Decimocuarta Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad
14-18 de junio de 2021

Promedios espaciales y temporales

Martín B. Pérez V.[a]**, Hortensia J Reyes C.**[b]
[a,b] *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.*
[a] *pvmartinb@gmail.com*, [b] *hreyes@fcfm.buap.mx*.

Resumen

En este trabajo, se hacer una revisión de algunos aspectos relacionados con los conceptos de promedio temporal y promedio espacial. Se comienza abordando los pormenores necesarios para entender dichos conceptos de manera intuitiva y se hace un repaso histórico del desarrollo de estos. Se abordan los conceptos de promedio temporal y espacial de manera formal a través de conceptos tales como tales como espacio de medida, función medible, función que conserva la medida e integral en un espacio de medida. Además, se precisan conceptos propios de la Teoría Ergódica tales como sistema dinámico que preserva la medida, promedio temporal y promedio espacial. Finalmente, se exponen algunos resultados importantes como el Teorema Ergódico de Birkhoff y el Teorema Ergódico de von Neumann, y se hace énfasis en la importancia de estos temas en algunos problemas.

Palabra claves: Ergodicidad, Promedio, Tiempo.

Introducción

La Teoría Ergódica se dedica a estudiar el comportamiento promedio de los sistemas dinámicos, para tal fin, se hace uso de varios conceptos propios de otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, conceptos propios de los sistemas dinámicos o conceptos propios de la teoría de la medida, además de los promedios temporales y espaciales, estos conceptos convergen al de sistema dinámico que conserva la medida, que son los que se estudian propiamente en la Teoría Ergódica (Peterser, K., 1983). En este sentido, en el presente trabajo se hace un repaso de los distintos conceptos necesarios para estudiar la teoría ergódica y abordar diferentes ejemplos relacionados con la materia. La Teoría Ergódica puede ser interrelacionada con la Probabilidad y Estadística. Por mencionar algunos ejemplos, los procesos estocásticos estacionarios y las cadenas de Markov se transforman de una manera canónica en sistemas dinámicos que conservan la medida (de probabilidad) y se puede verificar para estos procesos si cumplen la conocida como hipótesis ergódica (que el promedio temporal coincida con el promedio espacial casi en todas partes). Otro ejemplo notable es el del cálculo de la “proporción” o “probabilidad” con que se distribuye el primer digito de los números que son potencias de 2, en este ejemplo se ejemplifica que la teoría ergódica puede incidir en la teoría de números, ejemplifica cómo un problema probabilístico puede ser transformado en un problema dinámico y puede ser resuelto por medio de la hipótesis ergódica. (Einsiedler, M. & Ward, T.)

Dos teoremas principales de la teoría ergódica son los conocidos como Teorema Ergódico de Birkhoff y Teorema Ergódico de von Neumann, estos dos teoremas aseguran la existencia del promedio temporal (límite) para medidas invariantes en el tiempo, mientras que para transformaciones ergódicas asegura la igualdad del promedio temporal con el promedio espacial.

La Hipótesis Ergódica es actualmente una pieza angular en varias ramas de la física y se presume su posible utilidad en otras áreas como la probabilidad. (Ugalde, E., 2007)

Metodología

Aspectos generales

En este trabajo se realiza una exposición puramente teórica de las Teoría Ergódica y su relación con otras áreas como los sistemas dinámicos o la probabilidad.

Desarrollo del tema

Consideremos al proceso estocástico $\{X_n\}_{n\in Z}$ donde cada X_n se distribuye como una variable aleatoria Bernoulli con parámetro $\frac{1}{2}$, una pregunta frecuente, en áreas como la física, es si las realizaciones de este proceso tienen puntos de recurrencia o puntos fijos en promedio, para este fin, en el caso de procesos estocásticos, se define el promedio temporal para un elemento ω del espacio muestral como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k(\omega)$$

En este ejemplo en específico, como se explicará posteriormente, el Teorema Ergódico de Birkhoff permite afirmar que el promedio temporal y el promedio de ensamble, o de conjunto, coinciden, es decir que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k = E[X] \ \ c.s.$$

Donde X es una variable aleatoria Bernoulli con parámetro $\frac{1}{2}$.

Este mismo resultado habría sido posible de establecer con la Ley Fuerte de los Grandes Números, pero los teoremas ergódicos son más generales (y están establecidos en marcos teóricos más generales), por ejemplo, pueden ser aplicados a cualquier proceso estocástico estacionario.

Una forma de visualizar esto desde un punto de vista físico es imaginarnos un recipiente con gas en su interior y fijar nuestra atención en una sola partícula de gas, dada una región del recipiente, nos gustaría saber qué porcentaje del tiempo el gas estuvo en dicha región, de ahí el término Promedio Temporal, sería de utilidad que éste fuera igual al volumen de dicha región, es decir, el Promedio de Ensamble o Promedio Espacial, y la suposición general de este hecho es la conocida como Hipótesis Ergódica.

La Hipótesis Ergódica no es cierta en general (Ugalde, E., 2007), pero los teoremas ergódicos proporcionan una amplia gama de contextos en los que sí es válida.

Antes de hacer un tratamiento formal de estos temas, revisemos algunos conceptos.

Recordemos que si $(\Omega,\mathcal{B})$ es un espacio medible, μ es una medida sobre este espacio y $f:\Omega\to R$ es una función medible, entonces podemos definir la integral de f con respecto a esta medida sobre un conjunto medible, es decir que podemos definir

$$\int_E f\, d\mu$$

Donde $E\in\mathcal{B}$.

