

# Examen de Admisión Maestría en Matemáticas

FCFM-BUAP. Junio 2015

Nombre:

**INDICACIONES:** El aspirante debe escoger cuatro de los cinco problemas listados abajo.

1. Usando la definición de límite en términos de  $\varepsilon$  y  $\delta$ , demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x-3} \right) = -\frac{1}{4}.$$

2. Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}^2$  por la regla

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pruebe que en el punto  $(0, 0)$  existen las derivadas direccionales de  $f$  en cualquier dirección ¿Es  $f$  continua en el punto  $(0, 0)$ ?

3. Sea  $V$  el espacio vectorial de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  generado por las funciones  $e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}$ . Sea  $T : V \rightarrow V$  el operador lineal definido por la regla

$$T(f) = f'.$$

¿Es  $T$  diagonalizable?

4. Sea  $\{d_n\}$  una sucesión de métricas en un conjunto  $X$ . Pruebe que la función  $\tilde{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{d}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x, y)}{2^n(1 + d_n(x, y))}$$

es una métrica en  $X$ .

5. Utilizando el teorema de los residuos calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$