Objetos BPS y paredes de dominio.

Víctor Manuel Vázquez Báez

Julio 2010

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
FCFM
Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Resumen

En esta charla se analizan la naturaleza de la condición BPS así como algunas de las consecuencias de que alguna configuración física sature dicha condición. Hablaremos también de las paredes de dominio, se establece con cierto detalle la acción de supergravedad N=1 que las las describe, de igual forma centraremos nuestra atención en configuraciones pared de dominio BPS. En la misma tónica se resuelven las ecuaciones de Einstein para la métrica de Randall-Sundrum, misma que describe de la forma más sencilla de una pared de dominio.

Introducción

La supersimetría (SUSY) es una simetría que relaciona una partícula con un espín determinado con otra cuyo espín difiere de la primera por $\frac{1}{2}$, esta última conocida como supercompañera. Esta idea propone que cada fermión (bosón) tiene asociado un compañero bosón (fermión), doblando así el número de partículas en la naturaleza, pues se ha demostrado que no hay forma de que las partículas del SM sean supercompañeras una de otra. Esto nos lleva a la formulación del Modelo Mínimo Estándar Supersimétrico (MSSM), que es el modelo supersimétrico más simple de las partículas elementales.

Introducción

Aunado a ello la supersimetría exacta, sin romper, predice que la partícula y su supercompañera deben tener la misma masa, por lo que la supersimetría no puede ser una simetría exacta en la naturaleza, y debe estar rota por algún mecanismo consistente con los demás requerimientos de la teoría. Sin embargo, no se han encontrado experimentalmente aún supercompañeros de las partículas del SM; si un supercompañero se encontrara nos diría la escala de energía a la que SUSY se rompe. A pesar de esto hay esperanzas reales de encontrar supercompañeros en los experimentos que se realizan en el Tevatrón de Fermilab o en los que se realizarán próximamente en el LHC del CERN.

Generadores de Trans. SUSY

Los generadores de las transformaciones de supersimetría satisfacen las siguientes relaciones:

$$\left\{ Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B} \right\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m P_m \delta^A{}_B$$

$$\left\{ Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_\beta{}^B \right\} = \left\{ \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B} \right\} = 0$$

$$\left[P_m, Q_\alpha{}^A \right] = \left[P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}A} \right] = 0$$

$$\left[P_m, P_n \right] = 0$$

Este tipo de álgebra "extendida" de Lie (extendida en el sentido de que contiene operaciones de conmutación y anticonmutación) recibe el nombre de álgebra gradada de Lie.

Generadores de Trans. SUSY

El álgebra supersimétrica no es el álgebra gradade de Lie más general, sin embargo; de todas las álgebras gradadas de Lie es la única que genera simetrías de la matriz S consistentes con la teoría cuántica relativista de campos. La prueba de esta aseveración se basa en los teoremas de Mandula-Coleman.

Generadores de Trans. SUSY

A partir del álgebra anterior es posible deducir que

$$H = \frac{1}{4}\left(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2\right),$$

y por lo tanto que

$$\langle\Psi| H |\Psi\rangle \geq 0,$$

para cualquier estado $|\Psi\rangle$.

La condición BPS

La cota de Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfeld (llamada así en honor a Eugène Bogomolny, Manoj Prasad, and Charles Sommerfield) es una serie de desigualdades, para las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, dependientes de la clase de homotopía de las soluciones en el infinito. Estas desigualdades son muy útiles para resolver ecuaciones solitonicas, como en el caso del "kink".

La condición BPS

Si se requiere que el estado base satisfaga la igualdad (lo que en la litertura se conoce como saturación) se obtiene un conjunto mucho más simple de ecuaciones diferenciales parciales llamadas ecuaciones de Bogomol'nyi.

Las soluciones que saturan la condición se llaman estados BPS y juegan un rol importante en la teoría de campo y la teoría de cuerdas, debido a que son estables. De forma general podemos decir que las soluciones a las ecuaciones de Bogomol'nyi son también soluciones de las ecuaciones de movimiento.

La condición BPS

En supersimetría, las soluciones tipo defecto topológico (paredes de domino, kinks, monopolos, etc.) saturan la condición BPS cuando la mitad (un cuarto, un octavo, ect.) de los generadores permanecen sin romperse. Esto ocurre cuando la masa es igual a la extención central de la supersimetría, la cual es tipicamente una carga topológica. En el caso de supersimetría $N = 1$ la mitad de las supersimetrías se realiza de forma lineal y lo otra mitad lo hace no linealmente a traves de dos modos cero fermiónicos.

