CAPE
CUERPO ACADÉMICO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA BUAP
Decimocuarta Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad
14-18 de junio de 2021

Rastreo de índice con horizonte aleatorio y soporte finito

Octavio Paredes Pérez [a], Víctor Hugo Vázquez Guevara [a], Hugo Adán Cruz Suárez [a]

[a] *Benémerita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.*
[a] octavio.paredespe@alumno.buap.mx, [a] vvazquez@fcfm.buap.mx, [a] hcs@fcfm.buap.mx

Resumen

Este trabajo está relacionado con la teoría de los procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio y soporte finito [1, 3, 9, 10]. El criterio de rendimiento considerado para evaluar la calidad de las políticas admisibles es el de la recompensa total esperada. Uno de los principales objetivos de la ciencia de datos es ayudar a que se tomen las mejores decisiones para obtener el mayor beneficio o en su defecto el mínimo costo. Los procesos de decisión de Markov proporcionan un sistema muy útil para crear e implementar un proceso en la toma de decisiones con varios escenarios posibles donde los resultados son en parte al azar. La cuestión principal es encontrar una regla de decisión que nos ayude a maximizar el criterio de rendimiento total esperado. Intentaremos resolver este problema utilizando un enfoque de proceso de decisión de Markov con horizonte aleatorio. El problema que da nombre a este trabajo es aquél conocido como el de rastreo de índice [1].

Keywords: Horizonte aleatorio, programación dinámica, rastreo de índice.

1. Introducción

Los procesos de decisión de Markov (PDM), proporcionan un marco matemático para la toma de decisiones en situaciones en las que los resultados son en parte al azar y en parte bajo el control de un tomador de decisiones, los PDM son útiles para el estudio de una amplia gama de problemas de optimización resueltos a través de la técnica de programación dinámica [1–4, 6–8, 8–11, 13, 14]. Un PDM es un proceso estocástico de control a tiempo discreto, en cada paso, el proceso está en cierto estado y el tomador de decisiones puede elegir cualquier acción que se encuentre disponible. El proceso responde en la siguiente etapa moviéndose al azar a un nuevo estado y dando al tomador de decisiones una recompensa. El problema central de los PDM es encontrar una "política óptima". Los PDM se pueden resolver mediante las técnicas de programación lineal o programación dinámica. En este trabajo nos enfocaremos en la programación dinámica. Los PDM son usualmente estudiados considerando un horizonte finito. Sin embargo, existe la posibilidad de que factores externos obliguen a concluir el proceso antes de lo planeado. De esta manera, es necesario considerar al horizonte como una variable aleatoria, la cual puede ser independiente del proceso.

2. Procesos de decisión de Markov con horizonte determinista (finito)

En esta sección definiremos el tema principal de este trabajo: los procesos de decisión de Markov, que será el medio que nos guiará a resolver el problema de rastreo de índice descrito en la sección 5. Como estado inicial, el horizonte se considerará como un número natural fijo. Por tanto, en tal entorno se proporcionará la siguiente definición:

Definición 1. Un modelo de decisión de Markov con horizonte fijo $N \in \mathbb{N}$, consiste del conjunto (E, A, D, Q, r_n, g) con $n = 0, 1, \dots, N-1$, donde

- E es un espacio de Borel, llamado espacio de estados, dotado con la σ-álgebra $\mathfrak{E}$. Los elementos son denotados por $x \in E$.
- A es un espacio de Borel, llamado espacio de acciones, dotado con la σ-álgebra $\mathfrak{A}$. Los elementos son denotados por $a \in A$.
- $D(x) = \{a \in A | (x, a) \in D_n\}$ es el conjunto de acciones admisibles para el estado x en el tiempo n.

- $r_n : D \to \mathbb{R}$ es una función medible, r_n proporciona la recompensa en una etapa del sistema en el tiempo n, si el estado actual es x y la acción tomada es a.

- $g : E \to \mathbb{R}$ es una función medible, $g_N(x)$ provee la recompensa terminal del sistema en el tiempo N si el estado es x.

