FCFM BUAP

axolote’

Revista mensual de la Academia de Matemáticas

## *Editorial*

Estimados lectores: tenemos el gusto de compartir con ustedes el número 8 de la revista de divulgación axolote. Queremos invitarlos a participar en la revista, enviando artículos de divulgación, versos, chistes, pensamientos, etc.; creemos que es importante mencionarlo en esta Editorial, para que con la solidaridad y el apoyo de todos, profesores y estudiantes de la Facultad, este proyecto de axolote pueda seguir existiendo.

En este número hay tres aportaciones de divulgación: la primera por Manuel Ibarra, ¿Y…sólo está mal escrito profe?; la segunda por Agustín Contreras, i-nútiles, i-mposibles, i-nexistentes, i-maginarios, y la tercera por Esaú A. Pérez, un primer acercamiento a las medidas de la Tierra. También están las secciones ya acostumbradas de axolote como: poema del mes, chistes, frases para pensar, recomendación de un libro, sinopsis de un libro y actividades académicas relacionadas con matemáticas.

Con relación al Congreso de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, que se realiza cada año en el mes de octubre, y que en este año sería sede nuestra Facultad después de muchos años de no serlo, les comunicamos con pesar que la edición 53 del congreso ha sido aplazada para el próximo año por la contingencia sanitaria. Un buena noticia es que nuestra Facultad seguirá siendo sede para el año 2021 y trabajaremos para que esta gran fiesta matemática se celebre con mucho gusto y entusiasmo.

Esta contingencia sanitaria nos ha limitado el contacto físico con la Facultad, con los amigos, con nuestros cursos, con nuestros profesores, con nuestros alumnos, y con muchísimas cosas que podríamos seguir enumerando, pero también nos ha dado la oportunidad de ver, pensar y reflexionar en las cosas simples y sencillas que pasaban todos los días en nuestra Facultad como por ejemplo: comer una torta o chilaquiles en la tiendita, tomar un café, saludar de mano, dar beso a nuestros amigos, nuestros seminarios, nuestros exámenes profesionales, etc. La Facultad siempre viva, siempre llena de gente, siempre impetuosa, siempre pensante, siempre solidaria y siempre autocrítica. Esperamos con ansia vernos otra vez, como antes. Sirva este tiempo para hacernos ver la importancia insustituible de las clases presenciales.

# ¿Y...sólo está mal escrito profe?

Muchos de nuestros estudiantes tienden a ver la comunicación y la matemática como dos entes distintos. Ingresan a nuestra Facultad con una idea preconcebida de lo que es un curso de matemáticas y cómo serán evaluados. No obstante, habemos maestros que rechazamos esta norma. Me parece que no separar estos dos aspectos influye en el aprendizaje y la formación a largo plazo de los alumnos. Una parte esencial del trabajo de un matemático es encontrar las mejores formas de comunicar sus resultados, ya sea de manera oral o escrita. La incorporación de la comunicación matemática en las evaluaciones de los cursos puede ayudar a que, en nuestros salones, el aprendizaje mejore. ¿Cómo?, la escritura proporciona un lugar natural para permitir a los estudiantes combinar y unificar los conceptos del curso, las tareas de escritura reflexiva pueden ayudar a impulsar la motivación del alumno y refinar las habilidades que se desarrollan con el conocimiento matemático. Además, nuestra experiencia como matemáticos y profesores de matemáticas nos ha mostrado que la comunicación oral en un entorno grupal aumenta el rendimiento, la persistencia y las actitudes entre los estudiantes de física y matemáticas. También sabemos que les ayudará a cultivar las habilidades que necesitarán cuando se incorporen a un lugar de trabajo; los ejercicios de comunicación matemática pueden ayudar a capacitarlos en el pensamiento lógico, en la construcción de argumentos rigurosos y en comunicar ideas complejas de manera efectiva a los que no son expertos.

Si uno quiere implementar lo anterior no se deben olvidar las circunstancias en que llegan los alumnos a esta Facultad. Aunque son grupos muy heterogéneos de personas, comparten muchas características, aún con sus compañeros de generaciones anteriores: una buena cantidad de ellos carecen del conocimiento matemático y las habilidades necesarias que les permitan avanzar en sus cursos de manera satisfactoria y con frecuencia no ven el valor de lo que se supone deben aprender en sus clases. Muchos de los estudiantes tienen dificultades para adaptarse a situaciones adversas y al primer signo de dificultad son incapaces de convocar estrategias para enfrentarlas. La dificultad puede ser un examen reprobado, falta de comunicación con sus compañeros, o una ruptura sentimental. A la primera señal de problemas muchos se vuelven incapaces de funcionar y perseverar. A menudo incluso, anticipan dificultades y su ansiedad sólo los paraliza.

