CLASIFICACIÓN DE ESTADOS (Parte 2)

Dr. José Dionicio Zacarias Flores

Definiciones

- Se dice que un estado i es esencial si y sólo si se comunica con cada estado al que conduce; de lo contrario, se denomina no esencial.
- Una matriz P de Markov es regular si existe un entero positivo k, de modo que todos los elementos de la matriz $P^{(k)}$ son estrictamente positivos.

Ejemplo

- La primera matriz es regular, mientras que la segunda no lo es.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} .5 & .5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} .75 & .25 \\ .5 & .5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto P es regular

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .75 & .25 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

P no es regular, pues para cualquier entero k, $P_{12}^{(k)}$ = 0

Definiciones

- El **período** d(i) de un estado es el número más grande que dividirá todos los n para el que $p^n(i,i)>$ O. Es decir, es el mayor divisor común de $I_i = \{n \geq 1 : p^n(i,i) > O\}$.
- Si d(i) > 1, el estado *i* se dice que es periódico con periodo d(i). Si d(i) = 1, entonces el estado *i* es aperiódico.

Definiciones

- Si P es regular, entonces todos los estados son aperiódicos.
- Una cadena de Markov cuyos estados son todos aperiódicos se denomina una cadena aperiódica de Markov.
- Si P es regular, la cadena de Markov es irreducible y aperiódica. Tal cadena de Markov se dice que es ergódica.

Ejemplo

- Cadena de Ehrenfest. Para ser más concretos, supongamos que hay tres bolas. En este caso, la probabilidad de transición es

	0	1	2	3
0	0	3/3	0	0
1	1/3	0	2/3	0
2	0	2/3	0	1/3
3	0	0	3/3	0

•$I_i = \{n \geq 1: p^n(i,i) > O\}$. = {2, 4, …} , entonces d(i) = 2

Lema

- Si p(i,i) > 0, entonces i tiene período 1.
- Demostración. Tarea.
- Nota. Mientras que p(i,i) > 0 es suficiente para que i tenga el período 1, no es necesario.

Ejemplo

- Supongamos la siguiente cadena

	1	2	3
1	.4	.6	0
2	.2	.5	.3
3	.1	.7	.2

¿Cuál es su período?

Ejemplo

- Consideremos la siguiente matriz de transición

	-2	-1	0	1	2	3
-2	0	0	1	0	0	0
-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0.5	0	0.5	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	1

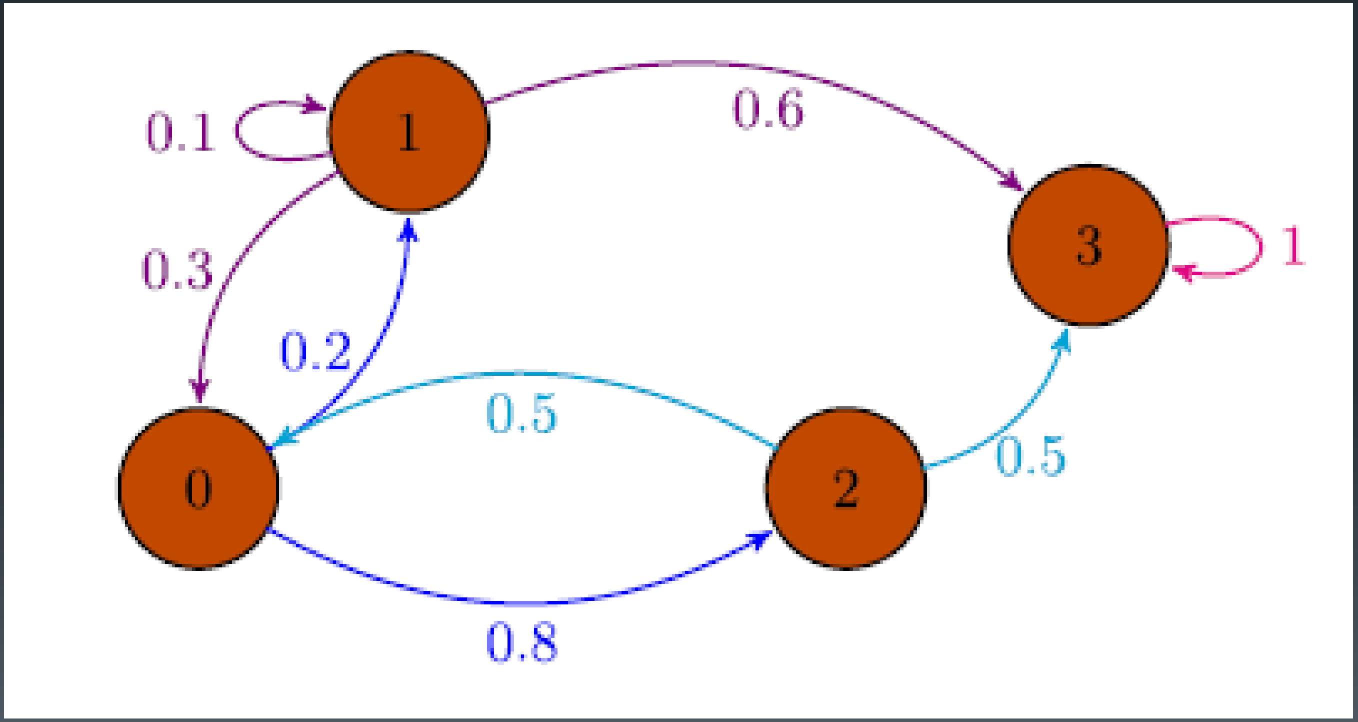
¿Cuál es su período? ¿Qué es I_0?

