Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas

Editorial

Estimados lectores, esperamos que estén bien y gozando de cabal salud. Como todo sabemos, la contingencia sanitaria por el COVID-19 sigue. Por esta razón, el tiempo que se dedica a la edición y publicación de la revista Axolote no es lo que quisiéramos, debido al trabajo de alumnos y profesores en esta nueva versión de clases por videoconferencias. Desde el mes de junio de este año, se está publicado la revista Axolote cada dos meses. Es decir, publicamos dos meses juntos, seguiremos así hasta el regreso a clases presenciales.
También, debemos mencionar que el formato de Axolote ha cambiado un poco, para tener más flexibilidad en la escritura de fórmulas matemáticas.

Nos complace decir que la publicación de Axolote de agosto- septiembre contiene aportaciones de estudiantes que participaron en el 7CIMA, que como sabemos este año fue por videoconferencias. Esperamos, seguir contando con aportaciones de estudiantes interesados en la divulgación de las matemáticas y otras áreas.

La primera aportación muestra cómo la geometría de las funciones primitivas evidencia los comportamientos periódicos y establece relaciones entre períodos relacionados por el *Teorema de Sharkovskii*. La segunda aportación trata sobre *Matemáticas, imágenes y saberes del pasado: la portada grabada del Mathesis Biceps Vetus et Nova (1670)*. Finalmente, la tercera aportación el *Lema del Ping-Pong,* a partir de este se da un ejemplo de su aplicación para la construcción de un grupo de Klein.

Como ya es costumbre la revista cuenta con varias secciones; en la sección de frases celebres tocó el turno a *John Louis von Neuman (28/12/1903-08/02/1957)* matemático húngaro-estadounidense. En la sección de poesía esta como invitada, Maricela Guerrero con dos poemas: *Día de precipitaciones I y Alaska*. La sección de chistes se las recomendamos para reirse un poco. También, están las secciones de recomendación de libro y la reseña de libro con título *17 ecuaciones que cambiaron el mundo de Ian Stewart, Editorial Crítica.*

Al final de la revista en la sección congresos y seminarios, se anuncia el Seminario de Continuos y Sistemas Dinámicos, que se llevará a cabo los días 6, 7 y 8 de octubre de 2020. La información completa se encuentra en el enlace: https://sites.google.com/ciencias.unam.mx/seminariodecontinuo2020/home.

Queremos hacer una extensa invitación a estudiantes y profesores, para que envien trabajos de divulgación o participen en alguna de las secciones que tiene la revista Axolote.

El Teorema de Sharkovskii: Un Enfoque Geométrico

Wendy Rodríguez Díaz
wendy.fcfm@gmail.com

En 1962 el matemático ucraniano Oleksandr Sharkovskii estableció un teorema que daba una respuesta a la pregunta: “si n > 2 y existe un punto de periodo n, entonces ¿existen puntos de periodo 2?”. Sharkovskii descubrió que la existencia de una órbita de periodo n > 1 en una función, obliga necesariamente a la existencia de órbitas de otros periodos k ≠ n. Sharkovskii determinó exactamente cuáles son esos otros periodos k obligados por la existencia de periodo n.
En este trabajo se muestra cómo la geometría de las funciones primitivas revela los comportamientos periódicos y establece relaciones entre periodos relacionados por el Teorema de Sharkovskii. Veremos cómo este teorema relaciona la existencia de órbitas periódicas y cómo éstas pueden ser estudiadas a través de grafos de Márkov y funciones primitivas. Se abordará un ejemplo en el que el grafo de Márkov y la función primitiva nos permitirán conocer comportamientos no contemplados en el teorema de Sharkovskii y encontraremos que una función es caótica.

Sistemas Dinámicos

Definición 1. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. $\forall x \in X$ la sucesión $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ es llamada **órbita de** x **bajo** f y se denota como $O(x;\ f)$.

Definición 2. El punto x se dice **fijo** para f si $f(x) = x$, es periódico de periodo n si $f^n(x) = x$. El conjunto de puntos periódicos de periodo n se denomina $Per_n(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forma una órbita periódica.

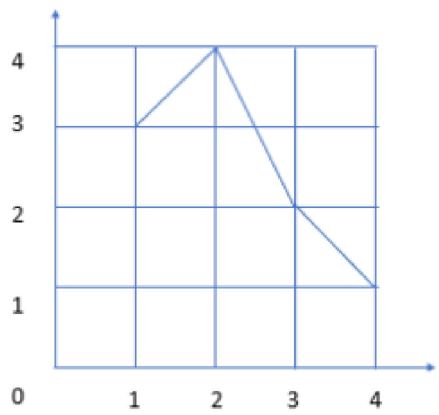
¿La existencia de un punto periódico de periodo n garantiza la existencia de otros puntos periódicos?

Teorema 1. Li-Yorke: Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Si una función continua $f\colon A \to A$ tiene una órbita de periodo 3, entonces f tiene una órbita de periodo n para todo número natural n.