Baste con un ejemplo de un diálogo entre un estudiante a punto de graduarse y un alumno de primer ingreso, escuchado desde una mesa vecina, en la Biblioteca Nicolás Copérnico:

“Cuando llegué a esta Facultad, así como tú, estaba decidido a convertirme en matemático, sin embargo, la falta de confianza en mí mismo y el miedo a equivocarme fueron de los primeros impedimentos para avanzar como yo deseaba. Ahora te puedo decir que he disfrutado de varios de mis cursos y de muchos problemas a los que me he enfrentado. ¡Claro!, he pasado muchas horas estudiando solo y tratando de aprender lo que realmente deseaba aprender. El problema más grande que he enfrentado es que al principio, y aún ahora me cuesta mucho trabajo, no sabía cómo interactuar con mis compañeros de clase o profesores. Incluso cuando tenía una idea o una pregunta en clase, mi miedo a cometer un error me dificultaba comunicarlas. Me separé de los demás lo más posible, pero aislarme requería mucha energía: terminaba enfermándome cada semestre. La única razón por la que sobreviví fue porque no me importaba pasar horas estudiando, incluso si era para encontrar la solución a un solo problema. Y la mayoría de las veces, finalmente logré comprender los conceptos que me enseñaban. Aunque a veces fue un proceso doloroso, puedo decir que me he deleitado aprendiendo matemáticas. Aunque debo reconocer que el dolor, en ocasiones, fue mayor que la ganancia. Hacia el final de la carrera tomé el curso de Teoría de Conjuntos y como de costumbre, trabajé solo. No me preocupé demasiado por mi capacidad para aprobar el curso sin problemas ya que según yo, me encantaban esos temas. Pero pronto llegó el momento en que quería desesperadamente pedir ayuda, pero no sabía cómo comenzar. Apenas logré pasar. La emoción del aprendizaje se disipó rápidamente, en un solo semestre."

Alguien distrajo mi atención y por un momento perdí el hilo de la conversación, pero al regresar a ella seguí interesadísimo en lo que decía el casigraduado al principiante:

"Finalmente, me di cuenta que necesitaba cambiar. A esta alturas tuve que superar mi miedo, ¡una vez más!, para poder volver a disfrutar de las matemáticas. Te diré: adaptarse al cambio lleva tiempo y a veces uno se siente incómodo con ese cambio, sin embargo, nunca hay que dejar de intentarlo, ya que es la única forma en que se puede mejorar. Ahora sé que está bien pedir ayuda, estar equivocado, cometer innumerables errores y decir "No sé", porque estas cosas sólo son parte del aprendizaje de las matemáticas que es un proceso individual duro, pero que puede ser más fructífero y poderoso si se tiene la mente abierta para ir ajustando la forma en que se aborda. Descubrí que al trabajar con compañeros de clase, aprendí a expresar mis ideas y articular mis pensamientos en palabras de manera más efectiva, me ayudó a confrontar situaciones que no se pueden resolver por medio del comportamiento aprendido, automático o por simples reflejos, me hizo soportar entornos donde la tensión resultante de una nueva situación lleva a las personas a la experimentación de ensayo y error. También aprendí que hay que saber buscar personas que no sólo disfruten al hablar de cosas relacionadas con las matemáticas sino también que apoyen y contribuyan a generar un ambiente inclusivo, personas con las que se puedan compartir éxitos para celebrar, no para impresionar, personas con las que uno se sienta cómodo admitiendo los fracasos individuales; hay que darse cuenta de la importancia de estar con las personas que uno quiere estar, con las que uno ama trabajar. En conclusión, si tienes la oportunidad de poder hacer todo esto desde tu curso de Matemáticas Básicas, no la pierdas y practica todo lo que puedas el difícil arte de la escritura matemática. En un futuro próximo, cuando llegues a la parte final y tengas que redactar una tesis, estarás preparado para comunicar tu trabajo de investigación sin ningún problema y de manera clara."

Después de escuchar este diálogo tan enternecedor, aunque no faltará el aguafiestas que diga que más bien fue un monólogo, llegamos a lo que me motivó para compartirles a ustedes, queridos lectores, un recuento de frases que pueden ser de utilidad para escribir pruebas en matemáticas y que deberán adaptarse al estilo de cada persona. Es un listado muy corto, lejos de ser exhaustivo, pero espero que sea motivo para que estudiantes y profesores se animen a compartir sus experiencias en este sentido. Seguro serán muy útiles para nuestra comunidad y una herramienta para que pronto, escuchemos con menos frecuencia la pregunta que da título a este escrito. Estoy convencido que puede ser útil desde a un estudiante de primer ingreso, en sus cursos de Matemáticas Básicas y Geometría Analítica, hasta el que ya esté en el proceso de escritura de su tesis.

**Cuando se desea explicar intenciones**.

- Probaremos...por...
- Queremos probar que...
- Para probarlo haremos...
- Aquí necesitamos encontrar (o probar que)...
- Consideremos los siguientes casos

**Para aclarar implicaciones.**

- Dado que…, entonces…
- Porque…, tenemos…
- Por lo tanto / Así / Por eso / Por esta razón
- Esto significa que
- El teorema (definición o proposición, etc.) anterior implica…

**Para explicar "casos".**

- Por hipótesis, conocemos (o sabemos) que…
- Por simplificación / manipulación / arreglo, …
- De la (propiedad / teorema / definición /) se tiene que…

Termino con lo siguiente: aprender algo nuevo, ya sea conocimiento o habilidad, es difícil y puede ser aún más frustrante que alguien te recuerde constantemente lo fácil que debería ser. Hay que reconocer las dificultades que tienen nuestros alumnos para que se pueda comprender mejor el apoyo que necesitan y cómo podemos ayudar a proporcionarlo. Escribí esto con intención (también con intensión) de apoyar en esto último.

