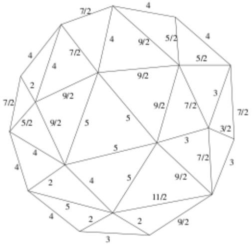
Aspectos de Geometría Cuántica

Cuantización de teorías invariantes bajo difeomorfismos

Jasel Berra



10 de mayo de 2011

"*It is possible that this problem*-the non renormalizability of general relativity -*has arisen because the usual flat-space formalism of quantum field theory simply cannot be applied to gravitation. After all, gravitation is a very special phenomenon, involving as it does the very topology of space and time*".

S. Weinberg, 1980.

Simetrías de norma

- SU(2) $\longrightarrow$ $G^i \equiv D_a E^{ai} = \partial_a E^{ai} + \epsilon^{ijk} A_{aj} E^a_k \approx 0$ (Guass)
  - $\{G^i[\Lambda_i], G^j[\gamma_j]\} = G^i\left[\Lambda^k \gamma^j \epsilon_{kji}\right]$
  - $\delta^{G^i} E^{ai} \equiv \left\{E^{ai}, G^j[\Lambda_j]\right\} = \epsilon^i{}_{jk} \Lambda^j E^{ak}$
  - $\delta^{G^i} A^i_a \equiv \left\{A^i_a, G^j[\Lambda_j]\right\} = -D_a \Lambda^i$

- Difeomorfismos $\longrightarrow$ $H_a \equiv E^{bi} F_{abi} \approx 0$ (Vectorial)
  - $\left\{H_b\left[M^b\right], H_a[N^a]\right\} = H_b\left[-\mathcal{L}_{N^a} M^b\right]$
  - $\delta^{H_a} E^{ai} \equiv \left\{E^{ai}, H_b\left[N^b\right]\right\} = \mathcal{L}_{N^b} E^{ai}$
  - $\delta^{H_a} A^i_a \equiv \left\{A^i_a, H_b\left[N^b\right]\right\} = \mathcal{L}_{N^b} A^i_a$

Las constricciones de primera clase forman un álgebra de Lie

Difeomorfismos pasivos

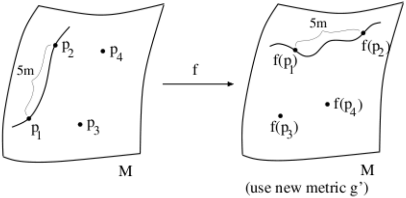


Figura: Difeomorfismos pasivos

- Un difeomorfismo pasivo $f : M \to M$ significa una invariancia bajo un cambio de coordenadas. El mismo objeto en diferentes sistemas de coordenadas.
- Cualquier teoría de la naturaleza es invariante bajo difeomorfismos pasivos.

Difeomorfismos activos

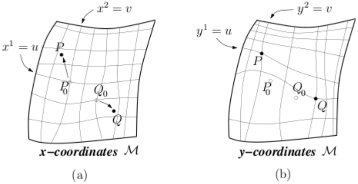


Figura: (a)Un difeomorfismo activo en el cual identificamos un punto de la variedad con otro. (b) Es posible hallar un sistema de coordenadas tal que asigne a los nuevos puntos los valores del sistema coordenado original.

Si dos campos $\tilde{X}(x)$ y $X(x)$ estan relacionados por un difeomorfismo activo, existe un sistema coordenado $y(x)$, en el cual $\tilde{X}(x)$ tiene la misma forma funcional que $X(x)$.

$$X^{ab\ldots d}_{ef\ldots g}(x = u) = \tilde{X}^{ab\ldots d}_{ef\ldots g}(y = u). \tag{1}$$

Covariancia General

- La covariancia general implica que una vez hallada una solución a las EOM, inmediatamente obtenemos distintas soluciones, todas relacionadas por un difeomorfismo activo.
- Sean P y Q dos puntos en una variedad, y sean $g_{\mu\nu}$, $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ dos métricas relacionadas por un difeomorfismo.

