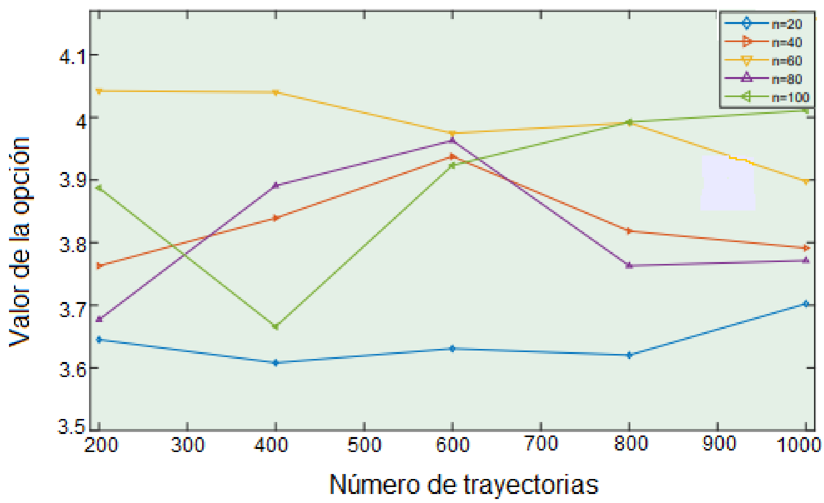

Figura 4.10: Valuación de opción put Asiática.

Ejemplo 4.1.5. *Una relación importante que se da entre la prima de opciones Barrera y opciones Europeas, ambas con la mismos parámetros es la siguiente:*

$$\textit{call Barrera}_{up-and-in} + \textit{call Barrera}_{up-and-out} = \textit{call Europea},$$

$$\textit{call Barrera}_{down-and-in} + \textit{call Barrera}_{down-and-out} = \textit{call Europea},$$

$$\textit{put Barrera}_{up-and-in} + \textit{put Barrera}_{up-and-out} = \textit{put Europea},$$

$$\textit{put Barrera}_{down-and-in} + \textit{put Barrera}_{down-and-out} = \textit{put Europea}.$$

En este ejemplo se presenta la valuación de cuatro opciones call Barrera sobre una acción de McDonald's y cuatro put Barrera sobre una acción de Mattel, lo que se pretende es comprobar la relación anterior.

Los parámetros para opciones call son los siguientes:

- $S_0 = \$218.27$, *precio del bien subyacente al día 15 de agosto de 2019 [31],*
- $E = \$185$, *precio de ejercicio,*
- $r = 7.97\,\%$ *(cetes a 182 días), al día 15 de agosto de 2019 [32],*

- $\sigma^2 = 0.0235975251$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 9$ *meses, la fecha de expiración es el día 15 de mayo de 2020,*

Para iniciar, se realizó la valuación de una opción call Europea con dichos parámetros y el valor dado mediante el Método Binomial es: \$44.0.

Posteriormente se valuaron las opciones Barrera up-and-in y up-and-out con nivel barrera $B = 220$. *Los resultados dados mediante el Método de Monte Carlo son los siguientes:*

call $Barrera_{up-and-in} = \$43.04$.

call $Barrera_{up-and-out} = \$0$.

Finalmente se valuaron las opciones Barrera down-and-in y down-and-out con nivel barrera $B = 216$. *Los resultados dados mediante el Método de Monte Carlo son los siguientes:*

call $Barrera_{down-and-in} = \$0$.

call $Barrera_{down-and-out} = \$45.77$.

Se observa que al realizar las respectivas adiciones, el valor de éstas, es muy similar al de la opción call Europea.

