Examen de Admisión al Programa de Mestría en Matemáticas

25 de noviembre de 2014

1. Determinar si la matriz A es diagonalizable y, si lo es, explicar por qué.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(0,1]$ y $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in (0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in (0,1]$ de tal manera que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a 0. Demostrar que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

3. Calcular las derivadas parciales y diferenciales en los puntos donde existen para la función:

$$f(x,y) = xy\tfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } f(x,y) = 0 \text{ para } (x,y) = 0.$$

4. Sea f una función continua real de variable real. Demostrar que:

$$\textstyle\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(\xi) \text{ para algún } \xi \in [0,1].$$

5. Sean X y Y dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (M,d). Definimos

$$d(X,Y) = \text{ínf}\{d(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

   (a) Si $X = \{x_0\}$ con $x_0 \in M$ y Y es compacto. Demostrar que:

$$d(X,Y) = d(x_0,y),$$

   para algún $y \in Y$.

   (b) Si X y Y son compactos. Demostrar que:

$$d(X,Y) = d(x,y),$$

   para algunos $x \in X$ y $y \in Y$.