De hecho, la mayoría de las cotas BPS bosónicas provienen del sector bosónico de una teoría supersimétrica y esto se toma como una explicación de su origen.

Origen de la Condicion BPS

Sean Q y $\bar{Q}$ las densidades de carga supersimétricas. Tenemos entonces que la variación SUSY cumple con

$$\delta_\epsilon Q[\epsilon] \equiv \left\{Q[\epsilon], \bar{Q}[\epsilon]\right\} = 2(\sigma + C) \succeq 0$$

donde ϵ es un espinor conmutante de Majorana, σ es la densidad de energía y C es llamada carga topológica.

Esta desigualdad es la condición BPS, la cual se satura ($\sigma = |C|$) cuando $\delta_\epsilon Q[\epsilon] = 0$. La saturación implica que estamos tratando con un fondo bosónico supersimetrico lo que quiere decir que cumple con

$$\delta\psi_m = 0, \tag{1}$$

$$\delta\chi = 0, \tag{2}$$

bajo las transformaciones de SUSY.

SAcción SUGRA $N = 1$

Consideremos ahora el lagrangiano de supergravedad en dimensión arbitraria, invariante ante transformaciones de supersimetría [7], siguiente

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\kappa^{D-2}} \int d^D x e \Big[& R - \kappa^{D-2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + \bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} \nabla_N \psi_P \\ & + \kappa^{D-2} \bar{\chi} \Gamma^M \nabla_M \chi + M(\phi) \kappa^{D-2} \bar{\chi} \chi - \kappa^{D-2} V(\phi) \\ & + \frac{1}{2} \kappa^D \partial_N \phi \left(\bar{\psi}_M \Gamma^M \Gamma^N \chi + \bar{\chi} \Gamma^M \Gamma^N \psi_M \right) \\ & + W_2 \kappa^D \left(\bar{\psi}_M \Gamma^M \chi - \bar{\chi} \Gamma^M \psi_M \right) - (D-2) W \kappa^D \bar{\psi}_M \Gamma^{MN} \psi_N \\ & + (\text{higher order Fermi terms}) \Big] \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\kappa = 1/M_P$ es la longitud de Planck en D-dimensiones, M_P es la masa de Planck D-dimensional, $e = |\det g_{MN}|^{1/2}$, con una signatura $(- + \cdots +)$, y

Acción SUGRA $N = 1$

$$U(\phi, T) = 4(D-2)^2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \kappa^{D-2} \left(\frac{D-1}{D-2} \right) W^2 \right], \tag{4}$$

$$W_2 = (D-2) \frac{\partial W}{\partial \phi}, \tag{5}$$

$$M(\phi, T) = 2(D-2) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} - (D-2) \kappa^{D-2} W \right]. \tag{6}$$

Esta acción es invariante ante las transformaciones de supersimetría siguientes:

$$\delta \psi_m = \nabla_m \epsilon + W \Gamma_m \epsilon, \tag{7}$$

$$\delta \chi = \epsilon \left(-\frac{1}{2} \Gamma_m \partial_m \phi + W_2 \right), \tag{8}$$

donde $\nabla_m \epsilon = \partial \epsilon + \frac{1}{4} \omega_m^{ab} \Gamma_{ab} \epsilon$.

Acción SUGRA $N = 1$

La configuración de pared de dominio BPS se obtiene resolviendo las ecuaciones de Killing para los espinores, esto es, igualando a cero las ecuaciones (7) y (8); utilizando la métrica de R-S (**??**) este procedimiento resulta en

$$\partial_y A = \mp 2\kappa^{D-2} W, \tag{9}$$

$$\partial_y \phi = \pm 2 (D-2) \frac{\partial W}{\partial \phi}, \tag{10}$$

lo cual no es otra cosa que la versión gravitacional de la solución de kink BPS que interpola entre dos vacíos en la supersimetría [8].

Acción SUGRA $N = 1$

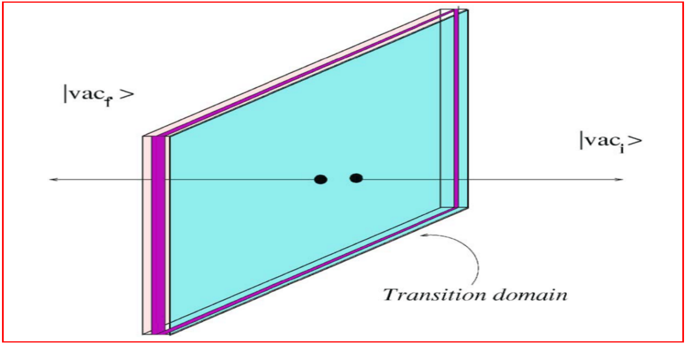

Figura: Configuración Pared de Dominio.