***Manuel Ibarra Contreras***

# i-NÚTILES, i-MPOSIBLES, i-NEXISTENTES, i-MAGINARIOS

## El nacimiento de i

**A la memoria de Hortencia, madre
de mis hijos , que nació un 16 de mayo**

"16 de mayo.

Decididamente, estoy enfermo. ¡Y pensar que estaba tan bien el mes pasado! Tengo fiebre, una fiebre atroz, o, mejor dicho, una nerviosidad febril que afecta por igual el alma y el cuerpo. Tengo continuamente la angustiosa sensación de un peligro que amenaza, la aprensión de una desgracia inminente o de la muerte que se aproxima, el presentimiento suscitado por el comienzo de un mal aún desconocido que germina en la carne y en la sangre."

*Guy de Maupassant. El Horla.*

En 1957 Jorge Luis Borges y Margarita Guerrero escribieron el *Manual de Zoología Fantástica* (Fondo de Cultura Económica, México, 1957); fue ampliado y publicado nuevamente en castellano con el título de *El Libro de los Seres Imaginarios* (Kier, Buenos Aires, 1967). En él sus autores señalaron que "el título de este libro justificaría la inclusión del Príncipe Hamlet, del punto, de la línea, de la superficie, del hipercubo, de todas las palabras genéricas y, tal vez, de cada uno de nosotros y de la divinidad. En suma, casi del universo…Un libro de esta índole es necesariamente incompleto…" En efecto, en su libro no se encuentra el Horla -ser invisible cuya presencia sólo se percibe al causar la fiebre que describe Guy de Maupassant en su extraordinario cuento y que bien pareciera que nos habla de los estragos que causa el COVID-19-, pero exhortan al eventual lector a que les “remita los nombres, la fidedigna descripción y los hábitos más conspicuos de los monstruos locales”. No podríamos narrarles a ellos los horrores del susodicho virus, porque ya no es sólo fantasía, sino terrible realidad; como mexicanos, sí deberíamos platicarles de Chocazíhuatl o la Llorona, del nahual, del chupacabras, del ahuizotl, de las tzitzimime, de las tlahuelpuchis o mujeres vampiro de Tlaxcala, de la cuitlapanton, de los aluxes o chaneques, del tlacontzolli o monstruo de dos cabezas, de los amoxoaques u hombres árbol, y de yohualtepuztli u hacha nocturna, pero son muchos seres para ser descritos aquí. Como matemáticos, tendríamos que narrarles, a Borges y Guerrero, acerca de las nada razonables razones inconmensurables o números irracionales, de los nada positivos números negativos, de números estratosféricos como el googol y el googolplex, que resultan microbios ante cualquier aleph. Por cierto, ellos incluyen en su libro al ave Fénix, pero su versión matemática, El alephenix, fue creado y descrito por Manuel Ibarra en el número anterior del Axolote. Dejaremos por ahora muchos de estos entes; mas, el monstruo matemático que no debe quedar fuera de un libro sobre seres imaginarios, es, nada menos y nada más que el imaginario *i* quien, haciendo yunta con el número real 1, generó algo tan complejo como los números complejos.

Más de 460 años han transcurrido desde que los números complejos se descubrieron. Sabemos ahora que han tenido un profundo impacto en todas las matemáticas, unificando mucho de lo que previamente aparentaba ser un disparate y explicando lo que parecía inexplicable. Pese a este final feliz –que no es final, sino que sigue desplegándose su desarrollo aún hoy día--, el proceso que siguió al nacimiento de los números imaginarios y complejos fue dolorosamente lento. Muy poco se realizó durante sus primeros 250 años.

¿Cómo es posible que los números complejos permanecieran dormidos a través de los siglos que vieron la llegada y el paso de mentes tan brillantes como Descartes, Fermat, Leibniz y aún el genio visionario de Newton? La respuesta parece estar en el hecho de que, lejos de ser acogidos y aprovechados, los números complejos fueron recibidos inicialmente con indiferencia, suspicacia, confusión y hostilidad; en suma, con los epítetos zahirientes que le dan nombre a este escrito.