  Cuando la transición de un estado a otro es influenciado por factores que redefinen la ley de transición de dichos estados, es posible expresarlas de la siguiente forma. Supongamos que $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ son variables aleatorias en el espacio medible $(Z, \mathfrak{Z})$. A estas variables se les llamará *perturbaciones*.

- Z es el espacio de perturbaciones, equipada con la σ-álgebra $\mathfrak{Z}$.

- Q^Z es un kérnel de transición estocástico para $B \in \mathfrak{Z}$ y $(x,a) \in D$. $Q^Z(B|x,a)$ denota la probabilidad de que la perturbación de la transición del sistema esté en B si el estado actual es x y la acción $a \in D(x)$ es tomada. Se le conoce como la ley de distribución de Z.

- $T : D \times Z \to E$ es una función medible del sistema y es conocida como la función de transición. $T(x,a,z)$ suministra el siguiente estado del sistema cuando la acción a es tomada y la perturbación z ocurre.

$$Q(B|x,a) := Q^Z(\{z \in Z | T(x,a,z) \in B\}|x,a),\ B \in \mathfrak{E}.$$

- Q es un kérnel de transición estocástico de E dado D para cualquier par fijo $(x,a) \in D$, la función $B \mapsto Q(B|x,a)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathfrak{E}$ y $(x,a) \mapsto Q(B|x,a)$ es medible para cualquier $B \in \mathfrak{E}$. La cantidad $Q(B|x,a)$ nos proporciona la probabilidad de que el estado esté en B si el estado actual es x y la acción a es tomada. Q describe la ley de transición.

Los conceptos que a continuación se enuncian, constituyen (grosso modo) el mecanismo encargado de la toma de decisiones como complemento del modelo antes descrito.

Definición 2.

a) Una *regla de decisión* determinista-markoviana en el instante n, es una función medible $f_n : E \to A$, con la propiedad $f_n(x) \in D(x)$ para cualquier $x \in E$. Denotamos a F como el conjunto de todas las reglas de decisión determinista-markovianas.

b) Una sucesión de reglas de decisión $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ con $f_n \in F$ es llamada una *política* o *estrategia*.

Existen otros tipos de políticas, tanto más generales como más particulares. El conjunto de todas la políticas es denotado por Π, una referencia importante que aborda su clasificación es [6]. La formalización del Modelo de Decisión de Markov bajo un espacio de probabilidad, nos permitirá asociarle una medida de probabilidad y en consecuencia se prodrá definir la esperanza matemática, que es de gran interés para el desarrollo de estos modelos.

Consideremos un Modelo de Decisión de Markov de N etapas. Así, con el fin de ser matemáticamente más precisos, es posible definirlo de manera formal, es decir, asociándolo con un espacio de probabilidad. La *construcción canónica* de este espacio es como sigue [1]. Definimos un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$ en donde

$$\Omega = E^{N+1},\ \ \mathscr{F} = \mathfrak{E} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{E}.$$

Los elementos de Ω son de la forma $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ y las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_{N-1}$ están definidas en $(\Omega, \mathscr{F})$ por

$$X_n(\omega) = X_n(x_0, x_1, \ldots, x_N) = x_n.$$

en donde $X_n(\omega)$ es la n-ésima proyección de ω.

Sean $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ una política y $x \in E$ el estado inicial del sistema. Entonces por el Teorema de Ionescu-Tulcea [1], existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_x^\pi$ sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ tal que:

i) $\mathbb{P}_x^\pi(x_0 \in B) = \delta_x(B)$ para cada $B \in \mathfrak{E}$ y

ii) $\mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B | X_0, X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B | X_n) = Q(B|X_n, f_n(X_n))$.

La expresión *ii)* es llamada *Propiedad de Markov*. La variable aleatoria X_n representa el estado del sistema en el instante n y a (X_n) se le conoce como *Proceso de Decisión de Markov*. Ahora se tendrá que imponer un supuesto que garantice que cualquier esperanza que aparezca, esté bien definida. Para esto, se denotará por $x^+ = max\{0, x\}$ a la parte positiva de x.

