Lorentz-covariant Hamiltonian analysis of BF gravity

Mariano Celada y Merced Montesinos

Lorentz-covariant Hamiltonian analysis of BF gravity with the Immirzi parameter

Basada en CQG 29 (2012) 205010

Mariano Celada

Asesor

Merced Montesinos

Cinvestav

Seminario del Cuerpo Académico de Partículas, Campos y Relatividad General

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Septiembre 19 de 2012

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

Introducción

Gravedad → manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.
Dinámica del campo gravitacional: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$.

Principios de acción

- Métrica (E-H): $S[g_{\mu\nu}] = \kappa \int_M R\sqrt{-g}d^4x$.
- Primer orden (Holst): $S[e,A] = \int_M \left[*(e^I \wedge e^J) - \frac{1}{\gamma}e^I \wedge e^J\right] \wedge F_{IJ}[A]$; ${F^I}_J = d{A^I}_J + {A^I}_K \wedge {A^K}_J$, γ → Parámetro de Immirzi.
- BF: $S[B,A,\phi,\mu] = \int_M (B^{IJ} \wedge F_{IJ}[A] - \phi_{IJKL}B^{IJ} \wedge B^{KL} + \mu H(\phi))$; $H(\phi) = \epsilon^{IJKL}\phi_{IJKL}, \quad {\phi^{IJ}}_{IJ}, \quad a_1{\phi^{IJ}}_{IJ} + a_2\epsilon^{IJKL}\phi_{IJKL}$.

Mientras la formulación de primer orden es la base de loop quantum gravity, la formulación BF es usada para construir los modelos de spin foam.

Introducción

Gravedad $\rightarrow$ manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.
Dinámica del campo gravitacional: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$.

Principios de acción

- Métrica (E-H): $S[g_{\mu\nu}] = \kappa \int_M R \sqrt{-g} d^4 x$.
- Primer orden (Holst): $S[e, A] = \int_M \left[*(e^I \wedge e^J) - \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right] \wedge F_{IJ}[A]$; ${F^I}_J = d{A^I}_J + {A^I}_K \wedge {A^K}_J$, $\gamma \rightarrow$ Parámetro de Immirzi.
- BF: $S[B, A, \phi, \mu] = \int_M (B^{IJ} \wedge F_{IJ}[A] - \phi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL} + \mu H(\phi))$; $H(\phi) = \epsilon^{IJKL} \phi_{IJKL}, \quad {\phi^{IJ}}_{IJ}, \quad a_1 {\phi^{IJ}}_{IJ} + a_2 \epsilon^{IJKL} \phi_{IJKL}$.

Mientras la formulación de primer orden es la base de loop quantum gravity, la formulación BF es usada para construir los modelos de spin foam.

Introducción

Gravedad $\rightarrow$ manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.
Dinámica del campo gravitacional: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$.

Principios de acción

- Métrica (E-H): $S[g_{\mu\nu}] = \kappa \int_M R \sqrt{-g} d^4x$.
- Primer orden (Holst): $S[e,A] = \int_M \left[*(e^I \wedge e^J) - \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right] \wedge F_{IJ}[A]$; $F^I{}_J = dA^I{}_J + A^I{}_K \wedge A^K{}_J$, $\gamma \rightarrow$ Parámetro de Immirzi.
- BF: $S[B,A,\phi,\mu] = \int_M (B^{IJ} \wedge F_{IJ}[A] - \phi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL} + \mu H(\phi))$; $H(\phi) = \epsilon^{IJKL} \phi_{IJKL}, \quad \phi^{IJ}{}_{IJ}, \quad a_1 \phi^{IJ}{}_{IJ} + a_2 \epsilon^{IJKL} \phi_{IJKL}$.

Mientras la formulación de primer orden es la base de loop quantum gravity, la formulación BF es usada para construir los modelos de spin foam.

Lorentz-covariant Hamiltonian analysis of BF gravity

Mariano Celada y Merced Montesinos

- El parámetro de Immirzi es de naturaleza topológica (PRD **85** 024026 (2012)).
- No es relevante a nivel clásico, pero sí a nivel cuántico: aparece en el espectro de operadores y en la expresión de la entropía de agujeros negros.
- Es posible construir una conexión covariante de Lorentz a nivel cuántico (PRD **65** 024011 (2001)):

- El parámetro de Immirzi es de naturaleza topológica (PRD **85** 024026 (2012)).
- No es relevante a nivel clásico, pero sí a nivel cuántico: aparece en el espectro de operadores y en la expresión de la entropía de agujeros negros.
- Es posible construir una conexión covariante de Lorentz a nivel cuántico (PRD **65** 024011 (2001)):

- El parámetro de Immirzi es de naturaleza topológica (PRD **85** 024026 (2012)).
- No es relevante a nivel clásico, pero sí a nivel cuántico: aparece en el espectro de operadores y en la expresión de la entropía de agujeros negros.
- Es posible construir una conexión covariante de Lorentz a nivel cuántico (PRD **65** 024011 (2001)):
  - No conmutativa, transforma correctamente ante difeomorfismos temporales, espectro independiente de γ.
  - Conmutativa, no transforma correctamente ante difeomorfismos temporales, espectro dependiente de γ.