$$d_g(P,Q) \neq d_{\tilde{g}}(P,Q). \tag{2}$$

- Si demandamos covariancia general, GR no determina la distancia entre dos puntos (eventos) en el espacio tiempo. (Hole argument)
- Fué este punto, en el que en 1915, GR nació. Einstein: **"beyond my wildest expectations"**

"*All our spacetime verifications invariably amount to a determination of spacetime coincidences. If, for example, events consisted merely in the motion of material points, then ultimately.*"

Einstein

- La geometría del espacio-tiempo no tiene significado físico independiente de las observaciones. Las relaciones entre el campo gravitacional y objetos (campos de materia) son preservadas bajo la acción de difeomorfismos activos. (Observables parciales)
- La mecánica cuántica debe ser formulada bajo las mismas simetrías de GR. La "localización" de objetos físicos y campos físicos no está determinada con respecto a un espacio preexistente.

La maldición y bendición del *background independence*

- Gravedad cuántica no perturbativa debe ser finita y no requiere un proceso de renormalización.
- No hay una métrica de fondo que proveé una escala, por lo tanto no existen divergencias UV en cantidades observables que surgen de distancias infinitamente pequeñas como en una teoría dependiente del fondo.
- Un operador en una teoría independiente de fondo debe ser finito. Ya que la escala de regularización y la métrica de fondo siempre son introducidos en el proceso de regularización.
- No existen puntos donde las interacciones sean localizadas, los puntos no tienen significado físico. Las teorías independientes bajo difeomorfismos se pesan ellas mismas. Los operadores son **operadores evaluados en distribuciones**.

El extraño procedimiento llamado cuantización

- El teorema de Groenewold-van Hove (no-go theorem)
  - Sea el algebra de Lie de $C^\infty(q,p)$
  - Espacio de Hilbert las funciones cuadrado integrables, con la medida de Lebesgue.
  - Un mapeo $Q = F_{pol} \to SYM(H,D)$, (autoadjuntos).
  - Q es lineal $Q(f+\lambda g) = Q(f) + \lambda Q(g)$.
  - $Q(\{f,g\}) = \frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)]$.
  - El mapeo Q es consistente con la representación de Schroedinger.(Ecuación de Schroedinger)
  - Los operadores $Q(q),\ Q(p)$ actúan de manera irreducible. (ordenamiento de productos).
- Una cuantización para $C^\infty(q,p)$ no existe, sólo existe para $F_{pol(2)} = span\{1, q, p, q, q^2, p^2.qp\}$ y para $F_q p = \{C^\infty(q)p\}$
- **H=0?**. (problema del tiempo)

Programa de Cuantización de Dirac

- Hallar una representación de las variables del espacio fase como operadores de un espacio de Hilbert "*auxiliar*", $\mathcal{H}_{kin}$, que satisfaga

$$\{\ ,\ \} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ], \tag{3}$$

- Promover las constricciones a operadores en $\mathcal{H}_{kin}$,
- Caracterizar el espacio de soluciones de las constricciones $\mathcal{H}_{phys}$

$$\hat{H}\psi = 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{H}_{phys} \tag{4}$$

$$\mathcal{H}_{kin} \xrightarrow{\hat{G}^i=0} \mathcal{H}_{kin} \xrightarrow{\hat{H}^a=0} \mathcal{H}_{Diff} \xrightarrow{\hat{H}=0} \mathcal{H}_{phys}. \tag{5}$$

Marco General

Cuantización algebraica

- Comenzar con una C^*-algebra $\mathcal{A}$ generada por las variables del espacio fase. Representar $\mathcal{A}$ por operadores sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.
- Representar las constricciones por operadores auto-adjuntos tal que las transformaciones de norma son generadas por operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$.
- Pasar a $\mathcal{H}_{phys}$ e.g. (group average).