Suposición 1. Para $x \in E$

$$\delta_N(x) := \sup_\pi \mathbb{E}_x^\pi [\sum_{k=0}^{N-1} r_k^+(X_k, f_k(X_k)) + g^+(X_N)] < \infty.$$

Se observa además que la suposición 1 se satisface si r y g están acotadas superiormente. Para poder determinar qué tan buena es una política se introducirá un criterio de rendimiento para cada estrategia. Se define para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ y una política $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ a la función $V(\pi, x)$ definida por

$$V(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} r(X_k,\ f_k(X_k)) + g(X_N) \right],\ \ x \in E. \quad (1)$$

$V(\pi,x)$ es llamada recompensa total esperada. La función de valor V^* está definida por

$$V^*(x) := \sup_{\pi\in\Pi} V(\pi,x),\ x\in E.$$

$V^*(x)$ es la máxima recompensa total esperada. Las funciones $V(\pi,x)$ y $V^*(x)$ están bien definidas ya que

$$V(\pi,x) \le V^*(x) \le \delta_N(x) < \infty,\ \ x\in E.$$

En general, la existencia de una política óptima no está garantizada. Se tendrá que hacer la siguiente Suposición adicional sobre la estructura del problema para asegurar ésto.

Suposición 2. Existen conjuntos $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}_n(E) := \{v : E \to [-\infty,\infty)|v\}$, donde v es medible y $\Delta_n \subset F_n$ tales que para cualquier $n = 0,1,\ldots,N-1$:

(i) $g \in \mathbb{M}_N$.

(ii) Si $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ entonces $\mathscr{T}_n v$ está bien definida y $\mathscr{T}_n v \in \mathbb{M}_n$, (donde $\mathscr{T}_n v(x) := \sup_{a\in D(x)}\{r(x,a) + \int v(x')Q^Z(dx'|x,a)\}$, $(x,a)\in D$).

(iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ existe un maximizador de v, $f_n \in \Delta_n$; i.e., $\mathscr{T}_{f_n} v(x) = r(x,f_n) + \int v(x')Q^Z(dx'|x,f_n) = \mathscr{T}_n v(x), x\in E$.

A menudo $\mathbb{M}_n$ es independiente de n y es posible elegir $\Delta_n = F_n \cap \Delta$ para un conjunto $\Delta \subset \{f : E \to A \text{ medible}\}$, es decir, que cualquier función de valor y cualquier maximizador tienen las mismas propiedades estructurales [1].

El siguiente Teorema proporciona un método de solución para los Problemas de Decisión de Markov.

Teorema 1. *Si se satisface el supuesto 2, entonces se cumple:*

a) $V_n \in \mathbb{M}_n$ *y la sucesión* (V_n) *satisface la ecuación de Bellman, i.e. para* $n = 0,1,\ldots,N-1$

$$V_N(x) = g(x),$$

$$V_n(x) = \sup_{a\in D_n(x)} \left\{ r_n(x,a) + \int V_{n+1}(x')Q_n(dx'|x,a) \right\},$$

$$x\in E.$$

b) $V_n = \tau_n\tau_{n+1}\ldots\tau_{N-1}g_N$.

c) Para $n = 0,1,\ldots,N-1$ *existen maximizadores* f_n *de* V_{n+1} *con* $f_n \in \Delta_n$ *y cada sucesión de maximizadores* f_n^* *de* V_{n+1} *define una política óptima* $(f_0^*, f_1^*, \ldots, f_{N-1}^*)$ *para las* N *etapas del problema de decisión de Markov.*

3. Proceso de decisión de Markov con horizonte aleatorio

En la literatura pueden hallarse referencias en donde se estudian problemas de control a tiempo discreto con horizonte aleatorio [1, 3, 4, 10, 14]. Se han considerado; por ejemplo, las siguientes condiciones: distribución de probabilidad arbitraria para el horizonte con soporte finito o distribución geométrica para el soporte infinito.

