Decimocuarta Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad
14-18 de junio de 2021

Introducción a la Probabilidad Difusa

Ciria Ruth Briones García* [a], Víctor Hugo Vázquez Guevara** [a], Raúl Montes de Oca Machorro [b]

[a]*Benémerita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.*
*ciria.briones@alumno.buap.mx, **vvazquez@fcfm.buap.mx

[b]*Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Depatamento de Matemáticas, Iztapalapa, Ciudad de México, México.*
momr@xanum.uam.mx

Resumen
En este trabajo hablaremos un poco de la Teoría Difusa en Probabilidad. Definimos un conjunto difuso, número difuso y los $\alpha-$cortes, para trabajar la aritmética de los números difusos a través de $\alpha-$cortes y aritmética de intervalos. Ya que tenemos bien definidas nuestras operaciones y conjuntos, podemos abordar las funciones. Después definimos nuestro espacio de probabilidad, independencia de conjuntos y también aplicamos la regla de Bayes. Finalizando con un ejemplo en el que se trata de ilustrar todo esto último.

Keywords: Número difuso, probabilidad difusa, $\alpha-$corte.

1. Introducción

Consideremos la siguiente situación: un conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad definida sobre todos los subconjuntos de X, con $\mathbb{P}(x_i) = a_i$, $1 \leq i \leq n$, $0 < a_i < 1$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, vemos que X y $\mathbb{P}$ forman una distribución discreta, en la práctica estos a_i son conocidos y muchas veces estimados o propuestos por expertos. Suponiendo que algunos de éstos valores a_i son inciertos, lo que buscamos es modelar ésta incertidumbre. Para ello estudiaremos primero la Teoría Difusa y después desarrollaremos los conceptos necesarios para la probabilidad difusa.

2. Teoría Difusa

Para iniciar con la teoría difusa es necesario dejar claro sobre qué conjunto vamos a trabajar. Si Ω es un conjunto, un subconjunto difuso $\bar{A}$ de Ω esta definida por esta función de pertenencia, denotada por $\bar{A}(x)$, con valores en $[0,1]$ para todo $x \in \Omega$. Así, $\bar{A}(x)$ es una función que va de Ω al intervalo $[0,1]$. Si $\bar{A}(x_0) = 1$, entonces decimos que x_0 pertenece a $\bar{A}$, si $\bar{A}(x_1) = 0$ decimos que x_1 no pertenece a $\bar{A}$, y si $\bar{A}(x_2) = 0.6$ decimos que el valor de pertenencia de x_2 en $\bar{A}$ es 0.6. Cuando $\bar{A}(x)$ es siempre igual a uno o a cero tenemos un subconjunto *crisp* (no-difuso) de Ω. Para todos los conjuntos difusos $\bar{B}, \bar{C}, \ldots$ usamos $\bar{B}(x), \bar{C}(x), \ldots$ para los valores de la función de pertenencia en x.

2.1. Números difusos. Un número difuso de forma triángular $\bar{P}$ está dado en la Figura 1. Es solo parcialmente especificado por tres números 1.2, 2 y 2.4 desde el gráfico en [1.2,2] y [2,2.4], no es un segmento de línea recta. Para ser un número difuso de la forma triángular se requiere que la gráfica sea continua y: (1) monótonamente creciente en [1.2,2] y (2) monótonamente decreciente en [2,2.4]. Para un número difuso de la forma triángular $\bar{P}$ usamos la notación $\bar{P} \approx (1.2, 2, 2.4)$ para mostrar que éste es parcialmente definido por tres números 1.2, 2 y 2.4 con vértice (valor de pertenencia 1) en $x = 2$.

2.2. α-cortes. Los α-cortes, son cortes a través de un conjunto difuso que produce conjuntos regulares (no difusos). Si $\bar{A}$ es un subconjunto difuso de Ω, entonces un α-corte de $\bar{A}$, denotado por $\bar{A}[\alpha]$ está definido como:

$$\bar{A}[\alpha] = \{x \in \Omega | \bar{A}(x) \geq \alpha\}, \tag{1}$$

para todo $0 < \alpha \leq 1$. El $\alpha = 0$ corte o $\bar{A}[0]$ puede definirse por separado.