Ejemplo: Periodo 4 no implica periodo 3.
Sea $I = [1,4]$ y $f\colon I \to I$ una función lineal por partes definida por $f(1) = 3, f(3) = 2, f(2) = 4$ y $f(4) = 1$.
Se tienen las siguientes observaciones:

- $\{1, 2, 3, 4\}$ es una órbita periódica de periodo 4.
- Existe un único punto fijo $x_0 \in [2,3]$.
- x_0 es repulsor.
- La órbita de todo punto $x \neq x_0$ en $[2,3]$ eventualmente escapa, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin [2,3]$.
- $x_1 = \frac{3}{2}$ punto de periodo 2.
- Exceptuando la órbita de x_1, todos los puntos en $[1,2] \cup [3,4]$ son de periodo 4.

Por lo tanto, los únicos periodos presentes en f son $1, 2\ y\ 4$.



Casos particulares

Proposición 1. Si $f\colon A \to A$ es continua en un intervalo A y tiene una órbita de periodo 4 entonces f también tiene una órbita de periodo 2.

Proposición 2. Si $f: A \to A$ es continua en un intervalo A y tiene una órbita periódica de periodo 2^k, con $k > 1$, entonces para cada $j \in \{0,1, \dots, k-1\}$, f tiene una órbita periódica de periodo 2^j.

Orden de Sharkovskii

Consideremos a los números naturales ordenados de la siguiente manera. (Denotaremos este orden con el símbolo $\vartriangle$).

$$3 \vartriangle 5 \vartriangle 7 \vartriangle 9 \vartriangle \dots$$
$$2 * 3 \vartriangle 2 * 5 \vartriangle 2 * 7 \vartriangle 2 * 9 \vartriangle \dots$$
$$2^2 * 3 \vartriangle 2^2 * 5 \vartriangle 2^2 * 7 \vartriangle 2^2 * 9 \vartriangle \dots$$
$$2^3 * 3 \vartriangle 2^3 * 5 \vartriangle 2^3 * 7 \vartriangle 2^3 * 9 \vartriangle \dots$$
$$\dots$$
$$\dots \vartriangle 2^5 \vartriangle 2^4 \vartriangle 2^3 \vartriangle 2^2 \vartriangle 1.$$

$n \vartriangle m$ si, y sólo si m está en el mismo renglón que n, pero a la derecha de éste o en algún renglón abajo del renglón que ocupa n.

Teorema 2. (Teorema de Sharkovskii). Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Sean n y m números naturales.

i. Si una función continua $f: A \to A$ tiene un punto de periodo n y $n \vartriangle m$, entonces f tiene un punto periódico de periodo m.
ii. Si $m \vartriangle n$, entonces existe una función continua $f: A \to A$ que tiene periodo n pero no tiene periodo m.
iii. Existe una función continua $f: A \to A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.

Grafos de Márkov

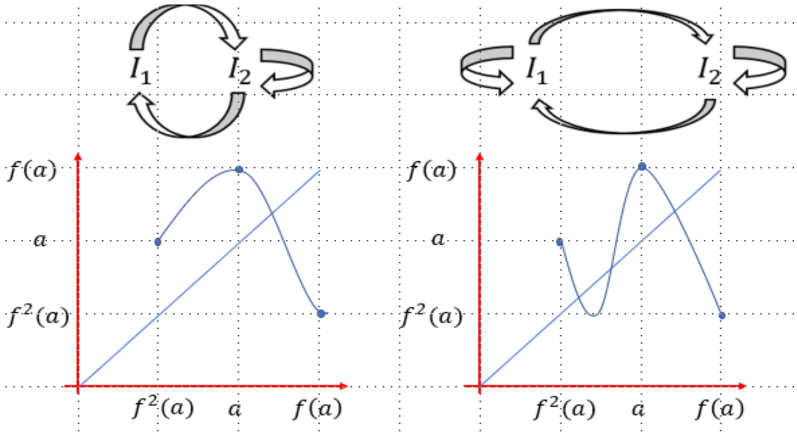
Los grafos de Márkov son utilizados para estudiar la estructura de las órbitas periódicas. Estos describen a la órbita periódica a través de las relaciones existentes entre las particiones que la definen y sus imágenes.

Definición 3. Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ son los n puntos que recorre una órbita periódica de periodo n de una función$f: A \to A$, A un intervalo de $\mathbb{R}$.
Para $1 \leq j < n$, hacemos $I_j = [x_j, x_{j+1}]$. Los vértices de una digráfica asociada a esta órbita periódica van a ser los subintervalos I_j y dibujamos una flecha de I_j a I_k, $I_j \to I_k$ sí y sólo si $I_k \subseteq f(I_j)$.
La digráfica así construida se llama **gráfica de Márkov** asociada a la órbita periódica.

Ejemplo: Sea a un punto periódico de periodo 3 cuya órbita está recorrida como sigue:

$$f^2(a) < a < f(a).$$

Considerando $I_1 = [f^2(a), a]$ e $I_2 = [a, f(a)]$ las posibles digráfica asociadas son:



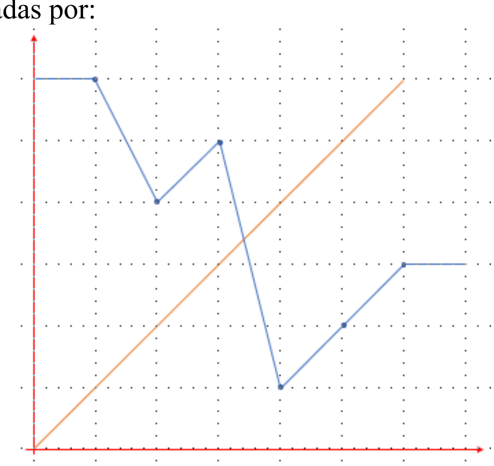
Definición 4. Dada una permutación $\theta \in S_n$ la función primitiva f asociada está definida de la siguiente manera:

i. $f(k) = \theta(k)$
ii. $f\big(tk + (1-t)(k+1)\big) = t\theta(k) + (1-t)\theta(k+1)$
iii. $f(x) = \theta(1) si\ x < 1$
iv. $f(x) = \theta(n) si\ x > n;\ donde\ k = 1, \dots, n\ y\ 0 \le t \le 1.$

Consideremos la permutación $\theta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.