- El parámetro de Immirzi es de naturaleza topológica (PRD **85** 024026 (2012)).
- No es relevante a nivel clásico, pero sí a nivel cuántico: aparece en el espectro de operadores y en la expresión de la entropía de agujeros negros.
- Es posible construir una conexión covariante de Lorentz a nivel cuántico (PRD **65** 024011 (2001)):
  - No conmutativa, transforma correctamente ante difeomorfismos temporales, espectro independiente de γ.
  - Conmutativa, no transforma correctamente ante difeomorfismos temporales, espectro dependiente de γ.

- El parámetro de Immirzi es de naturaleza topológica (PRD **85** 024026 (2012)).
- No es relevante a nivel clásico, pero sí a nivel cuántico: aparece en el espectro de operadores y en la expresión de la entropía de agujeros negros.
- Es posible construir una conexión covariante de Lorentz a nivel cuántico (PRD **65** 024011 (2001)):
  - No conmutativa, transforma correctamente ante difeomorfismos temporales, espectro independiente de γ.
  - Conmutativa, no transforma correctamente ante difeomorfismos temporales, espectro dependiente de γ.

Teorías con constricciones

Se considera un sistema clásico con N grados de libertad descrito por el principio de acción

$$S = \int L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$W_{nm}\ddot{q}^m = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}\dot{q}^m, \qquad W_{mn} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}.$$

Si $\det(W_{mn}) = 0 \Longrightarrow$ no se podrán expresar todas las aceleraciones en términos de las posiciones y velocidades.

Definiendo los momentos canónicos a las q's

$$p_n = p_n(q,\dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \qquad (n = 1,\ldots,N).$$

$$W_{mn} = \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}^n}$$ $\rightarrow$ matriz jacobiana de la transformación de $\dot{q}$ a p.

Cuando W_{mn} no es invertible, existen relaciones entre las q's y las p's (únicamente) que son denominadas **constricciones primarias**.

$$\phi_m(q,p) = 0, \qquad (m = 1,\ldots,M).$$

Definiendo los momentos canónicos a las q's

$$p_n = p_n(q,\dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \qquad (n = 1,\ldots,N).$$

$$W_{mn} = \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}^n} \rightarrow \text{matriz jacobiana de la transformación de } \dot{q} \text{ a } p.$$

Cuando W_{mn} no es invertible, existen relaciones entre las q's y las p's (únicamente) que son denominadas **constricciones primarias**.

$$\boxed{\phi_m(q,p) = 0, \qquad (m = 1,\ldots,M).}$$

Igualdades débiles y fuertes

Ya que las constricciones determinan un subespacio Σ_1 del espacio de fase Γ, es conveniente diferenciar ecuaciones definidas sobre Γ de ecuaciones definidas sobre Σ_1.

Identidad débil

$$G(q,p) \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(q,p)|_{\Sigma_1} = 0.$$

Identidad fuerte

$$G(q,p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p}\bigg|_{\Sigma_1} = 0.$$

Puede mostrarse que

$$\boxed{F \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \lambda^m \phi_m.}$$

Igualdades débiles y fuertes

Ya que las constricciones determinan un subespacio Σ_1 del espacio de fase Γ, es conveniente diferenciar ecuaciones definidas sobre Γ de ecuaciones definidas sobre Σ_1.

Identidad débil

$$G(q,p) \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(q,p)|_{\Sigma_1} = 0.$$

Identidad fuerte

$$G(q,p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p}\bigg|_{\Sigma_1} = 0.$$

Puede mostrarse que

$$\boxed{F \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \lambda^m \phi_m.}$$

Igualdades débiles y fuertes

Ya que las constricciones determinan un subespacio Σ_1 del espacio de fase Γ, es conveniente diferenciar ecuaciones definidas sobre Γ de ecuaciones definidas sobre Σ_1.

Identidad débil

$$G(q,p) \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(q,p)|_{\Sigma_1} = 0.$$

Identidad fuerte

$$G(q,p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left. G, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p} \right|_{\Sigma_1} = 0.$$

Puede mostrarse que

$$F \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \lambda^m \phi_m.$$

Igualdades débiles y fuertes

Ya que las constricciones determinan un subespacio Σ_1 del espacio de fase Γ, es conveniente diferenciar ecuaciones definidas sobre Γ de ecuaciones definidas sobre Σ_1.

Identidad débil

$$G(q,p) \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(q,p)|_{\Sigma_1} = 0.$$

Identidad fuerte

$$G(q,p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G, \frac{\partial G}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p}\bigg|_{\Sigma_1} = 0.$$

Puede mostrarse que

$$\boxed{F \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F = \lambda^m \phi_m.}$$

Condiciones de consistencia

Incluir las constricciones: $H_c \Rightarrow H_T = H_c + u^m \phi_m$.
Las evolución temporal para una variable dinámica g es

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u^m \{g, \phi_m\} \approx \{g, H_T\}.$$

Condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}_m \approx 0 \Longrightarrow \{\phi_m, H_c\} + u^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0.$$

Tres posibles casos

1. $0 = 0$.
2. Nuevas constricciones $\Rightarrow$ constricciones secundarias $\chi \approx 0$.
3. Condiciones sobre los multiplicadores.