Sea τ una variable aleatoria asociada a un espacio de probabilidad $(\Omega',\mathscr{F}',\mathbb{P})$. Suponga que la distribución de τ es conocida, dada por $\rho_n := \mathbb{P}(\tau = n)$, $n = 0,1,2,\ldots,N$ donde N es un número entero positivo o $N = \infty$, Considere el modelo de decisión de Markov $(E,A,\{D(x) : x \in E\},Q,r)$ y definimos como criterio de rendimiento

$$V^\tau(\pi,x) := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n,a_n)1_{\{\tau<N\}} + g(x_\tau)1_{\{\tau=N\}}\right], \quad (2)$$

$\pi\in\Pi$, $x\in E$, $\mathbb{E}$ denota el valor esperado con respecto a la distribución conjunta del proceso $\{(x_n,a_n)\}$ y τ.

Luego, consideremos el correspondiente problema de control óptimo. Para ello, definamos a la función de valor óptimo como

$$V^\tau(x) := \inf_{\pi\in\Pi} V^\tau(\pi,x),\ x\in E. \quad (3)$$

De esta manera, el problema de control óptimo con horizonte aleatorio consiste en encontrar una política $\pi^*\in\Pi$ tal que $V^\tau(\pi^*,x) = V^\tau(x)$, $x\in E$. Se considerará la siguiente suposición.

Suposición 3. Para cada $x\in E$ y $\pi\in\Pi$ el proceso inducido $\{(x_n,a_n)|n = 0,1,2,\ldots\}$ es independiente de τ.

Entonces, bajo la suposición 3 y la ecuación (2) tenemos que el criterio de rendimiento se reduce a

$$V^\tau(\pi,x) = \mathbb{E}_x^\pi\left[\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}_n r(x_n,a_n) + \mathbb{P}_N g(x_N)\right], x\in E,\ \pi\in\Pi. \quad (4)$$

En donde $\pi\in\Pi$, $x\in E$, $\mathbb{P}_n := \sum_{n=m}^{N}\rho_n = \mathbb{P}(\tau\ge n)$, $n = 0,1,2,\ldots,N$. Con esto se muestra una equivalencia entre un problema de control óptimo con horizonte aleatorio τ y un problema de control óptimo con horizonte $N+1$, con recompensa por etapa dado por $\mathbb{P}_n$.

4. Mercados financieros

De manera preliminar al planteamiento y solución del problema de rastreo de índice con horizonte aleatorio τ de soporte finito, se realizarán las siguientes consideraciones técnicas concernientes al mercado financiero subyacente.

Se considerará un mercado financiero de N-periodos con d activos riesgosos y un bono sin riesgo. Se asumirá que las variables aleatorias están definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con filtración $(\mathscr{F}_n)$ y $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. El mercado financiero está dado por:

- Un bono sin riesgo con $S_0^0 \equiv 1$ y
$$S_{n+1}^0 := S_n^0(1+i_{n+1}), \; n = 0,1,\ldots,N-1$$
donde i_{n+1} denota la tasa de interés determinista para el periodo $[n,n+1)$. Si la tasa de interés es constante, i.e. $i_n \equiv i$, entonces $S_n^0 = (1+i)^n$.

- Existen d activos riesgosos y el proceso de precios asociado con el k-ésimo activo está dado por $S_0^k = s_0^k$ y
$$S_{n+1}^k = S_n^k \tilde{R}_{n+1}^k, \; n = 0,\ldots,N-1.$$
El proceso (S_n^k) se supone que es adaptado con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_n)$ para cualquier k. Además, se supondrá que $\tilde{R}_{n+1}^k > 0$ $\mathbb{P}$-a.s. para cualquier k y n con s_0^k determinista. $\tilde{R}_{n+1}^k$ es el cambio de precio relativo en el intervalo $[n,n+1)$ para el activo riesgoso k.