Según Paul Nahin en su fascinante libro *Esto no es real. La historia de i*, los hermanos Ahmed y Mohammed Abd-er-Rassul, profanadores “profesionales” de tumbas, hallaron en el “Valle de los Reyes” de Deir el-Bahari, cementerio del antiguo Egipto, un valioso papiro que data del año 1890 a.C. Lo vendieron en 1883 al egiptólogo egipcio V. S. Golenishchev, quien lo descifró y lo donó en 1912 al Museo de Bellas Artes de Moscú. Desde entonces se le conoce como *Papiro de Moscú* y es, junto con el Papiro de Rhind, el más importante documento matemático del antiguo Egipto. Lo más interesante de este papiro, desde el punto de vista matemático, es su problema número 14, que ha sido considerado por muchos historiadores como “la mayor de las pirámides egipcias”. En él se resuelve un problema acerca del volumen de una pirámide cuadrangular truncada y de cuya solución se deduce que la fórmula que aplicaban es $V=1/3\ h(a^2+ab+b^2)$, donde $a$ y $b$ son, respectivamente, las longitudes de los lados de los cuadrados que forman las bases inferior y superior, y h es la altura de la pirámide. Nadie sabe cómo la obtuvieron, porque es una fórmula exacta; sofisticada y profunda, comparada con los resultados del resto de este papiro y de los demás conocimientos de los egipcios, aunque en la práctica, medir la altura de las pirámides monumentales egipcias, era un verdadero reto. Muchos siglos después, en el siglo I d.C., Herón de Alejandría presentó, en su *Estereometría*, una fórmula para la altura, conociendo el valor $c$ de la arista lateral de la pirámide, mucho más fácil de medir que la altura:

$$h=[c^2-2((a-b)/2)^2]^{1/2}$$

En uno de sus ejemplos, Herón usaba las cantidades $a=28$, $b=4$ y $c=15$, obteniendo $h= (81-144)^{1/2}$. Según los historiadores, ésta es la primera vez que aparece en un texto matemático la raíz cuadrada de un número negativo, es decir, un número imaginario. ¿Qué hizo Herón? No le dio importancia; simplemente "corrigió" $h= (144 - 81)^{1/2} = \sqrt{63}$. Lo trató con **indiferencia**.

Ni el paso de los siglos ni la enorme capacidad de los grandes matemáticos de Alejandría hicieron progresar la percepción y posible aceptación de los imaginarios: En el libro 6 de *La Aritmética* de Diofanto de Alejandría, escrita en el siglo III d. C., se plantea el siguiente problema: "Dado un triángulo rectángulo de área 7 y perímetro 12, hallar sus lados." Ya desde entonces Diofanto era experto en la solución de problemas que llevaban a ecuaciones de segundo grado. En esta ocasión, él llegó a ésta: $336\, x^2 + 24 = 172\, x$ (Diofanto escribió la ecuación en esta forma porque muestra todos los coeficientes como números positivos. En el problema 2 del libro 4 de *La Aritmética* él había afirmado que la ecuación $4\, x + 20 = 4$ era "absurda" porque lleva a la solución "imposible" $x = -4$). El resultado de esta ecuación cuadrática es

$$x = \frac{-43 \pm \sqrt{-167}}{168}.$$

De nuevo aparece la raíz cuadrada de un número negativo. ¿Qué hizo Diofanto? Simplemente escribió que tal ecuación cuadrática "no era posible" (en cierta forma, que las raíces cuadradas de negativos son **imposibles**).

Siglos después el fraile franciscano Luca Pacioli (1445-1514), matemático, contador, economista, inventor y profesor del Renacimiento Italiano, escribió *De divina proportione* y de *Suma de aritmética, geometría, proporciones y probabilidad.* En la primera de estas obras, ilustrada con dibujos de Leonardo da Vinci, estableció una relación entre la sección áurea, los principios arquitectónicos y las proporciones clásicas del cuerpo humano; en la segunda, de carácter compilatorio, se encuentran las primeras noticias del llamado método de partida doble y los primeros ejemplos del cálculo de probabilidades. En esta obra señala, en 1494, que "la solución de la ecuación cúbica es tan **imposible**, en el estado actual de la ciencia, como la cuadratura del círculo." Pero menos de 10 años después Scipione del Ferro (1465-1526), de la Universidad de Bolonia resolvió la ecuación cúbica reducida

$$x^3 + px = q,$$

con $p > 0$ y $q > 0$. Él llegó a la impresionante fórmula:

$$x = (q/2 + w)^{1/3} + (q/2 - w)^{1/3},$$

donde $w = (q^2/4 + p^3/27)^{1/2}$. Aquí no son visibles raíces cuadradas de números negativos. De hecho, la única solución real se puede obtener como la abcisa del único punto de intersección de las curvas $y = x^3$, $y = -p\,x + q$.

Nicolo Fontana (1500-1577), apodado Tartaglia por su tartamudez, descubrió en 1535, el modo de solucionar todas las ecuaciones del tipo

$$x^3 = px + q,$$

donde p y q pueden ser negativas (la ecuación la escribirían en versiones "diferentes" como $x^3 = px + q$, o como $x^3 + p'x = q$, o bien $x^3 + q' = px$, dependiendo de los signos de $p$ y $q$, para mantener no negativos todos los números que aparecen en la ecuación). Tartaglia también resolvió las ecuaciones del tipo $x^3 + px^2 = q$.