Solución general para las u's: $u^m \approx U^m + v^a V_a^m \Rightarrow H_T = H' + v^a \phi_a$.

$$H' = H_c + U^m \phi_m \text{ y } \phi_a = V_a^m \phi_m.$$

Condiciones de consistencia

Incluir las constricciones: $H_c \Rightarrow H_T = H_c + u^m \phi_m$.
Las evolución temporal para una variable dinámica g es

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u^m \{g, \phi_m\} \approx \{g, H_T\}.$$

Condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}_m \approx 0 \Longrightarrow \{\phi_m, H_c\} + u^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0.$$

Tres posibles casos

1. $0 = 0$.
2. Nuevas constricciones $\Rightarrow$ constricciones secundarias $\chi \approx 0$.
3. Condiciones sobre los multiplicadores.

Solución general para las u's: $u^m \approx U^m + v^a V_a^m \Rightarrow H_T = H' + v^a \phi_a$.

$$H' = H_c + U^m \phi_m \text{ y } \phi_a = V_a^m \phi_m.$$

Cantidades de 1ª y de 2ª clase

$(\varphi_s) \equiv (\phi_m, \chi_n) \approx 0$: conjunto de constricciones de la teoría.

Cantidad de 1ª clase (FC)

$$\{F, \varphi_s\} = C_s{}^r \varphi_r \approx 0.$$

Cantidad de 2ª clase

$$\exists\ \varphi_s \text{ t.q. } \{F, \varphi_s\} \not\approx 0.$$

de constricciones FC= # v^a's $\Rightarrow$ una elección u otra de v^a llevará a diferentes valores de las coordenadas al evolucionar.
El cambio inducido en F al evolucionar con dos v^a's diferentes es

$$\Delta F = \epsilon^a \{F, \phi_a\} \approx \{F, \epsilon^a \phi_a\} \quad \text{con} \quad \epsilon^a = \delta t (v_2^a - v_1^a).$$

Este cambio no tiene significado físico $\Rightarrow$ las constricciones ϕ_a (que son FC) generan transformaciones de norma.

Cantidades de 1ª y de 2ª clase

$(\varphi_s) \equiv (\phi_m, \chi_n) \approx 0$: conjunto de constricciones de la teoría.

Cantidad de 1ª clase (FC)

$$\{F, \varphi_s\} = C_s{}^r \varphi_r \approx 0.$$

Cantidad de 2ª clase

$$\exists\ \varphi_s \text{ t.q. } \{F, \varphi_s\} \not\approx 0.$$

de constricciones FC= # v^a's $\Rightarrow$ una elección u otra de v^a llevará a diferentes valores de las coordenadas al evolucionar.
El cambio inducido en F al evolucionar con dos v^a's diferentes es

$$\Delta F = \epsilon^a \{F, \phi_a\} \approx \{F, \epsilon^a \phi_a\} \quad \text{con} \quad \epsilon^a = \delta t (v_2^a - v_1^a).$$

Este cambio no tiene significado físico $\Rightarrow$ las constricciones ϕ_a (que son FC) generan transformaciones de norma.

Cantidades de 1ª y de 2ª clase

$(\varphi_s) \equiv (\phi_m, \chi_n) \approx 0$: conjunto de constricciones de la teoría.

Cantidad de 1ª clase (FC)

$$\{F, \varphi_s\} = C_s{}^r \varphi_r \approx 0.$$

Cantidad de 2ª clase

$$\exists\ \varphi_s \text{ t.q. } \{F, \varphi_s\} \not\approx 0.$$

de constricciones FC= # v^a's $\Rightarrow$ una elección u otra de v^a llevará a diferentes valores de las coordenadas al evolucionar.
El cambio inducido en F al evolucionar con dos v^a's diferentes es

$$\Delta F = \epsilon^a \{F, \phi_a\} \approx \{F, \epsilon^a \phi_a\} \quad \text{con} \quad \epsilon^a = \delta t (v_2^a - v_1^a).$$

Este cambio no tiene significado físico $\Rightarrow$ las constricciones ϕ_a (que son FC) generan transformaciones de norma.

Fijación de la norma y grados de libertad

Extracción de información física

Observables clásicos: $\{G, \phi_a\} \approx 0$.

Fijar la norma = eliminar ambigüedades en la especificación de un estado físico $\Rightarrow$ un punto del espacio de fase reducido $\equiv$ un único estado físico.

