

MODELADO Y PREDICCIÓN DEL PIB TRIMESTRAL MEDIANTE MODELOS VAR MULTINOMIALES

ARELY MALDONADO AZCONA ^a, VÍCTOR HUGO VÁZQUEZ GUEVARA ^a

^aBenémerita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Puebla, México.

^aarely.maldonadoa@gmail.com, ^avvazquez@fcfm.buap.mx

Resumen

El objetivo de este trabajo es el estudio y aplicación de los modelos VAR (análogo multivariado de los Procesos Autorregresivos) que involucra al PIB trimestral de las actividades primarias (AP), secundarias (AS) y terciarias (AT), registradas entre 1993 y 2019. Se considerará a la estimación por mínimos cuadrados y así mismo se presentarán algunos pronósticos a futuro.

Keywords: series de tiempo, VAR(p), estacionariedad, estimación, predicción.

1. Introducción

En esta sección se presentará la definición de series de tiempo multidimensionales, las características y propiedades de los procesos autorregresivos vectoriales (VAR), además se darán a conocer qué suposiciones son necesarias para el estudio y modelación de estos.

Las siguientes definiciones son fundamentales para el estudio de los proceso VAR.

Definición 1.

Un proceso estocástico múltiple es una función

$$y : Z \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

medible con respecto a la sigma álgebra de Borel en \mathbb{R}^k

Definición 2. Una serie de tiempo multidimensional es considerada como una realización o una parte finita de una realización de un proceso estocástico.

Una serie de tiempo múltiple consiste por ejemplo, de vectores de la forma $(y_1(\omega), \dots, y_k(\omega))$.

El objeto de estudio es el modelo autorregresivo vectorial de orden p (VAR(p))

$$y_t = v + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t \quad t = 0 \pm 1 \pm 2, \dots \quad (1)$$

donde $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{kt})'$ es un vector aleatorio, las matrices A_i (con $i = 1, 2, \dots, p$) son las matrices $(k \times k)$ de coeficientes, $v = (v_1, \dots, v_k)'$ es un vecor fijo $(k \times 1)$ y

finalmente $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{kt})$ es un proceso de ruido blanco, esto es, $E(u_t) = 0$, $E(u_t, u_t') = \Sigma_u$ y $E(u_t, u_s') = 0$ para $s \neq t$.

Equivalentemente, podemos escribir

$$Y_t = v + AY_{t-1} + U_t, \quad (2)$$

donde

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix},$$

$$v := \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$U_t := \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición 3. Se dice que el proceso Y_t es estable si

$$\det(I_{kp} - A_z) \neq 0 \quad (3)$$

para $|z| \leq 1$.

Luego, su vector de media de (Y_t) es

$$\mu := E(Y_t) = (I_{kp} - A)^{-1}v \quad (4)$$

y las autocovarianzas están dadas por

$$\Gamma_Y(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^{h+i} \Sigma_U (\mathbf{A}^i)', \quad (5)$$

donde $\Sigma_U := E(U_t, U_t')$. Considerando a la matriz,

$$\mathbf{J} := [I_k : 0 : \dots : 0], \quad (6)$$

de dimensión $(K \times Kp)$, el proceso puede ser escrito como $y_t = \mathbf{J}Y_t$.

El polinomio $(I_{Kp} - A_z) = \det(I_k - A_1 z - \dots - A_p z^p)$, se conoce como el polinomio característico del proceso VAR(p). Además, se dice que el proceso (??) es estable si el polinomio característico no tiene raíces en y sobre el círculo unitario complejo. Es decir, y_t es estable si

$$\det(I_k - A_1 z_1 - \dots - A_p z^p) \neq 0 \text{ para } |z| \leq 1 \quad (7)$$

Esta condición es llamada condición de estabilidad.

A continuación se enuncia una definición que complementa a la idea de estabilidad y dará pie a que los estimadores considerados más adelante tengan propiedades deseables, tales como: consistencia y distribución normal.

