Una revisión al problema de aproximación descontada al criterio promedio en las cadenas de Markov con costos asociados

Rubén Blancas R. [a] **Hugo Cruz S.** [b].
[a,b] *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.*
[a] *ruben.blancasri@alumno.buap.mx* [b] *hcs@fcfm.buap.mx*

Resumen

En este trabajo presentamos una revisión al problema de obtener aproximaciones convergentes para el costo promedio sensible al riesgo en términos de la familia de funciones de valor descontado sensibles al riesgo. El problema está relacionado con las cadenas de Markov con costos asociados con espacio de estados finito.

Palabra claves: Markov, sensibilidad al riesgo, criterio promedio.

Introducción

El presente trabajo está relacionado con las cadenas de Markov con un espacio de estados finito y un costo asociado, donde la evolución del sistema es observada por un agente con sensibilidad al riesgo positivo y constante, además con cada visita a un estado se le asocia un costo. El flujo de costos incurridos mientras el sistema evoluciona se usa para medir el desempeño general de la cadena, y dos criterios se analizan, a saber, el costo promedio sensible al riesgo y el costo total descontado sensible al riesgo. En este trabajo vamos a realizar una revisión a los trabajos que tratan el problema de obtener aproximaciones convergentes para el costo promedio sensible al riesgo en términos de la familia de funciones de valor descontado sensibles al riesgo. Este trabajo hablaremos del problema de aproximación desde sus inicios en el contexto neutral al riesgo, correspondiente a un coeficiente de sensibilidad al riesgo nulo, la aproximación al criterio promedio a través del índice de descuento fue un problema clásico con solución conocida (ver Arapostathis et al. (1993), Hernández-Lerma y Lasserre (1996), Puterman (1994) y Tijms (2003)) hasta un resultado reciente dado en Blancas et al. (2019), el cual generalizan el problema cuando el espacio de estados de la cadena de Markov es finito y coeficiente de sensibilidad al riesgo positivo.
La estructura del trabajo es la siguiente. Primeramente, presentamos preliminares sobre las cadenas de Markov con costos asociados y planteamos el criterio promedio y descontado sensible al riesgo. En la segunda sección, presentamos el problema de aproximación al criterio promedio a través del criterio descontado sensible al riesgo y la revisión de los antecedentes del problema. Finalmente, en la última sección presentamos los problemas abiertos y las conclusiones de esta revisión.

Preliminares

Cadena de Markov con costos asociados

Un modelo de Markov con costos asociados $\boldsymbol{C} := (\{\boldsymbol{X_t}, \boldsymbol{c}\})$ consta de una cadena de Markov a tiempo discreto $\{\boldsymbol{X_t}\}$ con espacio de estados $\boldsymbol{S}$ finito y su respectiva matriz de

transición homogénea en el tiempo $[p_{xy}]_{x,y\in S}$. Por otro lado, $c: S \to \mathbb{R}$, es una función real llamada costo en un paso.
Podemos pensar un modelo de Markov con costos asociados a tiempo discreto como un sistema estocástico observado por un agente de manera periódica en los tiempos $t = 0, 1, 2, \dots$. La dinámica que describe a este sistema estocástico funciona de la forma siguiente: si el sistema se encuentra en el estado $X_t = x \in S$, en el tiempo t, entonces ocurren dos cosas:
1. se pasa un costo $c(x)$; y
2. el sistema se traslada a un nuevo estado $X_{t+1} = y \in S$, mediante la probabilidad de transición

$$p_{xy} = P[X_{t+1} = y | X_t = x].$$

Una vez hecha esta transición, la dinámica anteriormente descrita se repite. Para cada estado inicial $X_0 = x \in S$, una medida de probabilidad P_x es definida sobre el espacio $\Omega = S^\infty$ en forma canónica. Mientras que E_x denotará el correspondiente operador esperanza, ver Ash (1972).
En las siguientes definiciones mostraremos algunos conceptos importantes sobre la comunicación entre los estados en una cadena de Markov.
Definición 1. *Sea $x \in S$, el conjunto de todos los estados que son accesibles desde x se define por*

$$A(x) := \{y \in S | P_x[X_n = y] > 0 \ para\ alg\acute{u}n\ n \in \mathbb{N}\}$$

Observe que

$$x \in A(x) \ \ y \ \ P_x[X_n \in A(x)] = 1, \ x \in S, \ n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene la siguiente definición sobre el tiempo de retorno a un estado.
Definición 2. *Para cada $z \in S$, definamos*

$$T_z := min\{n \geq 1 | X_n = z\},$$

T_z es el primer tiempo de retorno al estado z.

