EXAMEN DE ADMISIÓN - MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
FCFM-BUAP, JULIO 11, 2011

NOMBRE:

1. Para un conjunto no vacío, A, en la recta real defina, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f_A(x) = inf\{|x-y| : y \in A\}$. Demuestre lo que sigue:

(a) f_A es una función real valuada y continua;

(b) $f_A(x) = 0$ si, y sólo si, $x \in \overline{A}$;

(c) Un conjunto no vacío en la recta real es cerrado si, y sólo si, existe una función real valuada y continua que se anula precisamente en los puntos de tal conjunto;

(d) La distancia entre dos conjuntos disjuntos en la recta real, donde uno es compacto y otro es cerrado, es positiva. Muestre que la compacidad de uno de los conjuntos es esencial para este efecto.

2. Formule y demuestre el teorema del valor intermedio para una función real valuada, definida en un espacio métrico conexo. También demuestre que un polinomio, de variable y valores reales, con coeficiente independiente negativo y coeficiente principal positivo, tiene al menos una raíz real.

3. Considere la función f, de variable y valores reales, definida por $f(x) = x^2 sen \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos es diferenciable esta función? ¿En qué puntos es continua su derivada?

4. Considere transformaciones lineales, S y T, del espacio de dimensión finita $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$, y bases ordenadas α y β de $\mathbb{V}$. Pruebe que $[T]_\alpha = [S]_\beta$ si, y sólo si, existe una transformación lineal e invertible $U : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $S = U^{-1}TU$.

5. Sea $\mathbb{V}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores $\{(2,-1,1,0,0),(0,-1,0,1,0),(1,0,0,0,1)\}$:

(a) Halle la proyección ortogonal del vector $(2,2,1,4,0)$ sobre $\mathbb{V}$;

(b) Halle una base ortonormal de $\mathbb{V}^\perp$.