Gerolamo Cardano (1501-1576) redescubrió por sí solo la fórmula de Del Ferro-Tartaglia, pero además notó que un cambio de variable de $x$ a $x + a$, para una cierta $a$, reduce la ecuación cúbica general,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 = 0$$

a la forma $x^3 = p\,x + q$, donde $p$ y $q$ son reales, y entonces obtuvo la solución de todos los casos de la ecuación cúbica y publicó su análisis en su *Ars Magna* ("el Gran Arte", en oposición al arte menor de la aritmética) de 1545. En esta obra, Cardano abordó la cuestión planteada por la aparición de números complejos mediante un problema que lleva a una ecuación de segundo grado: "Hallar dos números cuyo producto es 40 y cuya suma es 10", obteniendo como resultado los dos números complejos: $5+\sqrt{-1}$ , $5 -\sqrt{-1}$, de los que Cardano dijo que eran "**tan sutiles como inútiles**". El que no haya soluciones reales en este caso, no encierra ningún misterio, ya que el problema se puede interpretar como el de encontrar las intersecciones de la hipérbola $x\,y = 40$ con la recta $x + y = 10$, las cuales no se intersectan. Pero también intenta resolver en el *Ars Magna* la ecuación

$$x^3 = 15\,x + 4,$$

aplicando la fórmula de Del Ferro-Tartaglia. La solución que se obtiene es:

$$x = (2 + 11\sqrt{-1}\,)^{1/3} + (2 - 11\sqrt{-1}\,)^{1/3} \qquad (*)$$

Esta solución no se ve para nada real y, sin embargo, al dibujar las curvas de ecuaciones

$$y = x^3, \quad y = 15\,x + 4,$$

veremos que se intersectan en tres puntos, lo que indica que la ecuación debe tener 3 soluciones reales (a este tipo de casos, en el que existen tres soluciones reales, se les llamaba en ese entonces "casus irreducibilis"). ¿Por qué la solución que arroja la poderosa fórmula de Del Ferro-Tartaglia no muestra estas soluciones? Cardano no encaró este problema, sólo llamó a los números complejos "**enrevesadas torturas mentales**".

Casi 30 años después del *Ars* Magna, más precisamente en 1572, la ecuación de Cardano, $x^3 = 15\,x + 4$, fue estudiada por Raffaele Bombelli (1526-1572) en su *L'inedito terzo libro de L'Algebra"*, que constituye el resultado más maduro del álgebra del siglo XVI y, durante más de un siglo, fue el texto de álgebra superior más autorizado. En esta obra Bombelli llama "**cantidades salvajes**" a las raíces complejas, pero fue quien se dio cuenta que la mencionada ecuación no tenía tales soluciones, sino sólo 3 raíces reales. Una de ellas la halló al tanteo: $x = 4$; las otras se obtienen, como sabemos, como soluciones de la ecuación cuadrática que resulta de dividir entre $x - 4$ el polinomio $x^3 - 15\,x - 4$, pero el problema es que ninguna de estas soluciones reales se muestra en (*). Para resolver esta "paradoja", Bombelli tuvo un "pensamiento salvaje": Quizá la solución $x = 4$ se pueda recuperar de las expresiones $(2 + 11\sqrt{-1}\,)^{1/3}$ y $(2 - 11\sqrt{-1}\,)^{1/3}$, escribiéndolas como $2 + n\sqrt{-1}$ y $2 - n\sqrt{-1}$ y así la suma de ellas, es decir, la expresión (*), daría $4$. Para ello tenía que asumir que la suma de dos entes de este estilo, $A = a + b\sqrt{-1}$ y $B = c + d\sqrt{-1}$, debe obedecer a la regla:

$$A + B = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1},$$

Y que, para hallar el valor de $n$ para el cual

$$(2 + 11\sqrt{-1}\,)^{1/3} = 2 + n\sqrt{-1}\,,$$

se necesitaba calcular $(2 + n\sqrt{-1}\,)^3$. Así, él asumió que las nuevas expresiones deberían multiplicarse como en el álgebra ordinaria, teniendo en cuenta que $(\sqrt{-1})^2 = -1$:

$$A\,B = ac + (ad + bc)\sqrt{-1} + bd\,(\sqrt{-1})^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}\,.$$

Así, $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11$ y $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11$. Entonces $n = 1$ y (*) es simplemente:

$$x = (2 + 11\sqrt{-1})^{1/3} + (2 - 11\sqrt{-1})^{1/3} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.$$

En resumen, “problemas reales requieren la aritmética compleja para su solución”. Desde Bombelli, los números complejos son expresiones del tipo $A = a + b\sqrt{-1}$, con a y b, números reales, con las reglas de suma y de multiplicación que ya se mencionaron y que hoy día son muy familiares. Como dice el matemático y escritor de ciencia ficción Erik Temple Bell en su libro *Los grandes matemáticos*, “Los simples encuentros accidentales con, por ejemplo, los números negativos, no constituyen un descubrimiento matemático. Ni el rechazar las raíces imaginarias de las ecuaciones da derecho a nadie a reclamar una prioridad en el invento de los números complejos. Hasta que se hizo una tentativa consciente de comprender los números negativos y complejos, enunciando reglas, aunque toscas, para usarlos siempre que se presentaran, ninguno de ambos tenía más derecho a ser considerado entidad matemática, que un niño sin concebir a que se le considere ser humano. Matemáticamente esos números no existían hasta que no se satisficieron las condiciones indicadas”. En este sentido, Bombelli fue el partero de los números complejos.

