Decimocuarta Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad
14-18 de junio de 2021

# Equilibro de Cournot-Nash vs Equilibrio de Stackelberg

R. Israel Ortega-Gutiérrez [a], Hugo Adán Cruz Suárez [a], Víctor H. Vázquez Guevara [a]

[a] *Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Ave. San Claudio y Río Verde, Col. San Manuel, CU, Puebla, Pue. 72570, México.*
[a] rei.ortegag@correo.buap.mx, [a] hcs@fcfm.buap.mx, [a] vvazquez@fcfm.buap.mx

**Resumen**

Este trabajo trata sobre teoría de juegos, donde se presenta un modelo económico de tipo pesquerías (”fisheries”). Para este modelo se caracteriza un equilibrio de Nash en la clase de políticas estacionarias. Además, este modelo de pesquerías es analizado para el caso de un duopolio con utilidad logarítmica para el cual se caracteriza un equilibrio de Cournot-Nash y otro de Stackelberg y se hace una comparación para estos equilibrios.

**Keywords:** Teoría de Juegos, Equilibrio de Cournot-Nash, Equilibrio de Stackerberg, Juegos Estocásticos.

## 1. Introducción

La teoría de juegos (véase [6]) consiste en modelos matemáticos usados para el estudio de situaciones de conflicto. Donde un conflicto es compuesto de participantes (jugadores), quienes pueden seleccionar libremente sus estrategias las cuales los conducirán a varios resultados posibles sobre los cuales ellos tienen ciertas preferencias. El objetivo principal de teoría de juegos es analizar cuales son las mejores estrategias de cada jugador cuando se enfrenta a algún conflicto, y de esta forma proporcionar al jugador una guía para tomar un comportamiento racional para la toma de decisiones.

La teoría de juegos fue desarrollada como una herramienta para entender el comportamiento de la economía. Los primeros estudios de juegos en la literatura económica fueron dados por Cournot (véase [3]), Bertrand (véase [2]) y Edgeworth ( [5]) en precios y producción en un oligopolio. Posteriormente la idea general de la teoría de juegos fue introducida por John von Neuman y Oscar Morgenstern (véase [11]): *Theory of Games and Economic Behavior*, el cual propone que los problemas de economía deben ser abordados usando teoría de juegos. Nash más tarde introduce lo que llegó a ser conocido como “equilibrio de Nash” (véase [10]), el cual fue una forma de extender el análisis teórico de juegos de suma cero.

En este trabajo se retoman estas ideas y se aplican los resultados a un modelo económico de tipo pesquerías (”fisheries”), donde se caracteriza un equilibrio de Nash en la clase de políticas estacionarias. El estudio del modelo de pesquerías es analizado para el caso de un duopolio con utilidad logarítmica para el cual se caracteriza un equilibrio de Cournot-Nash y otro de Stackelberg.

Finalmente, se presenta una comparación de los equilibrios encontrados para el caso cuando el ruido en la transición se encuentre concentrado en un punto (el estado inicial del proceso). Es importante mencionar que este modelo fue estudiado inicialmente por: Levhari and Mirman (véase [8] y [9]). En estas referencias se presenta un razonamiento heurístico para el cálculo de las estrategias de equilibrio de Nash, en cambio, ahora se propone un método iterativo para la solución del mismo.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera, primero se dan los conceptos básicos de teoría de juegos. Luego, se presenta la contribución principal de este trabajo: un equilibrio de Cournot-Nash y otro de Stackelberg para el caso de pesquerias, finalmente se dan las conclusiones.

## 2. Juegos Estócasticos y Equilibrio de Nash

La teoría de juegos estudia la elección de la conducta óptima cuando los costos y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos.

**Definición 1.** Considérese el modelo del juego estocástico de suma no cero para dos jugadores

$$GM := \left\{X, \left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)_{i=1,2}, Q, N\right\} \tag{1}$$

donde

**(1)** $X$ es un espacio de Borel, el cual es llamado espacio de estados.

**(2)** Cada jugador $i = 1,2$ es caracterizado por tres elementos $\left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)$, donde

  **(a)** $A_i$ es el espacio de acciones para el jugador $i$. Sea $A = A_1 \times A_2$, $\mathbf{a}$ denota un elemento de $A$; y además, dichos espacios se suponen que son espacios de Borel.

  **(b)** $\Phi_i$ es una multifunción de $X$ a $A_i$, la cual define para cada $x \in X$ el conjunto de acciones admisibles para el jugador $i$ en el estado $x$. Sea, $\Phi(x) = \Phi_1(x) \times \Phi_2(x)$ y $\mathbf{K} := \{(x,\mathbf{a}) \mid x \in X, \mathbf{a} \in \Phi(x)\}$ el cual es un subconjunto de Borel de $X \times A_1 \times A_2$.

  **(c)** $r^i : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, es una función medible y acotada que representa (para cada $x \in X$ y cada acción $\mathbf{a} \in \Phi(x)$ tomadas por los jugadores en $x$) la recompensa $r^i(x,\mathbf{a})$ para el jugador $i$.

**(3)** $Q \in \mathbb{P}(X \mid \mathbf{K})$ es un kernel estocástico en $X$ dado $\mathbf{K}$ ó ley de transición del juego (donde $\mathbb{P}(X \mid \mathbf{K})$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad de $X$ dado $\mathbf{K}$).