De aquí y en adelante se considerará la siguiente notación: $S_n := (S_n^1,\ldots,S_n^d)$, $\tilde{R}_n := (\tilde{R}_n^1,\ldots,\tilde{R}_n^d)$ y $\mathscr{F}_n^S := \sigma(S_0,\ldots,S_n)$. Como (S_n) es $(\mathscr{F}_n)$ adaptado se tiene: $\mathscr{F}_n^S \subset \mathscr{F}_n$ para $n = 0,1,\ldots,N-1$. Se asumirá también que, $(\mathscr{F}_n)$ es la filtración generada por el precio de las acciones, es decir $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^S$.

Definición 3. Un portafolio o cartera de negociación es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$ adaptado $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ donde $\phi_n^0 \in \mathbb{R}$ y $\phi_n = (\phi_n^1,\ldots,\phi_n^d) \in \mathbb{R}^d$ para $n = 0,1,\ldots,N-1$. La cantidad ϕ_n^k denota el monto de dinero que es invertido en el activo k durante el intervalo de tiempo $[n,n+1)$.

Finalmente, se considerará la siguiente Suposición relacionada con los mercados financieros para que las esperanzas estén bien definidas.

Suposición 4. $\mathbb{E}\|R\| := |R_1| + \ldots + |R_d| < \infty$, donde $R \in \mathbb{R}^d$ y $R_k := \frac{\tilde{R}^k}{1+i_n} - 1$ para cada $k = 1,\ldots,d$.

5. Problema de rastreo de índice con horizonte aleatorio τ y soporte finito

El problema de rastreo de índice puede considerarse como una aplicación de cobertura de media y varianza en un mercado incompleto [1]. Supongamos que tenemos un mercado financiero con un bono sin riesgo y d activos riesgosos. Además de los activos negociables existe un activo no comerciable cuyo proceso de precios $(\hat{S}_n)$ evoluciona conforme a
$$\hat{S}_{n+1} = \hat{S}_n \hat{R}_{n+1}.$$

La variable aleatoria positiva $\hat{R}_{n+1}$ que es el cambio de precio relativo del activo no negociado puede ser correlacionado con R_{n+1}. Asumimos que los vectores aleatorios $(R_1,\hat{R}_1),(R_2,\hat{R}_2),\ldots$ son independientes y la distribución conjunta de $(R_n,\hat{R}_n)$ es conocida.

El objetivo ahora es rastrear el activo no negociado lo más cercanamente posible para invertir en el mercado financiero. El error de rastreo es medido en términos de la distancia cuadrática de la riqueza del portafolio al proceso de precios $(\hat{S}_n)$.

El problema de rastreo de índice considerando al horizonte aleatorio τ que tiene soporte finito está dado por:
$$\begin{cases} \mathbb{E}_{x\hat{s}}\left[\sum_{n=0}^{\tau}(X_n^\phi - \hat{S}_n)^2\right] \to \min, \\ \phi = (\phi_n) \text{ es un portafolio de inversión,} \end{cases} \tag{5}$$
donde ϕ_n es $\mathscr{F}_n = \sigma(R_1,\ldots,R_n,\hat{R}_1,\ldots,\hat{R}_n)$ medible. Este problema puede ser formulado como un problema lineal cuadrático [1]. Es importante señalar que, el espacio de estados del modelo de decisión de Markov incluye (además de la riqueza) el precio del activo no negociado.

Así el modelo de decisión consta de los siguientes componentes,

- $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ donde $(x,\hat{s}) \in E$ y x es la riqueza y $\hat{s}$ el valor del activo no negociado,
- $A := \mathbb{R}^d$ donde $a \in A$ es la cantidad de dinero que es invertida en cada activo riesgoso,
- $D(x,\hat{s}) := A$,
- $\mathscr{Z} := (-1,\infty)^d \times \mathbb{R}_+$ donde $z = (z_1,z_2) \in \mathscr{Z}$ y z_1 es el riesgo relativo del activo negociado y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado.
- La función de transición está dada por
$$T((x,\hat{s}),a,(z_1,z_2)) := M_n\binom{x}{\hat{s}} + B_n a,$$
donde $M_n = \begin{pmatrix} 1+i_{n+1} & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ y $B_n = \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $Q^Z(\cdot|(x,\hat{s}),a)$ está dado por la distribución conjunta de $(R_{n+1},\hat{R}_{n+1})$ (independiente de $((x,\hat{s}),a)$),
- $r((x,\hat{s}),a) := -(x-s)^2$,
- $g(x,\hat{s}) := -(x-\hat{s})^2$.

