CADENAS DE MARKOV ABSORVENTES

Dr. José Dionicio Zacarias Flores

Introducción

- Es conveniente utilizar la clasificación de estados para llegar a una forma canónica para la matriz de transición. Renumeramos los estados como sigue: Los elementos de una clase de equivalencia dada recibirán números consecutivos. Los conjuntos mínimales vendrán en primer lugar, después a los que están un nivel por encima de los conjuntos mínimales, a continuación, se establecen dos niveles por encima de los conjuntos mínimales, etc.

Definiciones

- Un estado E_i de una CM se dice absorbente si, una vez alcanzado el estado E_i en algún intento, el sistema permanece en el estado E_i en todos los intentos futuros.
- Una CM es absorbente si tiene uno o más estados absorbentes y es posible llegar a un estado absorbente a partir de cualquiera de los estados no absorbentes.

- Lo anterior sugiere que cuando se trata de una CM absorbente, el sistema llegará eventualmente a un estado absorbente. De aquí surgen dos preguntas de manera natural.
- 1. ¿Cuánto tiempo, en promedio, estará el sistema en algún estado transitorio antes de llegar a un estado absorbente?
- 2. Si hay más de un estado absorbente , ¿cuáles son las probabilidades a largo plazo de terminar en cada uno de los estados absorbentes?

Procedimiento

- Hay un procedimiento, cuya demostración se omite, pero se muestra mediante un ejemplo.
- Sea

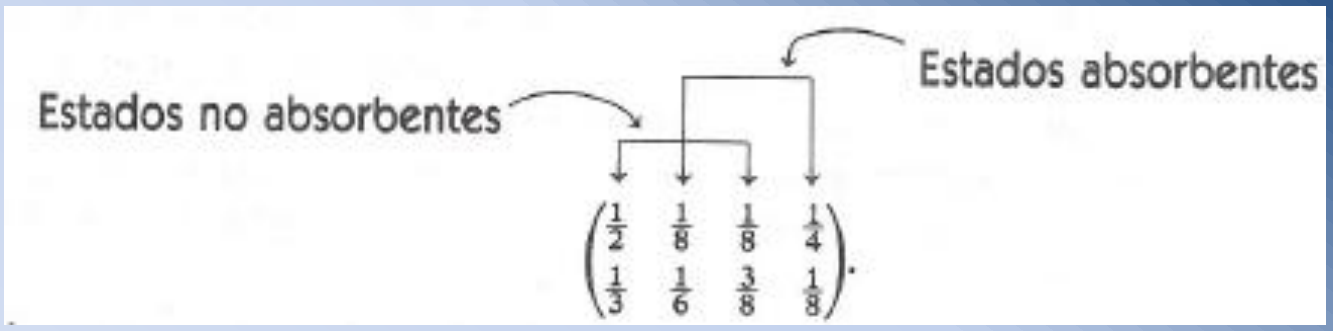
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 1. Se suprimen los renglones correspondientes a los estados absorbentes llamemos T’ a la nueva matriz.

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Procedimiento

- Paso 2. Divídase la matriz T’ en estados absorbentes y no absorbentes. Llamemos S a la matriz con los estados absorbentes y R a la matriz de los estados no absorbentes.



- Así $S = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/3 & 3/8 \end{pmatrix}$

Procedimiento

- Paso 3. Calcúlese la matriz Q = $(I-R)^{-1}$.
- Así $Q = (I-R)^{-1} = \frac{48}{13}\begin{pmatrix} 5/8 & 1/8 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 30/13 & 6/13 \\ 16/13 & 24/13 \end{pmatrix}$
- Q es llamada la **matriz fundamental** para la CM absorbente.

Procedimiento

- Paso 4. la componente q_{ij} de Q es el número esperado de veces que nos encontraremos en el estado transitorio j antes de alcanzar algún estado absorbente.
- Paso 5. Calcular la matriz de probabilidades A = QS.

$$A = QS = \begin{pmatrix} 19/52 & 33/52 \\ 6/13 & 7/13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.3654 & 0.6346 \\ 0.4615 & 0.5385 \end{pmatrix}$$

Las filas son los estados transitorios 1 y 2, las columnas los estados absorbentes 1 y 2.

Ejemplo

- En una escuela técnica de cursos bianuales. Cada 2 años, el Consejo Directivo presenta un presupuesto para la escuela a la legislatura estatal. El presupuesto se basa en el número de alumnos que asisten a la escuela y en el número de alumnos que se espera se gradúen. Para calcular estos números, los alumnos se clasifican en 4 categorías: 1er Año, 2do Año, graduados y suspendidos. La última categoría incluye a los alumnos que se pasan a otra escuela. Después de haber recogido datos durante varios años, la escuela puede predecir las proporciones de los estudiantes que pasarán de una categoría a otra en un año dado. Estos datos se muestran en la siguiente tabla. Si hay 2000 estudiantes de 1er Año y 1500 de 2do Año, en este año, ¿cuántos de estos estudiantes se llegarán a graduar?

De \ A	Primer año (P)	Segundo año (S)	Graduados (G)	Suspendidos (X)
Primer año	0.15	0.65	0	0.2
Segundo año	0	0.1	0.75	0.15
Graduados	0	0	1	0
Suspendidos	0	0	0	1

Realizando el procedimiento ya explicado se llega a la siguiente matriz

$$A \approx \begin{pmatrix} 0.63726 & 0.36274 \\ 0.8333 & 0.16667 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que:

De los 2000 estudiantes de primer año 2000 X 0.63726 = 1275 se graduarán.

De los 1500 estudiantes de segundo año 1500 X 0.83333 =1250 se graduarán.

¿Qué puedes concluir con la información obtenida en el paso 4.