**(4)** $N \in \mathbb{N}$ es el horizonte del juego.

El juego se desarrolla de la siguiente manera: en cada fase (o tiempo $t$) $t = 0,1,\ldots N$, cada jugador observa el estado actual $x \in X$ del sistema y entonces independientemente del otro jugador, elige la acción $a_i \in \Phi_i(x)$, $i = 1,2$. Como consecuencia de esto, ocurre lo siguiente:

1. cada jugador $i = 1,2$ recibe una recompensa $r^i(x,\mathbf{a})$,
2. el sistema se mueve a un nuevo estado $y$ con distribución $Q(y \mid x,\mathbf{a})$.

### 2.1. Estrategias.

Sea $H_0 := X$ y $H_t := \mathbf{K} \times H_{t-1}$ para cada $t = 1,2,\ldots$, un elemento $h_t \in H_t$, el cual está dado por

$$h_t = (x_0, \mathbf{a}_0, , \ldots, x_{t-1}, \mathbf{a}_{t-1}, x_t)$$

representa una historia del juego hasta el tiempo $t$, donde $(x_j, \mathbf{a}_j) \in \mathbf{K}$ para todo $j = 0,1,\ldots,t-1$ y $x_t \in X$. Una estrategia para el jugador $i = 1,2$ es definida como una sucesión $\pi_i = \{\pi_{it}\}_{t=0}^{N-1}$ de probabilidades de transición $\pi_{it}$ en $\mathbb{P}(A_i \mid H_t)$ tal que

$$\pi_{it}(\Phi_i(x_t) \mid h_t) = 1$$

$\forall h_t \in H_t$, $t = 0,1,\ldots$.

Se denotará por $\Pi_i$ a la familia de todas las estrategias para el jugador $i$. Sea $\Pi := \Pi_1 \times \Pi_2$, así un elemento de $\Pi$ será denotado por $\pi$ y es llamada una multiestrategia.

Una estrategia $\pi_i = \{\pi_{it}\}_{t=0}^{N-1}$ es llamada de Markov si $\pi_{it} \in \mathbb{P}(A_i \mid X)$ para cada $t = 0,1,\ldots$, i.e., cada $\pi_{it}$ depende sólo del estado actual $x_t$ del sistema, el conjunto de todas las estrategias de Markov para el jugador $i = 1,2$ será denotado por $\Pi_{iM}$. Luego, se dice, que una estrategia de Markov $\pi_i = \{\pi_{it}\}_{t=0}^{N-1}$ es una estrategia estacionaria si existe $f \in \mathbb{P}(A_i \mid X)$ tal que $\pi_{it} = f$ para cada $t = 0,1,\ldots$. En este caso, la estrategia estacionaria $\pi_i$ será denotada por $f$, así, $\Pi_{iS}$ denota el conjunto de todas estrategias estacionarias para el jugador $i$. Entonces

$$\Pi_{iS} \subset \Pi_{iM} \subset \Pi_i.$$

De manera similar

$$\Pi_S \subset \Pi_M \subset \Pi,$$

donde $\Pi_S := \Pi_{1S} \times \Pi_{2S}$ es el conjunto de multiestrategias estacionarias y $\Pi_M := \Pi_{1M} \times \Pi_{2M}$ es el conjunto de multiestrategias de Markov.

Sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible, que consiste del espacio muestral $\Omega := (X \times A)^\infty$ con la $\sigma$-álgebra producto $\mathfrak{F}$. Entonces para cada estrategia $\pi \in \Pi$ y cada estado inicial $x \in X$, por el Teorema de Ionescu-Tulcea (véase [1] pág. 109), existe una medida de probabilidad $P_x^\pi$ y un proceso estocástico $\{(x_t, \mathbf{a}_t), t = 0,1,\ldots\}$ definido en $(\Omega, \mathfrak{F})$ en su forma canónica, donde $x_t$, $\mathbf{a}_t$ representa el estado y las acciones para cada uno de los jugadores en cada tiempo $t = 0,1,\ldots$. El operador esperanza con respecto $P_x^\pi$ es denotado por $E_x^\pi$.

### 2.2. Criterio de Optimalidad.

**Definición 2.** Sea $\alpha_i$ un número en $(0,1)$ fijo, defínase la función de pago esperado descontado en $N$ etapas para el jugador $i$, como

$$V_{i,N}(x,\pi) = E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{N-1} \alpha_i^t r^i(x_t, \mathbf{a}_t)\right], \tag{2}$$

para cada multiestrategia $\pi \in \Pi$ y estado inicial $x \in X$, donde $N$ es un entero positivo conocido. El número $\alpha_i$ se le llama factor de descuento del jugador $i = 1,2$.

**Definición 3.** Una multiestrategia $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi$ es un **equilibrio de Nash** del juego en $N$ etapas si

$$V_{1,N}(x,\pi^*) \geq V_{1,N}(x,(\pi_1,\pi_2^*))$$

y

$$V_{2,N}(x,\pi^*) \geq V_{2,N}(x,(\pi_1^*,\pi_2))$$

para todo $\pi_1 \in \Pi_1$, $\pi_2 \in \Pi_2$ y $x \in X$

**2.3. Existencia de Equilibrios de Nash.** Considérese el modelo del juego estocástico en (1) con las siguientes condiciones.

**Suposición 1.**

**(a)** $A_i$ compacto.

**(b)** $\Phi_i(x) : X \twoheadrightarrow A_i$ es una multifunción compacto valuada en $X$.

**(c)** $r^i$ es acotada y medible en $(x, \mathbf{a})$; y además, continua en $\mathbf{a}$ para cada $x \in X$ fijo.

**(d)** Para cada $B \in \mathfrak{B}(X)$, $Q(B \mid x, \cdot)$ es continua para cada $x \in X$; i.e. si $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$ entonces $Q(\cdot \mid x, \mathbf{a}_n)$ converge a $Q(\cdot \mid x, \mathbf{a})$.