Condiciones de norma

Condiciones de norma Ω_a = constricciones FC ϕ_a, t. q.

$$\det(\{\Omega_b, \phi_a\}) \neq 0.$$

Grados de libertad físicos

$$\mathrm{DOF} = \frac{1}{2}\left(2N - 2N_{FC} - N_{SC}\right).$$

Fijación de la norma y grados de libertad

Extracción de información física

Observables clásicos: $\{G, \phi_a\} \approx 0$.

Fijar la norma = eliminar ambigüedades en la especificación de un estado físico ⇒ un punto del espacio de fase reducido ≡ un único estado físico.

Condiciones de norma

Condiciones de norma Ω_a = constricciones FC ϕ_a, t. q.

$$\det(\{\Omega_b, \phi_a\}) \neq 0.$$

Grados de libertad físicos

$$\mathrm{DOF} = \frac{1}{2}\left(2N - 2N_{FC} - N_{SC}\right).$$

Acción CMPR(Capovilla-Montesinos-Prieto-Rojas)

Acción CMPR (CQG **18** (2001) L49)

$$S[B,A,\phi,\mu]=\int_M \left[B^{IJ}\wedge F_{IJ}-\phi_{IJKL}B^{IJ}\wedge B^{KL}+\mu\left(a_1\phi_{IJ}{}^{IJ}+a_2\epsilon_{IJKL}\phi^{IJKL}\right)\right].$$

Los índices internos se suben y bajan con $\eta_{IJ}=\mathrm{diag}(\sigma,1,1,1)$, donde $\sigma=\pm 1$. ϕ_{IJKL} satisface: $\phi_{IJKL}=-\phi_{JIKL}=-\phi_{IJLK}=\phi_{KLIJ}$. La constricción impuesta por ϕ_{IJKL} es

$$B^{IJ}\wedge B^{KL}=\frac{1}{6}(B_{MN}\wedge B^{MN})\eta^{I[K|}\eta^{J|L]}+\frac{\sigma}{12}(*B_{MN}\wedge B^{MN})\epsilon^{IJKL},$$
$$2a_2B_{IJ}\wedge B^{IJ}=\sigma a_1 *B_{IJ}\wedge B^{IJ},$$

que implica $B^{IJ}=\alpha*(e^I\wedge e^J)+\beta e^I\wedge e^J$ $\Rightarrow$ se recupera la acción de Holst al sustituir en la acción.

Descomposición 3+1 de la acción

Supondremos en lo que sigue que $M = \mathbb{R} \times \Omega$ (Ω compacta y $\partial\Omega = 0$). Denotaremos por (t, x^a) (a=1,2,3)) las coordenadas sobre M. Haciendo $B^{IJ} = \frac{1}{2} B_{\mu\nu}{}^{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$ y $F_{IJ} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$, se obtiene

$$S[A,\Pi,\phi,\mu_0] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Omega} d^3x \Big\{ \Pi^{aIJ} \dot{A}_{aIJ} + A_{0IJ} D_a \Pi^{aIJ} + \frac{1}{2} B_{0a}{}^{IJ} \tilde{\eta}^{abc} F_{bcIJ} - \left[2B_{0a}{}^{IJ} \Pi^{aKL} - \mu_0 \left(a_1 \eta^{I[K|} \eta^{J|L]} + a_2 \epsilon^{IJKL} \right) \right] \phi_{IJKL} \Big\},$$

donde $\Pi^{aIJ} \equiv \frac{1}{2} \tilde{\eta}^{abc} B_{bc}{}^{IJ}$. Ahora usaremos la ec. de movimiento correspondiente a ϕ_{IJKL} para poner las componentes $B_{0a}{}^{IJ}$ en términos de $\Pi^{aIJ} \equiv \frac{1}{2} \tilde{\eta}^{abc} B_{bc}{}^{IJ}$:

$$B_{0a}{}^{IJ} \Pi^{aKL} + B_{0a}{}^{KL} \Pi^{aIJ} - \mu_0 \left[a_1 \eta^{I[K|} \eta^{J|L]} + a_2 \epsilon^{IJKL} \right] = 0.$$

Esta expresión implica $\mu_0 = \sigma \mathcal{V}/4$, con $\mathcal{V} \equiv \frac{1}{3}\epsilon_{IJKL} B_{0a}{}^{IJ} \Pi^{aKL} \neq 0$ (volumen 4-dimensional). La ec. a resolver es entonces

$$B_{0a}{}^{IJ} \Pi^{aKL} + B_{0a}{}^{KL} \Pi^{aIJ} - \frac{\sigma}{4} \mathcal{V} \left[a_1 \eta^{I[K|} \eta^{J|L]} + a_2 \epsilon^{IJKL} \right] = 0.$$