"*A royal road*" para obtener representaciones de $\mathcal{A}$

La construcción de Gel'fand-Naimark-Segal (GNS)

La construcción GNS

- Una estado ω sobre $\mathcal{A}$ es una funcional lineal positiva (valor de expectación de los operadores en $\mathcal{A}$). $\forall A \in \mathcal{A},\ \omega(A) \in \mathbb{C},\ \omega(A + \lambda B) = \omega(A) + \lambda\omega(B),\ \omega(I) = 1,\ \omega(A^* A) \geq 0$.
- GNS Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ (con identidad) y un estado ω, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ y una representación $\pi_\omega : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_\omega)$, tal que:
  1. $\mathcal{H}_\omega$ contiene un vector cíclico (denso) Ψ_ω,
  2. $\omega(A) = (\Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega)$,
  3. Cualquier otra representación es unitariamente equivalente.
- Si θ es un automorfismo y si $\omega[\theta(A)] = \omega[A]$, entonces θ actúa de manera unitaria sobre $\mathcal{H}$.
- Ésta es una manera poderosa y económica de asegurar que las simetrías (gauge) son implementadas de manera unitaria. En teorías de campo sobre Minkowski, $\omega(A) = \langle 0|A|0\rangle$ es un invariante de Poincaré.

Propiedades de la representación

- Usando el teorema de Riesz-Markov $C(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists$ única medida de Borel regular μ.
- El espacio de Hilbert resultante $\mathcal{H} = L^2\left(\bar{\mathcal{A}}, d\mu_{AL}\right)$ donde $\bar{\mathcal{A}}$ es el espacio de conexiones generalizadas (espacio de configuración cuántico) y μ_{AL} es un medida de Borel, regular, invariante bajo Diff.
- Sobre $\mathcal{H}$ actúa de manera unitaria la acción de $SU(2) \ltimes Diff$. Usado para resolver las constricciones de Gauss y Diff.
- El teorema de LOST implica que existe un único estado invariante bajo $SU(2)$ y bajo Diff.

Funciones Cilíndricas

Un grafo γ se define como la colección de trayectorias $e \subset \Sigma$ (edge), que terminan en puntos finales (nodes). Sea L el número de edges que contiene. Una función cilíndrica es un par (γ, f) de un grafo y una función suave $f : SU(2)^L \to \mathbb{C}$ y está definida como

$$\langle A|\gamma, f\rangle = \psi_{(\gamma,f)}\left[A\right] = f\left(h_{e_1}\left[A\right], \ldots, h_{e_L}\left[A\right]\right) \in \; Cyl_\gamma \tag{6}$$

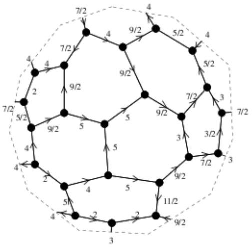


Figura: Ejemplos de spin networks

Spin networks

- Porque holonomías?

El espacio de Hilbert de todas las funciones cilíndricas para todos los grafos está dado por

- $\mathcal{H}_{kin} = \oplus_{\gamma\subset\Sigma}\mathcal{H}_\gamma = L^2\left[\bar{\mathcal{A}}, \mu_{AL}\right]$.
- $\left\langle \psi_{(\gamma_1,f_1)} | \psi_{(\gamma_2,f_2)} \right\rangle \equiv \int d\mu_{AL}\overline{\psi_{(\gamma_1,f_1)}(A)}\psi_{(\gamma_2,f_2)}(A)$
- El candidato a ser el espacio de Hilbert cinemático no requiere de una métrica de fondo, solo de las representaciones del algebra de los flujos de holonomía.
- Teorema de Peter-Weyl Una base ortonormal para $\mathcal{H}_{kin}$ mediante representaciones unitarias irreducibles del grupo.

$$\psi_{(\gamma,f)}[A] = \sum_{j_e,m_e,n_e} f^{j_1,\ldots,j_n}_{m_1,\ldots,m_n,n_1,\ldots,n_n} D^{(j_1)}_{m_1 n_1}(h_{e_1})\ldots D^{(j_n)}_{m_n n_n}(h_{e_n}) \qquad (7)$$