Newton, Leibniz y Descartes no llegaron a comprender cabalmente a los números complejos. En *La Géométrie*, apéndice del *Discurso del Método,* publicado en 1637, Descartes afirma: “Ni las raíces verdaderas ni las falsas, son siempre reales; a veces son **imaginarias**, es decir, tantas raíces de cada ecuación como grado haya asignado, no siempre hay una cantidad definida que corresponda a cada raíz imaginada”.

Cotes (1682-1716), De Moivre (1730), Euler (1707-1783) (quien introdujo el símbolo $i$ para referir a $\sqrt{-1}$ y llegó a la maravillosa igualdad $e^{i} + 1 = 0$), Wallis, Wessel y Gauss son algunos de los importantes nombres en la historia de los números complejos después de Bombelli. Al matemático noruego (danés) Caspar Wessel (1745-1818), en realidad agrimensor, le correspondió dar el paso final hacia una interpretación consecuente y útil de los números complejos en 1797. Él llegó a la forma habitual en la que ahora representamos a los complejos como vectores. Gauss había manejado ya estos conceptos al menos desde 1796 (antes que Wessel) y los había utilizado para reproducir, sin saberlo, los resultados del propio Wessel, pero no publicaba sino hasta sentir que todo era “sencillamente correcto”. En 1831 alcanzó una posición suficientemente madura respecto a los números complejos (el término **complejo** es suyo), y fue su enorme reputación la que al fin transmitió el concepto. Gauss escribió en ese año: “Si este tema ha sido considerado hasta ahora desde un punto de vista erróneo y por lo tanto se ha visto envuelto en el misterio y rodeado de oscuridad, se debe por mucho a una inadecuada terminología, a la que deberíamos culpar. Si $+1$, $-1$ y $\sqrt{-1}$, en lugar de haber sido llamados unidades positiva, negativa e imaginaria (o peor aún, imposible), hubieran recibido los nombres de, digamos, unidades directa, inversa y lateral, difícilmente habría habido lugar para tal oscuridad.”

Como dice John Stillwell en *Mathematics and Its History*: “Ciertos misterios − la formula de De Moivre para *sen nx*, la factorización de polinomios, la clasificación de curvas cúbicas, los puntos de ramificación, el género y el comportamiento de las funciones elípticas − se aclaran por medio de la introducción de los números complejos. Que los complejos hacen todo esto y más, es uno de los milagros de las matemáticas. Al comienzo de su historia, los números complejos fueron etiquetados de números imposibles, tolerados sólo en un dominio algebraico limitado, porque parecían útiles en la solución de las ecuaciones cúbicas. Pero su significado giró a ser geométrico y ultimadamente dio lugar a la unificación de las funciones algebraicas con funciones conformes, teoría de potencial y otro campo imposible: la geometría no euclidiana.”

Todos estos temas merecen nuevas contri-buciones, pero por ahora sólo quería hacer hincapié en el hecho de que, cuando el ser humano está ante lo desconocido, lo niega o inventa nombres o figuras mitológicas para referirse a tal situación, pero conforme lo va asimilando, puede convertirse en algo útil. Ojalá así suceda con el nuevo monstruo SARS Cov-19.

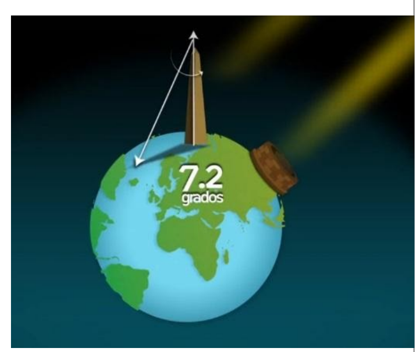
***Agustín Contreras Carreto***

## Un primer acercamiento a las medidas de la Tierra

El pasado 22 de abril se celebró, como cada año, el Día Mundial de la Tierra. Este día es celebrado desde 1970 para concientizar sobre los retos que implica la preservación del planeta para las generaciones futuras. Este 2020, las situaciones que se viven en todo el mundo nos hacen (o nos deberían hacer) reflexionar sobre el impacto del ser humano en la naturaleza. Tras el confinamiento, el planeta entero se ha tomado un respiro mientras nosotros los humanos buscamos la solución a problemas actuales y venideros. Si algo hemos aprendido de nuestro planeta-hogar, es que nunca dejamos de conocerlo.

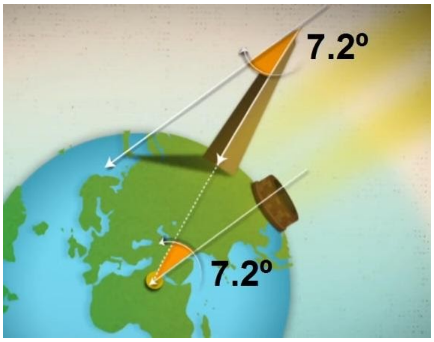
Así pues, reconocemos a aquéllos que se adentran a descubrir los tesoros que se pueden encontrar a nuestro alrededor. Es así que la necesidad de conocer y concebir aquello que nos rodea ha conllevado a la creación de varias disciplinas como la física, la geometría e incluso la aritmética. Y esta vez hablaremos de un gran matemático del siglo III a. C. que se aventuró a calcular el tamaño de nuestro planeta: Eratóstenes.

