## PROBLEMAS DE CADENAS DE MARKOV

**M1.** Estudiar los procesos estocásticos definidos por las matrices:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

**M2.** Considerar un proceso markoviano con la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

**a)** ¿Cual es el tiempo medio de primer paso de 3 a 2?

**b)** ¿Cuales deberian ser las probabilidades iniciales de estado $\pi(0) = [\pi_1(0), \pi_2(0), \pi_3(0)]$ para que el proceso entrase en estado estacionario despues de <u>una</u> transicion?

**M3.** Un taller de reparaciones puede efectuar el trabajo A o el trabajo B pero no los dos simultaneamente; la tarea A requiere 2 dias y la B 1 dia. Los posibles estados del taller son pues:

1 = ninguna tarea, 2 = primer dia de la tarea A

3 = segundo dia de la tarea A 4 = tarea B

La probabilidad de una nueva demanda de tarea A al principio de cada dia es a; la de la tarea B es b. No hay colas, si el taller está a mitad de ejecución de una tarea A, la llegada de una nueva demanda se pierde. La única ambigüedad se plantea cuando el taller termina un trabajo al final de un dia y tiene la posibilidad de empezar al dia siguiente con una tarea A o una B. Las dos políticas son posibles:

1) Empezar siempre con una tarea A con preferencia a una B

2) Empezar siempre con una tarea B con preferencia a una A

**a)** Demostrar que para la política 1 la matriz de probabilidades de transicion es:

$$P = \begin{bmatrix} (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \\ (1-a)(1-b) & a & 0 & b(1-a) \end{bmatrix}$$

**b)** Encontrar las probabilidades límite de estados para este proceso

**c)** Encontrar la matriz de probabilidades de transición para la política 2

**d)** ¿Cual es la relación entre los porcentajes límite de dias de desocupación de ambas políticas?

**M4.** El siguiente proceso de Markov empieza en el estado 1

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Encontrar las probabilidades de que:

**a)** El proceso esté en el estado 3 despues de tres transiciones

**b)** El proceso llegue al estado 3 por primera vez después de n transiciones

**c)** El proceso no haya llegado aún al estado 2 después de n transiciones

**d)** Después de la tercera transición desde el estado 3 hasta el 2 las dos transiciones siguientes sean $\langle 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rangle$ o $\langle 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rangle$

**e)** El proceso entre en el estado 2 exactamente una vez en las tres primeras transiciones

**f)** El proceso realice la transición $1 \rightarrow 2$ exactamente una vez en las tres primeras transiciones

**g)** El número esperado de veces que el proceso entrará en el estado 2 durante las tres primeras transiciones.

**M5.** Supongamos que la probabilidad de que mañana llueva si hoy está lloviendo es 0.6, y que la probabilidad de que mañana haga buen tiempo si hoy hace buen tiempo es 0.4.

**a)** Determinar la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov correspondiente.

**b)** Hallar la distribución de probabilidad del estado estacionario.

**M6.** Determinar las clases de las siguientes cadenas de Markov y decir si son o no recurrentes

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

**M7.** Consideremos el siguiente juego: un jugador apuesta una unidad en cada partida. Tiene una probabilidad p de ganar y $q=1-p$ de perder. seguirá jugando hasta que se arruina o alcanza una fortuna de T unidades.

Sea $X_n$ la fortuna del jugador en la n-ésima partida.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{con probabilidad } p \\ X_n - 1 & \text{con probabilidad } q = 1 - p \end{cases} \qquad 0 < X_n < T$$

$$X_{n+1} = X_n \qquad\qquad X_n = 0 \text{ ó } T$$

$\{X_n\}$ es una cadena de Markov. Supongamos que las sucesivas partidas del juego son independientes y que la fortuna inicial del jugador es $X_0$

**a)** Determinar la matriz de probabilidades de transición de 1 paso de la cadena de Markov

**b)** Hallar las clases de la cadena de Markov

**c)** Sean $T = 3$ y $p = 0.3$ Hallar $f_{10}, f_{1T}, f_{20}, f_{2T}$

**d)** Sean $T = 3$ y $p = 0.7$ Hallar $f_{10}, f_{1T}, f_{20}, f_{2T}$

¿Qué se puede deducir de c) y d)?