Sea $\bar{N}$ el número difuso de la Figura 1. Entonces $\bar{N}[0] = [1.2, 2.4]$. Note que usando la ecuación 1 para

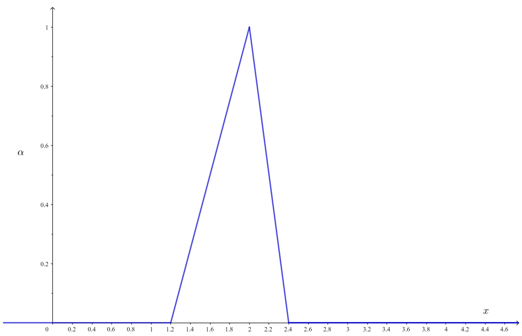

Fig. 1. Número difuso: $(1.2/2/2.4)$

definir $\bar{N}[0]$ obtendríamos $\bar{N} =$ todos los números reales. DE manera similar, en la Figura 2 $\bar{N}[0] = [1.2, 2.4]$. Para cualquier conjunto difuso $\bar{A}$, $\bar{A}[0]$ es llamado el soporte, o base, de $\bar{A}$.

El núcleo de un número difuso es el conjunto de valores donde los valores de pertenencia son igual a uno. Si $\bar{N} = (a/b/c)$ o $\bar{N} \approx (a/b/c)$, entonces el núcleo de $\bar{N}$ es el punto b.

Para un número difuso $\bar{Q}$, sabemos que $\bar{Q}[\alpha]$ es un intervalo cerrado y acotado para $0 \leq \alpha \leq 1$. Escribiremos esto como:

$$\bar{Q}[\alpha] = [q_1(\alpha), q_2(\alpha)],$$

donde $q_1(\alpha)$ $(q_2(\alpha))$ es una función creciente (decreciente) de α con $q_1(1) \leq q_2(1)$.

2.3. Aritmética difusa. Si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos números difusos podemos sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos. Para estas operaciones usaremos la aritmética de intervalos y los $\alpha-$cortes.

Sabemos que los $\alpha-$cortes son intervalos cerrados y acotados, así sea $\bar{A}[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, $\bar{B}[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$. Entonces si $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$ tenemos

$$\bar{C}[\alpha] = \bar{A}[\alpha] + \bar{B}[\alpha].$$

Calculando $\bar{C} = \bar{A} - \bar{B}$ obtenemos

$$\bar{C}[\alpha] = \bar{A}[\alpha] - \bar{B}[\alpha],$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

También para $\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$$\bar{C}[\alpha] = \bar{A}[\alpha] \cdot \bar{B}[\alpha],$$

Y cuando $\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$, siempre que el cero no pertenezca a $\bar{B}[\alpha]$ para todo α,

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}[\alpha]}{\bar{B}[\alpha]}$$

2.4. Funciones Difusas. Una función difusa es un mapeo que va de los números difusos a los números difusos. Escribimos $H(\bar{X}) = \bar{Z}$ para una función difusa con una variable independiente $\bar{X}$. Usualmente $\bar{X}$ será un número difuso triángular obteniendo también a $\bar{Z}$ un número tirángular difuso.

Para dos variables independientes tenemos $H(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Z}$. De dónde provienen estas funciones difusas? Usualmente son extenciones de funciones de valor real. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$. Esto significa que $z = h(x)$ para $x \in [a,b]$ y z un número real, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ se extiende a $H(\bar{X}) = \bar{Z}$ de dos formas: (1) el principio de extensión, o (2) usando los $\alpha-$cortes y aritmética de intervalos.

Todas las funciones que usamos tienen un algoritmo que, utilizando un número finito de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, pueden evaluar la función con la precisión requerida. Estas funciones se pueden extender usando $\alpha-$cortes y aritmética de intervalos, a funciones difusas. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una de tales funciones. Entonces su extensión $H(\bar{X}) = \bar{Z}$, $\bar{X} \in [a,b]$ se realiza, usando aritmética de intervalos, mediante la relación $h(\bar{X}[\alpha]) = \bar{Z}[\alpha]$, $\alpha \in [0,1]$. Ingresamos el intervalo $\bar{X}[\alpha]$, realizamos las operaciones aritméticas necesarias para evaluar h en este intervalo, y obtenemos el intervalo $\bar{Z}[\alpha]$. Luego, juntamos estos $\alpha-$cortes para obtener el valor de $\bar{Z}$.