La prueba del siguiente teorema, puede consultarse en [4].

**Teorema 1.** *Supóngase que la Supocición 1 (a), (b), (c) y (d) se cumplen y que N es finito. Entonces, el modelo del juego estocástico GM tiene un equilibrio de Nash en las estrategias Markovianas (posiblemente no estacionarias).*

# 3. Equilibrio Dinámico de Cournot-Nash

La competencia de Cournot es un modelo económico, donde compiten dos empresas con respecto a la cantidad que producen dichas empresas y deciden al mismo tiempo de forma independiente una de la otra cuanto producir. Tiene las siguientes características:

1. Hay dos empresas las cuales elaboran un producto homogéneo, es decir, no hay diferenciación de productos;
2. Las empresas no cooperan (no hay colusión);
3. Las empresas tienen poder de mercado, en otras palabras, la decisión de producción de cada empresa afecta el precio del bien;
4. Las empresas compiten por cantidades y las eligen de forma simultánea;
5. Las empresas son económicamente racionales y actúan estratégicamente, por lo que buscan maximizar sus utilidades dadas las decisiones de sus competidores.

Sea $h : X \to [0, \infty)$ la función que determina el crecimiento de pescado, dada por $h(x) = x^\delta$. La utilidad para el jugador 1 y 2, están dadas por $u_1(a_1) = \ln a_1$ y $u_2(a_2) = \ln a_2$ para cada $a_i \in A_i(x)$, $i = 1, 2$, donde $X = A_1 = A_2 = [0, \infty)$. Por lo cual, el conjunto de acciones admisibles para cada jugador están dadas por $A_1(x) = A_2(x) = [0, x^\delta]$, para $x \in X$.

Luego, la dinámica está dada por $x_{t+1} = (x_t - a_{1t} - a_{2t})^\delta \xi_t$, $t = 0, 1, \ldots$, donde $x_t$ es el stock en el tiempo $t$; y $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d), las cuales representan la tasa de mortalidad de peces o la proporción de stock que migra, con valores en $S = [0, \infty)$ y $E(\ln \xi) = \mu < \infty$.

Nótese, que en este modelo no se cumplen la Supocisión 1 (a) y (c), ya que, los espacios de acciones no son conjuntos compactos y las funciones de utilidad no están acotadas. Pero a pesar de que no se cumplen dichas condiciones es posible encontrar un equilibrio de Nash, aún cuando el horizonte es infinito.

De esta forma se tiene que las ecuaciones de programación dinámica (véase [7]) para cada jugador son de la siguiente forma

$$V_n(x) = \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E\left[ V_{n-1}\left( (x - a_1 - g_n(x))^\delta \xi \right) \right] \right\} \tag{3}$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \max_{a_2 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_2 + \alpha_2 E\left[ \widehat{V}_{n-1}\left( (x - f_n(x) - a_2)^\delta \xi \right) \right] \right\} \tag{4}$$

con $V_0(x) = \widehat{V}_0(x) = 0$.

**Lema 1.** *Las funciones de iteración de valores satisfacen las siguientes Ecuaciones de Euler*

$$\begin{aligned} V_n'(x) &= \alpha_1 \delta E\left[ V_{n-1}'\left( \left( x - \tfrac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \tfrac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)} \right)^\delta \xi \right) \xi \right] \\ &\quad \cdot \left( x - \tfrac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \tfrac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)} \right)^{\delta - 1} (1 - g_n'(x)) \end{aligned} \tag{5}$$

*y*

$$\begin{aligned} \widehat{V}_n'(x) &= \alpha_2 \delta E\left[ \widehat{V}_{n-1}'\left( \left( x - \tfrac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \tfrac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)} \right)^\delta \xi \right) \xi \right] \\ &\quad \cdot \left( x - \tfrac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \tfrac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)} \right)^{\delta - 1} \left( 1 - f_n'(x) \right), \end{aligned} \tag{6}$$

*para el país* 1 *y* 2 *respectivamente, para cada* $n \geq 2$ *y* $x \in (0, +\infty)$.

*Dem.* Para el caso del país 1, derivando con respecto a $a_1$ la parte que está entre llaves de la ecuación (3), se tiene que

$$\tfrac{1}{a_1} - \alpha_1 E\left[ V_{n-1}'\left( (x - a_1 - g_n(x))^\delta \xi \right) \xi \right] \delta (x - a_1 - g_n(x))^{\delta - 1} = 0,$$

para cada $a_1 \in (0, x^\delta)$. En particular, la ecuación anterior se cumple para el maximizador $f_n \in \mathbb{F}$, i.e.

$$\tfrac{1}{f_n(x)} = \alpha_1 E\left[ V_{n-1}'\left( (x - f_n(x) - g_n(x))^\delta \xi \right) \xi \right] \delta (x - f_n(x) - g_n(x))^{\delta - 1}, \tag{7}$$

$x \in (0, +\infty)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} V_n'(x) &= \alpha_1 E\left[ V_{n-1}'\left( (x - f_n(x) - g_n(x))^\delta \xi \right) \xi \right] \\ &\quad \cdot \delta (x - f_n(x) - g_n(x))^{\delta - 1} (1 - g_n'(x)). \end{aligned} \tag{8}$$

Evaluando (8) en (7) se llega a que

$$V_n'(x) = \frac{1-g_n'(x)}{f_n(x)},$$

$x \in (0,+\infty)$, de lo cual se sigue que

$$f_n(x) = \frac{1-g_n'(x)}{V_n'(x)}. \tag{9}$$

Análogamente, se llega a que

$$g_n(x) = \frac{1-f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)}, \tag{10}$$

$x \in (0,+\infty)$.