El espacio de estados se clasifica en estados transitorios y estados recurrentes. Veamos la siguiente definición.

Definición 3. *Sean $x, y \in S$.*
1. Un estado x es recurrente si $P_x[T_x < \infty] = 1$, es decir si la cadena de Markov inicia en x entonces retorna a x con probabilidad 1.
2. Un estado x es transitorio si $P_x[T_x < \infty] < 1$, es decir si la cadena de Markov inicia en x tiene probabilidad positiva $1 - P_x[T_x < \infty]$ de nunca retornar a x.

La demostración de los siguientes resultados puede ser consultada en Hoel, Port y Stone (1986).
Teorema 1. *Sea x un estado recurrente y sea $y \in A(x)$ entonces y es recurrente.*
Teorema 2. *Si S es un conjunto finito entonces existe al menos un estado recurrente en la cadena de Markov.*

Una de las características importantes que puede tener la matriz de transición del modelo de Markov con costos asociados es ser comunicante, como se describirá en la siguiente definición.

Definición 4. *Una cadena de Markov es comunicante o bien la matriz de transición $[p_{xy}]_{x,y\in S}$ es comunicante si*

$$A(x) = S, \qquad x \in S.$$

Observación 1. *(i) Observe que la Definición 4 implica que $P_x[T_z < \infty] = 1$ para cada $x, z \in S$.*
(ii) Si S es finito y la cadena de Markov es comunicante entonces por los Teoremas 1 y 2 cada estado en S es recurrente.
(iii) Sea $R \subset S$, con S finito. Si cada estado en R es recurrente se dice que R es una clase de recurrencia. Observe que R es no vacío por el Teorema 2.

Modelo de Markov con sensibilidad al riesgo

Como mencionamos anteriormente, los modelos de Markov con costos asociados son observados por un agente. El agente puede ser neutral o sensible al riesgo. Para distinguir cada caso, se emplea una constante $\boldsymbol{\lambda}$ conocida como coeficiente de sensibilidad al riesgo; si $\boldsymbol{\lambda = 0}$ se trata del caso neutral al riesgo, si $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ el modelo de Markov con costos asociados es sensible al riesgo.

Función de utilidad

El concepto de función de utilidad U nace en economía a partir de la necesidad de estudiar las preferencias de un consumidor a través de una función real. Gracias a los trabajos en Von Neumann y Morgenstern (1972), es posible representar preferencias bajo condiciones de incertidumbre. La función de utilidad que usaremos en este trabajo se define de la siguiente manera:

Definición 5. *Dado* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ *fijo. Para todo* $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}$ *sea*

$$\boldsymbol{U_\lambda(w) := \begin{cases} sign(\lambda)e^{\lambda w} & si\ \lambda \neq 0, \\ w & si \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} sign(\lambda)e^{\lambda w}, & \lambda \neq 0, \\ w, & \lambda = 0. \end{cases}}$$

Donde $\boldsymbol{sign(\lambda) = 1}$ si $\boldsymbol{\lambda > 0}$ y $\boldsymbol{sign(\lambda) = -1}$ si $\boldsymbol{\lambda < 0}$. Note que $\boldsymbol{U_\lambda(\cdot)}$ es una función estrictamente creciente para cualquier valor de $\boldsymbol{\lambda}$. Cuando el agente pueda elegir entre dos costos aleatorios $\boldsymbol{W_0}$ y $\boldsymbol{W_1}$ preferirá pagar $\boldsymbol{W_0}$ si $\boldsymbol{E[U_\lambda(W_1)] > E[U_\lambda(W_0)]}$ mientras que el observador será indiferente entre ambos costos cuando $\boldsymbol{E[U_\lambda(W_1)] = E[U_\lambda(W_0)]}$.
La certeza equivalente de un costo aleatorio $\boldsymbol{W}$ con respecto a $\boldsymbol{U_\lambda}$, se define de la siguiente manera.