Introduciendo las siguientes cantidades:

$$N^a \equiv \frac{\sigma}{2h} \tilde{\eta}^{abc} h_{bd} B_{0c}{}^{IJ} \Pi^d{}_{IJ}, \qquad N \equiv \frac{\mathcal{V}}{h} \neq 0$$
$$hh^{ab} \equiv \frac{\sigma}{2} \Pi^{aIJ} \Pi^b{}_{IJ}, \qquad \Phi^{ab} \equiv -\sigma * \Pi^a{}_{IJ} \Pi^{bIJ},$$

su solución es

$$B_{0a}{}^{IJ} = \frac{1}{8} N h_{ab} \epsilon^{IJKL} \Pi^b{}_{KL} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\eta}_{abc} \Pi^{bIJ} N^c + \frac{1}{16h} N h_{ac} h_{bd} \Pi^{bIJ} \left(\Phi^{cd} + \frac{a_1}{a_2} hh^{cd} \right),$$
$$\varphi^{ab} \equiv \Phi^{cd} + \frac{a_1}{a_2} hh^{cd} = 0.$$

Sustituyendo esta expresión en la acción se obtiene

$$S[A,\Pi]=\int_{\mathbb{R}}dt\int_{\Omega}d^3x\left[\Pi^{aIJ}\dot{A}_{aIJ}+A_{0IJ}\mathcal{G}^{IJ}+N\mathcal{H}+N^a\mathcal{H}_a+\lambda_{ab}\varphi^{ab}\right].$$

A_{0IJ}, N, N^a y λ^{ab} juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Las constricciones primarias son entonces

Constricciones primarias

$$\mathcal{G}^{IJ}\equiv D_a\Pi^{aIJ}\approx 0,\quad \mathcal{H}_a\equiv\frac{1}{2}\Pi^{bIJ}F_{baIJ}\approx 0,$$

$$\mathcal{H}\equiv\frac{1}{8}\tilde{\eta}^{abc}h_{ad}*\Pi^{dIJ}F_{bcIJ}\approx 0,\quad \varphi^{ab}\equiv\Phi^{ab}+\frac{a_1}{a_2}hh^{ab}\approx 0.$$

El hamiltoniano es $H=-\int_{\Omega}d^3x\left(A_{0IJ}\mathcal{G}^{IJ}+N\mathcal{H}+N^a\mathcal{H}_a+\lambda_{ab}\varphi^{ab}\right)\approx 0$. Por otro lado, A y Π satisfacen $\{A_{aIJ}(x),\Pi^{bKL}(y)\}=\delta^b_a\delta^{[K}_I\delta^{L]}_J\delta^3(x,y)$.

Álgebra de constricciones

Preservación de las constricciones durante la evolución $\Rightarrow$ $\{C, H\} \approx 0$.
El álgebra de constricciones primarias es:

$$\{\mathcal{G}^{IJ}(x), \mathcal{G}^{KL}(y)\} = \frac{1}{2}\left(-\eta^{IK}\mathcal{G}^{JL} + \eta^{JK}\mathcal{G}^{IL} + \eta^{IL}\mathcal{G}^{JK} - \eta^{JL}\mathcal{G}^{IK}\right)\delta^3_{x,y},$$

$$\{\mathcal{G}^{IJ}(x), C(y)\} = 0 \qquad (C = \mathcal{H}, \mathcal{H}_a, \varphi^{ab}),$$

$$\{\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}_b(y)\} = \left[\tfrac{1}{2}\mathcal{H}_a(y)\tfrac{\partial}{\partial y^b} - \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_b(x)\tfrac{\partial}{\partial x^a} - \tfrac{1}{4}F_{abIJ}\mathcal{G}^{IJ}\right]\delta^3_{x,y},$$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}(y)\} = {} & \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{H}(y)\tfrac{\partial}{\partial y^a} - \mathcal{H}(x)\tfrac{\partial}{\partial x^a}\right]\delta^3_{x,y} \\ & -\tfrac{1}{32}\tilde{\eta}^{cde}F_{deKL}\left[\epsilon_{IJ}{}^{KL}h_{ac} + \tfrac{\sigma}{h} * \Pi^{fKL}\Pi^{r}{}_{IJ}H_{arcf}\right]\mathcal{G}^{IJ}\delta^3_{x,y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_a(x), \varphi^{bc}(y)\} = {} & \left[\tfrac{1}{2}\varphi^{bc}(y)\tfrac{\partial}{\partial y^a} - \tfrac{1}{2}\varphi^{bc}(x)\tfrac{\partial}{\partial x^a} - \delta^{(b}_a\varphi^{c)d}(y)\tfrac{\partial}{\partial y^d}\right]\delta^3_{x,y} \\ & +\sigma\delta^{(b}_a\left(*\Pi^{c)}{}_{IJ} - \tfrac{a_1}{2a_2}\Pi^{c)}{}_{IJ}\right)\mathcal{G}^{IJ}\delta^3_{x,y},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\} = \frac{\sigma}{8}\left[h(x)h^{ab}(x)\mathcal{H}_a(x)\frac{\partial}{\partial x^b} - h(y)h^{ab}(y)\mathcal{H}_a(y)\frac{\partial}{\partial y^b}\right]\delta^3_{x,y}\\
&+\frac{1}{32}\tilde{\eta}^{abc} * \Pi^{gIJ}(x)F_{bcIJ}(x)h^{me}(x)\underset{\sim}{\eta}_{rm(a}h_{g)s}(x)\varphi^{rs}(x)\frac{\partial}{\partial x^e}\delta^3_{x,y} - (x\leftrightarrow y),\\
&\{\mathcal{H}(x),\varphi^{ab}(y)\} = \left[-\frac{a_1}{4a_2}h_{cf}(x)\tilde{\eta}^{(a|cd}\varphi^{f|b)}(x)\frac{\partial}{\partial x^d} + \Psi^{ab}\right]\delta^3_{x,y},\\
&\{\varphi^{ab}(x),\varphi^{cd}(y)\} = 0,
\end{aligned}
$$