Corría el año 235 a. C. cuando el filósofo y matemático Eratóstenes de Cirene tuvo una brillante idea: por medio de herramientas matemáticas podría determinar el radio de la Tierra (se sabía ya que era redonda) usando solamente su mente y una columna colocada en Alejandría. Él sabía que el día del solsticio de verano, en la ciudad de Siena (hoy Asuán, Egipto), los rayos del sol caían completamente verticales, es decir, los objetos no proyectaban sombra. Pudo notarlo gracias a un pozo en el que ese día podía vislumbrarse su fondo, infiriendo que si los rayos del sol continuaban en la misma dirección, podían llegar al centro de la Tierra sin ningún problema. Sin embargo, ese mismo día en Alejandría los objetos proyectaban sombra de manera normal. Eratóstenes dedujo de ello que una de esas ciudades tenía "cierto grado de inclinación" con respecto a la otra. Fue entonces que se tomó a la tarea de medir la sombra que proyectaba ese día una columna en Alejandría y calcular el ángulo que formaban los rayos del sol con la columna vertical (véase la Figura 1), el cual fue de 7.2°. Así, usando la proposición 29 del libro I de Euclides (que dice que: "*si dos rectas son paralelas, los ángulos alternos internos formados por otra recta que corta a ambas, son iguales*") plasmada en *Los Elementos*, esta medida correspondería a la porción de la circunferencia entre las ciudades de Siena y Alejandría (véase la Figura 2). Con esto estableció el siguiente razonamiento:




"*la distancia entre Siena y Alejandría es a 7.2° como la longitud de la circunferencia de la Tierra es a 360°*".

Restaba calcular la distancia entre dos ciudades. Se cuenta que Eratóstenes envió a alguien a realizar esta medición, el cual regresó a Alejandría días después con el dato que faltaba: 800 kilómetros (hay que aclarar que las unidades utilizadas no eran kilómetros, sino que en ese




tiempo se utilizaba la unidad de medida conocida como estadio; 800 kilómetros equivalen a 5000 estadios). Con esto, Eratóstenes estableció que si era la longitud de la circunferencia de la Tierra, entonces:

$$\frac{800km}{7.2^o} = \frac{C}{360^o}.$$

Despejando $C$, llegó a que la Tierra tiene longitud de circunferencia igual a 40, 000 km (o bien 250, 000 estadios). Teniendo esto, resultaba casi inmediato calcular el radio de nuestro planeta, pues ya se utilizaba la fórmula $C = 2\pi r$ en el estudio de los círculos. Así pues, si $r$ es el radio de la Tierra, obtuvo que $40000 = 2\pi r$.

Dividiendo ambos lados de la igualdad por $2\pi$, llegó a que este radio es igual a 6366.18 km (ó 39, 788.74 estadios).

Cabe mencionar que, en este modelo, Eratóstenes hizo tres suposiciones importantes (que no resultan descabelladas en absoluto):

1. La Tierra es completamente esférica
2. El Sol está tan alejado de la Tierra que sus rayos que llegan a ésta son paralelos (de otro modo no sería posible aplicar la proposición euclidiana).
3. Siena y Alejandría están en el mismo meridiano (error perdonable por la precisión que se obtuvo).

Hoy se sabe que el radio de la Tierra en la línea ecuatorial es de 6378 km, mientras que su circunferencia es de 40, 075 kilómetros. Con esto, podría decirse que Eratóstenes calculó el radio de nuestro planeta con exactitud del 99.8%, precisión notable para su época. Sin embargo, además de la exactitud numérica de sus resultados, se aplaude su razonamiento y atrevimiento a obtener conclusiones intangibles respaldadas por la matemática conocida hasta el siglo III a. C.

Hoy es posible ubicarnos en cualquier lugar de nuestro planeta gracias a la tecnología GPS, la cual funciona gracias a los satélites artificiales situados alrededor de nuestro planeta y tiene como base una enorme cantidad de resultados matemáticos recopilados por Euclides, Eratóstenes y demás matemáticos a lo largo de la Historia.

Así como Eratóstenes de Cirene aprovechó un día del año para conocer uno de los secretos más sorprendentes de nuestro planeta, cada día (aun durante el confinamiento) es una oportunidad de aprender algo nuevo y nunca dejar de sorprendernos por los secretos que se esconden a nuestro alrededor. Por último, me gustaría mencionar que Eratóstenes fue quien introdujo el sistema geográfico de meridianos y paralelos para ubicar cualquier punto en el planeta, además de ser el primero en la Historia en realizar el primer mapa del mismo.