Definición 6. *Sea* $\boldsymbol{W}$ *una variable aleatoria y supongamos que el valor esperado, de* $\boldsymbol{U_\lambda(W)}$ *está bien definido. La certeza equivalente* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ *de* $\boldsymbol{W}$ *con respecto a* $\boldsymbol{U_\lambda}$ *está dada por*

$$\boldsymbol{\mathcal{E}[\lambda, W] := \begin{cases} \frac{1}{\lambda} ln(E[e^{\lambda W}]), & \lambda \neq 0, \\ E[W], & \lambda = 0. \end{cases}}$$

En esta definición $\boldsymbol{E}$ denota la esperanza de manera genérica.
El observador del sistema se refiere como neutral al riesgo si $\boldsymbol{\lambda = 0}$, es adverso al riesgo si $\boldsymbol{\lambda > 0}$ y se dice propenso al riesgo si $\boldsymbol{\lambda < 0}$.

Criterios de rendimiento

Después de definir el modelo de Markov con costos asociados y de presentar la definición de función de utilidad y certeza equivalente, es necesario definir un indicador que mida el flujo de costos. Definiremos dos criterios de rendimiento: el criterio promedio y el criterio descontado.

Criterio promedio

Sea $\boldsymbol{X_0 = x \in S}$ el estado inicial. Dado $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} - \{\boldsymbol{0}\}$, el costo total (aleatorio) incurrido antes del tiempo $\boldsymbol{n}$ es $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n-1} c(X_t)}$, y la certeza equivalente correspondiente es

$$\boldsymbol{J_n(\lambda, x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\log(E_x[e^{\lambda \sum_{k=0}^{n-1} c(X_k)}], & \lambda \neq 0, \\ E_x\left[\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k)\right], & \lambda = 0. \end{cases}}$$

Por lo tanto, el observador está dispuesto a pagar $\boldsymbol{J_n(\lambda, x)}$ para evitar pagar el costo aleatorio asociado a la visita de los primeros $\boldsymbol{n}$ estados $\boldsymbol{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}}$, que representa un promedio de $\boldsymbol{J_n(\lambda, x)/n}$ por visita. El límite superior de este promedio es el costo promedio (a largo plazo) $\boldsymbol{\lambda}$-sensible en el estado $\boldsymbol{x \in S}$:

$$\boldsymbol{J(\lambda, x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} J_n(\lambda, x).} \qquad \boldsymbol{(1)}$$

De esta manera (1) se define como el criterio promedio $\boldsymbol{\lambda}$-sensible. El siguiente resultado caracteriza al criterio promedio a través de una ecuación de Poisson.

Lema 1. Supongamos que se cumple la siguiente condición de comunicación:

$$A(x)=S, x\in S.$$

En este contexto, para cada $\lambda>0$ las afirmaciones (i)-(ii) son válidas.

Existen $g(\lambda)\in\mathbb{R}$ y $h(\lambda,\cdot): S\to\mathbb{R}$ los cuales satisfacen la siguiente ecuación de Poisson:

$$e^{\lambda g(\lambda)+\lambda h(\lambda,x)}=e^{\lambda c(x)}\sum_{y\in S}p_{xy}e^{\lambda h(\lambda,y)},\quad x\in S,$$

y en este caso

$$g(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda n}\log\left(E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}c(x_t)}\right]\right)=J(\lambda,x),\quad x\in S. \qquad (2)$$

Este Lema fue probado en Howard y Matheson (1972), donde el Teorema clásico de Perron Frobenious fue usado para demostrar que $e^{\lambda g(\lambda)}$ es el valor propio más grande de la matriz $[e^{\lambda c(x)}p_{xy}]_{x,y\in S}$. Por otro lado, si la condición de comunicación falla, entonces $J(\lambda,\cdot)$ no es constante en general, y es caracterizado a través de un sistema de ecuaciones (locales) de Poisson similar a (2) (ver Alanís-Durán y Cavazos-Cadena (2012) y Cavazos-Cadena y Hernández-Hernández (2006)).

Dado un conjunto no vacío $H\subset S$, para cada $x\in H$ el costo promedio incurrido λ-sensible mientras el sistema permanece dentro de H se define de la siguiente manera: Para cada $x\in H$,

$$J_H(\lambda,x)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n\lambda}log\left(E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}\alpha^k c(X_t)}I[X_t\in H, o\le t\le n]\right]\right).$$

Puede encontrar una prueba del Lema 1 en Hernández-Lerma (1989) o Puterman (1994).