donde $H_{abcd} \equiv h_{ab}h_{cd} - h_{ac}h_{bd} - h_{ad}h_{bc}$ y

$$
\boxed{\Psi^{ab} \equiv \frac{1}{2}h_{cf}\left(-\Pi^f{}_{IJ} + \frac{\sigma a_1}{2a_2} * \Pi^f{}_{IJ}\right)\tilde{\eta}^{(a|cd}D_d\Pi^{|b)IJ}.}
$$

Las evoluciones de $\mathcal{G}^{IJ}$ y $\mathcal{H}_a$ no generan ni nuevas constricciones ni condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange.

La evolución de φ^{ab} lleva a

$$N\Psi^{ab} \approx 0,$$

cuya solución es $\Psi^{ab} \approx 0 \rightarrow$ constricción secundaria.
Los PB's para la constricción Ψ^{ab} son

$$\begin{aligned}
\{\Psi^{ab}(x), \mathcal{G}^{IJ}(y)\} &= 0, \\
\{\Psi^{ab}(x), \mathcal{H}_c(y)\} &= \left[\frac{1}{2}\Psi^{ab}(y)\frac{\partial}{\partial y^c} - \frac{1}{2}\Psi^{ab}(x)\frac{\partial}{\partial x^c} + \delta^{(a}_c \Psi^{b)d}(x)\frac{\partial}{\partial x^d}\right]\delta^3_{x,y} \\
&+ \frac{a_1}{8a_2}\tilde{\eta}^{(a|de}h_{df}(x)\left[\delta^m_c \varphi^{f|b)}(x) - \delta^{b)}_c \varphi^{fm}(x)\right]\frac{\partial^2}{\partial x^e \partial x^m}\delta^3_{x,y} \\
&+ \frac{1}{4}\tilde{\eta}^{(a|de}h_{dc}\left(-D_e \Pi^{b)}{}_{IJ} + \frac{\sigma a_1}{2a_2} * D_e \Pi^{b)}{}_{IJ}\right)\mathcal{G}^{IJ}\delta^3_{x,y} \\
&+ \frac{\sigma}{8h}H_{cndf}\Pi^n{}_{IJ}\left(-\Pi^f{}_{KL} + \frac{\sigma a_1}{2a_2} * \Pi^f{}_{KL}\right)\tilde{\eta}^{(a|de}D_e \Pi^{|b)KL}\mathcal{G}^{IJ}\delta^3_{x,y} \\
&+ \frac{1}{4}\delta^{(a}_c \tilde{\eta}^{b)de}h_{df}(x)\left(-\Pi^f{}_{IJ}(x) + \frac{\sigma a_1}{2a_2} * \Pi^f{}_{IJ}(x)\right)(D_x)_e(G^{IJ}\delta^3_{x,y}),
\end{aligned}$$

$$\{\Psi^{ab}(x), \varphi^{cd}(y)\} = M^{(ab)(cd)} \delta^3_{x,y},$$

donde

$$M^{(ab)(cd)} \equiv \sigma h_{ef} \left(-\Pi^f{}_{IJ} + \frac{\sigma a_1}{2a_2} * \Pi^f{}_{IJ} \right) \left[\left(*\Pi^{cI}{}_K - \frac{a_1}{2a_2} \Pi^{cI}{}_K \right) \tilde{\eta}^{(a|de} \Pi^{|b)KJ} + (c \leftrightarrow d) \right]$$

es una matriz 6×6 invertible en general. A partir de la identidad de Jacobi se puede probar

$$\{\Psi^{ab}(x), \mathcal{H}(y)\} \approx F^{ab} \delta^3_{x,y}.$$

La evolución de Ψ^{ab} lleva a

$$NF^{ab} + \lambda_{cd} M^{(ab)(cd)} \approx 0 \Rightarrow \lambda_{ab} \approx -\frac{1}{4} N (M^{-1})_{(ab)(cd)} F^{cd}.$$

$\longrightarrow$ se fijan todos los multiplicadores λ_{ab} $\longrightarrow$ no hay más constricciones.

Grados de libertad físicos

Clasificación de las constricciones

- $\mathcal{G}^{IJ}$, $\mathcal{H}_a$ y $\bar{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - \frac{1}{4}(M^{-1})_{(ab)(cd)}\varphi^{ab}F^{cd}$ son de 1ª clase $\rightarrow$ transf. locales de Lorentz y difeomorfismos.
- φ^{ab} y Ψ^{ab} son de 2ª clase.