Luego sustituyendo las ecuaciones (9) y (10) en (8) se obtiene (5). Similarmente se tiene la ecuación (6). ■

**Teorema 2.** *Las funciones de valor óptimo y las políticas están dadas por*

$$V(x) = K\ln x + C,\ \widehat{V}(x) = \widehat{K}\ln x + \widehat{C}$$

*y*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x, \\ g(x) &= \frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x \end{aligned}$$

*para cada $x \in X$, donde*

$$K = \frac{1}{1-\alpha_1\delta},$$

$$\widehat{K} = \frac{1}{1-\alpha_2\delta},$$

*y*

$$C = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) \\ +\ln\left(\frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)+\frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta} \end{array}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha_2}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) \\ +\ln\left(\frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)+\frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta} \end{array}\right].$$

*Además, $(f_n, g_n)$ es un equilibrio de Nash para el juego.*

*Dem.* Obsérvese, que cuando $n=1$, se tiene que $V_1(x) = \widehat{V}_1(x) = \delta\ln x$, entonces $V_1'(x) = \widehat{V}_1'(x) = \frac{\delta}{x}$, para cada $x \in (0,+\infty)$.

Para $n=2$, en el caso del jugador 1, usando la ecuación (5)

$$\begin{aligned} V_2'(x) &= \alpha_1 E\left[V_1'\left((x-f_2(x)-g_2(x))^\delta\xi\right)\xi\right] \\ &\quad\cdot\delta(x-f_2(x)-g_2(x))^{\delta-1}(1-g_2'(x)) \\ &= \frac{\alpha_1\delta^2(1-g_2'(x))}{x-f_2(x)-g_2(x)}. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (9) y (10) para $n=2$, se tiene que

$$V_2'(x) = \frac{\alpha_1\delta^2(1-g_2'(x))}{x-\frac{1-g_2'(x)}{V_2'(x)}-\frac{1-f_2'(x)}{\widehat{V}_2'(x)}},$$

de lo cual se sigue que

$$V_2'(x) = \frac{(\alpha_1\delta^2+1)(1-g_2'(x))\widehat{V}_2'(x)}{x\widehat{V}_2'(x)-(1-f_2'(x))}. \tag{11}$$

Similarmente

$$\widehat{V}_2'(x) = \frac{(\alpha_2\delta^2+1)(1-f_2'(x))V_2'(x)}{xV_2'(x)-(1-g_2'(x))}. \tag{12}$$

Luego, sustituyendo (12) en (11) se llega a que

$$V_2'(x) = \frac{\left[(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)-1\right](1-g_2'(x))}{\alpha_2\delta^2 x}, \tag{13}$$

nuevamente sustituyendo (13) en (12) se concluye que

$$\widehat{V}_2'(x) = \frac{\left[(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)-1\right](1-f_2'(x))}{\alpha_1\delta^2 x}, \tag{14}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$.

Pero de las ecuaciones (9) y (10) se llega a que

$$1-f_2'(x) = g_2(x)\widehat{V}_2'(x) \tag{15}$$

y

$$1-g_2'(x) = f_2(x)V_2'(x), \tag{16}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$.

Otra vez sustituyendo, (16) en (13) se tiene que

$$V_2'(x) = \frac{\left[(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)-1\right]f_2(x)V_2'(x)}{\alpha_2\delta^2 x},$$

de lo cual se sigue que

$$f_2(x) = \frac{\alpha_2 x}{\alpha_1\alpha_2\delta^2+\alpha_1+\alpha_2},$$

para cada $x \in X$. Análogamente, sustituyendo (15) en (14)

$$g_2(x) = \frac{\alpha_1 x}{\alpha_1\alpha_2\delta^2+\alpha_1+\alpha_2},$$

para cada $x \in X$.

Luego de lo anterior se sigue que

$$V_2'(x) = \frac{\alpha_1\delta^2+1}{x},$$

y

$$\widehat{V}_2'(x) = \frac{\alpha_2\delta^2+1}{x}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$.

En general, para todo $n \geq 2$, supóngase que

$$V'_{n-1}(x) = \frac{K_{n-1}}{x}, \tag{17}$$

y

$$\widehat{V}'_{n-1}(x) = \frac{\widehat{K}_{n-1}}{x}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$, donde

$$K_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} (\alpha_1 \delta)^i + \alpha_1^{n-2} \delta^{n-1}$$

y

$$\widehat{K}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} (\alpha_2 \delta)^i + \alpha_2^{n-2} \delta^{n-1}$$

