



ANÁLISIS DE VARIANZA PARA COMPARAR EL EFECTO DEL NITRÓGENO EN MAÍZ

LIZBETH GUTIÉRREZ GUZMÁN ^a, MARÍA FERNANDA PÉREZ CORDERO ^a,
MARIA GUADALUPE VAZQUEZ PE'NA ^a, BULMARO JUÁREZ HERNÁNDEZ ^a

^aFacultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue.
e-mail: lg7448537@gmail.com, fernandapeco13@gmail.com, lupitavazquez260399@gmail.com,
bjuarez@fcfm.buap.mx

Resumen

Dada la importancia del desarrollo sustentable en nuestros días, se efectúa el presente análisis con el objetivo de estudiar la respuesta morfológica de cuatro variedades de maíz cultivadas en el estado de Puebla: Sb 302 Berentsen (Teziutlán), criollo azul (Hueytamalco), criollo blanco (Tepexi de Rodríguez) y criollo azul (Tepexi de Rodríguez) ante la aplicación de fertilizantes con dos concentraciones distintas de nitrógeno (20 % y 100 %) en condiciones controladas. Con un diseño completamente aleatorizado utilizando como variable respuesta la longitud total de raíces secundarias (LTRS) a los 35 días de crecimiento, se contrastará la respuesta a cada dosis de N en las cuatro variedades y posteriormente se determinará qué dosis representa una diferencia favorable en el desarrollo de las plántulas de maíz aplicando un Análisis de Varianza (ANVA).

Palabras clave: Variedades de maíz, nitrógeno, ANVA.

1. Introducción

Uno de los cereales más importantes a nivel mundial es el maíz por el contenido nutricional que aporta al ser humano y a los animales, además de ser materia prima de la industria y por su adaptabilidad que le permite crecer en distintas regiones. Este grano tiene su origen en América donde se ha cultivado desde hace más de 5 mil años, principalmente para la alimentación humana y animal, así como para la elaboración de diferentes productos como aceites, pinturas y jabones [11].

En México también tiene una importancia social y cultural, donde se registran 59 variedades criollas de maíz y gran parte del territorio nacional es propicio para la producción, por ello, en los 32 Estados de la República Mexicana se produce dicho grano, lo que en 2019 lo posicionó como el séptimo productor a nivel mundial. En 2017 se sembró una superficie de 7.5 millones de hectáreas con una producción de 27.8 millones de toneladas, de las cuales, el 4 % se produjeron en Puebla [9].

La producción mundial de maíz ha aumentado significativamente en las últimas décadas, la superficie plantada pasó de 127 millones de hectáreas en 1987 a 197 millones en 2019. Este incremento se debe sobre todo a las mejoras genéticas, a la aplicación de técnicas más eficientes

y a la utilización de fertilizantes [11].

La fertilización es un factor determinante en la producción agrícola, sin embargo, los cultivos absorben únicamente entre el 10 % y el 60 % del fertilizante suministrado [10]. En México, en los últimos 40 años, el consumo de estos insumos se ha incrementado deliberadamente, pues pasó de 5×10^4 Mg a más de 5.5×10^6 Mg [6] pero su uso no ha sido el más adecuado, ocasionando perjuicios al medio ambiente. En el caso de fertilizantes nitrógenados sólidos, los cuales son de uso más frecuente que los líquidos o gaseosos, el nitrógeno se encuentra principalmente como nitrato (NO_3^-), y una propiedad de éstos es su alta movilidad en el agua, lo que les permite alcanzar los mantos acuíferos. La cantidad de nitratos en el subsuelo depende, entre otros factores, de la cantidad y el momento de fertilización. El agua con altas concentraciones de nitratos representa un riesgo para la salud pues inhibe el transporte de oxígeno en la sangre y su presencia comúnmente pasa desapercibida. La alta disponibilidad de nitratos en el suelo también puede aumentar la emisión de óxido nitroso (N_2O), el cual es un gas de efecto invernadero que es producido por microorganismos durante el proceso de desnitrificación pero desde el punto de vista agronómico, este mecanismo no reduce la eficiencia de la fertilización por lo que no se le ha otorgado relevancia a

disminuir su emisión [1].

No obstante, el nitrógeno es el nutriente más importante en el crecimiento de los cultivos debido a su participación en las reacciones bioquímicas propias de la actividad metabólica de la planta. En el caso particular del maíz, el N se acumula en tallos y hojas favoreciendo la fotosíntesis lo que se refleja en un mayor número de granos en las mazorcas, por lo que hay una relación directa entre la nutrición con nitrógeno del cultivo y el rendimiento de la producción [10]. Sin embargo, los suelos presentan cierta deficiencia lo que justifica la inclinación de los productores por el uso de fertilizantes y que un porcentaje significativo de su inversión se destina a la adquisición de estos insumos.

Por todo esto, en la actualidad, la producción sustentable de maíz es un tópico de suma relevancia y controversia, pues es de carácter perentorio encontrar un equilibrio entre la productividad y la contaminación para salvaguardar la seguridad alimentaria, económica y el medio ambiente.

2. Obtención de datos

El experimento se llevó a cabo en invernaderos del Departamento de Investigación en Ciencias Agrícolas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla durante 35 días con suministro de los fertilizantes con concentraciones de 20 % y 100 % de nitrógeno. Se realizó considerando dos factores: variedad de maíz y concentración de N aplicada, siguiendo un diseño completamente aleatorizado. De cada variedad, en cada tratamiento, se obtuvo una muestra aleatoria de 6 plántulas sanas.

Los diferentes tipos de cultivos de maíz y su origen se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Variedades de maíz utilizadas en el estudio.

| Número | Cultivar | Localidad |
|--------|------------------|---------------------|
| 1 | SB 302 Berentsen | Teziutlán |
| 2 | Criollo azul | Hueytamalco |
| 3 | Criollo blanco | Tepexi de Rodríguez |
| 4 | Criollo azul | Tepexi de Rodríguez |

Las mediciones de la variable respuesta, longitud total de las raíces secundarias (LTRS), se efectuaron manualmente por una sola persona usando una regla.

3. Análisis Estadístico

Utilizar únicamente a la variable longitud de total de las raíces secundarias (LTRS) no representa una pérdida importante de información para efectuar un análisis estadístico [4]. Dicha variable respuesta se estudiará por medio de un Análisis de Varianza (ANVA) [3] en un diseño completamente aleatorizado. Primero, para comparar la respuesta en los cuatro cultivos ante dosis del 20 %N y 100 %N, debido al rechazo de la hipótesis nula se realizará la respectiva prueba de contrastes [3] para identificar a

las variedades estadísticamente discernibles. Finalmente, se estudia la idoneidad del modelo propuesto en cada caso mediante un análisis de los residuos estandarizados, para probar normalidad se ejecutaron las pruebas Q-Q [8] y de Kolmogorov-Smirnov [12], para verificar la homogeneidad de varianzas se analiza la dispersión de los residuos de cada tratamiento [2] y se utiliza la prueba de Bartlett [3], con ayuda del software Python [7].

Posteriormente, se comparan ambas dosis para determinar cuál es más favorable en cada cultivo con un ANVA, donde se rechace la hipótesis nula se efectuará una comparación de medias para establecer la superioridad de uno de los tratamientos [3]. Se verifica la idoneidad del modelo con las mismas pruebas que el caso anterior.

Todos los cuantiles aquí utilizados se calcularon en Excel [5].

3.1. Modelo propuesto para comparar las cuatro variedades de maíz ante la misma concentración de N. Primero, se va a determinar si los 4 cultivares tienen la misma respuesta ante la misma concentración de nitrógeno. Para la dosis de 20 % de N podemos asociar el siguiente modelo lineal para describir las observaciones de LTRS.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4. \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases} \quad (1)$$

Donde y_{ij} representa la respuesta observada en la j -ésima unidad experimental (plántula de maíz) en el i -ésimo nivel del factor cultivar con $i = 1, 2, 3, 4$ (los números asociados a cada cultivar son los ya mostrados en la Tabla 1).

Sobre los términos restantes, μ es la media general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor cultivar y ε_{ij} es el componente del error experimental. Bajo la suposición de que los ε_{ij} son independientes con distribución normal con media cero y varianza homogénea. Nótese que en total hay 24 observaciones para la dosis del 20 % de nitrógeno.

Se desea contrastar los efectos de cada nivel, por lo que se probará el juego de hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

vs

$$H_a : \text{al menos un efecto es diferente a los demás.}$$

Los resultados del ANVA para el modelo se presentan en la Tabla 2.

Utilizado el modelo propuesto en la ecuación (1) pero para analizar el efecto de cada nivel del factor cultivar bajo la dosis del 100 %N, se obtuvo el ANVA mostrado en la Tabla 3.

En ambos casos los valores obtenidos para la estadística F_0 son mayores que el cuantil de orden 0.05 de una F de Fisher con 20 g.d.l. en el denominador y 3 g.d.l. en

Tabla. 2. ANVA del factor cultivar en una dosis de 20 %N con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|----------|------|------------|-----------|---------|
| Cultivar | 3 | 16027.9016 | 5342.6338 | 4.39450 |
| Error | 20.0 | 24315.0766 | 1215.7538 | |
| Total | 23.0 | 40342.9783 | | |

Tabla. 3. ANVA del factor cultivar en una dosis de 100 %N con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|----------|------|----------|---------|-------|
| Cultivar | 3 | 3485.77 | 1161.92 | 3.40 |
| Error | 20.0 | 6820.04 | 341.002 | |
| Total | 23.0 | 10305.81 | | |

el numerador, $F_{20,0.05}^3 = 3.0984$, entonces se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5 %, por lo que posteriormente se realizará una prueba de contrastes para identificar al menos a una variedad que esté respondiendo diferente al tratamiento de cada concentración de nitrógeno.

3.1.1. Comparaciones múltiples. En la sección anterior hemos probado que la igualdad de los efectos es diferente, para cada concentración de nitrógeno. Ahora se realizará una prueba de comparaciones múltiples para determinar cuáles son los tratamientos que ocasionan el rechazo de H_0 en el ANVA.

Las pruebas para comparaciones múltiples más utilizadas se basan en la distribución *t de Student* y contrastes. Nos interesa comparar hipótesis de la forma

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ vs } H_a : \mu_i \neq \mu_j.$$

Así tenemos los siguientes contrastes para cada una de las pruebas:

$$L_1 : \tau_1 - \tau_2$$

$$L_2 : \tau_1 - \tau_3$$

$$L_3 : \tau_1 - \tau_4$$

$$L_4 : \tau_2 - \tau_3$$

$$L_5 : \tau_2 - \tau_4$$

$$L_6 : \tau_3 - \tau_4$$

Además, utilizaremos el estadístico de prueba

$$t_0 = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{\sqrt{CME\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

para cada contraste $\tau_i - \tau_j$. Donde n_i es el tamaño de la muestra del cultivo i .

Realizando la comparación múltiple para la concentración 20 % de nitrógeno, por el método de contrastes obtenemos los siguientes resultados:

Tabla. 4. Comparación múltiple por contrastes para el 20 % de nitrógeno .

| Contraste | t_0 | Cuantil | Estado |
|-------------------------|--------|---------|--------|
| $L_1 : \tau_1 - \tau_2$ | -2.035 | 2.086 | NR |
| $L_2 : \tau_1 - \tau_3$ | -0.459 | 2.086 | NR |
| $L_3 : \tau_1 - \tau_4$ | -3.229 | 2.086 | R |
| $L_4 : \tau_2 - \tau_3$ | 1.575 | 2.086 | NR |
| $L_5 : \tau_2 - \tau_4$ | -1.194 | 2.086 | NR |
| $L_6 : \tau_3 - \tau_4$ | -2.770 | 2.086 | R |

De la Tabla 4 tenemos que $L_3 : \tau_1 - \tau_4$ y $L_6 : \tau_3 - \tau_4$ son discernibles, entonces $H_0 : \tau_1 = \tau_4$ y $H_0 : \tau_3 = \tau_4$ se rechazan. Esto es, al menos una variedad está respondiendo diferente al tratamiento de la concentración del 20 % de nitrógeno.

Así, con un nivel de significancia del 5 % podemos decir que el tratamiento 1 tiene el mismo efecto que el tratamiento 2 y 3, además el tratamiento 2 tiene el mismo efecto que el tratamiento 3 y 4. Pero los tratamientos 1 y 4 son distintos en sus efectos, y también los son los tratamientos 3 y 4.

Ahora bien, para la concentración del 100 % tenemos los siguientes datos:

Tabla. 5. Comparación múltiple por contrastes para el 100 % de nitrógeno .

| Contraste | t_0 | Cuantil | Estado |
|-------------------------|--------|---------|--------|
| $L_1 : \tau_1 - \tau_2$ | -1.481 | 2.086 | NR |
| $L_2 : \tau_1 - \tau_3$ | -1.764 | 2.086 | NR |
| $L_3 : \tau_1 - \tau_4$ | -3.184 | 2.086 | R |
| $L_4 : \tau_2 - \tau_3$ | -0.282 | 2.086 | NR |
| $L_5 : \tau_2 - \tau_4$ | -1.702 | 2.086 | NR |
| $L_6 : \tau_3 - \tau_4$ | -1.419 | 2.086 | NR |

De la Tabla 5 tenemos que, $L_3 : \tau_1 - \tau_4$ es discernible, entonces se rechaza $H_0 : \tau_1 = \tau_4$. Así, al menos una variedad está respondiendo diferente al tratamiento de la concentración del 100 % de nitrógeno.

Así, con un nivel de significancia del 5 % podemos decir que el tratamiento 1 tiene el mismo efecto que el tratamiento 2 y 3. El tratamiento 2 tiene el mismo efecto que el tratamiento 3 y 4. Y finalmente, los tratamiento 3 y 4 tienen el mismo efecto. Pero el Tratamiento 1 y 4 no lo tienen.

3.1.2. Idoneidad del modelo. Para los datos de las plántulas de las cuatro variedades a las que se les suministró el fertilizante con 20 % de nitrógeno, la Figura 1 corresponde a la prueba cuantil vs cuantil (Q-Q) para los residuos estandarizados del modelo, que al distribuirse de forma cercana alrededor de la recta podemos asumir que siguen una distribución normal, además de que el estadístico de Kolmogorov-Smirnov es menor que el cuantil de nivel $\alpha = 0.05$ para probar normalidad.

Haciendo las mismas pruebas para la concentración

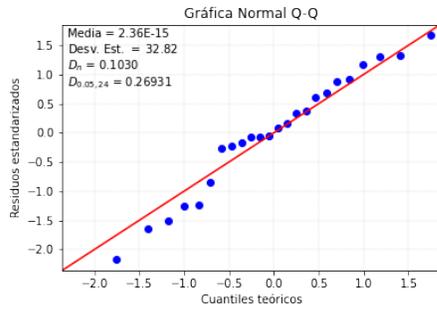


Figura. 1. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del 20 %N.

del 100 %, observamos en la Figura 2 que los puntos residuales también siguen una distribución normal con media aproximadamente 0:

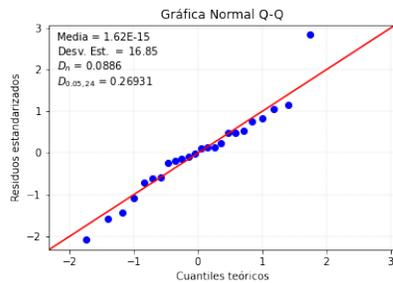


Figura. 2. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del 100 %N.

Ahora bien, para verificar si se cumple la hipótesis de igualdad de varianzas, se ilustran en las Figuras 3 y 4, los residuos estandarizados para cada tratamiento.

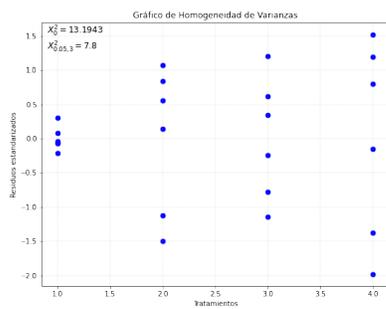


Figura. 3. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados por cultivar en una dosis de 20 %N.

En la figura 3 se observa una diferencia notable entre la dispersión de los residuos para el cultivar 1 y los 3 restantes, lo que sugiere que la varianza no es la misma, más aún el estadístico de la prueba de Bartlett tiene un valor mayor que el cuantil de orden 0.05 de una chi-cuadrada con 3 g.d.l. por

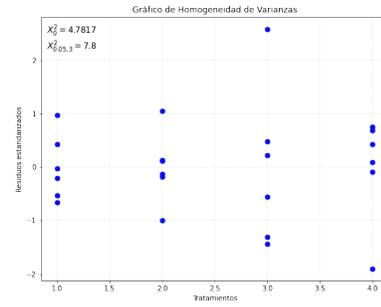


Figura. 4. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados por cultivar en una dosis de 100 %N.

lo que se rechaza la hipótesis nula de igualdad de varianzas.

Por otro lado, en la figura 4 no existe una diferencia en la dispersión de los residuos en los cuatro cultivares excepto para uno de los residuos del tercer cultivar, pero parece razonable asumir que las varianzas son iguales para los cuatro cultivares ante una dosis de 100 %N. Además, la prueba de Bartlett no rechaza la hipótesis nula.

3.2. Modelo propuesto para comparar tres variedades ante la concentración de 20 %N.

Dado que en el ANVA del factor cultivar en una dosis de 20 %N se rechazó la hipótesis nula de la igualdad de los efectos y mas aún, se probó con un nivel de significancia del 5 % que no se satisface la hipótesis de igualdad de varianzas, del diagrama de dispersión en la figura 3 vemos que el cultivo 1 (SB 302 Berentsen) tiene una variabilidad distinta a los otros cultivos por lo que se propone estudiar a los tres cultivos cuyos errores estandarizados en el modelo anterior tenían una dispersión más homogénea, para lo que se asociará el siguiente modelo con LTRS como variable respuesta:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3. \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases} \quad (2)$$

Donde y_{ij} representa la respuesta observada en la j -ésima plántula en el i -ésimo nivel del factor cultivar con $i = 1, 2, 3$. (Cada número corresponde a un cultivo según la Tabla 6).

Acerca de los términos restantes, μ es la media general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor cultivar y ε_{ij} es el componente del error experimental. Bajo la suposición de que los ε_{ij} son independientes con distribución normal con media cero y varianza homogénea. Nótese que en total hay 18 observaciones para la dosis del 20 % en los 3 cultivos.

Con un análisis de varianza se contrastará el juego de hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

vs

$$H_a : \text{al menos un efecto es diferente a los demás.}$$

Tabla. 6. Variedades de maíz.

| Número | Cultivar | Localidad |
|--------|----------------|---------------------|
| 1 | Criollo azul | Hueytamalco |
| 2 | Criollo blanco | Tepexi de Rodríguez |
| 3 | Criollo azul | Tepexi de Rodríguez |

Tabla. 7. ANVA con 3 cultivos en una dosis del 20 % con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|----------|-----|------------|-----------|--------|
| Cultivar | 2 | 9388.5411 | 4694.2705 | 2.9187 |
| Error | 15 | 24124.8616 | 1608.3241 | |
| Total | 17 | 33513.4027 | | |

Por los resultados obtenidos en la Tabla 7, tenemos que el valor de la estadística $F_0 = 2.9187$ es menor que el cuantil de orden 0.05 de una F de Fisher con 15 g.d.l. en el denominador y 2 g.d.l. en el numerador, $F_{15,0.05}^2 = 3.68$, entonces no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia de 0.05 %, es decir, existe evidencia suficiente para concluir que el efecto de una dosis de 20 %N es igual en los tres cultivos bajo estudio.

3.2.1. Idoneidad del modelo. La figura 5 ilustra la prueba Q-Q para los residuos estandarizados del modelo, los cuales se distribuyen de manera cercana a la recta, además de que por la prueba de Kolmogorov-Smirnov no se rechaza la hipótesis de que tienen una distribución normal con media aproximadamente 0.

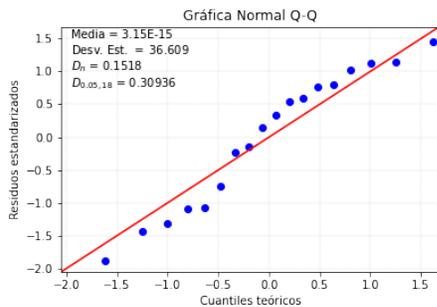


Figura. 5. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del 20 %N en 3 cultivos.

Ahora, en la figura 6 se verifica la hipótesis de homogeneidad de varianzas donde se observa una dispersión similar de los residuos estandarizados de cada cultivar y por la prueba de Bartlett con un nivel de significancia del 5 % no se rechaza la hipótesis de igualdad de varianzas.

3.3. Modelo propuesto para contrastar las concentraciones de nitrógeno en cada variedad. A partir del análisis anterior, se concluyó que el efecto de cada dosis de nitrógeno no es igual en las cuatro variedades de maíz por ello se

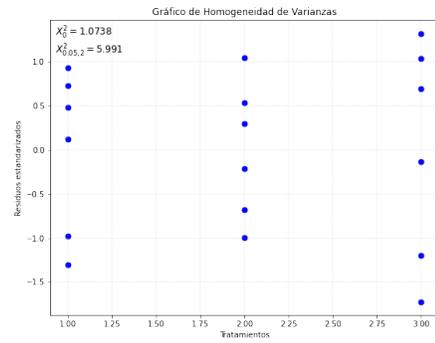


Figura. 6. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados por cultivar en una dosis de 20 %N.

evaluará la eficacia de los fertilizantes con 20 %N y 100 %N para cada cultivar.

Se asociará el siguiente modelo lineal con LTRS como variable respuesta:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 1, 2. \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases} \quad (3)$$

Donde y_{ij} representa la respuesta observada en la j -ésima plántula de determinado cultivo en el i -ésimo nivel del factor concentración de nitrógeno con $i = 1, 2$. (el tratamiento 1 es la concentración del 20 % y el tratamiento 2 del 100 %).

Acerca de los términos restantes, μ es la media general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor concentración de nitrógeno y ε_{ij} es el componente del error experimental. Bajo la suposición de que los ε_{ij} son independientes con distribución normal con media cero y varianza homogénea. Nótese que en total hay 12 observaciones para cada variedad.

Se desea contrastar los efectos de cada nivel, por lo que se probará el juego de hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 \text{ vs } H_a : \tau_1 \neq \tau_2.$$

El análisis de varianza para cada variedad se exhibe en las Tablas 8 a la 11.

Tabla. 8. ANVA del factor dosis de N en el cultivar SB 302 Berentzen con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|---------|------|------------|------------|---------|
| Dosis N | 1.0 | 1367.46749 | 1367.46749 | 16.3730 |
| Error | 10.0 | 835.195 | 83.5195 | |
| Total | 11.0 | 2202.6625 | | |

Nótese que de acuerdo al valor del estadístico F_0 obtenido en la Tabla 8, se rechaza la hipótesis nula para el cultivo SB 302 Berentzen, ya que este estadístico es mayor que el cuantil de orden 0.05 de una F de Fisher, con 10

g.d.l. en el denominador y 1 g.d.l. en el numerador, es decir $F_{10,0.05}^1 = 4.965$.

Tabla 9. ANVA del factor dosis de N en el cultivar criollo azul (Hueytamalco) con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|---------|------|------------|-----------|--------|
| Dosis N | 1 | 6491.4008 | 6491.4008 | 8.4355 |
| Error | 10.0 | 7695.3283 | 769.532 | |
| Total | 11.0 | 14186.7291 | | |

Para la Tabla 9, de acuerdo al valor obtenido de F_0 se rechaza la hipótesis nula para el cultivo criollo azul (Hueytamalco), ya que $F_0 > F_{10,0.05}^1 = 4.965$.

Tabla 10. ANVA del factor dosis de N en el cultivar criollo blanco (Tepexi de Rodríguez) con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|---------|------|------------|----------|----------|
| Dosis N | 1 | 416.5408 | 416.5408 | 0.487280 |
| Error | 10.0 | 8548.26833 | 854.8268 | |
| Total | 11.0 | 8964.8091 | | |

De acuerdo con lo observado en la Tabla 10, dado el valor obtenido del estadístico F_0 no se rechaza la hipótesis nula para la variedad de criollo blanco (Tepexi de Rodríguez), ya que $F_0 < F_{10,0.05}^1 = 4.965$.

Tabla 11. ANVA del factor dosis de N en el cultivar criollo azul (Tepexi de Rodríguez) con variable respuesta LTRS.

| Fuente | GDL | SC | CM | F_0 |
|---------|------|------------|------------|--------|
| Dosis N | 1 | 8242.52083 | 8242.52083 | 5.8639 |
| Error | 10.0 | 14056.3283 | 1405.6328 | |
| Total | 11.0 | 22298.8491 | | |

En la Tabla 11, nótese que de acuerdo con que el valor del estadístico obtenido F_0 , se rechaza la hipótesis nula para la variedad criollo azul (Tepexi de Rodríguez), ya que $F_0 > F_{10,0.05}^1 = 4.965$.

3.3.1. Comparación de medias. Para establecer la superioridad de una concentración de nitrógeno en los cultivos para los que se rechazó la hipótesis nula, se contrastarán las hipótesis

$$H_0 : \tau_1 - \tau_2 \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \tau_1 - \tau_2 > 0$$

con el estadístico

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}}$$

donde

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

y S_X^2 y S_Y^2 son las varianzas muestrales.

La región de rechazo de esta prueba se encuentra en la cola derecha de la distribución t de Student con $(m+n-2)$ g.d.l. Se rechaza la hipótesis nula si $t_0 \geq t_{\alpha(n+m-2)}$.

Para el caso de estudio, la muestra X son las observaciones de cada cultivo bajo una dosis del 20 %N y la muestra Y las del 100 %, ambas de tamaño 6, por lo que la hipótesis nula se rechazará con un nivel de significancia del 5 % si $t_0 \geq t_{10,0.05} = 1.8125$.

Nótese que \bar{X} es un estimador insesgado de $\mu_X = \mu_1 = \mu + \tau_1$, análogamente, \bar{Y} es un estimador insesgado de $\mu_Y = \mu_2 = \mu + \tau_2$.

Tabla 12. Prueba de hipótesis $H_0 : \tau_1 - \tau_2 \leq 0$ vs $H_a : \tau_1 - \tau_2 > 0$.

| Variedad | t_0 |
|------------------------------------|--------|
| SB 302 Berentsen | 4.0463 |
| Criollo azul (Hueytamalco) | 2.9043 |
| Criollo azul (Tepexi de Rodríguez) | 2.0557 |

Según los valores mostrados en la Tabla 12, en los tres cultivos se rechaza la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa, por lo que existe evidencia suficiente para concluir que $\tau_1 > \tau_2$, esto es, que la concentración de 20 %N resulta ser más favorable en estos cultivos.

3.3.2. Idoneidad del modelo. En las figuras 7 a la 10, para verificar la hipótesis de la distribución normal de los errores experimentales se ilustra la prueba Q-Q para los residuos estandarizados del modelo de cada cultivar, en las que se aprecia una ligera dispersión alrededor de la recta, sin embargo, por la prueba de Kolmogorov-Smirnov no se rechaza la hipótesis de que los residuos sigan una distribución normal con media aproximada 0 con un nivel de significancia del 5 %.

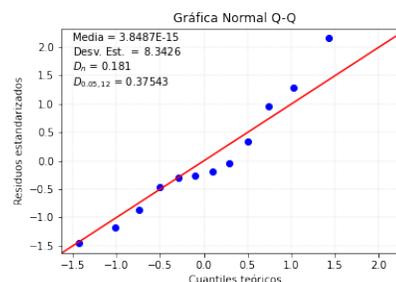


Figura 7. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del cultivar SB 302 Berentsen.

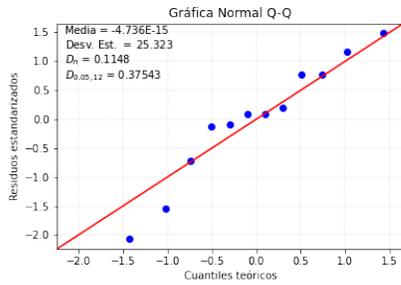


Figura 8. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del cultivar criollo azul (Hueytamalco).

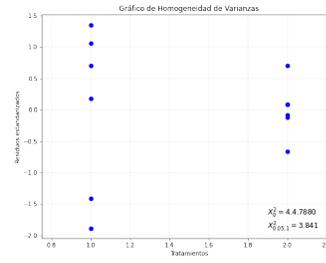


Figura 12. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados del cultivar criollo azul (Hueytamalco).

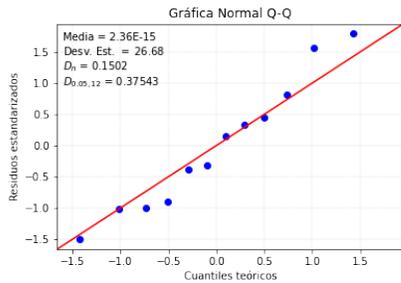


Figura 9. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del cultivar criollo blanco (Tepexi de Rodríguez).

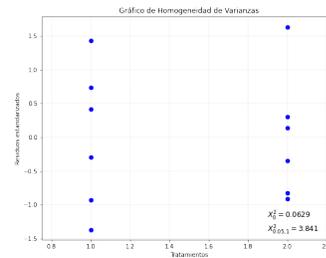


Figura 13. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados del cultivar criollo blanco (Tepexi de Rodríguez).

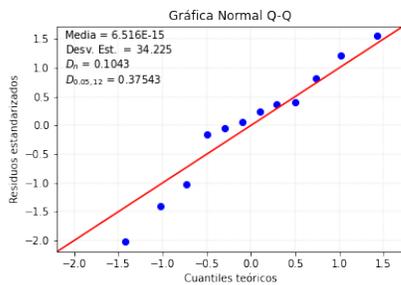


Figura 10. Prueba de normalidad para los residuos estandarizados del cultivar criollo azul (Tepexi de Rodríguez).

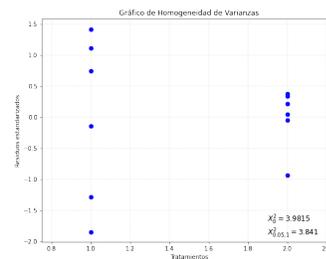


Figura 14. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados del cultivar criollo azul (Tepexi de Rodríguez).

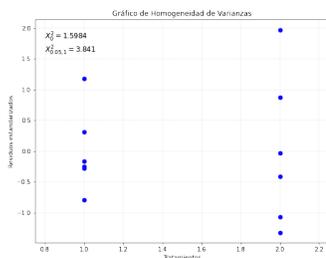


Figura 11. Gráfico de dispersión de los residuos estandarizados del cultivar SB 302 Berentsen.

Ahora, para verificar la hipótesis de igualdad de varianzas, se ilustran, figuras 11 a 14, los residuos estandarizados para cada variedad de maíz. Se observa que en los cultivares SB 302 Berentsen y criollo blanco de Tepexi de Rodríguez no hay una diferencia notable entre los residuales y la prueba de Bartlett no rechaza la igualdad de varianzas, mientras que en las variedades criollo azul de Hueytamalco y de Tepexi de Rodríguez sí hay una diferencia entre los residuales de cada concentración de nitrógeno y la prueba de Bartlett rechaza la homogeneidad de varianzas en ambos cultivos.

4. Conclusiones

En el primer análisis, donde se estudió con un ANVA si todos los cultivos tienen la misma respuesta ante la misma concentración de nitrógeno, en el caso de 20 %N se rechazó la hipótesis de igualdad de los efectos, sin embargo, el modelo propuesto no fue el más adecuado puesto que no se satisfizo la hipótesis de homogeneidad de varianzas con un nivel de significancia del 5 %, por lo que se realizó un nuevo estudio únicamente con los cultivares criollo azul de Hueytamalco y criollo blanco y azul de Tepexi de Rodríguez cuyos residuos, en el primer modelo, presentaban una variabilidad similar. En este nuevo análisis se concluyó que una dosis del 20 %N produce el mismo efecto en dichos cultivos, además este modelo sí resultó apropiado, así el cultivo SB 302 Berentsen fue el que provocó el rechazo de la hipótesis de igualdad de varianzas en el primer estudio. Mas aún, la prueba de contrastes mostró con un nivel de significancia del 5 % que para una concentración del 20 % los cultivos SB 302 Berentsen y criollo azul de Tepexi de Rodríguez responden diferente.

Por otra parte, en el caso de 100 %N también se rechazó que los efectos de tal concentración en los cuatro cultivos sean iguales y de la prueba de contrastes se puede concluir que al menos los cultivos SB 302 Berentsen y criollo azul de Tepexi de Rodríguez presentan respuestas distintas ante la misma dosis de nitrógeno, mismos cultivares que respondieron distinto ante 20 %N. Además, en este caso el modelo sí fue adecuado pues se cumplieron las hipótesis de normalidad y homogeneidad de varianzas con un nivel de significancia del 5 %.

Por otro lado, de acuerdo con el valor obtenido para el estadístico F_0 en el ANVA de cada cultivar, se rechazó la hipótesis nula de igualdad de efectos ante las dos concentraciones de nitrógeno en las variedades SB 302 Berentsen, criollo azul de Hueytamalco y criollo azul de Tepexi de Rodríguez con un nivel de significancia del 5 % y según el análisis de comparación de medias se concluye que una dosis del 20 %N es más favorable para estos cultivos. Mientras que no existe evidencia suficiente para afirmar que tenemos una diferencia en el desarrollo morfológico de las plántulas de criollo blanco de Tepexi de Rodríguez ante dosis del 20 %N y 100 %N. No obstante, en el caso del criollo azul de Hueytamalco y de Tepexi de Rodríguez, las conclusiones podrían no ser apropiadas puesto que de acuerdo con la prueba de Bartlett no se cumple la hipótesis de igualdad de varianzas con un nivel de significancia del 5 %.

Agradecimientos

Al Dr. Jenaro Reyes Matamoros por facilitarnos los datos para desarrollar este proyecto.

Referencias

- [1] Asociación Geoinnova, *Fertilizantes con nitrógeno y sus impactos ambientales.*, Fecha de consulta: 29 de Abril

de 2021. Disponible en: <https://geoinnova.org/blog-territorio/nitrogeno>.

- [2] Canavos, G, *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos.*, 2da, ed., México, D.F.: Mc Graw-Hill, 1988.
- [3] Infante, S. y Zárate, G., *Métodos Estadísticos. Un enfoque interdisciplinario.* , 3ra ed. México, D.F.: Editorial Trillas, 2005.
- [4] Juárez, B., Reyes, J. y Lübberstedt, T., *Diseño y análisis de un experimento de uso eficiente de nitrógeno en maíz.*, Capítulo 8. de Matemáticas y sus aplicaciones 6, En F. Macías (Ed.), 1ra ed., pp. 195-211, 2015. Dirección de Fomento Editorial: BUAP.
- [5] Microsoft Excel, *Software*, Disponible en: <https://www.microsoft.com/es-mx/microsoft-365/excel>, 2013.
- [6] Peña, J., Grageda, O. y Vera, J., *Manejo de los fertilizantes nitrogenados en México: uso de las técnicas isotópicas (15n).*, Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57320109>, Terra Latinoamericana, 20(1), 51-56, 2002. ISSN: 2395-8030, Fecha de consulta: 29 de Abril de 2021.
- [7] Python Software Foundation, *Software, Python (3.7)*, Disponible en: <https://www.python.org/>, 2001.
- [8] Rincón, L., *0398D Gráfica Q-Q*, Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=KOLYPpYNUuA>, 12 de noviembre de 2017.
- [9] Secretaría de Agricultura y Desarrollo Rural., *Maíz el cultivo de México.*, Disponible en: <https://www.gob.mx/agricultura/articulos/maiz-el-cultivo-de-mexico>, 2020. Fecha de consulta: 29 de Abril de 2021.
- [10] Sosa, B. y García, Y., *Eficiencia de uso del nitrógeno en maíz fertilizado de forma orgánica y mineral.*, Agronomía Mesoamericana, 29(1), 207-219. ISSN: 2215-3608. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=43754020017>. Fecha de consulta: 29 de Abril de 2021.
- [11] Statista, *Extensión de la superficie de cultivo de maíz en el mundo entre 2016-2020.* Disponible en: <https://es.statista.com/estadisticas/1130624/superficie-maiz-cultivada-en-el-mundo/>, 2020. Fecha de consulta: 29 de Abril de 2021.
- [12] Wackerly, D., Mendenhall, W. y Scheaffer, R., *Estadística matemática con aplicaciones, 7ma ed.* México, D.F.: Cengage Learning, 2008.