3. Probabilidad Difusa

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito y sea $\mathbb{P}$ una función de probabilidad definida sobre los subconjuntos de X con $\mathbb{P}(\{x_i\}) = a_i$, $1 \leq i \leq n$, $0 < a_i < 1$ para toda i y $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Entonces, X y $\mathbb{P}$ forman una distribución de probabilidad discreta. Los a_i pueden ser no todos inciertos, algunos pueden conocerse con exactitud y se dan como un número *crisp* (real). Si esto pasa, seguiremos escribiendo a a_i como un número difuso.

Si alguna probabilidad a_i ha sido estimada a través de datos o expertos, se usará un número difuso para esta probabilidad. Escribimos $\bar{\mathbb{P}}$ para $\mathbb{P}$ difusa y tenemos $\bar{\mathbb{P}}(\{x_i\}) = \bar{a}_i$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \bar{a}_i \leq 1$, $1 \leq i \leq n$.

Ahora la reestricción que pondremos sobre los valores $\bar{a}_i$ es: existe $a_i \in \bar{a}_i[1]$.

3.1. Probabilidad. Sean A y B subconjuntos (*crisp*) de X. Encontraremos $\bar{\mathbb{P}}(A)$ y $\bar{\mathbb{P}}(B)$ con aritmética difusa. Cualesquiera que sean los valores de a_i en $\bar{a}_i[\alpha]$ debemos tener $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Esta es la base de nuestra aritmética difusa restringida. Supongamos $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $1 \leq k < n$, entonces definimos

$$\bar{\mathbb{P}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i | S \right\} \tag{2}$$

para $0 \leq \alpha < 1$ donde $S = \{a_i \in \bar{a}_i[\alpha], 1 \leq i < n, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$. Esta es nuestra aritmética difusa restringida. Notemos que primero elegimos una distribución de probabilidad discreta para los α-cortes antes de calcular una probabilidad en la ecuación (2). Y también que $\bar{\mathbb{P}}(A)[\alpha]$ no es la suma de los intervalos $a_i[\alpha]$, $1 \leq i \leq k$ usando aritmética de intervalos. Ahora mostramos que $\bar{\mathbb{P}}(A)[\alpha]$ son los α-cortes de un número difuso $\bar{\mathbb{P}}(A)$. Primero necesitamos algunas definiciones.

Definimos

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) | x_i \geq 0 \text{ para toda } i, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

y también

$$Dom[\alpha] = \left(\prod_{i=1}^{n} \bar{a}_i[\alpha] \right) \cap S \tag{3}$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$. En (3) primero tenemos el producto de n intervalos cerrados que producen un "rectángulo" en un espacio n-dimensional que luego se intersecta con el conjunto S. Ahora definimos una función f sobre $Dom[\alpha]$ a los números reales como

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{4}$$

para $(a_1, \ldots, a_n) \in Dom[\alpha]$, f es continua, $Dom[\alpha]$ es conexo, cerrado y acotado; lo que implica que el rango de f es un intervalo cerrado y acotado de números reales. Definimos

$$\Gamma[\alpha] = f(Dom[\alpha])$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$. Pero, de la ecuación (2), vemos que

$$\bar{\mathbb{P}}(A)[\alpha] = \Gamma[\alpha]$$

para todo α. Por lo tanto $\bar{\mathbb{P}}(A)$ es un número difuso ya que está normalizado. ($\bar{\mathbb{P}}(A)[1] \neq \emptyset$).

Ahora podemos argumentar que:

1. Si $A \cup B = \emptyset$, entonces $\bar{\mathbb{P}}(A) + \bar{\mathbb{P}}(B) \geq \bar{\mathbb{P}}(A \cup B)$.

2. Si $A \subseteq B$ y $\bar{\mathbb{P}}(A)[\alpha] = [p_{a_1}(\alpha), p_{a_2}(\alpha)]$ y $\bar{\mathbb{P}}(B) = [p_{b_1}(\alpha), p_{b_2}(\alpha)]$, entonces $p_{a_i}(\alpha) \leq p_{b_i}(\alpha)$ para $i = 1, 2$ y $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. $0 \leq \bar{\mathbb{P}}(A) \leq 1$ para todo A con $\bar{\mathbb{P}}(\emptyset) = 0$, $\bar{\mathbb{P}}(X) = 1$ crisp "uno".