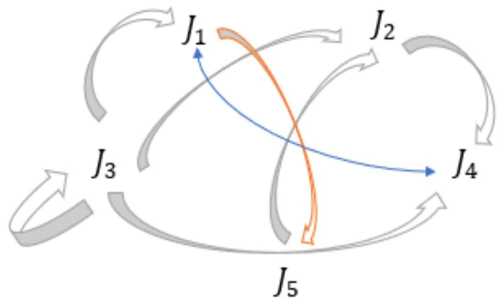
La función primitiva asociada f y su gráfica están dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{Si} \quad x<1 \\ -2x+8 & \text{Si} \quad 1 \le x < 2 \\ x+2 & \text{Si} \quad 2 \le x < 3 \\ -4x+17 & \text{Si} \quad 3 \le x < 4 \\ x-3 & \text{Si} \quad 4 \le x < 6 \\ 3 & \text{Si} \quad 6 \le x \end{cases}$$



Los intervalos para construir el grafo de Markovde f y θ son: $J_1 = [1,2]$, $J_2 = [2,3]$, $J_3 = [3,4]$, $J_4 = [4,5]\ y\ J_5 = [5,6]$. Se puede ver que:

$f(J_2) = J_4,\ f(J_4) = J_1,\ f(J_5) = J_2,\ f(J_1) \supseteq J_4,\ f(J_1) \supseteq J_5,$
$f(J_3) \supseteq J_1,\ f(J_3) \supseteq J_2,\ f(J_3) \supseteq J_3,\ f(J_3) \supseteq J_4.$

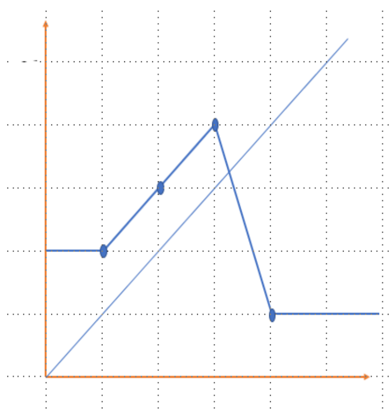


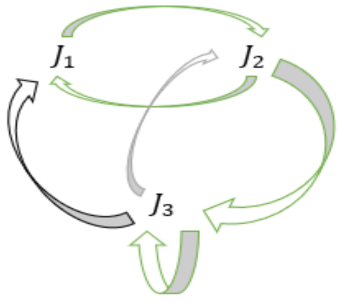
Se observa que:

1. Existe un punto fijo en J_3.
2. Hay una órbita de segundo orden en $J_1\ y\ J_4$.
3. Hay una órbita de periodo 4 en $J_1,\ J_5,\ J_2\ y\ J_4$.

Consideremos ahora la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$.
La función primitiva asociada g y su gráfica son:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si} \quad x<1 \\ x+1 & \text{Si} \quad 1 \le x < 3 \\ 13-3x & \text{Si} \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{Si} \quad 4 \le x \end{cases}$$





Los intervalos para construir el grafo de Márkov de g y σ son: $J_1 = [1,2],\ J_2 = [2,3],\ J_3 = [3,4]$.
Se puede ver que: $f(J_1) \supseteq J_2,\ f(J_2) = J_3\ y\ f(J_3) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$.
Se tiene entonces una órbita de orden 3 en $J_1, J_2\ y\ J_3$.

Conclusión

El teorema de Sharkovskii nos permite afirmar la existencia de órbitas de periodo 2 y 1, mientras que el grafo de Márkov nos permite hallar una órbita de periodo 3 y de este modo nos garantiza la existencia de órbitas de todos los periodos.

Referencias

[1] Li T. Y. y Yorke J. A., (1975) Period 3 implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82, 985-992
[2] Bau-Sen Du (2004) A simple proof of Sharkovsky's Theorem, Amer. Math. Monthly, 111, 595-599.
[3] King D.J.E y Méndez L. H; (2015) Sistemas Dinámicos Discretos.
[4] Stefan P. (1977) A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuos endomorphisms of the real line, Comm. Math. Phys., 54, 237-248.

Matemáticas, imágenes y saberes del pasado: la portada grabada del Mathesis Biceps Vetus et Nova (1670)

Fabián Valdivia Pérez / Dr. Fernando Macías Romero
fabian.valdiviap@gmail.com / fmacias@fcfm.buap.mx

Las portadas con imágenes simbólicas en los libros de matemáticas impresos entre los siglos XV y XVIII constituyen una materia de estudio que cada vez cobra más fuerza e interés dentro de la historia de estas disciplinas. La imagen aquí presentada es la portada del Mathesis Biceps Vetus et Nova (la matemática de dos cabezas: la vieja y la nueva), obra escrita por el matemático español Juan Caramuel de Lobkowitz e impresa en Campania, Italia en 1670.