Entonces, para el jugador 1 sustituyendo (17) en (5)

$$V'_n(x) = \frac{\alpha_1 \delta K_{n-1} (x - f_n(x) - g_n(x))^{\delta - 1} (1 - g'_n(x))}{(x - f_n(x) - g_n(x))^{\delta}},$$

para cada $x \in (0,+\infty)$. Luego, sustituyendo de nuevo las ecuaciones (9) y (10)

$$V'_n(x) = \frac{\alpha_1 \delta K_{n-1} (1 - g'_n(x))}{x - \frac{1 - g'_n(x)}{V'_n(x)} - \frac{1 - f'_n(x)}{\widehat{V}'_n(x)}},$$

análogamente como en el caso $n = 2$, se tiene que

$$V'_n(x) = \frac{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1)(1 - g'_n(x)) \widehat{V}'_n(x)}{x \widehat{V}'_n(x) - (1 - f'_n(x))}$$

y

$$\widehat{V}'_n(x) = \frac{(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1)(1 - f'_n(x)) V'_n(x)}{x V'_n(x) - (1 - g'_n(x))}.$$

Una vez más, haciendo los mismos pasos que en el caso $n = 2$ se tiene que

$$V'_n(x) = \frac{\left[\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 K_{n-1} \widehat{K}_{n-1} - \alpha_1 \delta K_{n-1} - \alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1}\right](1 - g'_n(x))}{\alpha_2 \widehat{K}_{n-1} x} \tag{18}$$

y

$$\widehat{V}'_n(x) = \frac{\left[\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 K_{n-1} \widehat{K}_{n-1} - \alpha_1 \delta K_{n-1} - \alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1}\right](1 - f'_n(x))}{\alpha_1 K_{n-1} x}. \tag{19}$$

Por otra parte, de las ecuaciones (9) y (10) se tiene respectivamente que

$$1 - f'_n(x) = g_n(x) \widehat{V}'_n(x) \tag{20}$$

y

$$1 - g'_n(x) = f_n(x) V'_n(x), \tag{21}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$.

Luego, sustituyendo (21) y (20) en (18) y (19) respectivamente se obtiene

$$f_n(x) = \frac{\alpha_2 \widehat{K}_{n-1} x}{\alpha_1 \alpha_2 \delta K_{n-1} \widehat{K}_{n-1} + \alpha_1 K_{n-1} + \alpha_2 \widehat{K}_{n-1}}$$

y

$$g_n(x) = \frac{\alpha_1 K_{n-1} x}{\alpha_1 \alpha_2 \delta K_{n-1} \widehat{K}_{n-1} + \alpha_1 K_{n-1} + \alpha_2 \widehat{K}_{n-1}},$$

para cada $x \in X$.

Por lo tanto,

$$V'_n(x) = \frac{\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1}{x} = \frac{K_n}{x},$$

y

$$\widehat{V}'_n(x) = \frac{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1}{x} = \frac{\widehat{K}_n}{x}$$

donde $K_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_1 \delta)^i + \alpha_1^{n-1} \delta^n$, $\widehat{K}_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_2 \delta)^i + \alpha_2^{n-1} \delta^n$. De esta forma,

$$V_n(x) = K_n \ln x + C_n,$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n$$

para cada $x \in X$.

Ahora, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se llega a que

$$V_n(x) = K_n \ln x + C_n \to V(x) = K \ln x + C$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n \to \widehat{V}(x) = \widehat{K} \ln x + \widehat{C},$$

para cada $x \in X$, donde

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n \to \infty} K_n \\ &= \frac{1}{1 - \alpha_1 \delta} \end{aligned} \tag{22}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= \lim_{n \to \infty} \widehat{K}_n \\ &= \frac{1}{1 - \alpha_2 \delta} \end{aligned} \tag{23}$$

Así,

$$\begin{aligned} K \ln x + C &= \max_{a_1 \in [0, x^{\delta}]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E\left[ V\left( (x - a_1 - g(x))^{\delta} \xi \right) \right] \right\} \\ &= \max_{a_1 \in [0, x^{\delta}]} \{ \ln a_1 + \alpha_1 \delta K \ln(x - a_1 - g(x)) + \alpha_1 \mu K + \alpha_1 C \}, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1 \delta K}{x - a_1 - g(x)} = 0,$$

de lo cual se tiene que

$$f(x) = \frac{x - g(x)}{1 + \alpha_1 \delta K}.$$

Similarmente

$$g(x)=\frac{x-f(x)}{1+\alpha_2\delta\widehat{K}}.$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores simultáneamente, se llega a que

$$f(x)=\frac{\alpha_2\widehat{K}}{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K}+\alpha_1 K+\alpha_2\widehat{K}}x \tag{24}$$

y

$$g(x)=\frac{\alpha_1 K}{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K}+\alpha_1 K+\alpha_2\widehat{K}}x, \tag{25}$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones (22) y (23) en las ecuaciones anteriores (24) y (25) se concluye que

$$f(x)=\frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x$$

y

$$g(x)=\frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x,$$

para cada $x\in X$.

De esta forma, para $x\in X$,

$$K\ln x+C=(1+\alpha_1\delta K)\ln x+\ln\left(\frac{\alpha_2\widehat{K}}{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K}+\alpha_1 K+\alpha_2\widehat{K}}\right)$$
$$+\alpha_1\delta K\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K}}{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K}+\alpha_1 K+\alpha_2\widehat{K}}\right)+\alpha_1(K\mu+C)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K &= 1+\alpha_1\delta K \\ &= \frac{1}{1-\alpha_1\delta}, \end{aligned}$$

y

$$C=\frac{1}{1-\alpha_1}\left[\begin{array}{c}\frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)\\ +\ln\left(\frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)+\frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta}\end{array}\right]$$

similarmente

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= 1+\alpha_2\delta\widehat{K} \\ &= \frac{1}{1-\alpha_2\delta}, \end{aligned}$$

y

$$\widehat{C}=\frac{1}{1-\alpha_2}\left[\begin{array}{c}\frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)\\ +\ln\left(\frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)+\frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta}\end{array}\right].$$