Los parámetros para opciones put son los siguientes:

- $S_0 = \$10.74$, *precio del bien subyacente al día 15 de agosto de 2019 [31],*
- $E = \$20$, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.04\,\%$ *(cetes a 91 días), al día 15 de agosto de 2019 [32],*
- $\sigma^2 = 0.1117088278$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 11$ *meses, la fecha de expiración es el día 15 de mayo de 2020,*

Para iniciar, se realizó la valuación de una opción put Europea con dichos parámetros y el valor dado mediante el Método Binomial es: \$7.84

Posteriormente se valuaron las opciones Barrera down-and-in y down-and-out con nivel barrera $B = 8$*. Los resultados dados mediante el Método de Monte Carlo son los siguientes:*

$put\ Barrera_{down-and-in} = \$0.$

$put\ Barrera_{down-and-out} = \$7.68.$

Finalmente se valuaron las opciones Barrera up-and-in y up-and-out con nivel barrera $B = 12$*. Los resultados dados mediante el Método de Monte Carlo son los siguientes:*

$put\ Barrera_{up-and-in} = \$2.67.$

$put\ Barrera_{up-and-out} = \$6.01.$

Se observa que al realizar las respectivas adiciones, el valor de éstas, es muy similar al de la opción put Europea.

El resultado que se obtuvo es el siguiente: Se observa que a pesar de que las opciones Europeas y Barrera se valúan con diferentes métodos, la relación que se da entre la prima de ambas opciones se mantiene cuando éstas tienen los mismos parámetros. En total el programa se corrió 10 veces para este Ejemplo.

Ejemplo 4.1.6. *Con los resultados dados en el Capítulo 2 se concluyó que para opciones Bermuda únicamente es relevante la valuación de opciones put, es así que se realizó la valuación de una opción Bermuda de venta sobre una acción de Coca-Cola.*

La valuación se hizo con diferente número de fechas para realizar ejercicio temprano, lo que se busca es comprobar que el valor de la opción put Bermuda para un mayor número de fechas, sea cada vez más cercano al valor de una opción put Americana con los mismos parámetros.

Los parámetros son los siguientes:

- $S_0 = \$53.50$, *precio del bien subyacente al día 14 de agosto de 2019 [31],*
- $E = \$80$, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.04\,\%$ *(cetes a 91 días), al día 14 de agosto de 2019 [32],*
- $\sigma^2 = 0.0336680386$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 3$ *años y medio, la fecha de expiración es el día 14 de agosto de 2022.*

En la Figura 4.11 se muestra gráficamente la valuación de la opción put Bermuda. Como se mencionó, la valuación se llevó a cabo con diferente número de fechas para realizar ejercicio temprano y con un árbol binomial de 250 pasos. Para cambiar el número de pasos es necesario hacerlo manualmente en el código, en cambio para el número de fechas, el segundo Userform del programa (Figura 4.3) tiene un cuadro de texto en el cual se escribe el número de fechas deseadas. Para iniciar, se realizó la valuación con 3 fechas para realizar ejercicio temprano, posteriormente con 5 fechas, 10 fechas, etc., para finalizar con 100 fechas. Con cada valuación realizada se obtuvo un valor diferente para el precio de la opción. En total el programa se corrió 11 veces para este Ejemplo.

El resultado que se obtuvo es el siguiente: El valor dado mediante el Modelo Binomial a partir de 75 fechas para realizar ejercicio temprano es muy cercano al valor de la opción put Americana, el cual está representado por la línea horizontal.