La condición BPS

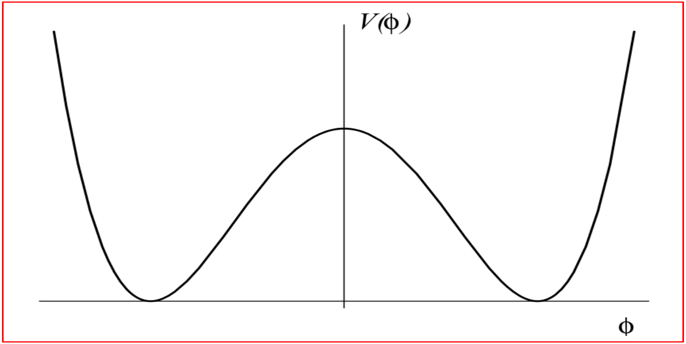

Figura: Potencial de doble pozo.

El Modelo RS-I

Dentro de las configuraciones que tipo pared de dominio que surgieron a fines de los 90's como producto de la segunda revolución de la Teoría de Cuerdas se tienen dos modelos representativos:

- el modelo de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali de 1998 y
- el modelo de Randall-Sundrum (R-S) de 1999,

ambos modelos describen la jerarquía de interacciones a través de relaciones de fine tunnig provenientes de la geometría de nuestro espacio- tiempo en lugar de algún principio de simetría.

El modelo R-S supone la existencia de una dimensión extra çompactificada"sobre un círculo cuyas mitades superior e inferior están relacionadas mediante una identificación. Formalmente esto significa que trabajamos con el orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$, donde S^1 es la esfera 1-dimencional y $\mathbb{Z}_2$ es el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$; esta construcción posee dos puntos fijos para la coordenada angular que parametriza la quinta dimensión, $\phi = 0, \pi$, que tomaremos como la localización de dos 3-branas, que serán la frontera del espacio-tiempo 5-dimensional mediante:

$$g_{\mu\nu}^{vis} \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0) \text{ y } g_{\mu\nu}^{oc} \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi),$$

donde G_{MN} con $M, N = \mu, \phi$ es la métrica en cinco dimensiones.

El Modelo RS-I

Debemos ahora encontrar la métrica que describa la configuración esbozada arriba. Estamos buscando soluciones a las ecuaciones de Einstein que sean compatibles con el espacio-tiempo que conocemos: el universo 4-dimensional debe lucir plano y estático (invariancia de Poincaré), esto nos lleva a proponer

$$ds^2 = e^{-2A(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \tag{11}$$

donde el coeficiente r_c es el radio de çompactificación" de la quinta dimensión antes de volverla orbifold. Después de dicho proceso el tamaño del intervalo de la dimensión extra es πr_c.

El Modelo RS-I

Ahora bien, la acción clásica que describe este sistema es

$$S = S_{gravedad} + S_{vis} + S_{oc},$$

$$S_{gravedad} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G}\left[-\Lambda + 2M^3 R\right],$$

$$S_{vis} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g_{vis}}\left[\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}\right]\delta(\phi - \pi),$$

$$S_{oc} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g_{hid}}\left[\mathcal{L}_{oc} - V_{oc}\right]\delta(\phi),$$

donde la constante de Newton 5-dimensional está definida como $\kappa^2 \equiv 1/2M^3$.

El Modelo RS-I

La forma específica de las acciones de las branas no es de relevancia para determinar la métrica; sin embargo, se separa una energía del vacío que debe actuar como una fuente gravitacional aún en ausencia de partículas y sus excitaciones en las branas (paredes de dominio). La materia, los campos del Modelo Estándar, se encuentra en $\mathcal{L}_{vis}$.