DOF la acción CMPR

$$\text{DOF} = \frac{1}{2}[2\times \underbrace{18}_{A_{aIJ}} - 2\times(\underbrace{6}_{\mathcal{G}^{IJ}} + \underbrace{3}_{\mathcal{H}_a} + \underbrace{1}_{\bar{\mathcal{H}}}) - (\underbrace{6}_{\varphi^{ab}} + \underbrace{6}_{\Psi^{ab}})]$$

$$= 2 \;!!$$

Grados de libertad físicos

Clasificación de las constricciones

- $\mathcal{G}^{IJ}$, $\mathcal{H}_a$ y $\bar{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - \frac{1}{4}(M^{-1})_{(ab)(cd)}\varphi^{ab}F^{cd}$ son de 1ª clase $\rightarrow$ transf. locales de Lorentz y difeomorfismos.
- φ^{ab} y Ψ^{ab} son de 2ª clase.

DOF la acción CMPR

$$\mathrm{DOF} = \frac{1}{2}[2\times \underbrace{18}_{A_{aIJ}} - 2\times(\underbrace{6}_{\mathcal{G}^{IJ}} + \underbrace{3}_{\mathcal{H}_a} + \underbrace{1}_{\bar{\mathcal{H}}}) - (\underbrace{6}_{\varphi^{ab}} + \underbrace{6}_{\Psi^{ab}})]$$

$$= 2 \;!!$$

Grados de libertad físicos

Clasificación de las constricciones

- $\mathcal{G}^{IJ}$, $\mathcal{H}_a$ y $\bar{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - \frac{1}{4}(M^{-1})_{(ab)(cd)}\varphi^{ab}F^{cd}$ son de 1ª clase $\rightarrow$ transf. locales de Lorentz y difeomorfismos.
- φ^{ab} y Ψ^{ab} son de 2ª clase.

DOF la acción CMPR

$$\text{DOF} = \frac{1}{2}[2\times \underbrace{18}_{A_{aIJ}} - 2\times(\underbrace{6}_{\mathcal{G}^{IJ}} + \underbrace{3}_{\mathcal{H}_a} + \underbrace{1}_{\bar{\mathcal{H}}}) - (\underbrace{6}_{\varphi^{ab}} + \underbrace{6}_{\Psi^{ab}})]$$

$$= 2 \text{ !!}$$

Gravedad á la BF con constante cosmológica (PRD **85** 064011 2012)

$$S[B,A,\phi,\mu] = \int_M \Big[\overset{(\gamma)}{B}{}^{IJ} \wedge F_{IJ} - \phi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL} - \mu \phi_{IJKL} \epsilon^{IJKL}$$

$$+ \mu\lambda + l_1 B_{IJ} \wedge B^{IJ} + l_2 B_{IJ} \wedge * B^{IJ} \Big],$$

donde $\overset{(\gamma)}{\Omega}{}^{IJ} \equiv \Omega^{IJ} + \frac{1}{\gamma} * \Omega^{IJ}$. Esta acción (sin constante cosmológica) y la anterior son equivalentes a nivel lagrangiano (SIGMA **7** (2011) 103).

Seguiremos un procedimiento similar al caso anterior. Después de realizar la descomposición 3+1, la ec. correspondiente a ϕ_{IJKL} es

$$B_{0a}{}^{IJ} \Pi^{aKL} + B_{0a}{}^{KL} \Pi^{aIJ} + \frac{\sigma}{4} \mathcal{V} \epsilon^{IJKL} = 0.$$

donde $\Pi^{aIJ} \equiv \frac{1}{2} \tilde{\eta}^{abc} B_{bc}{}^{IJ}$.

La solución para ${B_{0a}}^{IJ}$ puede obtenerse haciendo $a_1 = 0$ en la expresión de la sección anterior:

$$
{B_{0a}}^{IJ} = \frac{1}{8} N h_{ab} \epsilon^{IJKL} {\Pi^b}_{KL} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\eta}_{abc} \Pi^{bIJ} N^c + \frac{1}{16h} N h_{ac} h_{bd} \Pi^{bIJ} \Phi^{cd},
$$
$$
\Phi^{ab} = 0
$$

Las cantidades N, N^a, h^{ab} y Φ^{ab} están definidas como en el caso anterior. La acción toma entonces la forma

$$
S[A,\Pi] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Omega} d^3x \left[\overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{aIJ} \dot{A}_{aIJ} + A_{0IJ} \mathcal{G}^{aIJ} + N^a \mathcal{H}^a + N\mathcal{H} + \lambda_{ab} \Phi^{ab} \right].
$$

Las constricciones primarias impuestas por A_{0IJ}, N^a, N y λ_{ab} son:

Constricciones primarias

$$\mathcal{G}^{IJ} \equiv D_a \overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{aIJ} \approx 0, \quad \mathcal{H}_a \equiv \frac{1}{2} \overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{bIJ} F_{baIJ} \approx 0,$$