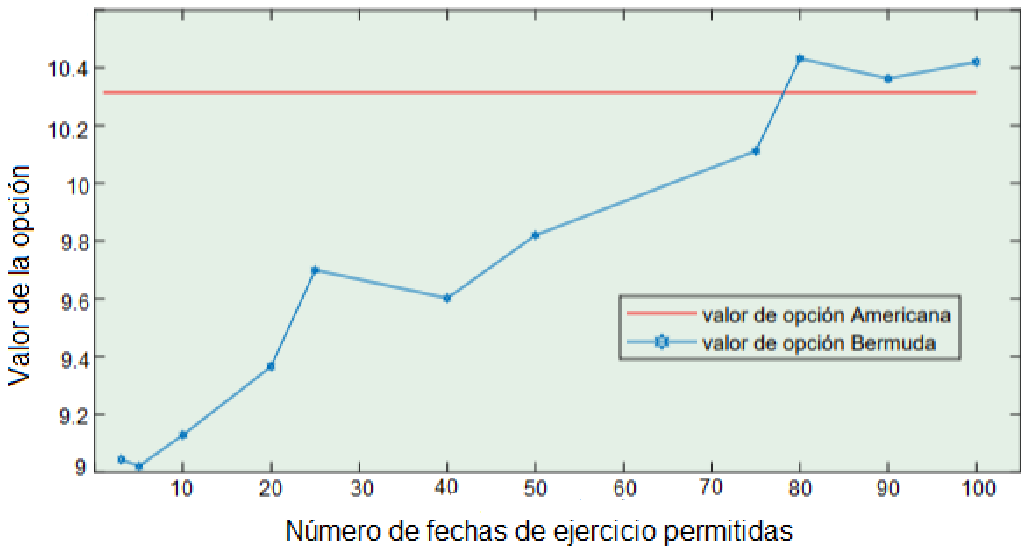

Figura 4.11: Valuación de opción put Bermuda.

Ejemplo 4.1.7. *El periodo de excursión D juega un papel importante en las opciones Parisinas, es por ello que se realizó la valuación de una opción call Parisina up-and-in sobre una acción de Sony, ésta se llevó a cabo variando la longitud del periodo D, lo que se intenta es comprobar que conforme su valor se hace más pequeño, el valor de la opción Parisina se acerca al valor de una opción Barrera con los mismos parámetros.*

Los parámetros son los siguientes:

- S_0 = \$56.26, *precio del bien subyacente al día 13 de agosto de 2019 [31],*
- E = \$35, *precio de ejercicio,*
- $r = 8.05\,\%$ *(cetes a 91 días), al día 13 de agosto de 2019 [32],*
- $B^* = 60$, *nivel de excursión,*
- $\sigma^2 = 0.0361413$, *volatilidad del bien subyacente,*
- $T = 7$ *meses, la fecha de expiración es el día 13 de febrero de 2020.*

En la Figura 4.12 se muestra gráficamente la valuación de la opción call Parisina up-and-in. El segundo Userform del programa (Figura 4.3) tiene dos cuadros de texto en los cuales se escribe la longitud del periodo de excursión y número de trayectorias deseadas, de esta manera, para iniciar, se realizó la valuación con 10 trayectorias y periodo de excursión con valor 3, se continuó con 25 trayectorias y periodo de excursión con valor 3, de esta manera sucesivamente y se finalizo con 125 trayectorias y periodo de excursión con valor 100, cabe mencionar que el número de etapas fue 100 y este valor se quedo fijo para todas las valuaciones. En total el programa se corrió 35 veces para este Ejemplo.

El resultado que se obtuvo es el siguiente: Se observa que conforme el valor del periodo de excursión D se hace más pequeño y el número de trayectorias mayor, la prima de la opción Parrisina se acerca a la de una Barrera cuyo valor está representado por la línea horizontal. Nótese que cuando D se vuelve más grande, el valor de la opción se aproxima a 0, sin importar que tan grande sea el número de trayectorias.