El Modelo RS-I

Procedemos a calcular el escalar de curvatura para obtener la ecuaciones de Einstein, para ello necesitamos los elementos del tensor métrico y de su inverso los que se leen fácilmente de (11)

Con esto los únicos símbolos de Christoffel diferentes de cero son

$$\Gamma^{0}_{0\phi} = -A'(\phi), \quad \Gamma^{i}_{iy} = -A'(\phi) \ , \quad \Gamma^{\phi}_{00} = A'(\phi)\, e^{-2A(\phi)} \tag{12}$$

$$\Gamma^{\phi}_{ii} = A'(\phi)\, e^{-2A(\phi)}, \tag{13}$$

donde la prima denota de este punto en adelante derivación con respecto de ϕ

El Modelo RS-I

Las componentes del tensor de Ricci nos quedan como

$$R_{\mu\nu} = \left[A'' - 4A'^2\right] g_{\mu\nu}, \tag{14}$$

$$R_{\phi\phi} = \left[4A'' - 4A'^2\right] g_{\phi\phi}. \tag{15}$$

De donde el escalar de curvatura es

$$R = 8A'' - 20A'^2, \tag{16}$$

y para $\sqrt{-g}$ obtenemos

$$\sqrt{-g} = \det e_M^A = e^{4A(y)}. \tag{17}$$

El Modelo RS-I

El tensor de Einstein es por tanto

$$G_{\mu\nu} = \left(6A'^2 - 3A''\right) g_{\mu\nu},$$

$$G_{\phi\phi} = 6A'^2,$$

y recordando que el tensor de energía-momento está definido como

$$T_{MN} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{materia}}{\delta g_{MN}},$$

las ecuaciones de Einstein resultantes son

$$\frac{6A'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3}, \tag{18}$$

$$\frac{3A''}{r_c^2} = \frac{V_{hid}}{4M^3 r_c^2}\delta\left(\phi\right) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c^2}\delta\left(\phi - \pi\right). \tag{19}$$

El Modelo RS-I

De la ecuación (18) vemos que A'^2 es igual a una constante que llamaremos k^2 e integrando sobre ϕ obtenemos

$$A = \pm k\phi,$$

y como queremos una solución que preserve la simetría del orbifol, esto es, invariancia bajo la transformación $\phi \to -\phi$, entonces debemos tener

$$A = k\left|\phi\right|.$$

El Modelo RS-I

Ahora, de la solución que acabamos de encontrar para A vemos que su primera derivada es

$$A' = \mathrm{sgn}\left(\phi\right) k,$$

el término $\mathrm{sgn}(\phi)$ se puede escribir como una combinación de funciones de Heaviside resultando en

$$\mathrm{sgn}\left(\phi\right) = \theta\left(\phi\right) - \theta\left(-\phi\right),$$

por lo que la segunda derivada es

$$A'' = 2k\delta\left(\phi\right).$$

El Modelo RS-I

Esta función delta surge del kink de A que se encuentra presente en $\phi = 0$. De la misma manera, el kink que existe en $\phi = \pi$ da origen a otra función delta por lo que la expresión completa para A es

$$A'' = 2k\left[\delta\left(\phi\right) - \delta\left(\phi - \pi\right)\right].$$

Substituyendo este resultado en (19) vemos que A será solución a las ecuaciones de Einstein si

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k \quad \text{y} \quad \Lambda = -24M^3k^2,$$

que son las condiciones de fine tunnig del modelo.

Con lo que, finalmente, la métrica para el bulk es

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \tag{20}$$

El Modelo RS-I

Analicemos con un poco más de detalle este resultado: en la integración de A con respecto de ϕ hemos omitido la constante de integración, debido a que dicha función entra a la métrica en la forma e^A por lo que la constante únicamente da lugar a un reescalamiento de las coordenadas x^μ; debemos mencionar que la solución hallada tiene sentido sólo cuando $\Lambda < 0$, por lo cual se asume que ese es el caso; también es instructivo decir que en virtud de esto último, el bulk entre las 3-branas corresponde a un espacio-tiempo AdS_5 lo cual hace la dinámica gravitacional compatible con una extensión supersimétrica.

Conclusiones

Hemos visto la utilidad de trabajar con objetos BPS puesto que, la solución de la dinámica depende de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, lo cual es con mucho más facil que resolver el sistema de ecuaciones de movimiento.

Se describió también una de las acciones típicas que contienen soluciones tipo pared de dominio, sin abundar en la matemática y la estructura geométrica, podemos decir de manera general que dichas configuraciones se presentan cuando se tienen vacios degenerados en un fondo bosónico supersimétrico, lo cual asegura que se sature la condición BPS, por lo cual tratamos con defectos topológicos tipo BPS, a su vez esto garantiza que los objetos son estables.

Conclusiones

Dentro de las paredes de dominio (que incidentalmente resultan ser branas en el lenguaje de la Teoría de Cuerdas) más relevantes debido a la gran cantidad de trabajos que se han realizado en este tenor encotramos el modelo de Randall-Sundrum. Dicho modelo nos devuelve en su primera formulación relaciones de fine tunning que explican la jerarquía de interacciones; y en su segunda versión nos dan una propuesta de gravitación çuántica".