Si $T:(\Omega,\mathcal{B},\mu)\to(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ es medible y es tal que $\mu\left(T^{-1}(A)\right)=\mu(A)$, entonces T es llamada función que conserva la medida y $(\Omega,\mathcal{B},\mu,T)$ es llamado sistema dinámico que conserva la medida.

Si Ω es un espacio de probabilidad, una función $T:\Omega\to\Omega$ que conserva la medida es llamada ergódica si $T(A)=A\Rightarrow\mu(A)=1$ ó $\mu(A)=0$.

Dado un sistema $(\Omega,\mathcal{B},\mu,T)$ (conserve éste la medida o no) y una función medible $f:\Omega\to R$, podemos definir el promedio temporal de f como una función $\bar{f}: \Omega \to R$ (pudiendo no estar bien definida) dada por

$$\bar{f}(\omega) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k(\omega)\right)$$

Mientras que podemos definir el Promedio Espacial o Promedio de Ensamble como

$$\int_{\Omega} fd\,\mu$$

Para ejemplificar estos conceptos, retomemos el ejemplo del proceso estocástico conformado por variables aleatorias Bernoulli.

En este caso, definimos $\Omega = R^Z, \mathcal{B}$ como la sigma álgebra de Borel en R^Z, es decir, la sigma álgebra producto, y la medida es la heredada por el proceso estocástico, esto es la extensión de μ dada por que $\mu(\cdots E_{-1} \times E_0 \times E_1 \cdots) = P(\dots, X_{-1} \in E_{-1}, X_0 \in E_0, X_1 \in E_1, \dots)$ para cualesquiera borelianos, $T: X \to X$ es la función dada por $T(\omega)_n = \omega_{n-1}$,mientras que f está dada por que $f(\omega) = \omega_0$ para cada $\omega \in R^Z$.

Si ω es la realización del proceso, entonces $\bar{f}(\omega)$ es el promedio temporal de la realización como se describió inicialmente.

Mientras que $f = g \quad c.s.$ para g definida como $g(\omega) = 1$ si $\omega_0 = 1$ y $g(\omega) = 0$ en cualquier otro caso, que es una función simple, de tal manera que

$$\int_{\Omega} fd\mu = \int_{\Omega} gd\mu = E[X]$$

Como ejemplo de que la igualdad de los promedios no se da para cualquier sistema, consideremos $p = \{z \quad \}_{z\in Z}$, μ la medida de probabilidad concentrada en p, y $f(\omega) = \omega_0$, en este caso $\bar{f}(\omega)$ diverge a infinito casi seguramente mientras que $\int_{\Omega} fd\mu = 0$.

Enunciamos los teoremas centrales de esta área conocidos como Teoremas Ergódicos.

Teorema Ergódico Medio (von Neumann, 1932)

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida sigma finito, sea $T: \Omega \to \Omega$ una transformación que preserva la medida, y sea $f \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Entonces existe una función $\bar{f} \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} fT^k - \bar{f} \right\|_2 = 0$$

Además, si T es ergódica, entonces

$$\bar{f} = \int_{\Omega} fd\mu$$

Teorema Ergódico Puntual (Birkhoff, 1931)

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad, sea $T: \Omega \to \Omega$ un transformación que preserva la medida, y sea $f \in L(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Entonces

$$\bar{f}(\omega) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k(\omega)\right)$$

Existe casi seguramente.

Además, si T es ergódica, entonces

$$\bar{f}(\omega) = \int_{\Omega} fd\mu \quad c.s.$$

Ejemplo de aplicación a un problema de probabilidad

Consideremos la sucesión $\{2^n\}_{n\in N}$, y consideremos la sucesión formada por el primer dígito de izquierda a derecha de cada elemento, es decir, las siguientes sucesiones

Potencias de 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, …
Primer dígito: 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, …

El problema consiste en calcular la probabilidad de que un número de la segunda sucesión sea $k = 1,2, \dots ,9$.

Sea d un elemento arbitrario de la sucesión de los primeros dígitos y sea 2^n el elemento que le corresponde la sucesión de potencias de 2. Notemos que

$$
\begin{aligned}
&d = k \\
&\Leftrightarrow \exists m \in N:\ k10^m \leq 2^n < (k+1)10^m \\
&\Leftrightarrow \exists m \in N:\ logk + m \leq nlog2 \\
&\qquad < log(k+1) + m \\
&\Leftrightarrow logk \leq \{nlog2\} \quad < log(k+1)
\end{aligned}
$$

Sea $\Omega = (0{,}1)$ equipado con μ, la medida de Lebesgue, y sea $T: \Omega \rightarrow \Omega$ dada por $T(\omega) = \{\omega + log2\}$. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
&P(d = k) = \overline{\chi_{[logk, log(k+1))}}(log2) \\
&= \overline{\chi_{[logk, log(k+1))}}(nlog2)\ \ para\ toda\ n \in N \\
&= \int_\Omega \chi_{[logk, \log(k+1))}\, d\mu = lo\,g\left(\frac{k+1}{k}\right)
\end{aligned}
$$

Conclusiones

En este trabajo se hicieron visibles las relaciones que la teoría ergódica tiene con otras áreas del conocimiento, especialmente con la probabilidad.

Referencias

Einsiedler M. & Ward T. (2011). Ergodic Theory: with a view towards Number Theory. Londres: Springer-Verlag London.

Petersen K. (1983). Ergodic Theory. Londres: Cambridge University Press.

Pollicott M. & Yuri M. (1998). Dynamical systems and ergodic theory. Londres: Cambridge University Press.

Ugalde E. (diciembre, 2007). De la mecánica estadística a la teoría ergódica. Revista Mexicana de Física, 53, pp. 191-194.