Nuevas formulaciones para las teorías de Chern-Simons

Paola Enríquez Silverio

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Director

10 de Marzo de 2010

Introducción

Empleando métodos de la geometría simpléctica, en [1] se obtuvo una descripción canónica covariante de la teoría de Chern-Simons construyendo una estructura simpléctica definida en el espacio fase de la teoría.

El objetivo del trabajo doctoral consiste en extender este esquema simpléctico al estudio de la teoría de Chern-Simons formulada sobre un espacio no conmutativo.

- Espacio-tiempo no conmutativo
- Teorías de Campo no conmutativas
- Geometría Diferencial no conmutativa

[1] P. Enríquez-Silverio, *Cuantización simpléctica de la teoría de Chern-Simons*, Tesis de Maestría.

Espacio-tiempo no conmutativo

- Un espacio-tiempo no conmutativo es un espacio-tiempo en el que las coordenadas no conmutan.

- La idea detrás de la no conmutatividad del espacio-tiempo está inspirado principalmente en Mecánica Cuántica. Aquí, el espacio fase cuántico se define al reemplazar a las variables canónicas por operadores hermíticos

$$q^i, p_j \rightarrow \hat{q}^i, \hat{p}_j$$

los que obedecen las relaciones de conmutación

$$\left[\hat{q}^i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta^i{}_j.$$

- La manera más sencilla de establecer la no conmutatividad del espacio-tiempo puede ser descrita de la misma manera reemplazando a las coordenadas conmutativas x^i por operadores $\hat{x}^i$ de un álgebra general

$$x^i \to \hat{x}^i,$$

que satisfacen las relaciones

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = \hat{c}^{ij} \qquad (1)$$

dando origen al llamado "espacio-tiempo difuso" (*fuzzy space-time*).

El lado derecho de la ecuación (1) debe tender a cero en cierto límite y uno recobra de esta manera el espacio-tiempo conmutativo (ordinario).

Teorías de Campo no conmutativas

- La manera más simple de estudiar teorías de campo definidas en un espacio no conmutativo consiste en introducir un producto no conmutativo.

- Los productos estrella han demostrado ser herramientas muy útiles al construir tales deformaciones ya que su límite clásico se puede calcular fácilmente.

- El denominado producto Moyal es el más comúnmente usado. Este producto se define como

$$f(x) * g(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \partial_\beta{}'\right) f(x) g(x')\Big|_{x=x'} \quad , \quad \partial_{\beta'} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} \, .$$

donde $\theta^{\alpha\beta}$ es el parámetro de no conmutatividad real y antisimétrico y $*$ denota al producto estrella no conmutativo.

Este producto satisface

$$\text{(a)} \int Tr\, \partial_i A = 0 \qquad \text{(b)} \int Tr\left[f, g\right] = 0.$$

Teoría de Chern-Simons no conmutativo

En el espacio-tiempo no conmutativo, la teoría de Chern-Simons es generalizada a

$$S_{CS} = \alpha \int_M Tr\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \rightarrow \hat{S}_{CS} = \alpha \int_M Tr\left(\hat{A} \cdot d\hat{A} + \frac{2}{3} \hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \hat{A} \right),$$

M es una variedad tridimensional "cuantizada", es decir, las coordenadas de M satisfacen

$$\left[\hat{x}^i , \hat{x}^j \right] = i\theta^{ij}.$$

El campo no conmutativo $\hat{F}$ está definido como

$$\hat{F} \equiv d\hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{A}.$$

El producto punto • esta representado dos productos: el producto wedge (∧) de formas diferenciales y el producto Moyal (∗).

Esta teoría se reduce a la teoría ordinaria de Chern-Simons cuando $\theta \rightarrow 0$.

RESULTADOS

1. Espacio fase

Se determinaron las ecuaciones de movimiento de la teoría de Chern-Simons no conmutativo.

$$\delta \hat{S}_{CS} = 2\alpha \int_M \mathrm{Tr}\left[\delta \hat{A} \cdot \left(d\hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{A}\right)\right] + \alpha \int_M \mathrm{Tr}\left[d\left(\delta \hat{A} \cdot \hat{A}\right)\right]$$

$$\delta \hat{S}_{CS} = 0 \Leftrightarrow \hat{F} \equiv d\hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{A} = 0 .$$

Así que el espacio fase $\hat{Z}$ está constituido por el espacio de soluciones de la ecuación

$$\hat{F} \equiv d\hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{A} = 0. \qquad (2)$$

1.a) Geometría diferencial del espacio fase

Siguiendo el formalismo desarrollado en [2], se define una **función** como el mapeo de $\hat{A}$ a $\hat{A}(\hat{x})$

$$\phi : \hat{Z} \to \mathrm{R}\,, \qquad \phi(\hat{A}) = \hat{A}(\hat{x})$$

donde $\hat{x} \in M$.

$$\hat{F} \equiv d\hat{A} + \hat{A}\cdot\hat{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\hat{F} = d\delta\hat{A} + \delta\hat{A}\cdot\hat{A} + \hat{A}\cdot\delta\hat{A} = 0 \qquad (3)$$

Una solución $\delta\hat{A}$ de la ecuación (3) es un **vector tangente**. El **espacio tangente** es el espacio vectorial $T\hat{Z}$ de soluciones de (3).

