Temario Métodos Matemáticos

Variable Compleja
Funciones elementales de variable compleja.
Potencias y raíces de números complejos.
Función exponencial y funciones trigonométricas.
Funciones hiperbólicas.
Logaritmos.
Potencias y raíces complejas.
Teorema del residuo.
Valor principal de una integral.

Álgebra Lineal
Espacios vectoriales.
Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
Vectores.
Rectas y planos.
Álgebra matricial.
Combinaciones lineales, funciones lineales y operadores lineales.
Teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales.
Ecuaciones de eigenvalores.
Matrices especiales.

Ecuaciones Diferenciales
Ecuaciones de variables separables.
Ecuaciones lineales de primer orden.
Otros métodos para resolver ecuaciones de primer orden.
Ecuaciones lineales de segundo orden homogéneas.
Ecuaciones lineales de segundo orden no homogéneas.
Otras ecuaciones de segundo orden.
Solución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace y de Fourier.
Convolución y correlación, teorema de Parseval.

Funciones Generalizadas
Función gamma y función factorial.
Función Beta.
Función error.
Fórmula de Stirling.
Función delta de Dirac.
Funciones de Green.

Funciones Especiales
Método de Frobenius.
Ecuación de Bessel y su solución.
Relaciones de recurrencia.
Ecuación de Legendre.
Fórmula de Rodríguez.
Función generatriz para los polinomios de Legendre.
Conjunto completo de funciones ortogonales.
Funciones de Hermite.
Funciones de Laguerre y operador escalera.

Bibliografía
M. L. Boas, "Mathematical methods in the physical sciences", Third edition, John Wiley & Sons, USA(2006).

G. B. Arfken, H. J. Weber, "Mathematical methods for Physicists", Sixth edition, Elsevier Academic Press, USA(2005).

Problemario:

Texto: M. L. Boas, “Mathematical methods in the physical sciences”, Third edition, John Wiley & Sons, USA(2006).

Variable Compleja

Capitulo 14,
Pagina 699 ej.1, 4, 7, 11, 14, 16, 24, 27, 53

Evaluar, aplicando el teorema del residuo:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13+5\sin\theta}$ **4.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{5+3\cos\theta}$ **7.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{5+4\cos\theta}$ **11.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)^3}$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2+4x+5}$ **16.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{9x^2+4}$ **24.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi x}{1-x^2}\, dx$ **27.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\pi x}{1-4x^2}\, dx$

Evaluar la interal sobre el contorno

53. $\displaystyle\oint \frac{z^3+4z}{z^4+8z^2+16}\, dz;\ |z-2i|=2.$

pagina 719 ej 14,15,17,21
Encontrar el residuo en el punto

14. (a) $\dfrac{\ln(1+2z)}{z^2}$ en 0, (b) $\dfrac{1}{z}\sin(2z+5)$ en ∞

Evaluar las integrales

15. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{5-4\cos\theta}$ **17.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(4x^2+1)(x^2+9)}$

Álgebra Lineal
Capitulo 3,
Pagina 136 ej. 11, 18, 20, 24

Mostrar que la funciones son linealmente independientes

11. $\sin x,\ \cos x,\ x\sin x,\ x\cos x$

Resolver el conjunto de equaciones

18. $$\begin{cases} 2x \phantom{{}+2y} + 3z = 0 \\ 4x + 2y + 5z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

20. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - 5y + 6z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases}$

Encontrar los valores de λ para los cuales las siguientes ecuaciones tienen las soluciones no triviales, resolver las ecuciones para cada λ.

24. $\begin{cases} (6-\lambda)x + 3y = 0 \\ 3x - (2+\lambda)y = 0 \end{cases}$

Pagina 141 ej.3,13

Enontrar las siguientes matrices: transpuesta, inversa, compleja conjugada y transpuesta conjugada de A

3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5i \\ -2i & 2 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$

Mostrar que la siguiente matriz es una matriz unitaria

13. $\begin{pmatrix} (1+i\sqrt{3})/4 & \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(1+i) \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(1+i) & (\sqrt{3}+i)/4 \end{pmatrix}$

Pagina 159 ej.15, 20

Enontrar eugenvalores y eugenvectores de las matrices:

15. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ecuaciones Diferenciales

Capitulo 8,

Pagina 398 ej. 6,7

Para cada ecuación diferencial separar las variables y encontrar la solución que satisface a las sigientes condiciones de frontera

6. $y' = \dfrac{2xy^2 + x}{x^2y - y}$, $\quad y = 0$ when $x = \sqrt{2}$.

7. $y\,dy + (xy^2 - 8x)\,dx = 0$, $\quad y = 3$ when $x = 1$.

Pagina 403 ej. 3, 5

Encontrar la solución general para las ecuaciones diferenciales

3. $dy + (2xy - xe^{-x^2})\,dx = 0$

5. $y' \cos x + y = \cos^2 x$

Pagina 406 ej. 3,5,9

Resolver ecuaciones diferenciales

3. $3xy^2 y' + 3y^3 = 1$

5. $(x - y)\,dy + (y + x + 1)\,dx = 0$

9. $xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$

Pagina 414 ej. 1,4,11

Resolver ecuaciones diferenciales

1. $y'' + y' - 2y = 0$

4. $y'' + 2y' + 2y = 0$

11. $4y'' + 12y' + 9 = 0$

Pagina 422 ej. 3,6,14

Resolver ecuaciones diferenciales

3. $y'' + y' - 2y = e^{2x}$

6. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x}$

14. $y'' + 8y' + 25y = 120 \sin 5x$

Problemas miscelaneos.