Definición 4. (*Proceso estacionario*) Un proceso estocástico es estacionario si su primero y segundo momentos son invariantes, esto es, si

$$E(y_t) = \boldsymbol{\mu},$$

y

$$E[(y_t - \boldsymbol{\mu})(y_{t-h} - \boldsymbol{\mu})'] = \Gamma_y(h) = \Gamma_y(-h)'$$

para todo t y $h = 0, 1, 2, \dots$

La siguiente Proposición relaciona a las dos características asociadas a los procesos VAR.

Proposición 1. (Condición de estacionariedad) *Todo proceso VAR(p) estable (y_t), es estacionario.*

2. Estimación

Se asume que una serie múltiple K -dimensional y_1, \dots, y_T con $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{kt})'$ está disponible y que es generada por

$$y_t = \mathbf{v} + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t; \quad (8)$$

además, $\mathbf{v}, A_1, \dots, A_p$ y Σ_u se suponen desconocidos, motivo por el cual deseamos estimar un proceso VAR(p).

2.1. Estimación multivariada por mínimos cuadrados.

En esta sección se discute la estimación múltiple por mínimos cuadrados (LS). Se considera el estimador obtenido para la forma estándar (??) de un proceso VAR(p) y se enuncian algunas propiedades del estimador.

Para esto, consideramos

$$\begin{aligned} Y &= (y_1, \dots, y_T) \quad (K \times T), \\ B &= (\mathbf{v}, A_1, \dots, A_p) \quad (K \times (Kp + 1)), \\ Z &= (Z_0, \dots, Z_{T-1}) \quad ((Kp + 1) \times T), \\ U &= (u_1, \dots, u_T) \quad (K \times T), \\ \mathbf{y} &= \text{vec}(Y) \quad (KT \times 1), \\ \boldsymbol{\beta} &= \text{vec}(B) \quad ((K^2 p + K) \times 1) \\ \mathbf{b} &= \text{vec}(B') \quad ((K^2 p + K) \times 1) \\ \mathbf{u} &= \text{vec}(U) \quad (KT \times 1), \end{aligned} \quad (9)$$

$$Z_t = \begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} \quad ((Kp + 1) \times 1),$$

aquí vec es el operador de apilamiento de columnas.

Entonces el modelo VAR(p) puede ser escrito de forma compacta como

$$Y = BZ + U \quad (10)$$

o

$$y = (Z' \times I_K) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (11)$$

Note que la matriz de covarianza de \mathbf{u} es

$$\Sigma_{\mathbf{u}} = I_T \otimes \Sigma_u. \quad (12)$$

Por lo tanto, la estimación LS multivariada de $\boldsymbol{\beta}$ se basa en elegir el estimador que minimiza

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'(Z \otimes I_K)(I_T \Sigma_u^{-1})(Z' \otimes I_K) \boldsymbol{\beta} \\ &\quad - 2\boldsymbol{\beta}'(Z \otimes I_K)(I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (13)$$

consecuentemente, el estimador LS es

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= ((ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{y} \\ &= ((ZZ')^{-1} Z \otimes I_K) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (14)$$

Y también puede ser escrito como,

$$\begin{aligned} \hat{B} &= YZ'(ZZ')^{-1} \\ &= (BZ + U)Z'(ZZ')^{-1} \\ &= B + UZ'(ZZ')^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Como las propiedades de muestras pequeñas del estimador LS son difíciles de derivar analíticamente, se refiere a las propiedades asintóticas. La consistencia y la normalidad asintótica del estimador LS se establecen en lo siguiente.

Proposición 2. (Propiedades asintóticas del estimador LS) Sea y_t un proceso VAR(p) K -dimensional estable, con error de ruido blanco estándar, $\hat{B} = YZ'(ZZ')^{-1}$ es el estimador LS de los coeficientes B del proceso VAR. Entonces

$$plim\hat{B} = B \quad (16)$$

y

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) = \sqrt{T}vec(\hat{B} - B) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Gamma^{-1} \otimes \Sigma_u), \quad (17)$$

donde $\Gamma = plimZZ'/T$, $plim$ denota convergencia en probabilidad y \xrightarrow{d} denota convergencia en distribución.