Bibliografía:

• López Sancho, J. M., Refolio, Refolio, M. C., Rubio Bernal, J. & Moreno Gómez, E. (2007). *La medida del radio terrestre por Eratóstenes*. abril 24, 2020, de El CSIC en la Escuela. Sitio web: http://www.csicenlaescuela.csic.es/

***Esaú Alejandro Pérez Rosales***

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas

# *Poema del mes de mayo*

***Alfonsina Storni poetisa y escritora argentina vinculada con el modernismo (1892)-(1938)***

## *Bien pudiera ser…*

*Pudiera ser que todo lo que en verso he sentido*
*No fuera más que aquello que nunca pude ser,*
*No fuera más que algo vedado y reprimido*
*De familia en familia, de mujer en mujer.*

*Dicen que en los solares de mi gente, medido*
*Estaba todo aquello que se debía hacer…*
*Dicen que silenciosas las mujeres han sido*
*De mi casa materna…Ah, bien pudiera ser …*

*A veces en mi madre apuntaron antojos*
*De liberarse, pero se le subió a los ojos*
*Una honda amargura, y en la sombra lloró.*

*Y todo esto mordiente, vencido, mutilado,*
*Todo eso que se hallaba en su alma encerrado,*
*Pienso que sin quererlo lo he libertado yo.*

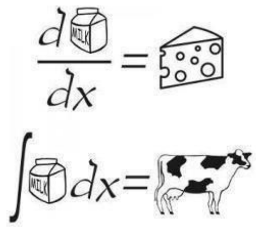
***Tomado del libro " Cantos a la madre en la poesía latinoamericana (antología)", Neruda, Sabines, Vallejo, Pellicer, Díaz Mirón y otros. Editorial Planeta***

# *Para Pensar: Frase célebre*

### *Gila Hanna: Profesora emérita Universidad De Toronto Canadá*

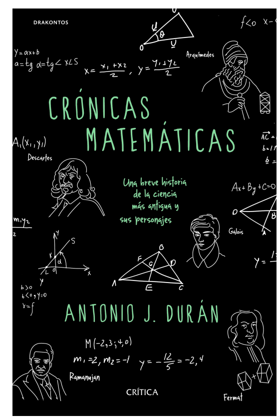
Una demostración es un razonamiento transparente, en el cual todas las afirmaciones usadas y todas las reglas de razonamiento son claramente expuestas y abiertas a las críticas. La misma naturaleza de la demostración impone que la validez de las conclusiones deriva de la demostración misma, no de una autoridad externa. La demostración lleva a los estudiantes el mensaje de que pueden razonar con su propia cabeza, que no tienen necesidad de remitirse a una autoridad. Por lo tanto el uso de la demostración en la práctica didáctica es realmente "anti-autoritario", ¡es libertad!

# *Para sonreír, divertirse y reflexionar*



## *Recomendación de libro*

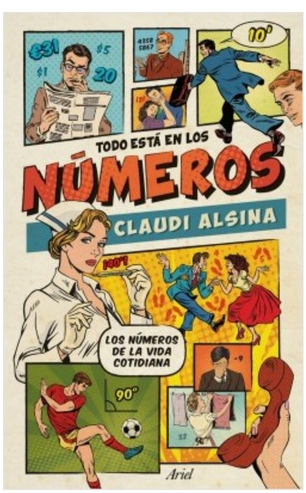



***Libro:*** *Crónicas matemáticas*

***Autor:*** *Antonio J. Durán*

***Editorial:*** *Crítica, Colección Drakontos*

## *Sinopsis: libro del mes de Mayo*




***Título:*** *Todo está en los números*

***Autores:*** *Claudi Alisina*

***Editorial:*** *Ariel*

*A*l observar el mundo, es muy fácil darse cuenta de que estamos rodeados de números. Están en el ascensor, en las tarjetas de crédito, en las elecciones a la presidencia del gobierno, en las películas, incluso en nuestros sentimientos... Y su presencia no es meramente testimonial. En una sociedad cada vez más tecnológica, los números son códigos de los que depende nuestra privacidad —¡y nuestro dinero!— y, a través de los algoritmos que rigen Internet, pueden controlar nuestra relación con la información.

Este libro pretende acercar a esta jungla caótica de números en la que vivimos y ayudarnos a entenderla.

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas

## *Actividades de Matemáticas del mes de mayo*

Suspendidas por la contingencia sanitaria, hasta nuevo aviso.

***AVISO:*** El 53 Congreso de Matemáticas de la SMM que se llevaría a cabo este año en nuestra universidad ha sido aplazado para octubre de 2021 por la contingencia sanitaria.

## *Publicaciones de la Academia de Matemáticas*

***Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP***

Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

***Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2021***. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx y Fernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx

*Los trabajos recibidos después del 6 de enero ( del año en curso) se tomarán en cuenta para un año después.*

***Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP***

Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

***Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2021***. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx, Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx, Manuel Ibarra Contreras mibarra@fcfm.buap.mx, Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx

*La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.*

***Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com***

***Las contribuciones deberán estar escritas en word con letra times de 12 puntos***

*Compiladores: Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en www.fcfm.buap.mx/academiam/*

*Responsables de la Edición: José Juan Angoa Amador, Patricia Domínguez Soto, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto*

*Colaboradores Estudiantes: Josué Vázquez Rodríguez , Emilio Angulo Perkins, Jesús González Sandoval*

*Diseño logo: Santiago Sienra y Guillermo Sienra*

axolote'

Revista mensual de la Academia de Matemáticas