La transformación de la solución $\delta\hat{A}$ de (3) a $\delta\hat{A}(\hat{x})$

$$\phi^{*} : T\hat{Z} \to \mathrm{R}\,, \qquad \phi^{*}(\delta\hat{A}) = \delta\hat{A}(\hat{x})$$

es una **uno-forma** sobre el espacio fase $\hat{Z}$.

[2] C. Crnkovic, *Symplectic geometry of the covariant phase space*, Class. Quantum Grav. 5, 1557 (1988); C. Crnkovic, E. Witten, *Covariant description of canonical formalism in geometrical theories*, en *Three Hundred Years of Gravitation*, editado por S. W. Hawking y W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

En $\hat{Z}$, δ es identificada con la derivada exterior, con las mismas propiedades que en el caso ordinario:

a) Es nilpotente

$$\delta^2 = 0.$$

b) Satisface la regla de Leibniz

$$\delta\left(\hat{\Omega}_1 \cdot \hat{\Omega}_2\right) = \left(\delta\hat{\Omega}_1\right) \cdot \hat{\Omega}_2 + (-1)^{\mathrm{grad}\hat{\Omega}_1} \hat{\Omega}_1 \cdot \left(\delta\hat{\Omega}_2\right).$$

Así que

$$\hat{A}(x) \rightarrow \text{cero - forma} \quad \text{y} \quad \delta\hat{A}(x) \rightarrow \text{uno - forma}\,, \quad x \in M.$$

2. Estructura simpléctica

Se determinó a la estructura simpléctica de la teoría de Chern-Simons no conmutativa.

Sobre el espacio fase de la teoría se identificó un potencial simpléctico definido como

$$\hat{\Theta} \equiv \alpha \int_{\Sigma} \mathrm{Tr}\left(\delta \hat{A} \cdot \hat{A}\right) .$$

La variación de $\hat{\Theta}$ nos permitió definir a la estructura simpléctica sobre $\hat{Z}$:

$$\hat{\omega} \equiv -\delta \hat{\Theta} = \alpha \int_{\Sigma} \mathrm{Tr}\left(\delta \hat{A} \cdot \delta \hat{A}\right) .$$

- **Características**

➔ $\hat{\omega}$ es una dos-forma exacta: $\hat{\omega} = -\delta \hat{\Theta}.$

➔ $\hat{\omega}$ es cerrada: $\delta \hat{\omega} = 0 \qquad (\delta^2 = 0).$

3. Generador de simetrías

Se determinó el generador de simetrías de la teoría de Chern-Simons no conmutativa.

Para determinar el generador de simetrías de la teoría se aplica a $\hat{\omega}$ la identidad que relaciona a la derivada de Lie (L_V), la operación de contracción por un campo vectorial V (i_V) y la derivada exterior (δ) [3,4]

$$L_V \hat{\omega} = i_V \left(\delta \hat{\omega}\right) + \delta\left(i_V \hat{\omega}\right).$$

Dado que $\delta\hat{\omega} = 0$, podemos escribir, al menos localmente

$$i_V \hat{\omega} = \delta \hat{T},$$

donde $\hat{T}$ es una funcional del espacio fase a ser determinada.

[3] C. Crnkovic, *Symplectic geometry and (super-)poincaré algebra in geometrical theories*, Nucl. Phys., B288, 419 (1987).

[4] M. Dubois-Violette, *Some aspects of noncommutative differential geometry*, arXiv: q-alg/9511027 (1995).

Considerando la expresión de $\hat{\omega}$, encontramos

$$i_V\hat{\omega} = \alpha\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left[\xi^n \varepsilon^{ijk}\left(\partial_n\hat{A}_i \cdot \delta\hat{A}_j - \delta\hat{A}_i \cdot \partial_n\hat{A}_j\right)\right]\mathrm{d}\Sigma_k.$$

Empleando las ecuaciones de movimiento y la variación de las ecuaciones de movimiento

$$\varepsilon^{ijk}\hat{F}_{jk} = 0 \quad \text{donde} \quad \hat{F}_{jk} = \partial_j\hat{A}_k - \partial_k\hat{A}_j + \hat{A}_j \cdot \hat{A}_k - \hat{A}_k \cdot \hat{A}_j.$$

$$\delta\left(\varepsilon^{ijk}\hat{F}_{jk}\right) = 2\varepsilon^{ijk}\left(\partial_j\delta\hat{A}_k + \delta\hat{A}_j \cdot \hat{A}_k + \hat{A}_j \cdot \delta\hat{A}_k\right) = 0.$$

es posible expresar a $i_V\hat{\omega}$ de la siguiente manera:

$$i_V\hat{\omega} = -\delta\left\{\alpha\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left[\xi^n \varepsilon^{ijk}\hat{A}_i \cdot \left(\partial_n\hat{A}_j + \hat{A}_n \cdot \hat{A}_j\right)\right]\mathrm{d}\Sigma_k\right\}, \qquad (4)$$

módulo divergencias totales y conmutadores punto. De (4) podemos identificar explícitamente la expresión para $\hat{T}$,

$$\hat{T}^k{}_n = \alpha\mathrm{Tr}\left[\varepsilon^{ijk}\hat{A}_i \cdot \left(\partial_n\hat{A}_j + \hat{A}_n \cdot \hat{A}_j\right)\right].$$

Lo que sigue…

- Elegir el par canónico conjugado.
- Determinar los campos vectoriales de las funciones del espacio fase.
- Calcular los paréntesis de Poisson.