Para evaluar las propiedades asintóticas del estimador LS, necesitamos conocer (o al menos estimar) Γ y Σ_u . Un estimador consistente de Γ es [?]

$$\hat{\Gamma} = ZZ'/T. \quad (18)$$

Como $\Sigma_u = E(u_t u_t')$, un estimador plausible para esta matriz es [?]

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{T}(Y - \hat{B}Z)(Y - \hat{B}Z)'. \quad (19)$$

A menudo se desea un ajuste de grados de libertad. Entonces puede considerarse el estimador [?]

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{T}{T - Kp - 1} \tilde{\Sigma}_u. \quad (20)$$

La siguiente proposición permite conocer propiedades asintóticas importantes, de los estimadores $\tilde{\Sigma}_u$ y $\hat{\Sigma}_u$.

Proposición 3. Sea y_t un proceso VAR(p) estable K -dimensional con innovaciones de ruido blanco estándar y \bar{B} un estimador de B tal que $\sqrt{T}vec(\bar{B} - B)$ converge en distribución. Además sea

$$\bar{\Sigma} = (Y - \bar{B}Z)(Y - \bar{B}Z)' / (T - c),$$

donde c es una constante fija. Entonces

$$plim\sqrt{T}(\bar{\Sigma}_u - UU'/T) = 0$$

Es decir, los estimadores $\tilde{\Sigma}_u$ y $\hat{\Sigma}_u$ tienen las mismas propiedades asintóticas que el estimador

$$\frac{UU'}{T}. \quad (21)$$

y son estimadores consistentes de Σ_u . Este resultado se establece en el siguiente corolario:

Corolario 1. Bajo las condiciones de la proposición anterior, se tiene que

$$plim\tilde{\Sigma}_u = plim\hat{\Sigma}_u = plim(UU'/T) = \Sigma_u. \quad (22)$$

2.2. Estimación por Máxima Verosimilitud.

Suponiendo que la distribución del proceso es conocida, la estimación de máxima verosimilitud (ML) es una alternativa a la estimación de LS. Consideraremos la estimación ML bajo la suposición de que el proceso y_t es Gaussiano. Aquí la función log-verosimilitud es

$$\ln L(\mu, \alpha, \Sigma_u) = -\frac{KT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_u| - \frac{1}{2} tr[(Y^0 - AX)' \Sigma_u^{-1} (Y^0 - AX)]$$

donde $Y^0 := (y_1 - \mu, \dots, y_T - \mu)$, $A := (A_1, \dots, A_p)$ y $\alpha = vec(A)$.

Para determinar los estimadores ML de μ , α y Σ_u , se necesita el sistema de derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = [I_K - A(\mathbf{j} \otimes I_k)]' \Sigma_u^{-1} \left[\sum_t (y_{t-\mu} - AY_{t-1}^0) \right] \quad (23)$$

donde, $Y_t^0 = \begin{bmatrix} y_t - \mu \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix}$ y $\mathbf{j} := (1, \dots, 1)$ es un vector $(p \times 1)$ de unos.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = (X \otimes \Sigma_u^{-1})(\mathbf{y} - \mu^*) - (XX' \otimes \Sigma_u^{-1})\alpha. \quad (24)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Sigma_u} = -\frac{T}{2} \Sigma_u^{-1} + \frac{1}{2} \Sigma_u^{-1} (Y^0 - AX) (Y^0 - AX)' \Sigma_u^{-1}, \quad (25)$$

donde $\mathbf{y} := vec(Y)$, $\mu = (\mu', \dots, \mu')'$.

Igualando a cero el sistema de ecuaciones, se obtienen los estimadores ML para la media, las matrices de coeficientes y la matriz de covarianza de \mathbf{u}

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{T} \left(I_K - \sum_t \tilde{A}_i \right)^{-1} \sum_t \left(y_t - \sum_i \tilde{A}_i y_{t-i} \right), \quad (26)$$

$$\tilde{\alpha} = \left((\tilde{X}\tilde{X}')^{-1} \tilde{X} \otimes I_K \right) (\mathbf{y} - \tilde{\mu}^*), \quad (27)$$

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{T} (\tilde{Y}^0 - \tilde{A}\tilde{X}) (\tilde{Y}^0 - \tilde{A}\tilde{X})', \quad (28)$$

donde \tilde{X} y \tilde{Y}^0 son obtenidos de X y Y^0 , respectivamente reemplazando μ por $\tilde{\mu}$.