El problema (5) puede ser resuelto por el modelo de decisión de Markov descrito anteriormente. La función de valor (función de costo) está dada por

$$V(x,\hat{s}) := \inf_{\pi} \mathbb{E}^{\pi}_{x\hat{s}} \left[\sum_{k=0}^{\tau} (X_k - \hat{S}_k)^2 \right],\ (x,\hat{s}) \in \mathbb{E}$$

y $V_0(x,\hat{s})$ es el mínimo valor del problema (5). Si definimos a

$$W := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

el problema es equivalente a minimizar

$$\mathbb{E}^{\pi}_{k=0} \left[\sum_{k=0}^{\tau} \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix} \right] =$$

$$\mathbb{E}^{\pi}_{k=0} \left[\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}_n \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix} \right].$$

Teorema 2.

a) Sean las matrices $\tilde{W}_n$ definidas de forma recursiva por

$$\begin{aligned} \tilde{W}_N &:= \mathbb{P}_N W \\ \tilde{W}_n &:= \mathbb{P}_n W + \mathbb{E}[M^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} M_{n+1}] - \mathbb{E}[M^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} B_{n+1}] \\ &\quad \left(\mathbb{E}[B^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} B_{n+1}]\right)^{-1} \mathbb{E}[B^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} M_{n+1}]. \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{W}_n$ es simétrica, semidefinida positiva y la función de valor del problema (5) *está dada por*

$$V_{N+1}(x,\hat{s}) = 0$$

$$V_n(x,\hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \tilde{W}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix},\ (x,\hat{s}) \in E$$

para $n = 0,\dots,N$ y además la matriz W es simétrica y semidefinida positiva.

b) El portafolio óptimo $\pi^* = (f^*_0,\dots,f^*_N)$ es lineal y dado por

$$\begin{aligned} f^*_n(x,\hat{s}) = &- \left(\mathbb{E}[R_{n+1} R^T_{n+1}]\right)^{-1} \\ &\mathbb{E}\left[\left(R_{n+1},\ \frac{w_{21}}{(1+i_{n+1}) w_{11}} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right) \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde los elementos de W son denotados por w_{ij}.

Dem. Comprobaremos la Suposición 2. Es razonable asumir que

$$\begin{aligned} \mathbb{M} := \Big\{ v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+ | v(x,\hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\ \text{con } W \text{ simétrica y definida positiva} \Big\}. \end{aligned}$$

También resultará que los conjuntos $\Delta_n := \Delta \cap F_n$ pueden ser elegidos como los conjuntos de todas las funciones lineales, i.e.

$$\begin{aligned} \Delta := \{ f : E \to A | f(x,\hat{s}) = C(x,\hat{s}) \\ \text{para algún } C \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \Big\}. \end{aligned}$$

Empezaremos analizando que se cumple la parte *i)* del Supuesto 2:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_N v(x) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{ \mathbb{P}_N(x,\hat{s}) W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \mathbb{E} v[T_{N+1}((x,\hat{s}),a,(z_1,z_2))] \} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{ \mathbb{P}_N(x,\hat{s}) W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + 0 \} \\ &= (x,\hat{s}) \mathbb{P}_N W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\ &= (x,\hat{s}) \tilde{W}_N \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\mathbb{P}_N \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$.