1. Expresar a) $f(z) = z^2$ en la forma $u(x, y) + iv(x, y)$ donde $z = x + iy$ y u, v, x, y son reales.

2. Encuentre los polos de la siguiente función

$$\frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}iz - 2}$$

3. Cuáles son las ecuaciones de Cauchy-Riemann y que implican?

4. A partir de la ley de Kirchhoff, la corriente en un circuito RC obedece la ecuación

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

encuentre $I(t)$

5. Transforme la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

usando la substitución $y = z\ exp[-\frac{1}{2}\int^2 P(t)dt]$ y muestre que la ecuación resultante para z es

$$z'' - q(x)z = 0$$

donde $q(x) = Q(x) - \frac{1}{2}P'(x) - \frac{1}{4}P^2(x)$

6. Derive la relación de recurrencia $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ usando la representación integral de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

7. Qué son las funciones especiales? Mencione al menos 3 tipos de ellas, de qué tipo de problema surgen y características.

8. Explique la diferencia entre las series y las transformadas de Fourier, tanto matemática como físicamente.

9. Explique por qué si una función compleja cumple el criterio de Cauchy implica que tiene un número infinito de derivadas.

1. Explain why the set of functions sin(nx) is not a complete set on $(-\pi, \pi)$. By example trying to expand the function f(x) $= 1$ on $(-\pi, \pi)$ in terms of them.

2. Explain why $\int_{-1}^{1} P_l(x) \cdot (any\ polynomial\ of\ degree < l)dx = 0$, but $\int_{-1}^{1} P_l(x) \cdot (any\ polynomial\ of\ degree > l)dx \neq 0$

3. Show that $\int_{-1}^{1} P_l(x)'\ P_{l-1}(x)dx = 0$. and $\int_{-1}^{1} P_l(x)'\ P_{l+1}(x)dx = 0$.

4. Expand the following polynomials in a Legendre series, by calculating the Fourier coefficients: $7x^4 - 3x + 1$

5. The functions which are of interest in the theory of the hydrogen atom are

$$f_n(x) = x^{l+1}\ e^{-x/2n}\ L_{n-l-1}^{2l+1}(x/n)$$

where n and l are integers with $0 \leq l \leq n-1$. (Note that here $k = 2l+1$, and we have replaced n by $n-l-1$; in this problem L_2^3 , say, means $l = 1, n = 4$.) For $l = 1$, show that

$$f_2(x) = x^2 e^{-x/4}, \quad f_3(x) = x^2 e^{-x/6}(4 - x/3), \quad f_4(x) = x^2 e^{-x/8}(10 - 5x/4 + x^2/32)$$

Verify these three functions are orthogonal. Hint: The integrals are Γ functions

6. Show that $e^{x^2/2}\ D[e^{-x^2/2}\ f(x)] = (D-x)f(x)$. Now set $f(x) = (D-x)g(x) = e^{x^2/2}\ D[e^{-x^2/2} g(x)]$ to get $(D-x)^2 g(x) = e^{x^2/2} D^2[e^{-x^2/2} g(x)]$. Continue to

$$(D-x)^n F(x) = e^{x^2/2} D^n [e^{-x^2/2} F(x)]$$

for any $F(x)$.

1. Resolver

$$M = \int_0^{\pi/2} sen^6 x \; cos^4 x \; dx$$

2. Resolver

$$N = \int_0^{\pi/2} sen^5 x \; dx$$

3. Integrales de Lejeune-Dirichlet

$$I = \int\int\int x^{h-1} \; y^{m-1} \; z^{n-1} \; dx \; dy \; dz$$

sobre un octante limitado por el hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ y los planos coordenados. a. Resolverlo b. Demostrar que si h = 3, m = n = 1, se obtiene el momento de inercia del elipsoide respecto a OY

1. Sea dN/dt la razón de crecimiento de una colonia de bacterias, proporcional a la raíz del número de bacterias presente en cualquier momento. Si no hay bacterias presentes en $t = 0$, cuántas habrá en un tiempo posterior? Ojo, hay que pensarle un poco.

2. Consider a light beam traveling downward into the ocean. As the beam progresses, it is partially absorbed and its intensity decreases. The rate at which the intensity is decreasing with depth at any point is proportional to the intensity at that depth. The proportionality constant μ is called the linear absorption coecient. Show that if the intensity at the surface is I_0, the intensity at a distance s below the surface is $I = I_0 e^{-\mu s}$. The linear absorption coecient for water is of the order of $10^{-2}\ ft^{-1}$ (the exact value depending on the wavelength of the light and the impurities in the water). For this value of μ, nd the intensity as a fraction of the surface intensity at a depth of 1 ft, 50 ft, 500 ft, 1 mile. When the intensity of a light beam has been reduced to half its surface intensity ($I = I_0/2$), the distance the light has penetrated into the absorbing substance is called the half-value thickness of the substance. Find the half-value thickness in terms of μ. Find the half-value thickness for water for the value of μ given above.

3. Resolver $xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

4. Resolver $(D^4 + 4)y = 0$

5. The gravitational force on a particle of mass m inside the earth at a distance r from the center ($r <$ the radius of the earth R) is $F = -mgr/R$ Show that a particle placed in an evacuated tube through the center of the earth would execute simple harmonic motion. Find the period of this motion.

6. Considere la ecuación: $\frac{d^2Y}{dt^2} + 2b\frac{dY}{dt} + \omega^2 Y = F e^{i\omega^0 t}$. Resuelvala. Verique que la amplitud tiene una resonancia en $\omega^0 = \omega$. Considere que el lado derecho es ahora $Ksen(\omega^0 t) + Gcos(\omega^0 t)$. La solución presenta resonancias? Si es así, en el mismo valor de ω^0?