**M8.** Supongamos que una red de comunicaciones transmite dígitos binarios 0 o 1. Al recorrer la red, existe una probabilidad q de que el dígito binario se reciba de forma incorrecta en el siguiente paso. Si $X_0$ denota un dígito binario que entra en el sistema, $X_1$ el dígito recibido después de la primera transición, $X_2$ el dígito recibido después de la segunda transición, ... $X_n$ , entonces es una cadena de Markov.

Hallar la matriz de probabilidades de transición y la distribución de probabilidad del estado estacionario.

**M9.** Considerar la siguiente política (k,Q) de gestión de inventarios. Sean $D_1, D_2, \ldots$ las demandas de un producto en los períodos 1,2,...., respectivamente.Si la demanda durante un periodo excede el número de items disponibles, la demanda insatisfecha es retenida, de manera que se satisface cuando llega el siguiente pedido de reposición del inventario. Denotemos por $Z_n$ (n=0,1,2,...) la cantidad de inventario disponible menos el número de unidades retenidas antes de efectuar un pedido de reposición de inventario al final del periodo n ($Z_0=0$). Si $Z_n$ es cero o positivo, no se retienen órdenes. Si $Z_n$ es negativo, entonces $-Z_n$ representa el número de unidades de demanda retrasada y no queda inventario disponible. Si al principio del periodo n, $Z_n<k=1$, se efectua un pedido de reposición de 2m (Qm en el caso general) unidades, donde m es el menor entero tal que $Z_n+2m>=1$. (La cantidad pedida es el menor múltiplo entero de 2, que lleva el nivel de inventario hasta al menos una unidad). Sean $D_n$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas que toman cada uno de los valores 0,1,2,3,4 con probabilidad 1/5. Denotemos por $X_n$ el valor del stock disponible después de efectuar el pedido al final del periodo n ($X_0=2$). Resulta entonces:

$$X_n = X_{n-1} - D_n + 2m, \quad \text{Si } X_{n-1} - D_n < 1$$
$$(n=1,2,3,....)$$
$$X_n = X_{n-1} - D_n, \quad \text{Si } X_{n-1} - D_n >= 1$$

y Xn es una cadena de Markov con solo dos estados: 1,2.

**a)** Encontrar la Matriz de Transiciones

**b)** Encontrar las probabilidades del estado estacionario

**c)** Suponer que el coste de efectuar un pedido de reposición es (3+3m).

El coste de mantenimiento del stock es $Z_n$, si $Z_n>=0$, y cero en caso contrario.

El coste de ruptura del stock es $-4Z_n$, si $Z_n<0$. Encontrar el coste medio esperado por unidad de tiempo.

**d)** Comprobar que, en general, para una politica (k,Q) los estados posibles son k,k+1,k+2,......,k+Q-1.

**M10.** El Servicio Hidrológico de la Comunidad Autónoma de X planea construir un embalse para regular la cuenca de uno de sus rios con el objetivo de satisfacer los requerimientos de agua para regadío. La capacidad máxima del embalse previsto será de 4.000.000 $m^3$, o, de manera abreviada 4 unidades de agua (1 unidad de agua = 1.000.000 $m^3$ ).

Antes de proceder a la construcción el Servicio desearia tener alguna idea sobre la efectividad del mismo a largo plazo. Para ello se ha llevado a cabo un estudio sobre los volúmenes semanales de agua aportados por el río, encontrándose con que ppueden aproximarse por medio de la siguiente distribución de probabilidad discreta:

| Aportación semanal en unidades de agua | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

El Servicio está considerando la posibilidad de contratos de regadío que requeriran el consumo de 2 unidades de agua por semana, pero adicionalmente, para mantener los estándares de calidad del agua para otros usos, deberá dejar salir al menos 1 unidad de agua por semana. Por lo tanto el objetivo semanal será dejar salir 3 unidades de agua. Si el estado del embalse (nivel del embalse) más la aportación de agua del rio es menor que esta cantidad se tendrá que dejar salir menos agua, afectando la carencia a los regadios. Si el embalse está lleno, cualquier exceso será vertido por los aliviaderos. El nivel mínimo admitido del embalse (estado mínimo) no podrá ser inferior a una unidad de agua.