Ahora, sea $v(x,\hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$. Intentaremos resolver el siguiente problema de optimización, por el Teorema 1 tenemos que:

$$\mathscr{T}_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{ \mathbb{P}_n(x,\hat{s}) W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \mathbb{E} v[T_{n+1}((x,\hat{s}),a,(z_1,z_2))] \},$$

Además, $\mathscr{T}_n v(x)$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \Big\{ & \mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \\ & \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \\ & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a + a^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \Big\}, \end{aligned}$$

como W es simétrica y definida positiva, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

es también simétrica y definida positiva [1], por lo tanto regular y la función entre los corchetes es convexa en a (para $x \in E$ fija). Optimizando a la función $\mathscr{T}_n v(x)$ con respecto de a obtenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tau_n v(x)}{\partial a} = 0 \\ &= \frac{\partial \left[\mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right]}{\partial a} \\ &+ \frac{\partial \left[\begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right]}{\partial a} \\ &+ \frac{\partial \left[2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \right]}{\partial a} \\ &+ \frac{\partial \left[a^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \right]}{\partial a} = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0+0+\left[2\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^T\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\right]^T\\
&+2\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]a=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\\
&+2\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]a=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]a\\
&= 2\left[\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow a=-\left(\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\right)^{-1}\\
&\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\\
&.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que el único punto mínimo está dado por

$$
\begin{aligned}
f_n^*(x,\hat{s}) = -&\left(\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\right)^{-1}\\
&\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Desarrollando la expresión anterior podemos obtener el siguiente resultado,

$$
f_n^*(x,\hat{s}) = -\left(\mathbb{E}\left[z_1z_1^T\right]\right)^{-1}\mathbb{E}\left[z_1,\frac{w_{12}}{w_{11}(1+i_{n+1})}z_2z_1\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right).
$$

Dado que W es simétrica y definida positiva, además de que z_1 es el riesgo relativo del activo negociado R y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado $\hat{R}$, entonces podemos escribir a la política óptima de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
f_n^*(x,\hat{s}) = -&\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\\
&\mathbb{E}\left[R_{n+1},\frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})}\hat{R}_{n+1}R_{n+1}\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

A continuación, al substituir la política en $\mathscr{T}_nv(x)$ se produce que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}_nv(x) &= \mathbb{P}_n\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^TW\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\\
&+\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^T\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\\
&+2\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^T\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\\
&\left(-\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\right.\\
&\left.\mathbb{E}\left[R_{n+1},\frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})}\hat{R}_{n+1}R_{n+1}\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\right)\\
&+\left(-\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\right.\\
&\left.\mathbb{E}\left[R_{n+1},\frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})}\hat{R}_{n+1}R_{n+1}\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\right)^T\\
&\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\\
&\left(-\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\right.\\
&\left.\mathbb{E}\left[R_{n+1},\frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})}\hat{R}_{n+1}R_{n+1}\right]\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^T\left\{\mathbb{P}_nW+\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\right.\\
&-\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\\
&\left.\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}1+i_{n+1} & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\right\}\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\\
&= \left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_n\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{M}.
\end{aligned}
$$

Finalmente se obtiene que

$$
\mathscr{T}_nv(x) = \left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_n\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{M}.
$$

Así, tenemos que se cumple la Suposición 2 y además por los Teoremas 1 y la Suposición 3 el problema puede ser resuelto recursivamente, por lo tanto, se tiene que al usar inducción hacia atrás obtenemos la siguiente fórmula recursiva.

$$
V_n(x,\hat{s}) = (x,\hat{s})\tilde{W}_n\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right).
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}_n = &\left\{\mathbb{P}_nW+\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\right.\\
&-\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right]\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\\
&\left.\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{smallmatrix}\right)^T\tilde{W}_{n+1}\left(\begin{smallmatrix}1+i_{n+1} & 0\\ 0 & z_2\end{smallmatrix}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Para $V_0(x,\hat{s}) = (x,\hat{s})\tilde{W}_0\left(\begin{smallmatrix}x\\ \hat{s}\end{smallmatrix}\right)$, donde

