Formulación Hamiltoniana para sistemas no conservativos

Seminario del CAPCR

Elizabeth Galindo Linares

Asesor: Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Posgrado en Física Aplicada

Junio de 2011

Contenido

Resumen

Buscamos expresar cualquier sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de segundo orden en forma hamiltoniana.

De un ejemplo estudiado por Douglas mostramos que se describe al sistema de EDOs con la hamiltoniana $H = 0$ y que el sistema de coordenadas canónicas puede escogerse de una infinidad de maneras. En principio, podemos hallar expresiones hamiltonianas para cualquier sistema de n EDOs de segundo orden.

Usando la formulación de Hamilton-Jacobi mostramos que se pueden obtener una infinidad de otras hamiltonianas.

Objetivo general

Comprobar que todo sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden, puede escribirse en forma hamiltoniana.

Introducción

Hasta el momento la mayoría de los autores que trabajaban con EDOs centraban su atención en expresar éstas en forma Lagrangiana.

No obstante, existen ejemplos que no cumplen con el conjunto de condiciones de Helmholtz, es decir, existen sistemas de EDOs de segundo orden que no pueden expresarse en forma Lagrangiana.

Preguntas por responder

Si no existe una lagrangiana, ¿Puede existir una forma hamiltoniana?

¿Cuáles son las restricciones para que exista al menos una hamiltoniana?

Existencia de la Hamiltoniana

Ejemplo de Douglas

Tenemos el ejemplo

$$\ddot{x} = \dot{y} \tag{1a}$$
$$\ddot{y} = y, \tag{1b}$$

resolviendo el sistema obtenemos unas "constantes de movimiento"(o simplemente de integración) en función de $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ y t

$$\begin{gathered} C_1 = (y - \dot{y})e^{t}, \quad C_2 = (y + \dot{y})e^{-t}, \\ C_3 = \dot{x} - y, \quad C_4 = (y - \dot{x})t + x - \dot{y}. \end{gathered} \tag{2}$$

En resumen:

- Las cuatro constantes son funcionalmente independientes.
- Éstas las tomamos como coordenadas canónicas (funciones a derivar respecto al tiempo) y las sustituimos en las ecuaciones de Hamilton.

Consecuentemente:

una posible expresión de Hamilton que cumple con el punto anterior es $H = 0$.

Existencia de la Hamiltoniana

Generalización al problema

Buscamos una expresión hamiltoniana correspondiente a cualquier sistema de n EDOs de orden dos

$$\ddot{x}_i = F_i(x_j, \dot{x}_j, t); \tag{3}$$

equivalente a un sistema de EDOs de primer orden, haciendo los cambios de variable $y_j = \dot{x}_j$ donde $j = 1, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t),\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t),\\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t),\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t)\\
\dot{y}_1 &= f_{n+1}(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t),\\
\dot{y}_2 &= f_{n+2}(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t),\\
\dot{y}_3 &= f_{n+3}(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t),\\
&\vdots\\
\dot{y}_n &= f_{2n}(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j, t).
\end{aligned}
$$

Al hallar las soluciones de las EDOs anteriores obtendríamos $2n$ constantes en función de x_i, y_i y t.

Para hallar expresiones Hamiltonianas: conocido el sistema de EDOs de primer orden correspondiente se sabe que existen tantas constantes de integración como ecuaciones.

1. Para un sistema de $2n$ EDOs, usaremos como nuevas coordenadas a las $2n$ constantes conocidas; éstas con derivadas temporales iguales a cero.

Proposición

De las Ecs. de Hamilton se ve que se puede elegir $H = 0$.

Método de Hamilton-Jacobi

Recordando que en el método de Hamilton-Jacobi se propone una hamiltoniana H_1 y se obtiene a la nueva hamiltoniana $H = 0$, podemos aplicar el mismo método en forma inversa,

$$H = H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Ejemplo 1

Proponemos por ejemplo,

$$H_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} \tag{5}$$

correspondiente a la hamiltoniana para una partícula libre bidimensional.

$$H = 0 = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q^2}\right)^2\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (6)$$

resolviendo la Ec. (6) por el método de separación de variables se llega a la función generatriz

$$\begin{aligned} S = X(q^1) + Y(q^2) + T(t) &= \sqrt{\beta}q^1 + \sqrt{2mE - \beta}q^2 + Et \\ &= S(q^1, q^2, \beta, E, t), \qquad (7) \end{aligned}$$

donde E, β son constantes de integración.