Solución a la constricción de Gauss

- Encontrar estados en $\mathcal{H}_{kin}$ que sean invariantes bajo $SU(2)$.
- $f\left(h_1,\ldots,h_L\right)=f\left(g_{s_1}h_1g_{t_1}^{-1},\ldots,g_{s_L}h_Lg_{t_L}^{-1}\right)$
- Definimos un proyector $P_G=\int D\left[g\right]\mathcal{U}_G\left[g\right]$

$$P_G\psi_{(\gamma,f)}=\prod_{n\subset\gamma}P_G^n\psi_{(\gamma,f)} \tag{8}$$

- Una función de spin network se define(i_n son *interwiners*)

$$s_{\gamma,j_e,i_n}\left[A\right]=\bigotimes_{n\subset\gamma}i_n\bigotimes_{e\subset\gamma}\prod^{j_e}\left(h_e\left[A\right]\right). \tag{9}$$

Solución a la constricción de Difeomorfismos

- Las órbitas de los difeomorfismos no son compactas, por lo tanto los estados invariantes bajo difeomorfismos no se encuentran en $\mathcal{H}_{kin}$. Deben ser considerados como estados de distribución.
- Como espacio vectorial $Cyl \subset \mathcal{H}_{kin} \subset Cyl^*$ (tripleta de Gelfand)
- Dada $\psi_{(\gamma,f)} \in Cyl$

$$\mathcal{U}_{Diff}\left[\phi\right]\psi_{(\gamma,f)}\left[A\right] = \psi_{(\phi^{-1}\gamma,f)}\left[A\right], \tag{10}$$

- Definimos un proyector P_{Diff} tal que

$$\langle\psi|\psi'\rangle_{Diff} \equiv \langle\psi|P_{Diff}|\psi'\rangle = \sum_{\phi\in Diff}\left\langle\hat{\phi}\psi|\psi'\right\rangle \tag{11}$$

- Los spin networks son clases de equivalencia de grafos bajo difeomorfismos, es decir nudos. El espacio de Hilbert invariante de norma son los nudos con color, y es un espacio de Hilbert separable.

Operadores geométricos

- El operador de area

$$A\left(S\right)=\int_S d\sigma_1 d\sigma_2\sqrt{\det\left(g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial x^b}{\partial\sigma^\beta}\right)}=\int_S d\sigma_1 d\sigma_2\sqrt{E_i^a E^{bi} n_a n_b} \tag{12}$$

- A nivel cuántico es necesario regularizar la expresión. Introducimos una partición tal que

$$A(\hat{S})=\lim_{N\to\infty}\hat{A}_N(S)=\lim_{N\to\infty}\sum_{I=1}^{N}\sqrt{\hat{E}_i(S_I)\hat{E}^i(S_I)} \tag{13}$$

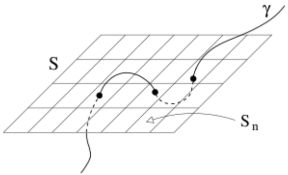


Figura: Proceso de regularización

Espectro

- El operador de Area actúa sobre los spin networks

$$\hat{A}(S)\psi_\Gamma = \lim_{N\to\infty}\sum_{I=1}^{N}\sqrt{\hat{E}_i\left(S_I\right)\hat{E}^i\left(S_I\right)}\psi_\Gamma = \sum_{p\in S\cap\Gamma}\hbar\sqrt{\gamma^2 j_p(j_p+1)}\psi_\Gamma \tag{14}$$

- El espectro del operador de area es totalmente conocido y cuantizado. (Area toma valores discretos $\sim \ell_p^2$)
- El operador actúa de manera diagonal sobre los spin networks. Los estados de spin networks son eigenestados del operador de area.
- El operador de volumen actúa en los nodos i_n.

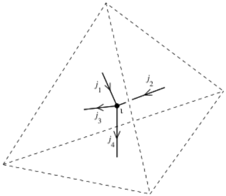


Figura: dual topológico

Geometría Cuántica

- Los nùmeros cuánticos asociados a un spin network, (Γ, j_e, i_n), definen una noción de geometría cuántica. Del mismo modo que los números cuánticos de un oscilador definen un estado cuántico.
- Espectro cuantizado: El espectro de operadores geométricos es discreto, opuesto a su contraparte clásica.
- No conmutatividad: no conmutatividad de los flujos.
- Naturaleza distribucional: los estados capturan un número finito de componentes de los campos originales.
- Límite semiclásico?