- **a)** Representar el diagrama de transiciones, encontrar la matriz de probabilidades de transición, y comprobar que se trata de un proceso markoviano.
- **b)** ¿Cual será el número medio de semanas transcurrido desde que el embalse se encuentra en el estado con 2 unidades de agua hasta que esté totalmente lleno?
- **c)** Supuesto el embalse en el estado mínimo con 1 unidad de agua, ¿Cuantas semanas tardará, en promedio, en volver a estar en la misma situación?
- **d)** Suponiendo que la primera semana partimos de una situación en la que se embalsaban 3 unidades de agua ¿Cual es la probabilidad de que dos semanas después se encuentre al mínimo?.

**M11.** Una tienda de venta de ordenadores personales tiene un modelo particular cuyo stock puede reponerse semanalmente.

Representemos por $D_1$, $D_2$,....., la demanda de este modelo durante la primera semana, la segunda, etc.. Suponemos que las demandas $D_i$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, que tienen una distribución de Poison de parámetro $\lambda$=2. Supongamos que $X_0$ representa el número de unidades del modelo en el momento inicial, $X_1$ el número de unidades disponibles al final de la primera semana, $X_2$ el número de unidades disponibles al final de la segunda semana, y así sucesivamente. Supongamos que $X_0$=3.

El sábado por la noche la tienda efectúa un pedido al almacén central que le es servido el lunes por la mañana aprimera hora. La tienda utiliza la siguiente política de gestión de stocks: si el número de unidades disponibles al final de la semana es menor de 2 unidades, la tienda efectúa un pedido de reposición de 3 unidades. En caso contrario no efectua ningún pedido. Se supone que las ventas se pierden cuando la demanda es superior al inventario disponible. Los posibles estados del proceso son los enteros $X_t$ que representan el número de unidades disponibles al final de cada semana. Se pide:

**a)** Encontrar una expresión que permita evaluar iterativamente las variables aleatorias $X_t$.

**b)** Comprobar que las $X_t$, t=0,1,2,...., constituyen una cadena de Markov.

**c)** Calcular la matriz de probabilidades de transición.

**d)** Partiendo de un estado con tres unidades disponibles, ¿Cual es el tiempo medio hasta que el stock es cero.

**e)** Suponiendo que cada unidad en stock comporta un coste semanal de 300 pts., ¿Cual seria el coste medio semanal esperado a largo plazo?.

**M12.** Una máquina tiene dos piezas colocadas en paralelo de manera que para funcionar utiliza solo una de ellas, quedando la otra de repuesto para reemplazar a la que trabaja cuando esta se estropea, si está en condiciones de trabajar. Las piezas trabajan de manera que se estropean durante un periodo de tiempo dado con una probabilidad q.

Supongamos que la pieza que está trabajando, en caso de que se estropee, lo hace al final de un periodo, de manera que la pieza de repuesto empieza a trabajar, si está en condiciones de hacrlo, al principio del periodo siguiente. Hay un ínico mecánico para reparar las piezas estropeadas, que tarda dos periodos en reparar una pieza estropeada.

El proceso puede describirse mediante un vector $X_t$ de dos componentes U y V, donde U representa el número de piezas hábiles, trabajando o en condiciones de trabajar, al final del periodo t-ésimo, y V toma el valor 1 si el mecánico requier únicamente un periodo adicional para completar una reparacion, si ya está procediendo a ella, y 0 en caso contrario. Por lo tanto, el espacio de estados consta de cuatro estados:

(2,0), (1,0), (0,1), y (1,1)

(Por ejemplo, el estado (1,1) implica que una componente opera y la otra necesita un periodo adicional para acabar de ser reparada).

Denotemos los cuatro estados por 0,1,2 y 3 respectivamente (Es decir $X_t = 0$ quiere decir $X_t = (2,0)$, por ejemplo).

**a)** Comprobar que $\{X_t\}$, t=0,1,2,......, es una cadena de Markov.

Describir el diagrama de transiciones y hallar la matriz de probabilidades de transición.

