Probabilidades Limitantes

[Dr. José Dionicio Zacarias Flores]

Teorema

- Para una cadena de Markov ergódica e irreducible $\lim_{n\to\infty} P_{ij}{}^{n}$ existe y es independiente de i. Además dejando

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \qquad j \geqslant 0$$

entonces π_j es la única solución no negativa de

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \qquad j \geqslant 0 \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

- Veamos que se obtiene para $P\{X_{n+1} = j\}$, condicionando al estado que se esté en el tiempo n. Es decir,

$$P\{X_{n+1} = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} P\{X_n = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P\{X_n = i\}$$

Haciendo que $n \to \infty$ y asumiendo válido el intercambio del límite y la sumatoria, obtenemos

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} \pi_i$$

Ejemplo

- Supongamos que nuestra CM tiene la siguiente matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{Vmatrix}$$

A la larga, ¿qué proporción de veces está el proceso en cada uno de los 3 estados?

Solución. Las probabilidades limitantes π_i se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2, \\ \pi_1 &= 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2, \\ \pi_2 &= 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2, \end{aligned}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Que nos da: $\pi_0 = \frac{21}{62}, \qquad \pi_1 = \frac{23}{62}, \qquad \pi_2 = \frac{18}{62}$

Definición

- Las proporciones a largo plazo π_j, $j \geq 0$, son llamadas probabilidades estacionarias.
- Una matriz de probabilidades P es regular si todas sus componentes de al menos una de sus potencias es P^n son estrictamente positivas (mayores que cero). Una cadena de Markov es regular si su matriz de transición es regular.

Ejemplo

- ¿Cuáles de las siguientes matrices son matrices de transición para una CM regular?

a) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Teorema

- Si P es una matriz de probabilidades regular, entonces hay un único vector de probabilidades π tal que $\pi P = \pi$. Además, para cualquier vector de probabilidades p, el vector de probabilidades pP^n se acerca más a π al crecer n. El ***vector fijo*** π se llama la ***distribución estacionaria*** de la cadena de Markov cuya matriz de transición es P. Además, al ir creciendo n, cada fila de P^n, tiende al vector fijo π.

Ejemplo

- Encontrar los vectores fijos para cada matriz regular.

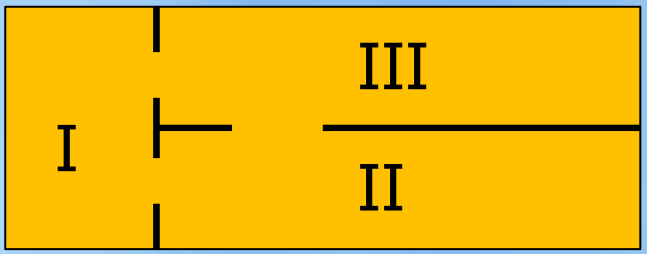
$a)\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Solución. a) Si $\pi = (x,y)$, $x = 2/5$, $y = 3/5$

b) Si $\pi = (x,y,z)$, $x = 5/13$, $y = 4/13$, $z = 4/13$

Ejemplo

- Se coloca un ratón en una caja dividida en compartimientos, como se muestra en la figura. En ausencia de más información, es razonable suponer que el ratón encontrará una puerta al azar para moverse de un compartimiento a otro. Si esta suposición es válida, a la larga puede esperarse que el ratón esté en el interior de cada compartimiento con igual frecuencia. Comprobar esta afirmación.



Teorema

- Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una cadena de Markov irreducible con probabilidades estacionarias π_j, $j \geq 0$, y sea r una función acotada sobre el espacio de estados. Entonces, con probabilidad 1,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} r(X_n)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} r(j)\pi_j$$