4. $\bar{\mathbb{P}}(A) + \bar{\mathbb{P}}(A') \geq 1$, crisp "uno", donde A' es el complemento de A.

5. Cuando $A \cap B = \emptyset$, $\bar{\mathbb{P}}(A \cup B) \leq \bar{\mathbb{P}}(A) + \bar{\mathbb{P}}(B) = \bar{\mathbb{P}}(A \cap B)$.

3.2. Probabilidad Condicional Difusa.

Sean $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ y $B = \{x_l, \ldots, x_m\}$ para $a \leq l \leq k \leq m \leq n$, de manera que A y B no son disjuntos. Queremos definir la probabilidad difusa de A dado B y usaremos la notación $\bar{\mathbb{P}}(A|B)$. Presentamos dos definiciones, sin embargo trabajaremos con la primera.

Nuestra primer definición es:

$$\bar{\mathbb{P}}(A|B) = \left\{ \frac{\sum_{i=l}^{k} a_i}{\sum_{i=l}^{m} a_i} | S \right\}.$$

En esta primer definición, el numerador es la suma de los a_i que se encuentran en la intersección de A y B, mientras que el denominador es la suma de los a_i que pertenences a B.

La segunda definición es:

$$\bar{\mathbb{P}}(A|B) = \frac{\bar{\mathbb{P}}(A \cap B)}{\bar{\mathbb{P}}(B)}.$$

Debido a la aritmética difusa, esta probabilidad pues de salirse del intervalo $[0, 1]$, mientras que la primer definición siempre produce una probabilidad difusa en $[0, 1]$.

3.3. Independencia Difusa.

Existen varias formas de presentar la independencia de dos conjuntos, aquí solo mostraremos dos y trabajaremos solo con la segunda.

Sean A y B eventos, diremos que son fuertemente independientes si

$$\bar{\mathbb{P}}(A|B) = \bar{\mathbb{P}}(A),$$

y

$$\bar{\mathbb{P}}(B|A) = \bar{\mathbb{P}}(B).$$

Como las igualdades de las ecuaciones anteriores son difíciles de satisfacer tenemos una definición alterna. Se dice que A y B son debilmente independientes si

$$\bar{\mathbb{P}}(A|B)[1] = \bar{\mathbb{P}}(A)[1]$$

y

$$\bar{\mathbb{P}}(B|A)[1] = \bar{\mathbb{P}}(B)[1].$$

En esta última definición solo requerimos la igualdad para el núcleo de los números difusos. Y además notamos que si se tiene independencia fuerte se tiene entonces independencia débil.

La segunda defininción de independencia se sigue como en el caso *crisp* (real). Se dice que A y B son independientes si

$$\bar{\mathbb{P}}(A \cup B) = \bar{\mathbb{P}}(A)\bar{\mathbb{P}}(B).$$

Debido a la multiplicación difusa, trabajamos con la primera definición ya que sería difícil obtener la igualdad de la segunda definición.

3.4. Fórmula de Bayes Difusa. Consideremos A_i, $1 \leq i \leq m$, una partición de $X = \{x_1, \ldots, n\}$. No conocemos la probabilidad de estos eventos pero sí conocemos la probabilidad condicional de A_i dado el estado natural. Existe un conjunto finito de eventos aleatorios, también llamado de estados naturales, $\mathscr{S} = \{S_1, \ldots, S_K\}$ sobre el que no tenemos control, pero lo que sí sabemos es

$$a_{ik} = \mathbb{P}(A_i|S_k),$$

para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq k \leq K$. Si el estado natural S_k, entonces los a_{ik} dan las probabilidades de los eventos A_i.

Los $a_k = \mathbb{P}(S_k)$, $1 \leq k \leq K$, son llamados la distribución de probabilidad a priori sobre los estados naturales y son estimados por los expertos. De estas estimaciones construimos probabilidades difusas $\bar{a}_k$.

La probabilidad de que el estado S_k esté en vigor, dada la información de que el resultado A_j ha ocurrido, esta dado por

$$\mathbb{P}(S_k|A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j|S_k)\mathbb{P}(S_k)}{\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_j|S_k)\mathbb{P}(S_k)}, \tag{5}$$

para $1 \leq k \leq K$. La $\mathbb{P}(S_k|A_j) = a_{kj}$, $1 \leq k \leq K$, es la distribución de probabilidad a posteriori sobre los estados naturales.