Esta obra, conservada en la Biblioteca Palafoxiana y considerada uno de los mejores compendios de matemáticas el siglo XVII, nos acerca a la variedad de temas que se incluían en los estudios matemáticos de la época y al complejo pensamiento visual utilizado para la exposición de las nuevas ideas que se discutían y que formaron parte fundamental en el nacimiento de la ciencia moderna temprana.
Juan Caramuel utiliza esta imagen para exponer de manera visual la forma en que concebía las matemáticas: existen matemáticas antiguas y matemáticas nuevas. El texto en latin, debajo del icosaedro con los nombres de algunas materias que para el siglo XVII eran consideradas ramas de la matemática, fortalece esta idea: "Desde hace mucho tiempo la matemática antigua midió la tierra, el mar, el viento y los astros, la nuestra desde hace poco".
La estructura de la imagen es muy importante para entender el sentido de las matemáticas en esa época: las matemáticas aplicadas a la arquitectura o a la milicia están en la parte terrenal (abajo), el estudio de las ramas de las matemáticas - simbolizada por el icosaedro y los ángeles con cartelas llenas de números y diagramas - es lo que enlaza lo terrenal con lo divino. Por eso en la parte alta se encuentra un personaje de dos cabezas que tiene un significado muy especial.
Esta alegoría tiene como fuente la portada de un tratado sobre la luna leído por Caramuel, escrito por el polaco Johannes Hevelius y publicado en Dansig en 1647, y en el que esta imagen es relacionada con la contemplación, es decir, la observación pormenorizada de la naturaleza para descubrir sus secretos.

Mientras que en Hevelius sólo tiene un rostro, en Caramuel presenta dos con rasgos de joven y anciano. Así, la contemplatio se transforma en la "Matemáticas de dos cabezas", alegoría caramueliana que relaciona no sólo el título de libro, Mathesis Biceps, sino el concepto de unificación de saberes matemáticos del pasado y presente, a partir de su lectura, apropiación y exposición integral y conjunta en en esta obra cumbre del siglo XVII, que sigue las ideas de la Mathesis Universalis cartesiana, propuestas en la Regla IV de sus Reglas para la dirección del espíritu:

"… se nota al fin que sólo aquellas cosas en que se estudia el orden y la medida se refieren a la matemática, no importando que tal medida se haya de buscar en números, figuras, astros, sonidos cualquier otro objeto; y por lo tanto, que debe haber una ciencia general, que explique todo aquello que puede preguntarse acerca del orden y la medida no adscrito a ninguna materia especial, y que esa ciencia, no con vocablo caprichosamente adoptado, sin antiguo y aceptado por el uso, es llamada matemática universal (Mathesis Universalis), porque en ella se contiene todo aquello por lo que otras ciencias se llaman partes de la matemática".

Los 4 personajes en cada esquina de la portada del Mathesis, también hace referencia a otro libro consultado por Caramuel, el Mathematicum opus absolutissiumu, escrito por Samuel Marolois e impreso en Amsterdam en 1633. Gracias a esto, sabemos que son las representaciones, empezando arriba a la izquierda y en sentido de las manecillas del reloj, de Euclides, Vitello, Vitrubio y Arquímedes.
Así, la imagen del frontispicio del Mathesis Bíceps de Caramuel usa como estrategia visual llevar a un solo tema la polisemia que significa la relación conocimiento-divinidad, a partir de la ordenación en niveles ascensionales y de la simetría de elementos enfrentados cuyos atributos permiten aprehender la idea básica discursiva de la importancia de las matemáticas en la nueva cultura científica del barroco. Además, indexa el contenido del texto de Caramuel en el que, al igual que el frontispicio, se vuelve una gran síntesis de los saberes matemáticos de su época.

Esta imagen no permite conocer cómo las portadas con imágenes en los libros antiguos se convirtieron en una forma de validación de los conceptos vigentes y trascendentes de las matemáticas antiguas, que fueron fundamentales para la exposición de las nuevas ideas que se discutían y que formaron parte fundamental en el nacimiento de la ciencia moderna temprana en la que las imágenes tuvieron una función muy activa en la transformación de los paradigmas del conocimiento, misma que hoy casi hemos olvidado.

Para Pensar: Frases célebres

John Louis von Neuman (28/12/1903-08/02/1957): Matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, teoría de juegos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos.

Si la gento no cree que las matemáticas son simples es solo porque no se dan cuenta de lo complicado que es la vida.

La verdad es demasiado complicada como para permitir nada más allá de meras aproximaciones

El Lema del Ping-Pong

Angel Rodríguez Sánchez

217570764@alumnos.facfm.buap.mx

En el artículo presente se enunciará el **Lema del Ping-Pong** y a partir de este se dará un ejemplo de su aplicación para la construcción de un grupo Kleininano. Por tanto en la primera sección se dará el material necesario para poder entender el enunciado, es decir, se definirá a los grupos libres y productos libres así como también se dará un esbozo de su construcción y la propiedad universal que satisfacen. En la segunda sección se enunciará una versión del Lema del Ping-Pong y posteriormente se ejemplificará el uso de tal lema para construir un grupo Kleiniano. Por tal motivo definimos aquí lo que se conocerá por un grupo Kleiniano (para un estudio detallado de tales grupos, véase [1]).