**b)** Hallar la distribución de probabilidad del estado estacionario.

**M13.** Las familias de cierto país se clasifican según residan en áreas rurales, urbanas o suburbanas. Los estudios de movilidad demográfica estiman que, en promedio, en el curso de un año, el 15% de las familias urbanas cambia de residencia y se traslada a un área suburbana, y el 5% a un área rural; mientras que el 6% de las familias residentes en áreas suburbanas se traslada a áreas urbanas, y el 4% a áreas rurales, y finalmente el 4% de las familias rurales migra a las áreas urbanas y el 6% a las suburbanas.

**a)** ¿Cúal es la probabilidad de que una familia que vive ahora en un área urbana siga viviendo en un área urbana dentro de dos años?. ¿Y en una suburbana?. ¿Y en una rural?.

**b)** Supongamos que en el presente el 40% de las familias del país viven en áreas urbanas, el 35% en suburbanas y el 25% en rurales. ¿Qué porcentaje de familias vivirá en áreas urbanas dentro de dos años?.

**c)** ¿Qué distribución de población es de prever en el futuro si las tendencias no cambian?.

**M14.** Un bosque consta de dos tipos de árboles: jóvenes (entre 0 y 3 mts de altura) y adultos (más de 3 mts). Cada año, el 30% de los árboles jóvenes muere, el 10% se vende por $20 cada uno, el 20% se mantine entre 0 y 3 mts y el 40% crece superando los 3 mts. Cada año, el 40% de los árboles adultos se vende por $50, el 20% se vende por $20, el 30% permanece en el bosque y un 10% muere.

**a)** ¿Cuál es la probabilidad de que un árbol joven muera antes de ser vendido ?

**b)** Si plantar un árbol joven cuesta $5, ¿cuál es el beneficio esperado para cada árbol joven plantado ?

M15- Sea la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{pmatrix} .5 & .3 & .2 \\ .2 & .15 & .65 \\ .1 & .1 & .8 \end{pmatrix}$$

Con su vector de probabilidades iniciales en t = 0: (.8, .1, .1).

Encontrar:

a. El vector de probabilidades en el momento t = 2

b. La probabilidad de que en los momentos t = 0, 1, 2, 3, la cadena asuma los estados 1, 3, 3, 2, respectivamente.

c. El vector límite estacionario, si existe.

- Dibujar el gráfico de estados.

M16. Sea X(t), t = 0, 1, 2, … una cadena de Markov cuya matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y además: P[X(0) = 1] = 1
Supongamos que:

Y(t) = 1, si x(t) = 1

Y(t) = 2, si x(t) ≠ 1

Demostrar que Y(t), t = 0, 1, 2, … es también una cadena de Markov. Encontrar su matriz de probabilidades de transición.

M17. Sea X(t), t = 0, 1, 2, … una sucesión de variables aleatorias independientes y binarias, así:

P[x(t) = 1] = p, p > 0

P[x(t) = -1] = 1-p

Supongamos que Y(0) = 0, Y(t+1) = Y(t) + X(t+1), será Y(t), t = 0, 1, 2, … una cadena de Markov?
Hallar P[Y(t) = m], m = 0, 1, 2, …

M18. Sea x(t), t = 1, 2, … una sucesión de variables aleatorias independientes y binarias con:

$P[x(t) = 1] = p, p > 0$

$P[x(t) = -1] = q, p + q = 1$

Analice si las siguientes sucesiones son cadenas de Markov.

a) $Y(t) = x(t)\, x(t + 1)$
b) $Y(t) = x(1)\, x(2) \ldots x(t)$
c) $Y(t) = f(x(t), x(t+1))$ con: $f(-1, -1) = 1$, $f(-1, 1) = 2$, $f(1, -1) = 3$, $f(1, 1) = 4$

Si la respuesta es afirmativa, hallar la matriz de probabilidades de transición.

M19. Tenemos N urnas inicialmente vacías. Al azar y sucesivamente vamos depositando bolas. Sea x(n) el número de urnas que permanecen vacías cuando ya se han sorteado n bolas, n = 1, 2, …
Demostrar que la sucesión x(n), n = 1, 2 es una cadena de Markov. Hallar la matriz de probabilidades de transición.