Aún más, $(f_n,g_n)$ cumple con la Definición 3, i.e. es un equilibrio de Nash. ■

**Corolario 1.** *Las funciones de valor óptimo son iguales y las políticas óptimas también son iguales, y además están dadas por*

$$V(x)=\widehat{V}(x)=K\ln x+C,$$

*y*

$$f(x)=g(x)=\lambda_C x$$

*respectivamente para $x\in X$, donde*

$$K=\frac{1}{1-\alpha\delta},$$

$$C=\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln\left(\frac{\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right)+\ln\left(\frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right)+\frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right]$$

*y*

$$\lambda_C=\frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}.$$

*Además, $(f_n,g_n)$ es un equilibrio de Nash.*

*Dem.* Este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 1, cuando $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$. ■

## 4. Equilibro Dinámico de Stackelberg

El modelo de liderazgo de Stackelberg es un juego estratégico en economía, donde la empresa líder (empresa 1) selecciona primero su estrategia a seguir y posteriormente la empresa seguidora (empresa 2). Este tipo de modelo tiene la característica de que los jugadores están compitiendo por las cantidades de producción. Además, también se supone que el líder debe conocer a priori que el seguidor observará su acción. En otras palabras, si una empresa conoce la cantidad de producción de la otra empresa, también debe determinar cuanto producir.

Análogamente, como en el caso de Cournot supóngase que la economía presenta las mismas características del modelo. Pero ahora, supóngase que el país 1 es el líder y el país 2 es el seguidor y que existen $f_n\in\mathbb{F}$ y $g_n\in\mathbb{F}$ tales que cumplen con

$$V_n(x)=\max_{a_1\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1+\alpha_1 E\left[V_{n-1}\left((x-a_1-g_n(a_1))^\delta\xi\right)\right]\right\} \tag{26}$$

y

$$\widehat{V}_n(x)=\max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln b+\alpha_2 E\left[\widehat{V}_{n-1}\left((x-f_n(x)-a_2)^\delta\xi\right)\right]\right\} \tag{27}$$

con $V_0(x)=\widehat{V}_0(x)=0$.

**Teorema 3.** *Para el caso de Stackelberg, se cumple que las funciones de valor óptimo y políticas óptimas están dadas por*

$$V(x)=K\ln x+C,\ \widehat{V}(x)=\widehat{K}\ln x+\widehat{C}$$

*y*

$$f(x)=(1-\alpha_1\delta)x,\ g(f(x))=\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)x$$

*para cada $x\in X$, donde*

$$K=\frac{1}{1-\alpha_1\delta}$$

$$\widehat{K} = \frac{1}{1-\alpha_2\delta},$$

y

$$C = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right) + \ln(1-\alpha_1\delta) + \frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha_2}\left[\frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right) + \ln(\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)) + \frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta}\right].$$

*Dem.* Sea $x \in X$ fijo. De las ecuaciones (26) y (27) se sigue que $V_1(x) = \widehat{V}_1(x) = \delta \ln x$. Luego, si $n = 2$ para el país 2 se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{V}_2(x) &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2 + \alpha_2 E\left[\widehat{V}_1\left((x-f_2(x)-a_2)^\delta\xi\right)\right]\right\}\\ &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2 + \alpha_2\delta^2\ln(x-f_2(x)-a_2) + \alpha_2\delta\mu\right\}\end{aligned}$$

Derivando la parte que está entre llaves se tiene que

$$\frac{1}{a_2} - \frac{\alpha_2\delta^2}{x-f_2(x)-a_2} = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$g_2(f_2(x)) = \frac{x-f_2(x)}{\alpha_2\delta^2+1}. \tag{28}$$

Luego, sustituyendo la ecuación anterior (28) en (26) para $n = 2$, se llega a que

$$\begin{aligned}V_2(x) &= \max_{a_1\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1 + \alpha_1 E\left[V_1\left((x-a_1-g_2(a_1))^\delta\xi\right)\right]\right\}\\ &= \max_{a\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1 + \alpha_1\delta^2\ln\left(\frac{\alpha_2\delta^2(x-a_1)}{\alpha_2\delta^2+1}\right) + \alpha_1\delta\mu\right\},\end{aligned}$$

luego, derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1\delta^2}{\frac{\alpha_2\delta^2(x-a_1)}{\alpha_2\delta^2+1}}\frac{\alpha_2\delta^2}{\alpha_2\delta^2+1} = 0$$

la cual implica que

$$f_2(x) = \frac{x}{\alpha_1\delta^2+1}. \tag{29}$$

Sustituyendo (29) en (28)

$$g_2(f_2(x)) = \frac{\alpha_1\delta^2 x}{(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}V_2(x) &= \left(1+\alpha_1\delta^2\right)\ln x - \ln\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\\ &\quad + \alpha_1\delta^2\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^4}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}\right) + \alpha_1\delta\mu\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{V}_2(x) &= \left(1+\alpha_2\delta^2\right)\ln x + \ln\left(\frac{\alpha_1\delta^2}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}\right)\\ &\quad + \alpha_2\delta^2\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^4}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}\right) + \alpha_2\delta\mu.\end{aligned}$$