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{8} \tilde{\eta}^{abc} h_{ad} * \overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{dIJ} F_{bcIJ} + \Lambda h \approx 0, \quad \Phi^{ab} \approx 0.$$

Aquí $\Lambda \equiv 3l_2 - \sigma\lambda/4$. Ahora las coordenadas canónicas son A_{IJ} y $\overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{aIJ}$ y se tiene

$$hh^{ab} = \eta \left[\overset{(\gamma)}{(hh^{ab})} + \frac{\gamma^{-1}}{1+\sigma\gamma^{-2}} \overset{(\gamma)}{\Phi}{}^{ab} \right], \qquad \Phi^{ab} = \eta \left[\overset{(\gamma)}{\Phi}{}^{ab} + \frac{4\sigma\gamma^{-1}}{1+\sigma\gamma^{-2}} \overset{(\gamma)}{(hh^{ab})} \right].$$

donde $\overset{(\gamma)}{(hh^{ab})}$ y $\overset{(\gamma)}{\Phi}{}^{ab}$ son las expresiones de la sección anterior evaluadas en $\overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{aIJ}$. Además, $\eta \equiv \frac{\gamma^2(\gamma^2+\sigma)}{(\gamma^2-\sigma)^2}$.

Evolución de las constricciones

Como en la acción CMPR, las evoluciones de las constricciones $\mathcal{G}^{IJ}$ y $\mathcal{H}_a$ no producen ni nuevas constricciones ni condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, la evolución de Φ^{ab} produce la constricción secundaria:

$$\Psi^{ab} \equiv -2\eta h_{cf}\left(-\overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{f}{}_{IJ} + \frac{2\gamma^{-1}}{1+\sigma\gamma^{-2}} * \overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{f}{}_{IJ}\right)\tilde{\eta}^{(a|cd} D_d \overset{(\gamma)}{\Pi}{}^{|b)IJ} \approx 0.$$

Al evolucionar esta constricción se fijan los multiplicadores λ_{ab} y entonces el contenido de constricciones de la teoría es:

Clasificación de las constricciones

- $\mathcal{G}^{IJ}$, $\mathcal{H}_a$ y $\bar{\mathcal{H}}$ son de 1ª clase.
- Φ^{ab} y Ψ^{ab} son de 2ª clase.

El número de grados de libertad físicos es: 2

Conclusiones y perspectivas

- Ambas acciones del tipo BF para gravedad possen 2 grados de libertad locales.
- Aunque el parámetro de Immirzi entra de diferentes formas y las álgebras calculadas a partir de las constricciones listadas arriba pueden diferir un poco (sin considerar el acople de la constante cosmológica en el segundo caso), las álgebras pueden hacerse coincidir haciendo los cambios $\overset{(\gamma)}{\Pi} \rightarrow \Pi$ y $4\sigma\gamma^{-1}/(1+\sigma\gamma^{-2}) \rightarrow a_1/a_2$ en las constricciones del segundo principio de acción. Además, es necesario redefinir apropiadamente la constricción $\mathcal{H}$ para eliminar factores proporcionales a la constricción Φ^{ab}.

Conclusiones y perspectivas

- Ambas acciones del tipo BF para gravedad possen 2 grados de libertad locales.
- Aunque el parámetro de Immirzi entra de diferentes formas y las álgebras calculadas a partir de las constricciones listadas arriba pueden diferir un poco (sin considerar el acople de la constante cosmológica en el segundo caso), las álgebras pueden hacerse coincidir haciendo los cambios $\overset{(\gamma)}{\Pi} \rightarrow \Pi$ y $4\sigma\gamma^{-1}/(1+\sigma\gamma^{-2}) \rightarrow a_1/a_2$ en las constricciones del segundo principio de acción. Además, es necesario redefinir apropiadamente la constricción $\mathcal{H}$ para eliminar factores proporcionales a la constricción Φ^{ab}.

- Manejar las constricciones de segunda clase ya sea a través del corchete de Dirac o resolviéndolas explícitamente para hacer contacto con las formulaciones covariantes de Lorentz obtenidas a partir de la acción de Holst.
- Acoplar campos de materia, en particular fermiones.
- Construir las teorías cuánticas que surgen a partir de estos principios de acción.

- Manejar las constricciones de segunda clase ya sea a través del corchete de Dirac o resolviéndolas explícitamente para hacer contacto con las formulaciones covariantes de Lorentz obtenidas a partir de la acción de Holst.
- Acoplar campos de materia, en particular fermiones.
- Construir las teorías cuánticas que surgen a partir de estos principios de acción.

- Manejar las constricciones de segunda clase ya sea a través del corchete de Dirac o resolviéndolas explícitamente para hacer contacto con las formulaciones covariantes de Lorentz obtenidas a partir de la acción de Holst.
- Acoplar campos de materia, en particular fermiones.
- Construir las teorías cuánticas que surgen a partir de estos principios de acción.

¡¡MUCHAS GRACIAS!!