Considérese a la esfera de Riemann C y sea Γ un subgrupo del grupo de transformaciones de Möbius $M\ddot{o}b$ que actúa en $\hat{\mathbb{C}}$. La acción es **propiamente discontinua** si dado cualquier compacto $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ se tiene que:

$$\gamma(K) \cap K \neq \emptyset,$$

solamente para un número finito de transformaciones en Γ.

Definición. Sea Γ un subgrupo del grupo $M\ddot{o}b(\hat{\mathbb{C}})$ que actúa en $\hat{\mathbb{C}}$.

1. La región de discontinuidad de Γ, denotada como $\Omega = \Omega_\Gamma$, es la unión de todos los puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ en los cuales Γ actúa de manera propiamente discontinua.
2. El conjunto de puntos límite de Γ, es usualmente denotado por Λ o Λ_Γ y es el conjunto de puntos de acumulación de alguna órbita de Γ, es decir. Un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ está en Λ si existe un punto $x \in \hat{\mathbb{C}}$ y una sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in N}$ de elementos distintos de Γ tales que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(x) = z_0$.

Definición. Un subgrupo $\Gamma < M\ddot{o}b(\hat{\mathbb{C}})$ es un grupo **Kleiniano,** si su región de discontinuidad Ω_Γ no es vacía.

Grupos libres y productos libres

En esta sección se definirá a los grupos libres y productos libres, se dará su construcción a grosso modo y se enunciará la propiedad universal que cumplen.

Definición 1.1. Sea S un subconjunto no vacío de un grupo G. El subgrupo generado por S, denotado $\langle S\rangle$, se define como,

$$\langle S\rangle = \bigcap\{H : H \text{ es un subgrupo de } G \text{ con } S \subset H\}.$$

Se dice que S genera a G si $\langle S\rangle = G$.

Si el conjunto S genera a un grupo G, cierto producto de elementos de S pueden dar el neutro de G, por ejemplo

1. [a] Si $s \in S$, entonces $ss^{-1} = e$.
2. [b] Si G es cíclico de orden n generado por g, entonces $g^n = e$.

A un producto de elementos de S que sea igual a la identidad en G se le llama una relación entre elementos del conjunto generador S. Hay dos tipos de relaciones.

- **Triviales**, si son consecuencia de los axiomas de grupo como en [a].
- **No triviales**, si son las que dependen de la estructura de grupo como en [b].

Definición 1.2. Si S es un conjunto generador de G, decimos que G está **libremente generado por** S si todas las relaciones entre los elementos de S son **triviales**.

Una forma de caracterizar a los grupos libres es la siguiente:

Proposición 1.3. Sea G un grupo generado por S. Se dice que un grupo G es un grupo libre generado por S si y soló si

$$\prod_{i=1}^{k} s_i^{\varepsilon} = e; s_i \in S, \varepsilon_i \in Z\boxed{\{0\}s_i^{-1}} \neq s_{i+1}, s_i \neq s_{i+1}.$$

Entonces $s_i = e$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Productos Libres

A continuación se presenta la construcción de productos libres, las demostraciones de los resultados aquí enunciados pueden consultarse en [2] .

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$, una familia de grupos y sea

$$A = \bigsqcup_{i\in I} G_i(\text{unión disjunta}).$$

Se define a $W(A)$ como el conjunto de sucesiones finitas de elementos de A, es decir, un elemento $w \in W(A)$ es la sucesión, $w = g_1 g_2 \cdots g_n$, donde cada $g_i \in A$, a tal w se le denomina **palabra** (de longitud n) en el alfabeto A; la operación binaria en $W(A)$ es la concatenación de sus elementos y se considera a la palabra vacía como la identidad en $W(A)$. Si g_i y g_{i+1} pertenecen al mismo grupo G_α podemos agruparlos para obtener la palabra $g_1 \cdots (g_i g_{i+1}) \cdots g_n$ de longitud $n-1$ y que también representa a w. Además, si cualquiera de los g_i es igual a la identidad en algún G_α, entonces se puede suprimir g_i de la sucesión, obteniendo también una palabra más corta que también representa a w. Aplicando estas operaciones de reducción repetidamente, podemos obtener en general una palabra representando a w de la forma $h_1 \cdots h_m$, donde no existe ningún grupo G_α que contenga a dos elementos consecutivos h_i y h_{i+1} y donde $h_i \neq e$ para todo índice. Tal palabra se denomina **palabra reducida**. Esto se resume de la manera siguiente:

Si $w, w' \in W(A)$, se tiene la siguiente relación de equivalencia $\sim$

- $w g_i g_{i+1} w' \sim w c w'$, si $g_i, g_{i+1}, c \in G_i$ y $g_i g_{i+1} = c$.
- $w e w' \sim w w'$, si e es elemento identidad de algún G_i.

Sea $W{:}\, W(A) \diagup \sim$. W es un grupo, donde el inverso de un $g_1 \cdots g_n$ es el elemento $g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$. El grupo W es el producto libre de los G_i, y es denotado por $_{i\in I} G_i$.