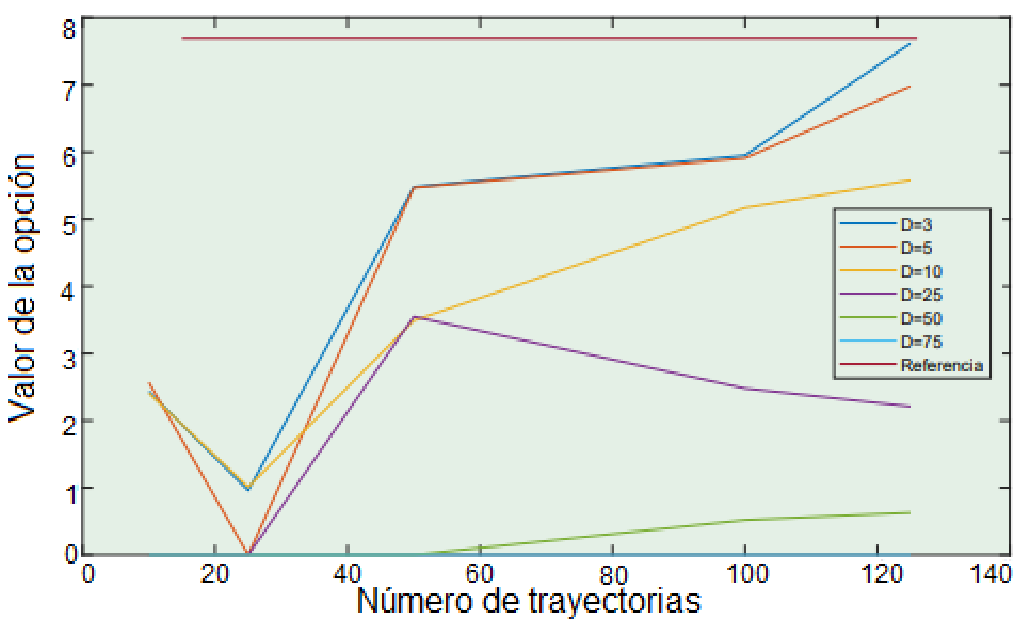

Figura 4.12: Valuación de opción call Parisina.

Resumen y Conclusiones

- Se abordó el mercado organizado de derivados de México (MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V.) lugar donde se negocian opciones financieras, así mismo, se dieron a conocer las instituciones que colaboran en él y la forma de participar, cabe mencionar que las opciones Exóticas son negociadas en su mayoría en mercados extrabursátiles conocidos en el medio financiero como *"Over-The-Counter", OTC* [10].

- Se observó y se discutió el hecho de que para opciones Americanas y Bermuda únicamente es relevante valuar opciones de venta.

- De las opciones Exóticas que se consideraron, se puede decir que las Parisinas son las más flexibles, es por ello que queda abierto la tarea de analizar cada una de sus variantes y los diversos métodos que existen para valuarlas.

- Se implementaron computacionalmente el Modelo Binomial CRR y de Monte Carlo en Excel (VBA), programa mediante el cual se valuaron opciones sobre acciones de las empresas: Coca-Cola, Dell, Mattel, Nike, Sony, cuyos datos y tasas de interés fueron obtenidos en [31] y [32], respectivamente, cada uno de los resultados obtenidos fueron analizados.

En conclusión, el propósito de esta tesis fue estudiar la flexibilidad que tienen este tipo de contratos, aunado a esto se observó que valuar opciones con cierto grado de flexibilidad se vuelve una tarea laboriosa. Es posible encontrar propuestas cuando se trata de métodos para valuar opciones, tales como el Modelo trinomial, los Modelos de volatilidad de Heston, los Modelos de árboles binomiales implícitos, el de Transformada de Laplace entre otros, cabe mencionar que estos métodos no se abordar en este trabajo, pero abren posibilidades de trabajo futuro [4], [11], [17], [26].

Un tema importante en las opciones Americanas es encontrar la fecha de ejercicio óptimo (en caso de existir), sin embargo éste no se abordó, es por ello que se tiene la oportunidad de estudiarlo en trabajos futuros antes de continuar con la investigación de opciones Exóticas y métodos de valuación.

Bibliografía

[1] Alducin R., *Tesis de Maestría: Modelos de Árboles Binomiales con Volatilidad Implícita*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Junio 2012.

[2] Arregui A. G., Vallejo A. B., *Análisis de la valoración de las opciones asiáticas utilizadas por los fondos de inversión garantizados de renta variable*, Universidad del País Vasco, Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa, Vol. 7, Num. 1, 2001.