Comparando los resultados con los estimadores LS obtenidos, resulta que los estimadores ML de μ y α son semejantes a los estimadores LS. Por lo tanto $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\alpha}$ son estimadores consistentes si y_t es un proceso VAR(p) Gaussiano estable y $\sqrt{T}(\tilde{\mu} - \mu)$ y $\sqrt{T}(\tilde{\alpha} - \alpha)$ son asintóticamente normalmente distribuidas. Además la matriz de covarianza de la distribución asintótica de los estimadores de ML es el límite de T multiplicado por la matriz de información inversa [?].

Las propiedades de los estimadores descritos anteriormente se resumen en la siguiente proposición

Proposición 4. Sea y_t un proceso VAR(p) Gaussiano estacionario y estable, entonces los estimadores $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\sigma} = \text{vec}(\tilde{\Sigma}_u)$ ML son consistentes y

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mu} - \mu \\ \tilde{\alpha} - \alpha \\ \tilde{\sigma} - \sigma \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \begin{bmatrix} \Sigma_{\tilde{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{\tilde{\sigma}} \end{bmatrix} \right), \quad (29)$$

así que $\tilde{\mu}$ es asintóticamente independiente de $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\Sigma}_u$ y $\tilde{\alpha}$ es asintóticamente independiente de $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\Sigma}_u$. Las matrices de covarianza son

$$\Sigma_{\tilde{\mu}} = \left(I_K - \sum_i A_i \right)^{-1} \Sigma_u \left(I_K - \sum_i A_i' \right)^{-1} \quad (30)$$

$$\Sigma_{\tilde{\alpha}} = \Gamma_Y(0)^{-1} \otimes \Sigma_u \quad (31)$$

$$\Sigma_{\tilde{\sigma}} = 2D_K^+(\Sigma_u \otimes \Sigma_u)D_K^{+'} \quad (32)$$

(Donde D_K^+ es la matriz de duplicación y $D_K^{+'} = (D_K D_K')^{-1} D_K'$)

Se pueden estimar consistentemente reemplazando las cantidades desconocidas por sus estimadores de ML y estimando $\Gamma_Y(0)$ por $\tilde{X}\tilde{X}'/T$.

Dem. La demostración puede verse en [?]. ■

3. Aplicación del análisis de series de tiempo múltiples

Se denomina Producto Interno Bruto o PIB al valor total de todos los bienes y servicios finales producidos en una economía en un periodo de tiempo definido y estimado en unidades monetarias [?]. Cuando se habla de bienes y servicios finales, se hace referencia a aquellos que compra el consumidor final.

En este trabajo se hace un análisis de la serie de tiempo múltiple que involucra al PIB trimestral de las actividades primarias (AP), secundarias (AS) y terciarias (AT), registradas entre 1993 y 2019; con el objetivo de elegir un modelo estadístico para la predicción de datos de las mismas, usando el método de Box-Jenkins [?], con ayuda de Matlab.

La Figura ?? muestra el gráfico de las tres variables con las que se trabaja, es posible observar que las tres series presentan tendencia y no oscilan alrededor de un valor constante, en consecuencia no presentan estacionariedad. No obstante, con ayuda de Matlab se hizo la prueba de Dickey-Fuller aumentada que comprobó que en efecto la series son no estacionarias, por lo que se procedió a aplicar logaritmos a las series, como se puede ver en la Figura ??.