Ahora, supóngase que

$$V_{n-1}(x) = K_{n-1}\ln x + C_{n-1},$$

y

$$\widehat{V}_{n-1}(x) = \widehat{K}_{n-1}\ln x + \widehat{C}_{n-1},$$

donde

$$K_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(\alpha_1\delta)^i + \alpha_1^{n-2}\delta^{n-1}$$

y

$$\widehat{K}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(\alpha_2\delta)^i + \alpha_2^{n-2}\delta^{n-1}.$$

Así, para $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\widehat{V}_n(x) &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2 + \alpha_2 E\left[\widehat{K}_{n-1}\ln\left((x-f_n(x)-a_2)^\delta\xi\right) + \widehat{C}_{n-1}\right]\right\}\\ &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2 + \alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\ln(x-f_n(x)-a_2) + \alpha_2\widehat{C}_{n-1}\right\},\end{aligned}$$

derivando la parte que está dentro de las llaves se tiene que

$$\frac{1}{a_2} - \frac{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}}{x-f_n(x)-a_2} = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$g_n(f_n(x)) = \frac{x-f_n(x)}{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1}. \tag{30}$$

Luego, sustituyendo la ecuación anterior (30) en (26) se llega a que

$$\begin{aligned}&V_n(x)\\ &= \max_{a_1\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1 + \alpha_1 E\left[V_{n-1}\left((x-a_1-g_2(a_1))^\delta\xi\right)\right]\right\}\\ &= \max_{a_1\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1 + \alpha_1\delta K_{n-1}\ln\left(\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}(x-a_1)}{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1}\right)\right.\\ &+ \quad \left.\alpha_1 K_{n-1}\mu + \alpha_1 C_{n-1}\right\},\end{aligned}$$

luego, derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1\delta K_{n-1}}{\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}(x-a_1)}{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1}}\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}}{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1} = 0$$

lo cual implica que

$$f_n(x) = \frac{x}{\alpha_1\delta K_{n-1}+1}. \tag{31}$$

Sustituyendo (31) en (30)

$$g_n(f_n(x)) = \frac{\alpha_1\delta K_{n-1}x}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}$$

Por lo tanto,

$$V_n(x) = (1+\alpha_1\delta K_{n-1})\ln x +$$
$$\alpha_1\delta K_{n-1}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2 K_{n-1}\widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}\right)$$
$$-\ln(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)+\alpha_1\mu K_{n-1}+\alpha_1 C_{n-1}$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \left(1+\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\right)\ln x$$
$$+\ln\left(\frac{\alpha_1\delta K_{n-1}}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}\right)$$
$$+\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2 K_{n-1}\widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}\right)$$
$$+\alpha_2\mu\widehat{K}_{n-1}+\alpha_2\widehat{C}_{n-1}.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$K_n = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_1\delta)^i + \alpha_1^{n-1}\delta^n,$$

$$\widehat{K}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_2\delta)^i + \alpha_2^{n-1}\delta^n$$

y

$$\begin{aligned} C_n &= \alpha_1\delta K_{n-1}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2 K_{n-1}\widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}\right) \\ &\quad -\ln(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)+\alpha_1\mu K_{n-1}+\alpha_1 C_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_n &= \ln\left(\frac{\alpha_1\delta K_{n-1}}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}\right) \\ &\quad +\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2 K_{n-1}\widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1\delta K_{n-1}+1)\left(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}+1\right)}\right) \\ &\quad +\alpha_2\mu\widehat{K}_{n-1}+\alpha_2\widehat{C}_{n-1}. \end{aligned}$$

Tomando, el límite cuando $n\to\infty$, se tiene que

$$V_n(x) = K_n\ln x + C_n \to V(x) = K\ln x + C$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n\ln x + \widehat{C}_n \to \widehat{V}(x) = \widehat{K}\ln x + \widehat{C},$$

donde

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n\to\infty} K_n \\ &= \frac{1}{1-\alpha_1\delta} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= \lim_{n\to\infty} \widehat{K}_n \\ &= \frac{1}{1-\alpha_2\delta}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \widehat{K}\ln x+\widehat{C} &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2+\alpha_1 E\left[V\left((x-f(x)-a_2)^\delta\xi\right)\right]\right\} \\ &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2+\alpha_1\widehat{K}\ln(x-f(x)-a_2)+\alpha_2\mu\widehat{K}+\alpha_2\widehat{C}\right\}, \end{aligned}$$

para cada $x\in X$. Derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_2}-\frac{\alpha_1\delta\widehat{K}}{x-a_2-g(x)} = 0,$$

de lo cual se tiene que

$$g(x) = \frac{x-f(x)}{1+\alpha_2\delta\widehat{K}}.$$

Sustituyendo, la ecuación anterior en (26) se tiene que

$$\begin{aligned} & K\ln x + C \\ =\ & \max_{a_1\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1+\alpha_1 E\left[V_{n-1}\left((x-a_1-g(a_1))^\delta\xi\right)\right]\right\} \\ =\ & \max_{a_1\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_1+\alpha_1\delta K\ln\left(\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}(x-a_1)}{\alpha_2\delta\widehat{K}+1}\right)+\alpha_1 K\mu+\alpha_1 C\right\}, \end{aligned}$$

luego, derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se llega a que

$$\frac{1}{a_1}-\frac{\alpha_1\delta K}{\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}(x-a_1)}{\alpha_2\delta\widehat{K}+1}}\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}}{\alpha_2\delta\widehat{K}+1} = 0$$

lo cual implica que

$$f_n(x) = \frac{x}{\alpha_1\delta K+1}.$$

Entonces,

$$f(x) = (1-\alpha_1\delta)x,$$

de esto se sigue que

$$g(f(x)) = \alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)x.$$

Además,

$$K\ln x + C = \left(\frac{1}{1-\alpha_1\delta}\right)\ln x +$$
$$\frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln(\alpha_1\alpha_2\delta)-\ln\left(\frac{1}{1-\alpha_1\delta}\right)+\frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta}+\alpha_1 C$$

y

$$\widehat{K}\ln x+\widehat{C} = \left(\frac{1}{1-\alpha_2\delta}\right)\ln x+\ln(\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta))$$
$$+\frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right)+\frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta}+\alpha_2\widehat{C}.$$