Las transformaciones canónicas aplicadas para el ejemplo son:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = \sqrt{\beta} = Q_1 \\
p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = Q_2 \\
P_1 &= -\frac{\partial S}{\partial Q_1} \\
P_2 &= -\frac{\partial S}{\partial Q_2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Resultados usando el sistema de Douglas

Tomamos los resultados obtenidos en el avance anterior de donde $C_1 = Q_1$, $C_3 = Q_2$, $C_2 = P_1$ y $C_4 = P_2$.
Sustituimos los valores de las coordenadas iniciales en las ecuaciones correspondientes

$$\begin{aligned}
p_1 &= (y - \dot{y})e^t, && \text{(9a)}\\
p_2 &= \pm\sqrt{2m(\dot{x} - y) - ((y - \dot{y})e^t)^2}, && \text{(9b)}\\
P_1 &= q_1 \pm \frac{((y - \dot{y})e^t)q_2}{\sqrt{2m(\dot{x} - y) - ((y - \dot{y})e^t)^2}} \\
&= (y + \dot{y})e^{-t}, && \text{(9c)}\\
P_2 &= -\left(t \pm \frac{mq_2}{\sqrt{2m(\dot{x} - y) - ((y - \dot{y})e^t)^2}}\right) \\
&= (y - \dot{x})t + x - \dot{y}. && \text{(9d)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

A diferencia del ejemplo anterior, ahora proponemos a la función generatriz

$$S = ax + by + abt^2; \tag{10}$$

derivamos parcialmente S obteniendo las constantes: $a \equiv \frac{\partial S}{\partial x}$ y $b \equiv \frac{\partial S}{\partial y}$. Por otra parte, de la ecuación de Hamilton-Jacobi sabemos que $\frac{\partial S}{\partial t} = -H_1$. Notamos que

$$H_1 = H_1(x, y, t, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}) = H_1(x, y, t, p_x, p_y). \tag{11}$$

Derivando la función generatriz respecto al tiempo y sustituyendo las constantes de acuerdo con sus definiciones

$$H_1 = -2tp_x p_y. \tag{12}$$

Por analogía con la mecánica analítica las parciales con respecto a las coordenadas pueden tomarse como los momentos conjugados respecto a éstas.

Conclusiones

- Propusimos una transformación canónica de coordenadas, con la que nos fue posible hallar una expresión Hamiltoniana que reproduce las ecuaciones de movimiento del tipo $\ddot{y} = F(x, y, \dot{y}, t)$. Localmente existen una infinidad de Hamiltonianas aunque ello no implicará que deberán existir una gran cantidad de Lagrangianas.

Conclusiones

- Propusimos una transformación canónica de coordenadas, con la que nos fue posible hallar una expresión Hamiltoniana que reproduce las ecuaciones de movimiento del tipo $\ddot{y} = F(x, y, \dot{y}, t)$. Localmente existen una infinidad de Hamiltonianas aunque ello no implicará que deberán existir una gran cantidad de Lagrangianas.

- x, x', y, y'
  $\downarrow$
  $Q_1 = C_1, Q_2 = C_2, P_1 = C_3, P_2 = C_4 \Rightarrow H = 0 = H^* - \frac{\partial S}{\partial t}$
  $\Downarrow$
  $q_1, q_2, p_1 y p_2$

- H. Helmholtz, Journal für die reine und angewandte mathematik **100**, 137 (1887).
- A. Mayer, Ber. d. k. Ges. d. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Cl., 519 (1897).
- G. Darboux, *Leçons sur la teorie General des Surfaces, III Partie*, Gauthier-Villars (1891).
- J. Douglas, Trans. Am. Math. Soc., **50**, 71 (1941).
- F. Pardo, J. Math. Phys., **39**, 2054 (1989).
- S. A. Hojman and L. C. Shepley, J. Math. Phys., **32**, 142 (1991).
- S. Hojman, et al. J. Math. Phys., **33**, 584 (1992).
- G. F. Torres del Castillo, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, 265202 (2009).