[3] Bernard C., Boyle P., *Monte Carlo Methods for Pricing Discrete Parisian Options*, European Journal of Finance, Junio 2009.

[4] Bustamante D. M., *Tesis de Maestría: Valuación de Opciones Europeas con el Modelo de Volatilidad de Heston*, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía, Mayo 2013.

[5] Casanovas R. M., *Opciones financieras*, Ediciones Pirámide, Cuarta edición, 2000.

[6] *Capítulo 11: Barrier Options*, Sitio de página web: http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/MA5182/barrier-options.pdf

[7] Chesney M., Jeanblanc-Picqué M., Yor M., *Brownian Excursions and Parisian Barrier Options*, Advances in Applied Probability, Vol.29, Num.1, 1997.

[8] Chriss N., *Black-Scholes and beyond: option pricing models*, McGraw-Hill, 1997.

[9] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, Issue 3, 1979.

[10] De Lara H. A., *Productos derivados financieros: instrumentos, valuación y cobertura de riesgos*, Limusa, 2009.

[11] Derman E., Kani I., *Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile*, Quantitative Strategies Research Notes, 25, 1996.

[12] Díaz T. J., Hernández T. F., *Futuros y opciones financieras: una introducción*, Limusa, c2008, 2003.

[13] Glasserman P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.

[14] Higham D. J., *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge, Primera edición, 2004.

[15] Hull. C. J., *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, Pearson, octava edición, 2014.

[16] Katz E., Options Essential Concepts and Trading Strategies, The option institute, CBOE, 1990.

[17] Labart C., Lelong J., *Princing Parisian options using Laplace transforms*, Bankers Markets & Investors: an academic & professional review, Enero 2013.

[18] Lamothe F. P, *Opciones financieras: un enfoque fundamental*, McGraw-Hill, 1993.

[19] *Lecture 15: American Options*, Sitio de página web: http://www.stat.uchicago.edu/ lalley/Courses/391/Lecture15.pdf

[20] Meyerovich S. I., *Método de Montecarlo*, Mir, Segunda edición, 1983.

[21] Mihai C. A., *Pricing of American and Bermudan Options using Binomial Trees and Least Squares Monte Carlo*, Leeds University Business School, Septiembre 2015.

[22] Pérez F. D., *Tesis para obtener el grado en Administración y Dirección de Empresas: Cálculo estocástico en finanzas: Aplicación del Modelo Browniano Geométrico para la predicción del activo subyacente FCC.MC en el IBEX-35*, Universidad Politécnica de Valéncia, Facultad de Administración y Dirección de empresas, Julio 2015.

[23] Rivera P. I., *Opciones con barrera y opciones parisinas con volatilidad estocástica: una aplicación Monte Carlo al mercado de derivados energéticos*, Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México, Marzo 2006.

[24] Timofeeva N., *Tesis de Maestría: Pricing and hedging exotic options using Monte Carlo method*, University of Helsinki, Master Thesis in Mathematics, Mayo 2019.

[25] Venegas M. F., *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, CENGAGE Learning, segunda edición, 2008.

[26] Ya-Ching T., *Tesis de Maestría: Pricing Parisian-Type Options*, National Taiwan University, Graduate Institute of Finance, Junio 2003.

[27] Página web: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX, fecha de consulta: Marzo de 2019.

[28] Página web: https://en.wikipedia.org/wiki/Asian_option, fecha de consulta: Abril de 2019.

[29] Página web: https://www.investopedia.com/terms/b/bermuda.asp, fecha de consulta: Mayo de 2019.

[30] Página web: https://www.investopedia.com/terms/e/exoticoption.asp, fecha de consulta: Mayo de 2019.

[31] Página web: http://mx.finance.yahoo.com/, fecha de consulta: 12-15 de Agosto de 2019.

[32] Página web:http://www.banxico.org.mx/, fecha de consulta: 12-15 de Agosto de 2019.