Gráficamente se puede observar que la varianza se ha estabilizado; pero las tres series siguen mostrando una tendencia creciente y además, la serie no oscila

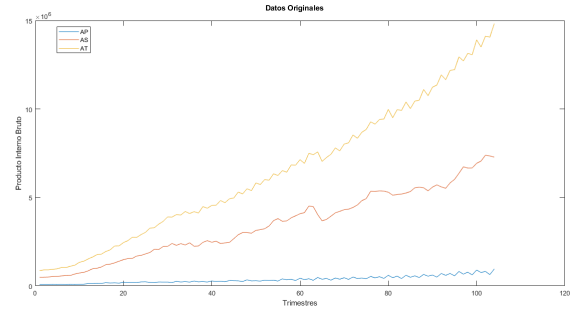


Fig. 1. Gráfica del PIB trimestral de las actividades primarias, secundarias y terciarias, para el periodo de enero de 1993 a diciembre del 2019.

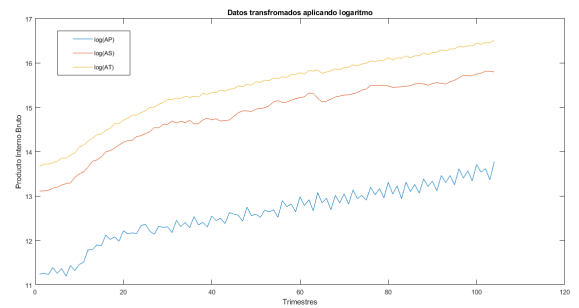


Fig. 2. Gráfica del logaritmo del PIB trimestral de las actividades primarias, secundarias y terciarias, para el periodo de enero de 1993 a diciembre del 2019.

alrededor de un valor constante. Es decir, no son estacionarias; lo que se confirma al emplear nuevamente la prueba de Dickey-Fuller aumentada. Para eliminar la no estacionariedad se hizo una segunda transformación aplicando primeras diferencias a los datos que ya habían sido transformados y como resultado se obtuvieron los datos observados en la Figura ??.

Notamos ahora que las series muestran un mejor comportamiento, a partir de la Figura 4.3 se puede apreciar que los valores de las series tienden a oscilar alrededor de una media constante y la variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo, es decir, las tres series son ahora estacionarias. Para ratificar esto se recurrió nuevamente a la prueba de Dickey-Fuller aumentada, la cual nos constata que las tres series satisfacen la condición de estacionariedad requerida.

Se propuso primero un modelo de orden $p=1$. Los criterios de selección de orden indican los siguientes resultados, $AIC=-1000.6$, $BIC=-969.105$, en donde AIC es el criterio de información de Akaike y BIC es el criterio de información bayesiano [?]. Para la diagnosis del

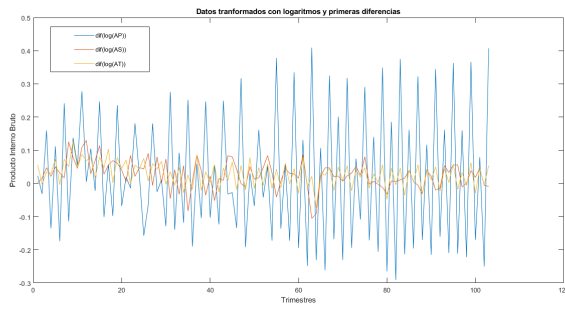


Fig. 3. Gráfica de las primeras diferencias del logaritmo del PIB trimestral de las actividades primarias, secundarias y terciarias, para el periodo de enero de 1993 a diciembre del 2019.

modelo se hizo primero la prueba de Portmanteau [?], la cual indicó que los residuos no están autocorrelacionados. Luego se hizo uso de la herramienta Q-Q plot (Figura ??) para la comprobación de la normalidad de los residuos, donde gráficamente se observa que el conjunto de datos está distribuido sobre la línea recta, lo que sugiere que los datos se distribuyen normalmente; por otro lado, al realizar la prueba de Shapiro-Wilks, se obtiene que los residuos no tiene una distribución normal.

