Ejemplos de aplicación de confiabilidad, para sistemas en serie y en paralelo.

Simei E. Sosa Pérez[a], Francisco S. Tajonar Sanabria[b], Víctor H. Vázquez Guevara[c], Fernando Velasco Luna[d].
[a, b, c, d] *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.*
[a]*simeisosa@gmail.com* ,[b] *ftajonar@fcfm.buap.mx*, [c] *vvazquez@fcfm.buap.mx*,
[d]*fvelasco@fcfm.buap.mx*,

Resumen

En el siguiente trabajo, presentamos dos ejemplos de aplicación sobre la teoría de confiabilidad, con la finalidad, de reflexionar en las áreas distintas de implementación para conceptos básicos de probabilidad y estadística. Enunciamos estos conceptos para la comprensión del desarrollo de los ejemplos, y también, describimos el origen de la necesidad del análisis de confiabilidad. Así mismo, exponemos los modelos más comúnmente utilizados para el comportamiento del tiempo de vida útil de los componentes y/o sistemas, junto con las características que permiten su elección. Los ejemplos realizados, corresponden a casos de sistemas conectados en serie y en paralelo, respondiendo a preguntas de interés, y proporcionando las funciones asociadas a los casos específicos. Por último, enunciamos nuestras conclusiones.

Palabra claves: confibilidad, modelos, sistemas.

1. Introducción

La confiabilidad o fiabilidad, nos permite medir la capacidad de que un producto o servicio, cumpla su función bajo condiciones establecidas y en un tiempo establecido. Para el caso de la industria, la confiabilidad, surge de la necesidad de dar garantías sobre la eficiencia de sus productos. Ha tomado gran relevancia en el diseño de los equipos, pues, además de traer beneficios económicos, también permite regular aquellas actividades que puedan dar lugar a incidentes que tengan un impacto importante en la salud y la seguridad del público en general.

En la industria, encontramos diversos sistemas, estos, se consideran como un conjunto de equipos o componentes que realizan una determinada función, y que, además, están conectados entre sí de alguna manera, de tal forma que, actuando en conjunto, dan un servicio o realizan una función. Es por eso, que el tiempo de duración de un sistema o componente, es una pregunta de interés para la prevención de las consecuencias de que este falle, y así, implementar las medidas necesarias para evitar o amortiguar los efectos. Razón por la cual, se desarrollaron modelos para el "tiempo de vida" de los componentes o sistemas. Las distribuciones Weibull y Exponencial, juegan un papel importante en la teoría de la confiabilidad, pues sus características, permiten que sean utilizadas en una gran variedad de casos. También, las medidas que nos permiten describir y contestar algunas preguntas relevantes sobre la duración de los artefactos o sistemas, se derivan de los conceptos básicos de la probabilidad; del mismo modo, el papel de la estadística es fundamental para la estimación de los parámetros.

Muchos de los sistemas se encuentran conectados en forma de serie o en paralelo, es por esta razón, que ejemplificaremos en este trabajo, un modelo del tiempo de vida para los respectivos componentes, de estos dos tipos de sistemas.

Sección 1, se presenta una breve introducción al contexto de aplicación de la teoría de la confiabilidad, la motivación para la selección de los ejemplos presentados, al igual que las áreas de conocimiento necesarias para su aplicación; sección 2, presentamos los conceptos necesarios para el desarrollo de los ejemplos; sección 3, contiene las características de los modelos Weibull y exponencial; sección 4 contiene el planteamiento de los ejemplos, así como su desarrollo y resultados; sección 5, conclusiones del trabajo.

2. Conceptos básicos de la Teoría de la confiabilidad

Definición 1: Sea *T* una variable aleatoria continua. La confiabilidad de un componente (o sistema), en el tiempo *t*, llamémosla *R(t)* está definida como *R(t) = P(T > t)*, donde, *T* es la duración del componente (o sistema) y *R* es la función de confiabilidad.