Definición 1.4. El producto libre de grupos, $_{i\in I} G_i$, es el conjunto de todas las palabras $w = g_i \cdots g_n$ que satisface que $g_i \neq e \in G_{\alpha_i}$ para toda i, y para cada indice i, existe un único α_i tal que $g_i \in G_{\alpha_i}$; decir que una palabra es una palabra reducida significa que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para todo i.

Proposición 1.5. Cualquier elemento en $_{i\in I} G_i$ es equivalente a una única palabra reducida en $W(A)$.

Proposición 1.6. Cada G_i es un subgrupo de $_{i\in I} G_i$, y si se denota a $G = {}_{i\in I} G_i$, entonces para cada $i_0 \in I$, el homomorfismo canónico

$$\gamma_{i_0}: G_{i_0} \to G,$$

es inyectivo.

Una definición de un grupo libre generado por un S, equivalente a la dada arriba, es la siguiente:

Definición 1.7. Sea S un conjunto. El grupo libre generado por S es el producto libre de una familia de copias de enteros Z indexadas por S. Este grupo es denotado por $F(S)$. Se identifica cada $s \in S$ con el generador "$+1$"en la copia correspondiente a s, para que S sea visto como un subconjuto del producto libre, por lo tanto $F(S)$ puede identificarse con el conjunto de todas las palabras reducidas en $S \cup S^{-1}$, el producto en el grupo $F(S)$ corresponde a la concatenación de palabras seguidas de una apropiada multiplicación y reducción. El elemento neutro es la palabra vacía. El inverso de una palabra reducida $w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$ esta dado por $w^{-1} = s_{i_n}^{-\varepsilon_n} s_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots s_{i_1}^{-\varepsilon_1}$.

La cardinalidad de S es llamado el ***rango*** de el grupo libre $F(S)$.

Los productos libres cumplen la propiedad universal siguiente

Proposición 1.8. [Propiedad universal]Sea H un grupo, sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos y sea $(h_i\colon G_i \longrightarrow G)_{i\in I}$una familia de homomorfismos. Entonces existe un único homomorfismo $h\colon \quad {}_{i\in I}G_i = G \to H$, tal que el diagrama siguiente es conmutativo para cada $i_0 \in I$.

$$\begin{tikzcd} G_{i_0} \arrow[d, "\gamma_{i_0}"'] \arrow[dr, "h_{i_0}"] & \\ G \arrow[r, dashed, "h"'] & H \end{tikzcd}$$

En particular, si G es un grupo y $\varphi\colon S \to G$ es una función, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\Phi\colon F(S) \to G$ tal que

$$\Phi(s) = \varphi(s), para\ cada\ s \in S.$$

Está proposición se encuentra demostrada en [2, Pagina 19].

Lema del Ping-Pong

La versión del Lema del Ping-Pong que aquí se presenta fue extraída de [2], una versión más elemental de tal criterio puede consultarse en [3]. Históricamente esté criterio es atribuida a F. Klein, pero existen versiones más recientes de tal hecho, como la que aquí se presenta.

Lema del Ping-Pong 2.1. Sea G un grupo actuando en un conjunto X $(G \curvearrowright X)$ y sean Γ_1 y Γ_2 subgrupos de G. Considérese a Γ el subgrupo generado por Γ_1 y Γ_2 en G. Supongase que existen subconjuntos X_1, X_2 en X no vacíos disjuntos tales que,

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(X_2) \subset X_1 & \forall \gamma_1 \in \Gamma_1, & \gamma_1 \neq 1, \\ \gamma_2(X_1) \subset X_2 & \forall \gamma_2 \in \Gamma_2, & \gamma_1 \neq 1. \end{array}$$

Entonces Γ es isomorfo al producto libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

La proposición siguiente es un claro ejemplo de la construcción de un grupo Kleiniano vía la aplicación del Lema del Ping-Pong.

Proposición 2.2. Si $|z| \geq 2$, entonces las transformaciones

$$g_1(w) = w + zyg_2(w) = \frac{w}{zw + 1},$$

generan un subgrupo libre de rango 2 en $Mob(\hat{\mathbb{C}})$, más aún este grupo es Kleiniano.

Se darán las ideas de la demostración desde un punto de vista geométrico a modo de ilustración de la aplicación del lema del Ping-Pong.

Ideas de la Prueba. Sea $w, z \in C$ con la condición de que $|z| \geq 2$ y consideremos las transformaciones

$$g_1(w) = w + zyg_2(w) = \frac{w}{wz + 1}.$$

Veamos que g_1, g_2 generan un subgrupo libre de rango dos en el grupo $Mob(\hat{\mathbb{C}})$. Se observa que: $g_2 = j \circ g_1 \circ j$, es decir, g_2 es conjugada a g_1 vía la transformación j, donde $j(z) = \frac{1}{z}$.

Se traza la recta que une a w con $w + z$, para después trazar las rectas perpendiculares a este segmento que pasan por w y $w + z$ estas rectas vistas en la esfera de Riemann son dos circunferencias tangentes en el punto al infinito. Dado que la transformación j intercambia al 0 en el infinito y viceversa. La circunferencias tangentes en el infinito se transforman en dos circunferencias tangentes en el cero mediante la transformación j (véase Figura 1).