QG como una QFT de geometría simplicial

- Suma sobre historias

$$Z = \sum_{\sigma} w(\sigma) \sum_{j} \prod_{f} A_f \prod_{e} A_e \prod_{v} A_v. \qquad (15)$$

- Ponzano-Regge model (3d).
- Barrett-Crane, GFT (4d).

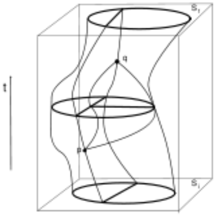
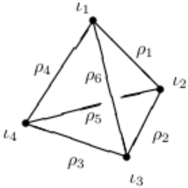


Figura: spin foam

Ejemplos

- Relatividad general en 3d.

$$Z(M) = \sum_{\rho:\mathcal{F}\to \mathrm{Irrep(G)}} \sum_{\iota} \prod_{f\in\mathcal{F}} \dim(\rho_f) \prod_{v\in\mathcal{V}}$$



- El propagador y vértice

$$\mathcal{P} = \sum_{\pi} \int dg dg' \delta\left(g_1 g g'^{-1} g'^{-1}_{\pi(1)}\right) \delta\left(g_2 g g'^{-1} g'^{-1}_{\pi(2)}\right) \delta\left(g_3 g g'^{-1} g'^{-1}_{\pi(3)}\right),$$

$$\mathcal{V} = \int dh_i \delta\left(g_1 h_1 h_3^{-1} g_1'^{-1}\right) \delta\left(g_2 h_1 h_4^{-1} g_2'^{-1}\right) \delta\left(g_3 h_1 h_2^{-1} g_3'^{-1}\right)$$
$$\delta\left(g_4 h_2 h_4^{-1} g_4'^{-1}\right) \delta\left(g_5 h_2 h_3^{-1} g_5'^{-1}\right) \delta\left(g_6 h_3 h_4^{-1} g_6'^{-1}\right)$$

Entropía de Agujeros Negros

- 1972, Hawking: el area de un horizonte de sucesos no decrece.
- Bardeen, Carter, Hawking muestran que los agujeros negros obedecen leyes parecidas a las de la termodinámica.
- Bekenstein sugiere que $S_{BH} = a\frac{k_B}{\hbar G}A$
- Hawking, usando teoría de campos en un espacio-tiempo curvo, obtiene que los agujeros negros emiten radiación

$$T = \frac{\hbar}{8\pi k_B GM} \tag{16}$$

Derivación de la entropía de Bekenstein-Hawking

- Sea $S_{BH} = k_B \ln N(A)$, donde $N(A)$ es el número de estados de la geometría de una superficie A.
- Sea $i = 1, \ldots, n$ el numero de intersecciones de los nudos con el horizonte S.

$$A = 8\pi\gamma\hbar G \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \tag{17}$$

- Los nudos son vectores en $\otimes_i \mathcal{H}_{j_i}$, dominado por el caso $j_i = 1/2$.
- El area de un solo link es $A_0 = 4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}$.
- Así $n = \frac{A}{A_0} = \frac{A}{4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}}$.
- Finalmente siendo $N = 2^n$, (la dimensión de $\mathcal{H}_{1/2} = 2$)

$$S_{BH} = k_B \ln N = \frac{1}{\gamma} \frac{\ln 2}{4\pi\sqrt{3}} \frac{k_B}{\hbar G} A \tag{18}$$

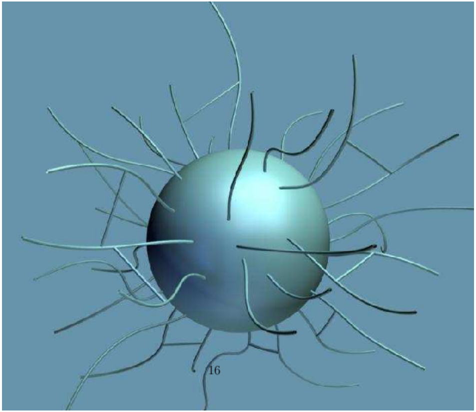


Figura: Representacíon de agujero negro

"*It is very important that we do not all follow the same fashion... it's necessary to increase the amount of variety..., the only way to do it is to implore you few guys to take a risk...*"

R. Feynman