Sea *E[T]* la esperanza de la v.a. *T* y sean *F(t)* la función de distribución, *f(t)* la función de densidad, asociadas a la v.a. *T*

Definición 2: La tasa de falla (instantánea), o también llamada función de riesgo, *Z(t)*, asociada con la variable aleatoria *T*, se puede expresar como:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad Para\ F(t) < 1.$$

"La tasa de fallas *Z(t)* de un componente o sistema, representa la relación entre el número de fallas que experimenta el componente por unidad de tiempo en que se encuentra operando."

Para la distribución Weibull de parámetros (α,β):

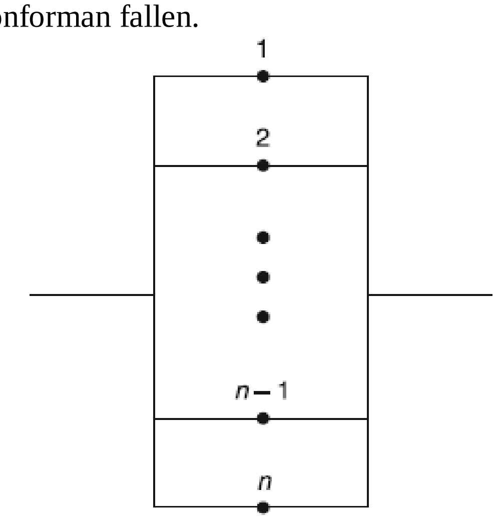
- $f(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}$
- $F(t) = 1 - e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}$
- $Z(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1}$
- $R(t) = e^{-(\frac{t}{\beta})^\alpha}$
- $E(T) = \frac{\beta}{\alpha} * \Gamma(\frac{1}{\alpha})$

Para la distribución Exponencial con parámetro λ:

- $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
- $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- $Z(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$
- $R(t) = e^{-\lambda t}$
- $E[T] = \frac{1}{\lambda}$

Conexión de un sistema en serie: se realiza de tal forma, que el fallo de uno de los componentes que conforman el sistema, significa que el sistema en su totalidad falle.

Conexión de un sistema en Paralelo: se realiza de tal forma, que el sistema falle, sí y sólo sí, todos los componentes que lo conforman fallen.



Teorema 1: Si n componentes, que funcionan independientemente, están conectados en serie

y si el i-ésimo componente tiene confiabilidad $R_i(t)$, entonces la confiabilidad del sistema completo, $R(t)$, está dada por:

$$\mathrm{R(t)}= \mathrm{R}_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \ldots \cdot R_n(t)$$

Ver detalles en [2]

Teorema 2: Si n componentes, que funcionan independientemente, están conectados en paralelo y si el i-ésimo componente tiene confiabilidad $R_i(t)$, entonces la confiabilidad del sistema completo, $R(t)$, está dada por

$$\mathrm{R(t)}=1-[\mathrm{F}_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \ldots \cdot F_n(t)]$$

Ver detalles en [2]

3. Características de los modelos Weibull y Exponencial

Distribución Weibull

La distribución Weibull, es una de las más conocidas en teoría de la confiabilidad, según varios autores, esta distribución es fácil de interpretar y muy versátil, puesto que la función de riesgo, $Z(t)$, puede ser decreciente, constante o creciente. Por lo anterior, es la primer opción al querer modelar el tiempo de vida, pues de ella se desprenden algunos modelos como el normal o exponencial.

Es utilizada para evaluar aplicaciones como resistencia de los materiales, además de que una de sus ventajas es que permite utilizar muestras pequeñas. Pero también, dentro de sus limitaciónes, esta función no sería tan adecuada para modelar fallas de productos causadas por reacciones químicas o un proceso de degradación como la corrosión.