M20. Nuevamente, en las N urnas vacías vamos sorteando al azar lotes de m bolas, uno tras otro. Las bolas de cada lote se sortean una tras otra con independencia y equiprobabilidad.

Sea x(n), n = 1, 2… el número de urnas que permanecen vacías cuando ya se han sorteado n lotes.

Demostrar que la sucesión x(n), n = 1, 2… es una cadena de Markov y hallar la matriz de probabilidades de transición.

M21. Sea $P=(p_{ij}, i, j = 1, n)$ una matriz de probabilidades de transición. Decimos que es doblemente estocástica si además de cumplir la propiedad $\sum_j p_{ij} = 1, \quad i = 1,n$ cumple también $\sum_i p_{ij}, \quad j = 1,$

Demostrar que en este caso el vector estacionario es equiprobable.

M22. Sea x(t), t = 0, 1, 2… una cadena de Markov cuyo espacio fase es S={1, 2, 3} y su vector estacionario es (1/3, 1/3, 1/3), mostrar que si $P_{11} = P_{22} = P_{33} = 0$, entonces: $P_{12} = P_{23} = P_{31} = P_{13} = P_{21} = P_{32}$

M23. Después de lanzar un dado apareció el resultado "seis". Luego se hace girar para que salga alguna de las cuatro caras vecinas, al azar. De esta manera se hacen giros sucesivos. Hallar el límite de la probabilidad de que vuelva a salir el seis, si el número de giros tiende a infinito.

M24. En cierta ciudad los habitantes pueden tener alguna de las profesiones A, B, C. En cada caso los hijos tienden a seguir la profesión del padre con probabilidades 3/5, 2/3 y ¼ respectivamente. Quienes no siguen la tradición del padre eligen equiprobablemente alguna de las otras dos.
Hallar:
a)  La distribución porcentual de las profesiones en la próxima generación, si actualmente es de 20% para A, 30% para B y 50% para C.
b)  La distribución límite de las generaciones cuando transcurren muchas generaciones.
c)  Una cierta distribución porcentual de las profesiones que no cambie de una generación a otra.

M25. En la urna 1 tenemos 9 bolas blancas y 1 bola negra. En la urna 2 tenemos 9 bolas negras y una blanca.  Extraemos una bola al azar de la urna 1. Si es negra, la regresamos a la urna. Si es blanca, la cambiamos por otra bola de la urna 2 que se extrae al azar.

Sea x(t), t = 0, 1, 2… el número de bolas en la urna 1 después de cada experimento.
Demostrar que x(t) es una cadena de Markov.
Dibujar el gráfico de estados.
Hallar la distribución límite.

M26. La matriz de probabilidades de transición y el vector de probabilidades iniciales de una cadena de Markov,

$$P=\begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 1/12 & 2/12 & 2/1 & 2/12 \\ 1/12 & 1/12 & 2/12 & 2/12 & 4/12 & 2/12 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 7/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

son:

$M^{(0)} = (1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0)$
Hallar:
a) Los estados transitorios
b) La esperanza matemática del tiempo transcurrido para abandonar los estados transitorios.
c) Sean las subclases $\alpha = \{3,4\}$, $\beta = \{5,6\}$ y supongamos que el estado inicial $i \in \{1,2\}$

M27.Dada la matriz de probabilidades de transición de una cadena de Markov:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = P$$

Hallar $p_{ij}(t)$ y la distribución límite y estacionaria de las probabilidades.

M28. Una partícula realiza una caminata aleatoria por una cuadrícula infinita. En cada paso avanza a algún nodo vecino.

Para escoger el siguiente paso tiene tres opciones equiprobables:

- Continuar en la dirección que traía
- Desviarse a la izquierda
- Desviarse a la derecha

Sea $X(n) = (X_1(n), X_2(n))$ las coordenadas en el momento n.

$X_1(n)$ es la abcisa en el momento n
$X_2(n)$ es la ordenada en el momento n

Hallar E[x(n)], a partir de: $X(0) = (X_1(0), X_2(0)) = (0, 0)$

$X(1) = (X_1(1), X_2(1)) = (1, 0)$