Examen de Admisión de Maestría

23 de julio de 2007

Análisis

1. Sea $f:\ (0,2) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Si $\{x_n\}$ es de Cauchy, demostrar que $\{f((x_n))\}$ es de Cauchy. ¿Toda función con esta propiedad será uniformemente continua?

2. Sea $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[2]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

¿Es diferenciable en $(0,0)$?

3. Sea $f:\ [0,4] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,4]$ y diferenciable en $(0,4)$ tal que $f'(x) \leq 2$ para cada $x \in (0,4)$. Demostrar que:

$$\int_1^2 f(x)dx \leq 3.$$

4. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, y sea $z = z(x,y)$ una función tal que: $\Phi(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}) = 0$. Demostrar que:

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial x} = z - z_0.$$

Algebra Lineal

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{10}$ una transformación lineal. Los valores de f en los vectores $(1,3,-1,1)$, $(4,6,-1,4)$, $(2,4-1,2)$ y $(1,-3,2,1)$ son 0. ¿Qué valores puede tener la dimensión de la imagen?.

2. Sea **a** $\in \mathbb{R}^3$, **a** $\neq$ **0**. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ (producto vectorial). Encontrar los valores propios y los subespacios propios.

3) Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f\big((x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2,y_3)\big) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_1y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

Sea $\beta = \{(2,0,0),(1,2,0),(-3,1,2)\}$. Encuentre la representación matricial de f en la base β.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$f(x_1,x_2,x_3) = \big(x_1 + 2x_2 + 10x_3,\ 2x_1 + x_2 + 10x_3,\ -x_1 - x_2 - 6x_3\big).$$

Demostrar que f es diagonalizable y obtenga su diagonalización.