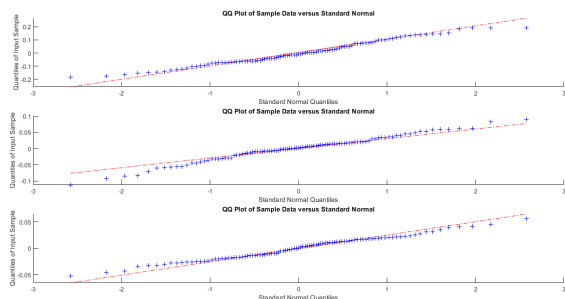


Fig. 4. Q-Q plot de los residuos para el modelo VAR(1).

A partir de las estimaciones, este modelo se puede escribir como:

$$y_t = \begin{pmatrix} 0.05607 \\ 0.013184 \\ 0.02532 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.68437 & -0.056522 & -0.10646 \\ 0.42613 & 0.075018 & 0.3197 \\ -1.0385 & 0.45033 & -0.1532 \end{pmatrix} y_{t-1}$$

Por lo anterior se recurrió a un modelo de orden p=2, los resultados obtenidos se muestran en la figura ??, la cual incluye las estimaciones de los parámetros, con los correspondientes errores estándar y p-valores.

Los criterios de selección de orden devuelven los siguientes resultados, AIC=-1052.59 y BIC=-997.674; en este caso los valores obtenidos son menores en el modelo VAR(2) respecto al modelo VAR(1). Al estudiar los residuos, la prueba de Pormanteau indica que no hay autocorrelación entre ellos.

AR-Stationary 3-Dimensional VAR(2) Model

Effective Sample Size: 101
Number of Estimated Parameters: 21
LogLikelihood: 547.296
AIC: -1052.59
BIC: -997.674

	Value	StandardError	TStatistic	PValue
Constant(1)	0.010393	0.015304	0.67911	0.49707
Constant(2)	0.0049179	0.0062645	0.78505	0.43242
Constant(3)	0.013732	0.0036179	3.7956	0.0001473
AR(1)(1,1)	-0.61416	0.094192	-7.1255	1.0379e-12
AR(1)(1,2)	0.020022	0.035281	0.56748	0.57039
AR(1)(1,3)	-0.02934	0.020376	-1.4359	0.14989
AR(1)(2,1)	-0.031053	0.26319	-0.11759	0.90608
AR(1)(2,2)	0.025708	0.10773	0.23862	0.8114
AR(1)(2,3)	0.23597	0.062218	3.7526	0.00014909
AR(1)(3,1)	-1.4408	0.43109	-3.3422	0.0008312
AR(1)(3,2)	0.67415	0.17646	3.8204	0.00013322
AR(1)(3,3)	0.016638	0.10191	0.16326	0.87031
AR(2)(1,1)	-0.27151	0.099229	-3.0225	0.0025069
AR(2)(2,1)	0.12973	0.03677	3.501	0.00046356
AR(2)(3,1)	0.095684	0.021236	4.5058	6.6129e-06
AR(2)(1,2)	0.63235	0.2748	2.3011	0.021384
AR(2)(2,2)	-0.058705	0.11248	-0.5219	0.60174
AR(2)(3,2)	0.00075403	0.064963	0.011607	0.99074
AR(2)(1,3)	2.0562	0.40705	5.0515	4.3847e-07
AR(2)(2,3)	0.024355	0.16662	0.14617	0.88379
AR(2)(3,3)	0.19916	0.096228	2.0697	0.039481

Fig. 5. Estimación usando el modelo VAR(2).

De forma similar al procedimiento anterior, se recurrió a la herramienta Q-Q plot (Figura ??), se observa que los datos se ajustan a una distribución normal pues los datos se distribuyen sobre la línea recta, por otro lado, de la prueba de Shapiro-Wilks se obtiene que en efecto los residuos tienen una distribución normal. El modelo

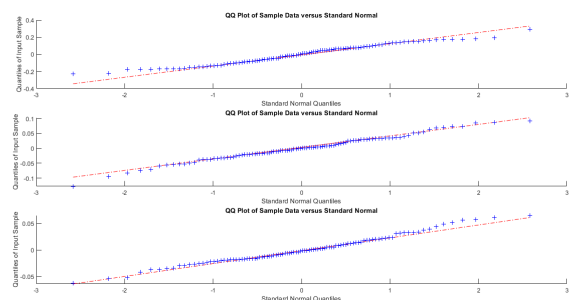


Fig. 6. Q-Q plot de los residuos en el modelo VAR(2).