Distribución Exponencial:

Debido a que en este modelo, la tasa de fallo es constante, se utiliza para aquellos componentes o sistemas que no presentan deterioro con el paso del tiempo, o bien, "cuando un componente, que aún no falla en operación normal, es estadísticamente igual de bueno que un componente nuevo". Para estos tipos de componentes, las fallas se producen sin la influencia del tiempo o de forma aleatoria.

Los componentes que se identifican con este comportamiento son de tipo eléctrico, electrónico, electromecánico y mecánico. Suelen requerir el desmontaje de los componentes para su reparación (si es que lo tiene) y de tenerla puede suponer un alto costo y el tiempo de parada.

4. Ejemplos

a) Consideremos una lámpara de tubo, constituida por 15 led´s de 18w, los cuales se comportan de forma independiente y se encuentran conectados en serie, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Una muestra simulada, con 30 datos, perteneciente al tiempo en meses que fallan estos tipos de led, se presenta en la siguiente tabla.

Tiempo de fallo (meses)		
199.3939	12.315848	90.338013
20.529721	45.986693	11.183012
162.175423	29.429995	5.530263
70.850678	3.647334	18.43188
41.160864	70.241064	27.418039
6.376736	15.631171	14.662251
9.806664	39.061584	68.860014
13.210968	45.107359	46.153456
36.659926	9.562967	12.781062
36.771291	39.526107	78.145739

La distribución ajustada, es la distribución exponencial con parámetro λ=0.02342, esto debido a las características de que los led´s, presentan fallos generalmente sin la influencia del tiempo. A continuación, las pruebas de bondad de ajuste Kolmogorov Smirnov, Anderson Darling y Chi cuadrado.

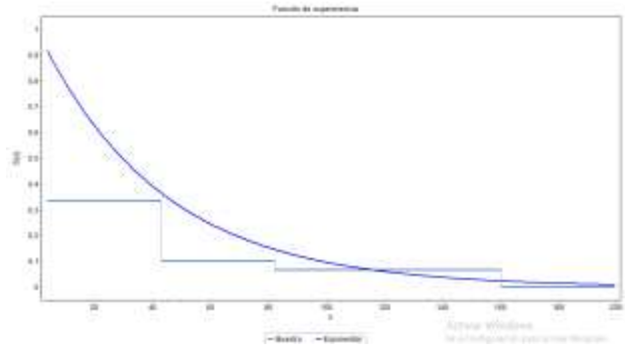
Exponential [#11]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra Estadística Valor P Rango	30 0.10595 0.85437 7				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	0.19032	0.21756	0.2417	0.27023	0.28987
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra Estadística Rango	30 0.47324 20				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No
Chi-cuadrado					
Grados de libertad Estadística Valor P Rango	4 0.60925 0.96203 18				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	5.9886	7.7794	9.4877	11.668	13.277
Rechazar?	No	No	No	No	No

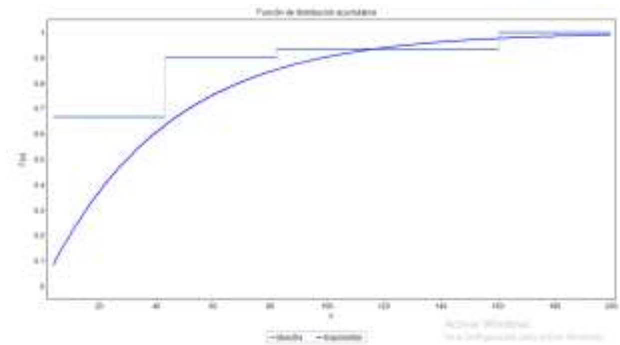
De esta manera, podemos obtener las funciones principales asociadas a este modelo en particular, las cuales son:

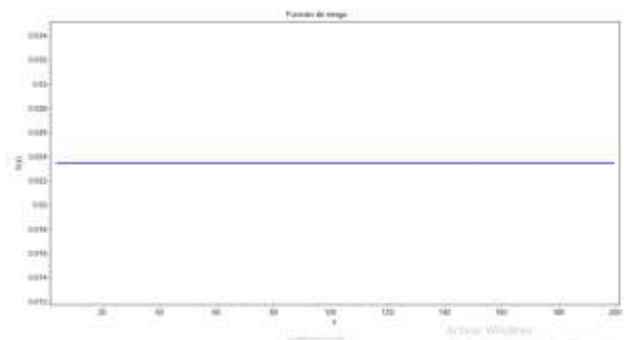
- $f(t) = 0.02342e^{-0.02342t}$
- $F(t) = 1 - e^{-0.02342t}$
- $Z(t) = 0.02342$
- $R(t) = e^{-0.02342t}$
- $E[T] = \dfrac{1}{0.02342}$

La tasa de falla, nos indicaría, que este tipo de led presenta 0.02 fallas por mes, y su esperanza de vida es de 42 meses aproximadamente.

También, presentamos los gráficos de la muestra y la distribución ajustada, para las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y tasa de fallo.







Así, la función de confiabilidad para la lámpara, con 15 de estos tipos de led, es:

$$\mathrm{R(t)}=\mathrm{e}^{(-0.02342)(15)t} = e^{-0.3513t}$$

Para el caso de que t = 6, es decir, que quisieramos saber la probabilidad de que la lámpara funcione más de 1/2 año, esta sería 12.15%. La cual es baja, debido al número de componentes que influyen en ella.

b) Ahora consideremos 2 bombas idénticas, las cuales, pueden servir para extraer agua de un pozo, estas se encuentran conectadas en paralelo, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Utilizaremos la distribución Weibull, para modelar la vida de cada una de las bombas, la cual considera, todos los casos posibles de la tasa de falla (creciente, decreciente, constante).
La muestra simulada del tiempo en que fallan este tipo de bombas, se presenta en la siguiente tabla.

Tiempo de duración *(años)*	
1.5208	18.5376
13.8639	1.6847
6.1323	13.4866
37.0280	12.4259
17.5294	1.0867
2.2654	0.5738
5.2350	20.4049
2.3661	

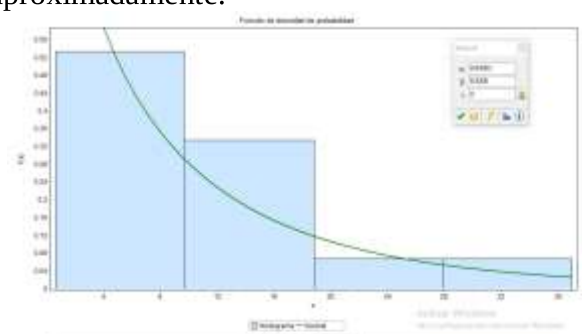
La distribución ajustada a estos datos es Weibull con parámetros α= 0.84303, β=8.9205. Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste son los siguientes:

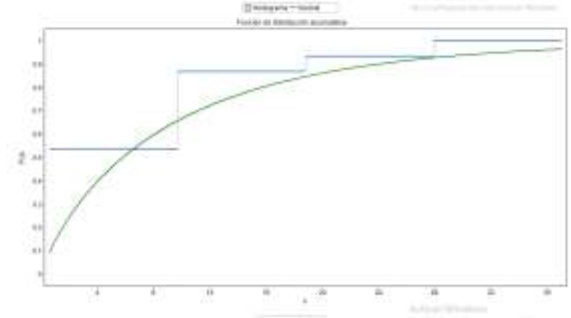
Weibull [#60]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra Estadística Valor P Rango	15 0.20016 0.52107 22				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	0.26588	0.30397	0.3376	0.37713	0.4042
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra Estadística Rango	15 0.46116 8				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No
Chi-cuadrado					
Grados de libertad Estadística Valor P Rango	1 0.54613 0.45991 21				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.6424	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349
Rechazar?	No	No	No	No	No