Usando los a_{ik} y la distribución a priori a_k, podemos calcular $\mathbb{P}(A_i)$ como

$$\mathbb{P}(A_i) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_i|S_k)\mathbb{P}(S_k),$$

para $1 \leq i \leq m$. Si el evento A_j ha ocurrido podemos actualizar la información y vamos de la a priori a la a posteriori, obteniendo así una mejor estimación de las probabilidades para A_i como

$$\mathbb{P}(A_i) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_i|S_k)\mathbb{P}(S_k|A_j),$$

para $1 \leq i \leq m$.

Ahora haciendo los cambios necesarios y suponiendo que A_j ha ocurrido, los $\alpha-$cortes de la distribución de probabilidad difusa son

$$\bar{\mathbb{P}}(S_k|A_j) = \left\{ \frac{a_{jk}a_k}{\sum_{k=1}^{K} a_{jk}a_k} | S \right\},$$

para $1 \leq k \leq K$, donde $S = \{a_k \in \bar{a}_k[\alpha], 1 \leq k \leq K, \sum_{k=1}^{K} a_k = 1\}$.

Un método alternativo para el cálculo de la fórmula de Bayes difusa es sustituir los números difusos $\bar{\mathbb{P}}(S_k) = \bar{a}_k$ en la ecuación (5) y calcular el resultado. Aunque corremos el riesgo de producir un número difuso fuera del intervalo $[0, 1]$.

4. Ejemplo

Este es un ejemplo numérico con el que tratamos de ilustrar cómo una probabilidad difusa $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ cambia de a priori difusa a posteriori difusa. Supongamos que solo hay dos estados naturales S_1 y S_2 con probabilidades difusas a priori $\bar{p}_1 = \bar{\mathbb{P}}(S_1) = (0.3/0.4/0.5)$ y $\bar{p}_2 = \bar{\mathbb{P}}(S_2) = (0.5/0.6/0.7)$. También hay solo dos condiciones conocidas $p_{11} = \mathbb{P}(A_1|S_1) = 0.2$, $p_{21} = \mathbb{P}(A_2|S_1) = 0.8$, $p_{12} = \mathbb{P}(A_1|S_2) = 0.7$ y $p_{22} = \mathbb{P}(A_2|S_2) = 0.3$. Primero encontremos la probabilidad difusa $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ usando la probabilidad a priori difusa. Estos α-cortes son

$$\bar{\mathbb{P}}(A_1)[\alpha] = \{(0.2)p_1 + (0.7)p_2|S\} \tag{6}$$

donde $S = p_i \in \bar{p}_i[\alpha]$, $1 \leq i \leq 2$, $p_1 + p_2 = 1$. Evaluamos fácilmente en la ecuación (6) y obtemos el número triangular difuso $\bar{\mathbb{P}}(A_1) = (0.41/0.50/0.59)$.

Ahora supongamos que tenemos información de que el evento A_1 ocurrira. Necesitamos obtener $\bar{\mathbb{P}}(S_1|A_1)$ y $\bar{\mathbb{P}}(S_2|A_1)$ para la fórmula de Bayes difusa en la sección 3.5. Primero calculamos

$$\bar{\mathbb{P}}(S_1|A_1)[\alpha] = \left\{ \frac{(0.2)p_1}{(0.2)p_1 + (0.7)p_2} | S \right\}$$

y

$$\bar{\mathbb{P}}(S_2|A_1)[\alpha] = \left\{ \frac{(0.7)p_2}{(0.2)p_1 + (0.7)p_2} | S \right\}$$

donde $S = p_i \in \bar{p}_i[\alpha]$, $i = 1, 2$, $p_1 + p_2 = 1$. Ambos α-cortes son fáciles de encontrar. Sea $\bar{p}_i[\alpha] = [p_{i1}(\alpha), p_{i2}(\alpha)]$, para $i = 1, 2$. Entonces $\bar{\mathbb{P}}(S_1|A_1)[\alpha] = \left[\frac{(0.2)p_{11}(\alpha)}{(0.2)p_{11}(\alpha)+(0.7)p_{22}(\alpha)}, \frac{(0.2)p_{12}(\alpha)}{(0.2)p_{12}(\alpha)+(0.7)p_{21}(\alpha)}\right]$ y $\bar{\mathbb{P}}(S_2|A_1)[\alpha] = \left[\frac{(0.7)p_{21}(\alpha)}{(0.2)p_{12}(\alpha)+(0.7)p_{21}(\alpha)}, \frac{(0.7)p_{22}(\alpha)}{(0.2)p_{11}(\alpha)+(0.7)p_{22}(\alpha)}\right]$ para todo α