resultante queda escrito como:

$$y_t = \begin{pmatrix} 0.010393 \\ 0.0049179 \\ 0.013732 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.61416 & 0.020022 & -0.02934 \\ -0.031053 & 0.025708 & 0.23597 \\ -1.4408 & 0.67415 & 0.016638 \end{pmatrix} y_{t-1}$$

$$+ \begin{pmatrix} -0.27151 & 0.12873 & 0.095684 \\ 0.63235 & -0.058705 & 0.00075403 \\ 2.0562 & 0.024355 & 0.19916 \end{pmatrix} y_{t-2}.$$

A partir de los resultados obtenidos del análisis de los modelos, se puede decir que los resultados del modelo VAR(2) mejoran respecto al modelo VAR(1), pues los valores resultantes de los criterios de selección de orden son menores en el modelo VAR(2), y además, el modelo VAR(2) sí satisface la normalidad en los residuos.

Por lo anterior se eligió trabajar con el modelo VAR(2).

Para los pronósticos se omitieron los últimos cuatro trimestres con el propósito de comparar los datos reales con los datos pronosticados. Además, se pronosticaron cuatro trimestres futuros más, de los cuales no se conocía alguna información. A continuación se muestran en la Tabla ??, los errores relativos, expresados en millones de pesos, para las tres variables; en la Tabla ?? se presentan los cuatro pronósticos futuros y finalmente las gráficas que comparan los datos reales con los datos pronosticados. Cabe mencionar que en los resultados presentados, las transformaciones que se hicieron a los datos para conseguir la estacionariedad requerida, ya han sido invertidas.

Trimestre	PIB AP	PIB AS	PIB AT
T1 19	0.42693	0.04401	0.09467
T2 19	0.14156	0.06749	0.0927
T3 19	0.74057	0.08366	0.12346
T4 19	0.2944	0.09073	0.15381

Tabla 1. Errores Relativos.

Trimestre	PIB AP	PIB AS	PIB AT
T1 20	1252000	8492000	17297000
T2 20	1113000	8711000	17742000
T3 20	1320000	8937000	18203000
T4 20	1175000	9178000	18694000

Tabla 2. Pronósticos a futuro.

4. Conclusiones

Se puede decir que, en general, los errores son pequeños. Note además, que los menores errores relativos corresponden al PIB de AS, seguido de los errores relativos del PIB AT y finalmente PIB AP, con los mayores errores relativos.

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que el PIB de las actividades secundarias y terciarias crece para los cuatro trimestres de 2020; mientras que para los cuatro trimestres del mismo año,

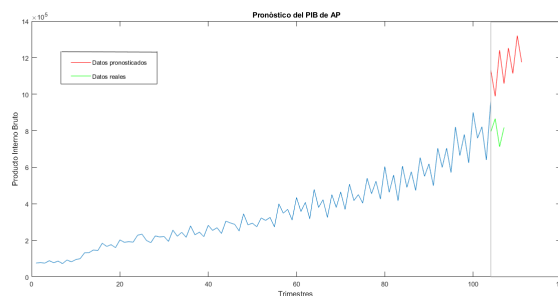


Fig. 7. Pronóstico del PIB Actividades Primarias contra datos reales del PIB Actividades Primarias.

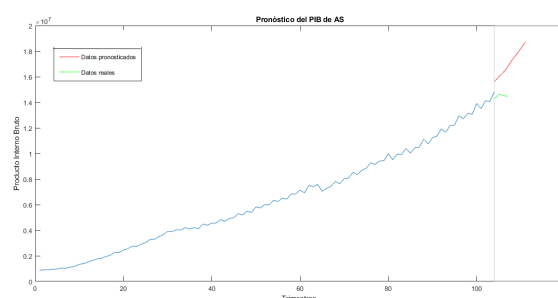


Fig. 8. Pronóstico del PIB Actividades Secundarias contra datos reales del PIB Actividades Secundarias.