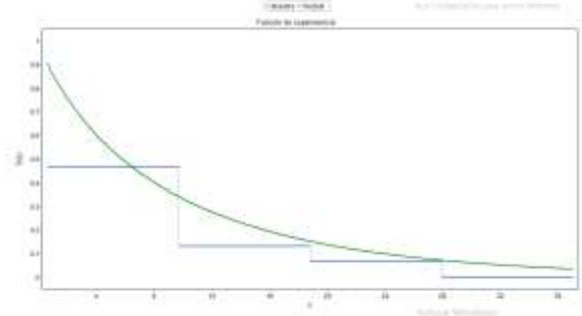
A continuación, presentamos las funciones asociadas a este modelo ajustado, algunas interpretaciones, y seguido de estas, los gráficos correspondientes a las funciones de densidad, distribución, confiabilidad y tasa de falla, de la muestra y el modelo ajustado.

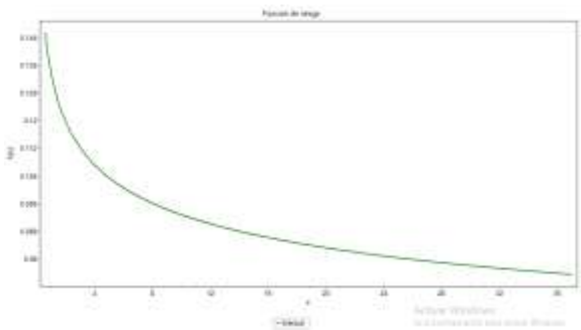
- $f(t) = \dfrac{0.84303}{8.9205^{0.84303}} t^{0.84303-1} e^{-(\frac{t}{8.9205})^{0.84303}}$
- $F(t) = 1 - e^{-(\frac{t}{8.9205})^{0.84303}}$
- $Z(t) = \dfrac{0.84303}{8.9205^{0.84303}} t^{0.84303-1}$
- $R(t) = e^{-(\frac{t}{8.9205})^{0.84303}}$
- $E(T) = \dfrac{8.9205}{0.84303} * \Gamma(\dfrac{1}{0.84303}) = 9.7555$

La tasa de falla nos indica que el deterioro de las bombas actúa de forma decreciente, y su esperanza de vida es de 9 años aproximadamente.









Así, la confiabilidad de este sistema compuesto por 2 bombas de agua conectadas en paralelo, es:

$$R(t)=1-\left[\left(1-e^{-\left(\frac{t}{8.9205}\right)^{0.84303}}\right)\cdot\left(1-e^{-\left(\frac{t}{8.9205}\right)^{0.84303}}\right)\right]$$

Para el caso en que t = 5, es decir, que quisieramos saber la probabilidad de que el sistema funcione después de 5 años, tendríamos que esta es del 8.26%.

5. Conclusiones

El análisis de confiabilidad para sistemas conectados en serie y en paralelo, es amplio para sus aplicaciones en la industria. El modelo más utilizado, pertenece a la distribución Weibull, por lo que el ajuste de un modelo apropiado, para el tiempo de vida de los artefactos, es consecuentemente más sencillo de realizar.

La aplicación de la probabilidad y estadística, en esta área de la ingeniería, a pesar de basarse en conceptos básicos, resulta benéfica debido a la influencia de sus resultados, por lo que es de gran interés el profundizar en este tema.

Referencias

[1] Sheldon, M. R. (2014). Introduction to Probability Models. 11th Edition Num. 1. Pp. 559-585.

[2] Probabilidad Y Aplicaciones Estadísticas. Paul Meyer. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Pp. 297-316

[3] C. Prieto (2008) Fiabilidad y mantenimiento, recuperado de: https://web.archive.org/web/20100926060922/http://www.aloj.us.es/notas_tecnicas/Fiabilidad_Mantenibilidad_y_Mantenimiento

[4] J. Tamborero (1994) recuperado de: https://www.insst.es/documents/94886/326827/ntp_331.pdf/cdc3ba1d-ec18-4d9f-8e36-3cfe970c8083.