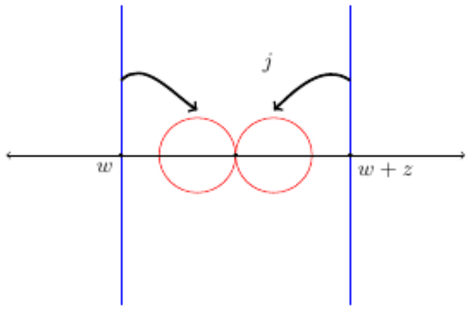


Figura 1

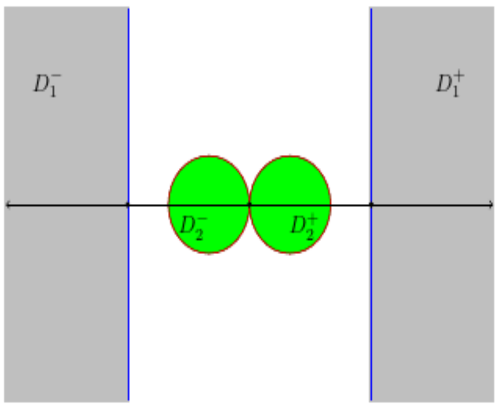


Figura 2

Denotamos por D_1^+ y D_1^- el interior de las circunferencias tangentes en el infinito y a D_2^+ y D_2^- el interior de las circunferencias tangentes en cero (véase Figura 2) y sean

$$E_i^{+}: = C \setminus D_i^{-}, E_i^{-}: = C \setminus D_i^{+}, i = 1,2.$$

Se definen $X_1 = \left\{ w \in C: |Re[\frac{\bar{z}}{|z|} w]| > 1 \right\}$ y $X_2 = \{z \in C: |z| < 1\}$, es claro que $D_1^+ \cup D_1^- \subset X_1$ y $D_2^+ \cup D_2^- \subset X_2$. De aquí se tiene que $g_1^n(X_2) \subset X_1$ y $g_2^n(X_1) \subset (X_2)$, para cada $n \in Z$. Aplicando el lema del Ping-Pong se obtiene el resultado.

Más aún, si K es un subconjunto compacto de $\bigcap_{i=1,2} E_i^{\pm}$, entonces para cada palabra reducida w en el alfabeto $\{g_1, g_2, g_1^{-1}, g_2^{-1}\}$, se tiene que $w(K) \cap K = \emptyset$ (véase Figura 3). Luego el grupo $G_z = \langle g_1 \rangle * \langle g_2 \rangle$ tiene una región de discontinuidad en $\hat{\mathbb{C}}$, y por lo tanto es Kleiniano.

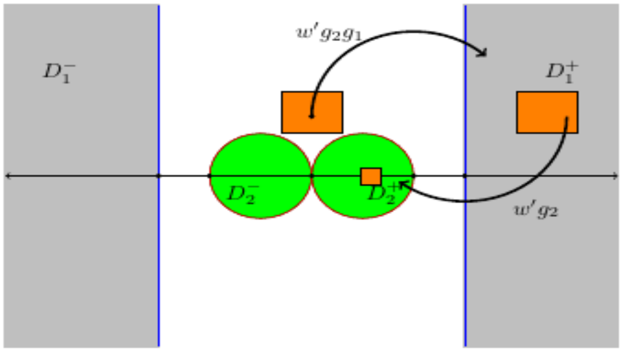


Figura 3

Referencias
[1] Beardon, Alan F.: *The geometry of discrete groups*. SpringerVerlag, 1983.
[2] Pierre de la Harpe, *Topics in Geometric Group* , Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago. ISBN 0-226-31719-6; Ch. II.B "The table-Tennis Lemma (Klein's criterion) and examples.
[3] Clara Löh, *Geometric Group Theory, an introduction*. Retrieved from http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/ggt_book/ggt_book_draft.pdf

Para sonreir, divertirse y reflexionar

¿Qué es el cálculo integral ? $\int_a^b$

Pues....como el otro pero más sano

Examen de matemáticas

Expandir $(a+b)^n$

$= (\ a+\ \ b)\ ^n$

$=(\quad a\quad +\quad b)\qquad ^n$

$=(\qquad a\qquad +\qquad b)\qquad\quad ^n$

Etcétera ...

¿Qué es un oso polar?

Un oso rectangular después de un cambio de coordenadas

Chiste Hegeliano inventado por Fernando Vilchis
En una clase de Categorías, un profesor le dice a su alumno:
Quiero que demuestres el teorema sin usar el Lema de Yoneda.
El alumno responde:
No conozco ese lema, pero me es familiar el Lema de Zorn; si quiere puedo demostrar el teorema sin usar el Lema de Zorn.

Poesía de agosto-septiembre

Maricela Guerrero: Nació en la Ciudad de México, en 1977. Poeta. Estudió Letras Hispánicas en la UNAM. Ha publicado en revistas como *Letras Libres*, *Luvina*, *Revista El Humo*y *Tierra Adentro,* entre otras. En 1998 y 2000 obtuvo el primer premio en el Certamen Después del Discurso. En 2008 y 2010 obtuvo la beca para Jóvenes Creadores del FONCA. Su obra aparece en las antologías: *Efectos secundarios* (Madrid: Anaya, 2004), *Un orbe más ancho: 40 poetas jóvenes (1971-1983)*(Carmina Estrada, UNAM, 2005), *Divino tesoro* (México: Casa Vecina, 2008), *Cuatro poetas recientes de México* (Buenos Aires: Black & Vermelho, 2011), *México 20: La nouvelle poésie mexicaine* (Jorge Esquinca, Tedi López Mills, Myriam Moscona, Castor Astral/Secretaría de Cultura, 2016) y *Sombra roja: diecisiete poetas mexicanas 1964-1985* (Rodrigo Castillo, Vaso Roto, 2017).