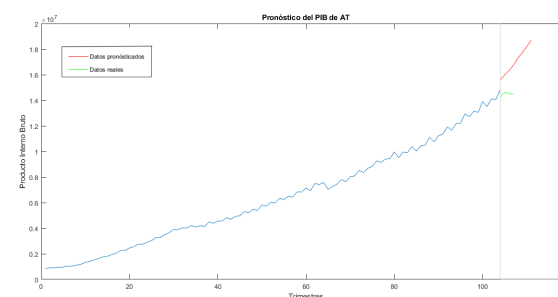


Fig. 9. Pronóstico del PIB Actividades Terciarias contra datos reales de PIB Actividades Terciarias.

el PIB de las actividades primarias muestra crecimiento y decrecimiento en distintos puntos. Lo cual podría indicar noticias positivas para la economía.

Se puede concluir que trabajar con un modelo autorregresivo vectorial es relativamente fácil cuando el orden del modelo es pequeño, como en este caso. Además, se puede notar que en el caso específico que se trabaja aquí, los pronósticos no son tan buenos simultáneamente, tienen un orden jerárquico respecto a la bondad. Es posible que éste sea el precio que se tenga que pagar por trabajar con múltiples series.

A partir de lo anterior, se espera que más adelante se pueda analizar e investigar más profundamente acerca de la relación entre la cantidad de series, el orden del proceso y la bondad de los pronósticos.

Referencias

- [1] Akaike, H., *Information theory and an extension of the maximum likelihood principle*, en B.N. Petrov y F. Csáki (eds), 2nd International Symposium on Information Theory, 1973.
- [2] Aragón, M.G., *Análisis de la radiación solar en el municipio de Tlaxco-Tlaxcala usando la metodología de BOx-Jekins*(Tesis de licenciatura en matemáticas, Tesis de licenciatura, 2018.
- [3] Hannan, E.J., *The statistical theory of linear systems*, en P.R. Krishnaiah (ed.), *Developments in Statistics*, Academic Press, New York, 1979, pp. 83-121.
- [4] López, Ana M. *El papel de la información económica como generador de conocimiento en el proceso de predicción: Comparaciones empíricas del crecimiento del PIB regional. Estudios de Economía Aplicada*, Fecha de Consulta: 23 de Enero de 2021. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=301/30147485004>
- [5] Lütkepohl, H., *New introduction to multiple time series*, Springer, 2005 .
- [6] Pastor, Alfredo. *La ciencia Humilde. Economía para ciudadanos*. Barcelona: Editorial Noema, 2008.
- [7] Quinn, B., *Order determination for a multivariate autoregression*, *Journal of the Royal Statistical Society*, 1980.
- [8] Ruiz-Ramírez, Juan, Hernández-Rodríguez, Gabriela Eréndira y Díaz Córdoba, Miriam de los Ángeles. (2014). *Determinación del tamaño mínimo de la serie de tiempo en el pronóstico del PIB trimestral en México*. Observatorio de la Economía Latinoamericana, N°. 178. [Fecha de consulta: 11 de enero de 2020] en: <http://www.eumed.net/cursecon/ecolat/mx/2013/pib-trimestral-mexico.html>.
- [9] Sánchez, J., *Relación entre los modelos de series de tiempo univariadas con los modelos de series de tiempo multivariadas*, Tesis de Licenciatura, 2013.
- [10] Schwarz, G., *Estimating the dimension of a model*, *Annals of Statistics*, 1978.
- [11] Sitio de página web: <https://www.inegi.org.mx/temas/pib/>, fecha de consulta: 28 de noviembre de 2019.
- [12] Sitio de página web: <https://docplayer.es/44600228-Econometria-ii-grado-en-finanzas-y-contabilidad.html>, fecha de consulta: 23 de marzo de 2020.
- [13] Sitio de página web: <https://www.machinelearningplus.com/time-series/vector-autoregression-examples-python/>, fecha de consulta: 26 de marzo de 2020.