De donde también se obtiene que

$$C = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right)+\ln(1-\alpha_1\delta)+\frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha_2}\left[\frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right)+\ln(\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta))+\frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta}\right].$$

■

En el caso particular, cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, se tiene el siguiente corolario:

**Corolario 2.** *Las funciones de valor óptimo y las políticas óptimas están dadas por*

$$V(x) = K \ln x + C, \ \widehat{V}(x) = K \ln x + \widehat{C}$$

*y*

$$f(x) = \lambda_L x, \ g(f(x)) = \lambda_S x$$

*para cada $x \in X$, donde*

$$K = 1 + \alpha\delta K = 1 + \frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta} = \frac{1}{1-\alpha\delta},$$

*y*

$$C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln\left(\alpha^2\delta^2\right) + \ln(1-\alpha\delta) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln\left(\alpha^2\delta^2\right) + \ln(\alpha\delta(1-\alpha\delta)) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right],$$

$$\lambda_L = (1-\alpha\delta)x \text{ y } \lambda_S = \alpha\delta(1-\alpha\delta)x.$$

*Dem.* Este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 3, sólo basta hacer la siguiente sustitución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. ■

**Nota 1.** Para el caso del duopolio la política de Cournot-Nash es $g_C(x) = \lambda_C x$. Para el caso de Stackelberg se tiene que las políticas óptimas están dadas por $f_L(x) = \lambda_L x$, $g_S(f_L(x)) = \lambda_S x$ la política óptima del jugador líder y el jugador seguidor, respectivamente. Nótese que

$$\lambda_L = 1 - \alpha\delta > \lambda_C = \frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta} \tag{32}$$

y

$$\lambda_S = \alpha\delta(1-\alpha\delta) < \lambda_C = \frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta} \tag{33}$$

Además,

$$2\lambda_C < \lambda_L + \lambda_S. \tag{34}$$

De la relación (32) se concluye que para el duopolio un sólo país del caso de Cournot-Nash consume menos que el líder en el caso de Stackelberg. Por otra parte, (33) dice que el país seguidor, en el caso de Stackelberg, consume menos que un sólo país del caso de Cournot-Nash. Además, la desigualdad (34) concluye que los dos países juntos del caso de Cournot-Nash consumen menos que los dos países juntos del caso de Stackelberg.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron los juegos estocásticos de suma no cero con criterio de pago descontado para dos jugadores. En esta clase de juegos se prueba la existencia de un equilibrio de Nash. Este estudio se abordó un modelo económico de pesquerías (fisheries), donde se presentan funciones de utilidad de cada país y una ley de transición dada en función del crecimiento de la población de pescado. Además, se supone que cada país tiene su propio factor de descuento. Con lo cual se encontró un equilibrio de tipo Cournot-Nash.

Finalmente, se hizo una comparación con el caso de Cournot-Nash, donde se obtuvo (véase, Nota 1 que en el caso del equilibrio de Stackelberg, la población de pescado disminuirá más que en el caso de Cournot-Nash.

## Referencias


[1] Ash R. B. and Doléans-Dade C. A., Probability and Measure Theory. Academic Press Elsevier, Second Edition, ISBN 0120652021, 2005.

[2] Bertrand, J., Theorie Mathematique de la Richesse Sociale. Journal des Savants, vol. 67, pp. 499-508, 1883.

[3] Cournot, A., Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. Paris: Hachette, 1838. Italian translation in Bibliotheca Dell'Econ., 1875. English translation by N. T. Bacon published in Economic Classics [Macmillan] and reprinted in 1960 by Augustus M. Kelly, 1897.

[4] Dutta P. K. and Sundaram R. K., The equilibrium existence problem in general markovian games, in organizations with Incomplete Information. Essays in Economics Analysis (M. Majumdar, ed.). Cambrige University Press, 1998.

[5] Edgeworth F., La teoría pura del monopolio. Giornale degli Economisti, pp. 13-31, 1897.

[6] Gibbons R., Un Primer Curso de Teoría de Juegos. Antoni Bosch, Primera Edición, ISBN 9788485855698, 2003.

[7] Hernández-Lerma O. and Lasserre J. B., Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria. Springer-Verlag, First Edition, ISBN 0387945792, 1996.

[8] Levhari D., and Mirman L. J., The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution. The Bell Journal of Economics, vol. 11, No. 1, pp. 322-334, 1980.

[9] Mirman L.J., Dynamic Models of Fishing: A Heuristic Approach. Control Theory in Mathematical Economics, New York: Dekker, pp. 39-73, 1979.

[10] Nash J. F., Equilibrium Points in n-Person Games. Proceeding of the National Academy of Science U.S.A., 36, pp. 48-49, 1950.

[11] Von Neumann J. and Morgenstern O., Theory Of Games And Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.