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}_0 = &\mathbb{P}_0W+\mathbb{E}[M_1^T\tilde{W}_1M_1]-\mathbb{E}[M_1^T\tilde{W}_1B_1]\left(\mathbb{E}[B_1^T\tilde{W}_1B_1]\right)^{-1}\\
&\mathbb{E}[B_1^T\tilde{W}_1M_1].
\end{aligned}
$$

Con esto queda concluida la demostración del Teorema. ∎

6. Conclusiones

Los procesos de decisión de Markov son realmente importantes ya que aparecen con bastante frecuencia en la práctica. En este trabajo se han descrito conceptos necesarios que son de utilidad para el entendimiento de la resolución del problema de rastreo de índice con el costo total esperado como criterio de rendimiento, en donde se consideraron los casos:

(a) Cuando el horizonte es un número fijo finito N.

(b) El horizonte es considerado como una variable aleatoria que tiene soporte finito.

Por lo que, a lo largo del trabajo descrito aquí, se obtuvo el siguiente resultado: el problema recursivo simplifica la formulación y resolución de problemas, además se obtuvo la política óptima del problema de rastreo de índice con horizonte aleatorio, en esta se ve que casi coincide con la política de problema de rastreo de índice con horizonte fijo [1], pero la política para el problema con horizonte aleatorio depende de la función de masa de la variable τ en cada etapa del problema. Como era de esperarse la función de valor también depende de la función de masa de la variable tau con respecto a la función de valor del problema que tiene un horizonte fijo finito N.

Referencias

[1] BÄUERLE N., RIEDER U., "Markov Decision Processes with Aplications to Finance". Springer Verlang, ISBN9783642183232, 2011.

[2] BERTSEKAS D. P. AND S. E. SHREVE, "Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case". Athena Scientific. ISBN1886529264, 1978.

[3] CRUZ-SUÁREZ H., ILHUICATZI-ROLDÁN R., MONTES-DE-OCA R., "Markov Decision Processes on Borel Spaces with Total Cost and Random Horizon". Journal of Optimization Theory and Applications. 2012.

[4] CHATTERJEE D., CINQUEMANI E., CHALOULOS G. LYGEROS J., "Stochastic Control up to a Hitting Time: Optimality and Rolling-Horizon Implentatio". arxiv 0806.3008.2009.

[5] HEILBRONER ROBERT L., MILBERG WILLIAM , "The Making of Economic Society". Prentice Hall, 13th Edition, ISBN9780136080695, 2011.

[6] HERNÁNDEZ-LERMA O., LASERRE J. B., "Discrete-Time Markov Control Processes: Basic OPtimality Criteria". Springer-Verlag. ISBN9781461268840, 1996.

[7] HERNÁNDEZ-LERMA O., LASERRE J. B., "Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes". Springer-Verlag. ISBN9781461205616, 1970.

[8] HINDERER, K., "Foundations of Non-Sationary Dynamic Programming With Discrete-Time Parameter". Springer-Verlag. ISBN9783540049562, 1970.

[9] IIDA T., MORI M., "Markov Deecision Processes with Random Horizon". Journal of the Operations Research. Vol. 39, pp. 592 – 603. 1996.

[10] ILHUICATZI MARÍA, "Procesos de Decisión de Markov con Horizonte Aleatorio", Tesis de Doctorado, 2013.

[11] KAAS, R., VAN HEERWAARDEN, A., AND GOOVAERTS, M., "Ordering of Actuarial Risk". Caire, Brussels, ISBN0792376366, 1998.

[12] MADURA, JEFF., "Mercados e instituciones financieras". 8ta. edición. Thomson Learning, México, ISBN9780324568226, 2001.

[13] PUTERMAN M. L., "Markov Decision Process: Discrete Stochastic Dynamic Programming". John Wiley & Sons. ISBN0471619779, 1994.

[14] VÁZQUEZ-GUEVARA V., CRUZ-SUÁREZ H., VELASCO-LUNA F., "Optimal assignment of sellers in a store with a random number of clients via the armed bandit model". RAIRO-Oper.Res. Volume 51, number 4, 2017.