$$\bar{\mathbb{P}}(S_1|A_1)[\alpha] = \left[\frac{0.06 + (0.02)(\alpha)}{0.55 - (0.05)(\alpha)}, \frac{0.10 - (0.02)(\alpha)}{0.45 + 0.05(\alpha)}\right]$$

y

$$\bar{\mathbb{P}}(S_2|A_1)[\alpha] = \left[\frac{0.35+(0.07)(\alpha)}{0.45+(0.05)(\alpha)}, \frac{0.49-(0.07)(\alpha)}{0.55-0.05(\alpha)}\right]$$

Ahora podemos calcular $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ usando las probabilidades a posteriori. Tenemos α-cortes

$$(0.2)\bar{\mathbb{P}}(S_1|A_1)[\alpha] + (0.7)\bar{\mathbb{P}}(S_2|A_1)[\alpha]$$

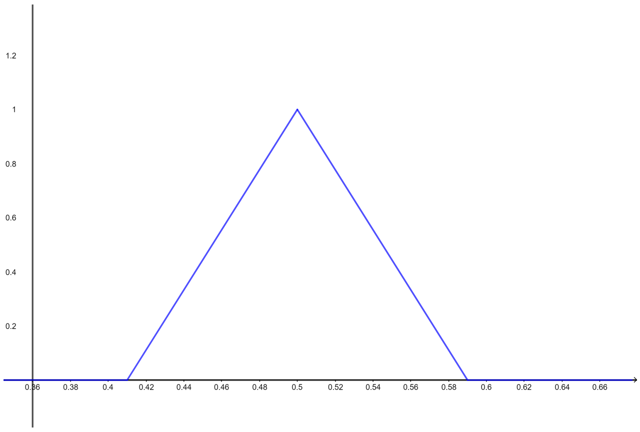

Fig. 2. $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ usando la distribución difusa a priori.

La gráfica de $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ usando la a priori difusa se muestra en la Figura 2 y $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ de la a posteriori difusa se muestra en la Figura 3. El número difuso en la Figura 2 es el número triangular difuso $(0.41/0.50/0.59)$. El número triangular en la Figura 3 no es un número difuso.

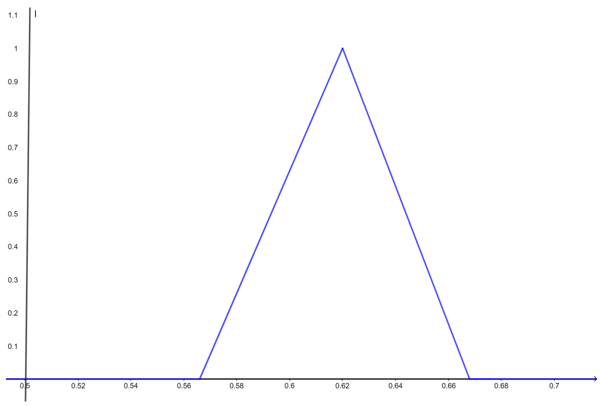

Fig. 3. $\bar{\mathbb{P}}(A_1)$ usando la distribución difusa a posteriori.

Referencias

[1] Buckley, James J., Fuzzy Probabilities New Approach and Applications, Springer. Germany, 2005.

[2] Chakraborty, A.; Mondal, S.P.; Ahmadian,; Senu, N.;De, D.; Salahshour, S. The Pentagonal Fuzzy Number: Its Different Representations, Properties, Ranking, Defuzzification and Application in Game Problems. Symmetry, 2019, 11, 248.

[3] Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, The time average reward for some dynamic fuzzy systems, Comput. Math. Appl. 37 (11-12) (1999) 77-86.

[4] Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, Markov decision processes with fuzzy rewards, Proc. Int. Conf. on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki. Japan, 221-232, 2002.

[5] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 1965, pp. 338-353.