Crirterio descontado

Sea $\alpha\in(0,1)$ un factor de descuento, de modo que el costo $C(X_t)$ que se incurrirá en el tiempo t vale $\alpha^t C(X_t)$ en el tiempo 0. El valor en el tiempo 0 de los costos asociados con la evolución del sistema es $\sum_{k=0}^{\infty}c(X_t)$ y dado que el estado inicial es $X_0=x$, la certeza equivalente λ correspondiente está dada por

$$V(\lambda,\alpha,x):=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}log\left(E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k c(X_t),}\right]\right) & \lambda\neq 0,\\ E_x\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k c(X_k)\right], & \lambda=0.\end{cases}$$

(3)

Por lo tanto, (3) se define como el criterio descontado o función descontada λ-sensible.

El siguiente resultado caracteriza a (3) a través de ecuaciones (locales) de Poisson.

Lema 2. Para cada $\alpha\in(0,1)$, las siguientes ecuaciones de Poisson se satisfacen mediante la familia $\{V(\lambda,\alpha,\cdot)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de funciones de valor descontado:

$$V(0,\alpha,x)=c(x)+\alpha\sum_{y\in S}p_{xy}V(0,\alpha,y),\qquad x\in S,$$

y

$$e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)}=e^{\lambda c(x)}\sum_{y\in S}p_{xy}\,e^{\lambda\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,y)},\quad x\in S,\lambda\neq 0.$$

Una prueba de este resultado puese ser visto en Hernández-Lerma (1989) para el caso neutral al riesgo ($\lambda=0$), mientras que para el caso sensible al riesgo se ha establecido en Di Masi y Stettner (2000).

Problema de aproximación

El problema de aproximación del criterio promedio en lo consiste en lo siguiente, usando la notación presentada en la sección anterior.

Aproximar el criterio de costo promedio λ-sensible $J(\lambda,\cdot)$ en términos de la famlia $\{V(\lambda,\alpha,x)\}$ de funciones de costos descontados λ-sensibles al riesgo.

Revisión del problema de aproximación

En el caso neutral al riesgo ($\lambda=0$), la aproximación del criterio promedio a través del criterio descontado es un problema clásico con la siguiente solución:

De las ecuaciones (1) y (3), se define el criterio descontado y promedio neutral al riesgo como $\boldsymbol{V(0,\alpha,x)}$ y $\boldsymbol{J(0,x)}$, respectivamente, donde $\boldsymbol{x \in S}$ y $\boldsymbol{\alpha \in (0,1)}$ son arbitrarios.

Para este caso, considere la siguiente suposición.

Suposición 1. $\boldsymbol{\left\| V(0,\alpha,\cdot). - V_\alpha(0,\alpha,z) \right\| < \infty}$ para algún estado fijo $\boldsymbol{z \in S}$.

Teorema 3. Si la Suposición 1 se cumple entonces

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \boldsymbol{(1-\alpha)V(0,\alpha,x) = J(0,x), x \in S}.$$

Este Teorema fue probado en Arapostathis et al. (1993). Además, la Suposición 3.1 se cumple cuando el modelo de Markov con costos asociados tiene una matriz de transición comunicante (ver Tijms (2003)).
Sin la restricción de comunicación, el Teorema 3 también es válido (ver Teorema 0.1.4 en Puterman (1994)).
Para el caso sensible al riesgo, la aproximación presentada en Teorema 3, no es viable. Como prueba de la afirmación anterior, se tiene el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 1. Considere el espacio de estados $\boldsymbol{S} = \mathbb{N}$ y la función de costo asociada

$$\boldsymbol{c(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{si\ x \neq 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{si\ x = 0}. \end{cases}$$

y la matriz de transición

$$\boldsymbol{p_{xy}} = \begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{si\ x = y - 1} \\ \dfrac{\boldsymbol{e^{-1}}}{\boldsymbol{x!}} & \boldsymbol{si\ x} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{y = 0}. \end{cases}$$

Lema 2. *Para el caso sensible al riesgo $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$, el modelo de Markov con costo asociado definido en el Contraejemplo 1, se cumple que*

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \boldsymbol{(1-\alpha)V(\lambda,\alpha,x)} \\ = \boldsymbol{\lambda^{-1}\int_0^\lambda J(\lambda,s)ds := g(\lambda)}$$

y

$$\boldsymbol{g(\lambda) < J(\lambda,x)}$$

para cada $\boldsymbol{x \in S}$.