DÍA DE PRECIPITACIONES I

Y en menos de que lo cuento: mierda
 un microbús arrancó la facia con faro con defensa,
 asegurada entonces, llegó el ajustador y luego—dos horas después—el
otro,
luego que mierda que los dineros, esas cosas de la vida:
que el deducible, que me lleva el tren y llueve
y yo que me iba al yoga, de monje tibetana al karma serenar,

la precipitación, días de plumaje lluvioso
¿qué se le va a hacer? Un café tres lecturitas y respiraciones
concéntricas
así que el dinero va y viene y entre los microbuses se detiene

libros, respira

precipitaciones en incontinencias gramaticales
acariciables,
respira
palabras que se precipitan más cercanas que ajustador que facia que faro

que defensa.

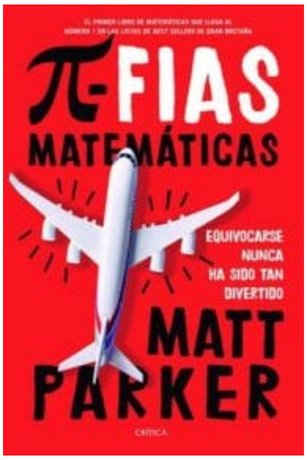
ALASKA

 Por la avenida Insurgentes pasa un tráiler y suena su claxon como bocina de barco, nos miramos:
de proa a popa
de babor a estribor
hacemos planes: Anchorague, isla de Kodiak
nos embarcamos, the fishing licency en regla: pescamos arenques y salmones, viajamos, bebemos:

zarpamos

 aunque más bien en micro al metro, de ahí cada quien para su
casa y sin salmones.

Recomendación de libro



Libro: *π- FIAS MATEMÁTICAS*

Autor: *Matt Parker*

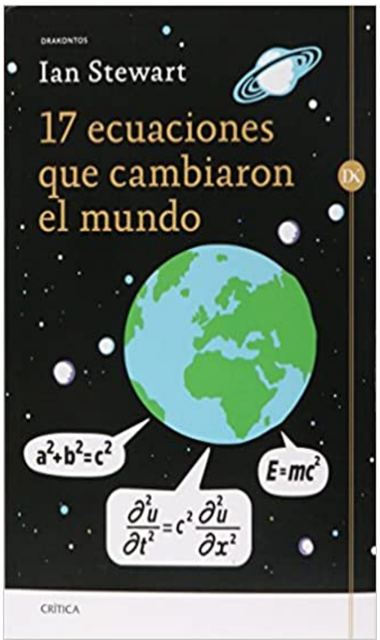
Editorial: *Crítica*

Reseña de libro

Título: *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*

Autores: *Ian Stewart*

Editorial: *Crítica*



Las ecuaciones, esos conjuntos de números y símbolos separados por el signo igual, son el alma de las matemáticas, la ciencia y la tecnología. Sin ellas, nuestro mundo no existiría en su forma actual: escondidas para muchos, han constituido una fuerza motriz en la civilización humana durante miles de años, abriendo nuevas perspectivas en campos tan variados como las comunicaciones, la tecnología espacial o la física nuclear.
Que así es, es algo que se encarga de demostrar, con su maestría habitual, el distinguido matemático y reputado divulgador Ian Stewart. Para ello ha seleccionado 17 ecuaciones, pertenecientes a dos grupos diferentes:

Un grupo es el de las ecuaciones que revelan regularidades matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que nos dice cómo están relacionados los tres lados de un triángulo rectángulo.

El otro grupo de las ecuaciones que expresan leyes de la naturaleza, como la ley de gravitación universal de Newton, las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, o la ecuación desarrollada por Claude Shannon que define cuánta información contiene un mensaje.

Actividades Presenciales de Matemáticas en la FCFM

Suspendidas por la contingencia sanitaria del COVID-19, hasta nuevo aviso.

Congresos y Seminarios en linea

Seminario de continuos y sistemas dinámicos, los días 6, 7 y 8 de octubre de 2020.
Se realizará este seminario en lugar del Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos, cuya edición XV ha sido pospuesta por motivos harto referidos. La información completa se encuentra en el siguiente enlace:
https://sites.google.com/ciencias.unam.mx/seminariodecontinuo2020/home

Publicaciones de la Academia de Matemáticas

Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2022 Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx y Fernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx
Los trabajos recibidos después del 6 de enero (del año en curso) se tomarán en cuenta para un año después.

Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2022. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx, Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx, Manuel Ibarra Contreras mibarra@fcfm.buap.mx, Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx

La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.

Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com

Las contribuciones deberán estar escritas en word con letra times de 12 puntos

Compiladores: Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en www.fcfm.buap.mx/academiam/

Responsables de la Edición:
José Juan Angoa Amador,
Patricia Domínguez Soto,
Manuel Ibarra Contreras,
Agustín Contreras Carreto
Colaboradores Estudiantes:,Emilio Angulo Perkins,
Jesús González Sandoval
Diseño logo: Santiago Sienra y Guillermo Sienra

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas