El proceso de Poisson y los tiempos de arribo

Ariana Cristal Romero Zahuantitla [a], Francisco Solano Tajonar Sanabria [b]. Hortensia Josefina Reyes Cervantes [c]. Fernando Velasco Luna [d].
[a,b,c,d] *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.*
[a] *cris_tal1210@hotmail.com* [b] *ftajonar@fcfm.buap.mx*, [c] *hreyes@fcfm.buap.mx* [d] *fvelasco@fcfm.buap.mx*,

Resumen

El proceso de Poisson es un proceso contador muy importante dentro de los procesos estocásticos el cual tiene aplicaciones en algunas áreas de investigación, tales como la Teoría de Confiabilidad, Teoría de Colas, Finanzas, Teoría de Riesgo. Un proceso de Poisson se caracteriza como el número de "eventos" o "éxitos" que ocurren en un intervalo de tiempo, por esta razón, generalmente se aplica en determinar la probabilidad el número de clientes que llegan a un banco, la probabilidad del número de llamadas que llegan a una central telefónica, etc.

El número de arribos a un establecimiento en una unidad de tiempo t, es una de las principales aplicaciones del proceso de Poisson debido a que se quiere saber el número de éxitos (llegadas) en una unidad de tiempo, esto con la finalidad de hacer un análisis o una mejora al funcionamiento de un sistema o de un establecimiento.

En este trabajo se presentan las caracteríscas básicas de un proceso de Poisson, de sus aplicaciones en otros campos de la matemática y también es de interés analizar la relación que existe entre los arribos y los inter-arribos.

Palabra claves: Proceso de Poisson, Arribo, Tiempo.

Introducción

El proceso de Poisson $\{N(t)|\ t\geq 0\}$ es un proceso contador en el que el interés se centra en el número de éxitos en una unidad de medida, en la mayoría de los casos, una unidad de tiempo t.

Actualmente existen diferentes ámbitos en los cuales podemos utilizar un proceso de Poisson, el más común, es el número de arribos a un banco, a un centro comercial o a un establecimiento en una unidad de tiempo, esto es, en estos casos se puede observar el número de clientes, usuarios, que llegan a un establecimiento en una unidad de tiempo (que puede ser, horas, minutos, segundos).

El presente trabajo tiene como propósito mostrar la definición y la relación que tiene el proceso de Poisson $\{N(t)|\ t\geq 0\}$ con los arribos; para lo cual se enuncian los principales resultados de un proceso de Poisson, así como los conceptos básicos que ayudan a una mejor comprensión de este tipo de procesos.

Metodología

Aspectos generales

Para las definiciones y teoremas que se utilizan, se considera a (Ω,F,P) un espacio de probabilidad base, donde Ω es el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio ε, esto es, el conjunto que contiene a todos los posibles resultados del experimento aleatorio y además, se conoce que Ω puede ser un conjunto finito, infinito y numerable o un conjunto infinito y no numerable; y los posibles resultados del experimento no necesariamente son numéricos. La componente F es la σ-álgebra de eventos la cual asegura que a todo elemento de F siempre es posible asignarle una medida de probabilidad y la componente P es llamada la función de probabilidad que permite asignar la probabilidad correspondiente a cualquier evento A϶F.

Definición 1. El proceso contador $\{N(t)| t\geq 0\}$ se dice que es un proceso de Poisson con intensidad λ, λ>0, si:

1. N (0) =0;
2. El proceso tiene incrementos independientes; y
3. El número de eventos en cualquier intervalo de longitud t es distribuido Poisson con media λt. Esto es, para todo, s, t ≥ 0
   $P\{N(t+s)-N(s)=n\}=\exp\{-\lambda.t\}(\lambda.t)^n/n!$,
   n= 0, 1, 2, ….

Observación: Note que de la condición (3) se sigue que el proceso de Poisson tiene incrementos independientes y también que

$$E[N(t)]=\lambda.t.$$

Para mas detalles puede consultar [1,2,3],

Los datos que se trabajaron pertenecen a un establecimiento de Miscelánea, se realizaron los registros durante una semana, y se registró el número de clientes que ingresan al establecimiento en un intervalo de tiempo de una hora, es decir, la unidad de medida utilizada es de una hora.

Metodología Estadística

Los datos recabados se muestran a continuación:

Horario	L	M	M	J	V	S	D
6:00 AM a 7:00 AM	39	43	25	39	29	53	28
7:00 AM a 8:00 AM	12	21	14	26	47	32	22
8:00 AM a 9:00 AM	12	17	17	41	38	41	34
9:00 AM a 10:00 AM	34	29	16	25	33	27	37
10:00 AM a 11:00 AM	16	60	24	23	25	61	41
11:00 AM a 12:00 PM	15	39	26	27	41	52	44
12:00 PM a 13:00 PM	24	11	28	43	52	55	40
13:00 PM a 14:00 PM	32	14	14	42	79	50	39
14:00 PM a 15:00 PM	22	30	39	24	16	42	62
15:00 PM a 16:00 PM	45	27	42	29	48	12	71
16:00 PM a 17:00 PM	20	25	23	27	53	26	11
17:00 PM a 18:00 PM	27	24	72	65	29	27	26
18:00 PM a 19:00 PM	72	28	15	38	61	32	42
19:00 PM a 20:00 PM	29	35	47	41	17	37	65
20:00 PM a 21:00 PM	42	52	16	44	44	61	66
21:00 PM a 22:00 PM	14	18	16	56	50	54	66
22:00 PM a 23:00 PM	11	18	29	50	36	25	12

1.1 Tabla de llegada de clientes

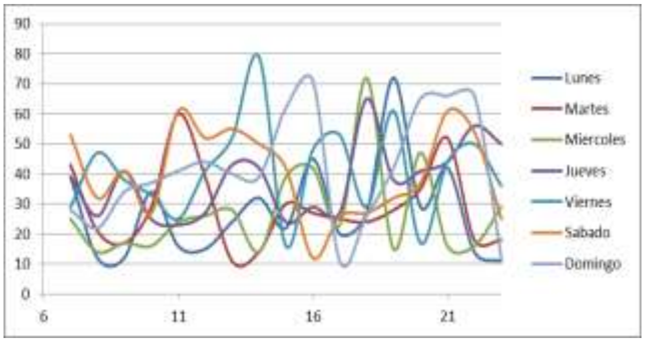
De manear resumida se tiene que:

	L	M	M	J	V	S	D
Promedio	27	29	27	38	41	40	42
Mínimo	11	11	14	23	16	12	11
Máximo	72	60	72	65	79	61	71

1.2 Tabla de resumen

En base a esto se obtiene que el promedio general es de 35 clientes que llegan al establecimiento en una hora, más aún como es un proceso de Poisson, entonces se distribuye como una Poisson con parámetro λ=35, hay que recordar que en una distribución Poisson el parámetro es igual al promedio y a la varianza.

Gráficamente los datos se ven de la siguiente manera:



1.3 Gráfica de llegada de clientes

De manera detallada se analiza y se deduce que los días en que hay más ingreso de clientes son viernes, sábado y domingo, además de que los horarios en que se hay más afluencia es de 12 a 1 de la tarde y de 4 a 6 de la tarde, esto obviamente puede deberse a diferentes factores como el clima, si es día festivo, etc., estos factores no son tomados en cuenta en este trabajo.

Una vez que se realizó el análisis de manera general se prosigue a enfocarse en la manera en que se dan las llegadas, esto es, el tiempo que transcurre de una llagada a otra, para esto se realizó de igual manera un registro de las llegada de los clientes al establecimiento registrando la hora y minuto en que estos llegaban, donde el tiempo cero se tomó igual a las 6:00 de la mañana que es la hora en la que el establecimiento abre, dichos registros se revisaron durante la primera hora todos los días de la semana, es importante antes de continuar, mencionar que los registros por día y por hora fueron realizados en la misma semana, esta semana se tomó sin que algún día de estos fuera festivo, o tuviera algún factor que pudiera alterar la información.

Aquí es donde se aplica el teorema que dice que los tiempos de ocurrencia de un evento a otro en un proceso de Poisson con intensidad λ, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente con media $1/\lambda$ [2,3]; es decir, que los tiempos de una llegada a otra se distribuyen exponencial con parámetro 1/35, esto debido a que $\lambda=35$.

Para este teorema se tiene muy presente la propiedad de la distribución exponencial conocida como "pérdida de memoria" que dice que la probabilidad de éxito es la misma en cualquier tiempo t, el siguiente ejemplo explica mejor dicha propiedad; "si la vida útil de un artículo se distribuye exponencialmente, entonces un artículo que ha estado en uso durante diez (o cualquier cantidad de horas) es tan bueno como un artículo nuevo en lo que respecta a la cantidad de tiempo restante hasta que el artículo falla.

Aplicando lo anterior al ejemplo que se está trabajando, se podría considerar que, la probabilidad de que llegue una persona al establecimiento a primera hora del día es la misma de que llegue a medio día o a final del día.

Ahora, se tiene un teorema que menciona que dado que ocurrieron *n* llegadas al tiempo *t*, cada llegada registrada en el tiempo correspondiente, es decir, T_1, T_2,…, T_n, estos tiempos tiene las mismas distribuciones que los estadísticos de orden que corresponden a *n* variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo (0,t] ver [2].

Entonces, si lo aplicamos al ejemplo, significa que la probabilidad de que ocurra un éxito es de 1/60, debido a que las llegadas se registran en el minuto en que ocurre, pues como ya se dijo el tiempo 0 es a las 6:00 de la mañana.

Esta propiedad se debe principalmente al hecho de que no se conoce exactamente la manera en que ocurrirán las llegadas, puede suceder en cualquier minuto del intervalo (0,60].

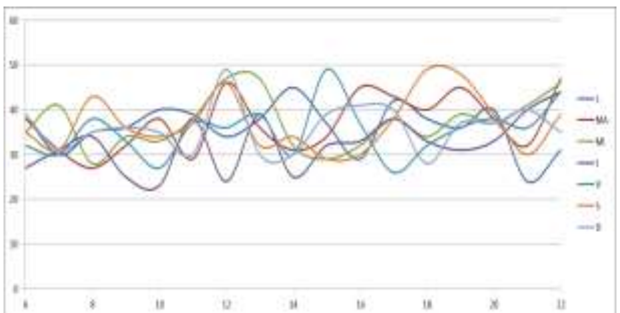
Con esta información se puede hacer un estudio de la situación del establecimiento, lo interesante aquí es aclarar y determinar el comportamiento de los arribos al establecimiento.

Resultados y Discusión

En este apartado se muestra los resultados a los que nos llevó el haber trabajado con la información.

Resultados preliminares

A continuación, se muestra una simulación que fue obtenida gracias a los registros recabados y a la información obtenida con estos.



1.4 Grafica de simulaciones

La simulación se realizó con ayuda de la herramienta estadística conocida como R, donde se hizo una simulación Poisson con parámetro $\lambda=35$, se realizó una simulación para cada día de la semana.

De 1.4 se observa que los días que tiene más afluencia continúan siendo los fines de semana, además de que el comportamiento en los horarios es muy parecido y si bien no son iguales, esta información es de utilidad para asegurar que los teoremas mencionados fueron aplicados adecuadamente.

Conclusiones

Los resultados muestran que, en efecto, el comportamiento de los registros recabados reales se parece mucho a los registros simulados, donde se sigue observando lo de un inicio, las horas más concurridas son de 12 a 1 de la tarde y de 4 a 6 de la tarde.

Se debe mencionar que esto es parte de una análisis que se esta llevando a cabo en un establecimiento, por lo cual, aún quedan algunos aspectos por analizar.

Esta información puede ser utilizada para fines distintos, tal vez para definir el número de personas que darán servicio en ciertos horarios, o cambiar los horarios de atención, etc.

Más allá de una toma de decisión, lo importante era verificar que se cumplen los principales teoremas de un proceso de Poisson y que además no es muy difícil aplicarlos.

Finalmente, el proceso de Poisson es un proceso contador que tiene una extensa gama de información, relacionado al número de arribos a un establecimiento se pueden formular más ideas, y puede utilizarse siempre y cuando se tenga un poco de información y conocimiento sobre el tema.

Referencias

1. Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot (1992). Insurance Risk Models. **Society of Actuaries**. Pp. 63-68.
2. Sheldom M. Ross. (2019). Introduction to Probability Models. Twelfth Edition. University of Southern California. Pp. 299-380.
3. Richard Durret. (2012) Essentials of Stochastic Processes. Second edition. Springer Texts in Statistics. Pp. 93-118.