La prueba del Lema 2 se puede consultar en el Ejemplo 9.1 en Cavazos-Cadena y Fernández-Gaucherand (2000).

Por lo tanto, será necesaria otra forma alternativa de aproximar el criterio promedio a través del criterio descontado. Para un modelo de control de Markov definido en un espacio de estados de Borel, el problema de esta tesis se estudió en Di Masi y Stettner (2000) bajo condiciones de ergodicidad adecuadas, se obtuvo una solución al problema con el requesito de que el coeficiente de sensibilidad al riesgo sea lo suficientemente pequeño. En Cavazos-Cadena y Cruz-Suárez (2017) se presenta la siguiente propuesta de aproximación para el modelo de Markov con costos asociados.

Definición 5. Sea $\boldsymbol{z \in S}$ fijo. Para cada $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha \in (0,1)}$ y $\boldsymbol{x \in S}$, definamos

$$\boldsymbol{g(\lambda,\alpha,x) := V(\lambda,\alpha,x) - \alpha V(\lambda\alpha,\alpha,x)},$$
$$\boldsymbol{h(\lambda,\alpha,x) := V(\lambda,\alpha,x) - V(\lambda,\alpha,z)}.$$

El siguiente teorema extiende la convergencia presentada en el Teorema 3 al caso sensible al riesgo. Para estos se requiere la siguiente suposición sobre el modelo.

Suposición 2. *El modelo de Markov con costos asociados tiene una matriz de transición comunicante.*

Teorema 4. *Considere que la Suposición 2 es válida y sean $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{x \in S}$, entonces*

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \boldsymbol{g(\lambda,\alpha,x) = g^*(\lambda)},$$
$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \boldsymbol{h(\lambda,\alpha,x) = h^*(\lambda,x)},$$

donde $\boldsymbol{(g^*(\lambda), h^*(\lambda,\cdot))}$ es la solución de la ecuación de Poisson descrita en el Lema 1.

Este teorema fue presentado por Cavazos-Cadena y Cruz-Suárez (2017).

Cuando el modelo de Markov con costos asociados tiene un espacio de estados numerable, las conclusiones de los Teoremas 3 y 4 se obtienen agregando la siguiente condición al modelo.

Suposición 3. Existe $z \in S$ tal que $E\left[e^{\lambda T_z}\right] < \infty$ para cada $\lambda > 0$.

Cuando el espacio de estados S del modelo de Markov con costos asociados tiene un estado transitorio (en este caso la matriz ya no es comunicante) el Teorema 4 ya no es válido y por tanto la aproximación no funciona para este tipo de modelos, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Consideremos

$$S := \{0, 1, 2, 3\},$$
$$c(x) = x, \qquad x = 0, 1, 2, \qquad c(3) = 0,$$
$$p_{33} = 1,\ p_{22} = e^{-4} = 1 - p_{23},$$
$$p_{11} = e^{-1} = 1 - p_{13}, p_{01} = p_{02} = 1/2.$$

Proposición 1. *En el Ejemplo 1, consideramos* $\lambda_0 = 4$ *entonces las siguientes afirmaciones (i)-(iv) son válidas:*

(i) $e^{\lambda g(\lambda,\alpha,0)} = \frac{e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,1)} + e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,2)}}{e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2)} + e^{\alpha^2 2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,2)}}$ *para cada* $\lambda > 0$ *y*

$$\alpha > 0.$$

(ii) $\lim_{\alpha \nearrow 1} [V(\lambda_0, \alpha, 1) - V(\lambda_0, \alpha, 2)] = \infty$.

(iii) $\lim_{\alpha \nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 0) = 3/4$.

(iv) $\lim_{\alpha \nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 1) = 3/4$, $\lim_{\alpha \nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 2) = 3/4$.

(v) $\lim_{\alpha \nearrow 1} sup_{w \in A(0)} g(\lambda_0, \alpha, 0) = J(\lambda_0, 0) > \lim_{\alpha \nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 0)$.

La demostración de la Proposición 1 se podrá consultar en Blancas et al. (2019).

Observe que la desigualdad en el inciso (v) de la Proposición 1 muestra que el Teorema 3 falla en el estado transitorio $x = 0$.

La siguiente generalización muestra una aproximación general cuando el espacio de estados de la cadena de Markov con costos asociados tenga estados transitorios. Para esto, se define el mayor costo diferencial.

Definición 6. Para cada $x \in S$ se define el mayor costo diferencial desde x como:

$$\tilde{g}(\lambda, \alpha, x) := \max_{w \in A(x)} g(\lambda, \alpha, w)$$

El principal resultado en Blancas-Rivera et al. (2019) consiste en lo siguiente: a media que α crece a 1, el criterio promedio $J(\lambda, \cdot)$ es el límite de la función del mayor costo diferencial desde x, $\tilde{g}(\lambda, \alpha, \cdot)$. Además, la convergencia es uniforme en conjuntos compactos del rayo positivo.

Teorema 5. Para cada conjunto compacto $K \subset (0, \infty)$ y $x \in S$,

$$\sup_{\lambda \in K} |\tilde{g}(\lambda, \alpha, x) - J(\lambda, x)| \to 0 \ cuando\ \alpha \nearrow 1.$$

Conclusiones y problemas abiertos

La teoría de cadenas de Markov con costos asociados es presentada en la primera sección, dando sólo resultados necesarios para presentar la revisión del problema de aproximación descontada al criterio promedio.

En la segunda sección, se presenta el problema de aproximación y mostramos las variantes en las aproximaciones hasta la más reciente en Blancas et al. (2019). Cabe destacar que el problema, ha cambiando depende varios supuestos, uno de ellos es la condición de comunicación del espacio de estados usada en el trabajo de Cavazos-Cadena y Cruz-Súarez (2017).

Problemas abiertos

Algunos problemas abiertos relacionado al problema de aproximación presentado en este trabajo son los siguientes:

Considere un modelo de Markov con costos asociados.

a. Si el espacio de estados es numerable. ¿La convergencia dada en el Teorema 4 es válida? Podemos separar este problema en dos casos:
1) La ley de transición es comunicante.
2) Sin la restricción de comunicación.

b. Extender el problema del insico a) a espacio de estados de Borel y sin condiciones de comunicación en la ley de transición.
c. Para procesos de decisión de Markov (ver Hernández-Lerma (1989)) se puede buscar una aproximación parecida a la presentada en el Teorema 4, pero como recomendación se tendría que separar en los siguientes casos:
1) S finito
2) S numerable
3) S espacio de Borel.
Donde se puede separar al caso comunicante y sin esta restricción. Además, posiblemente sea necesario agregar consideraciones en el espacio de acciones.

Referencias

Alanís-Durán A y Cavazos-Cadena R. (2012). An optimality system for finite average Markov decision chains under risk- aversion. **Kybernetika**, Vol. 48 P.p. 83–104.

Ash R.B. (1972). Real Analysis and probability. **Academic Press,** New York.

Blancas-Rivera R., Cavazos-Cadena R. y Cruz-Suárez H. (2019). Discounted approximations in risk-sensitive average Markov cost chains with finite state space. **Mathematical Methods of Operations Research**, Pp. 1-28.

Cavazos-Cadena R. y Cruz-Suárez D., (2017). Discounted approximations to the risk-sensitive average cost in finite Markov chains, J**. Math. Anal. Appl.** P.p. 1345–1362.

Cavazos-Cadena R. y Fernández-Gaucherand E. (2000). The vanishing discount approach in Markov chains with risk sensitive, **IEE-Trans. Automat. Control** Pp. 1800– 1816.

Cavazos-Cadena R. y Hernández-Hernández D. (2006), A system of Poisson equations for a non-constant Varadhan functional on a finite state space, **Appl. Math. Optim.** Vol. 53. Pp. 101–119.

Di Masi G. and Stettner L. (2000) Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes with small risk, **Syst. Control Lett.** Vol. 40 Pp. 15–20.

Hernández-Lerma O. (1989). Adaptive Markov Control Processes, **Springer.**

Hoel P.G., Port S.C. y Stone C.J. (1986). Introduction to stochastic processes, **Waveland Press.**

Howard R.A. y Matheson J.E. (1972). Risk-sensitive Markov decision processes. **Manage. Sci.** Vol. 18 (7) Pp. 356–369.

Puterman M.L. (1994). Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. Wiley, Newy York.

Tijms H. (2003). A first course in stochastic models, **Wiley**.

Von Neumann J., Morgenstern O. (1972). Theory of games economic behavior. **Princeton University Press,.**