Lema

- Si i y j se comunican entre sí, entonces i y j tienen el mismo período.
- Demostración. Tarea.

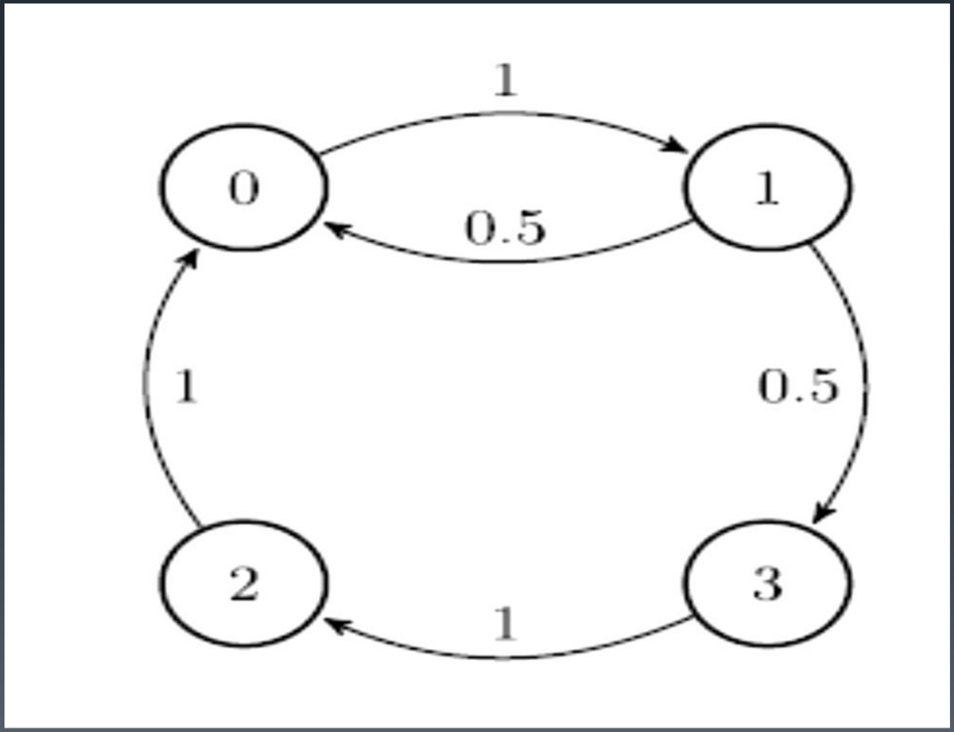
Ejercicio

- ¿Cuáles son sus clases? Cómo son sus estados? ¿Qué se puede decir de la siguiente CM?



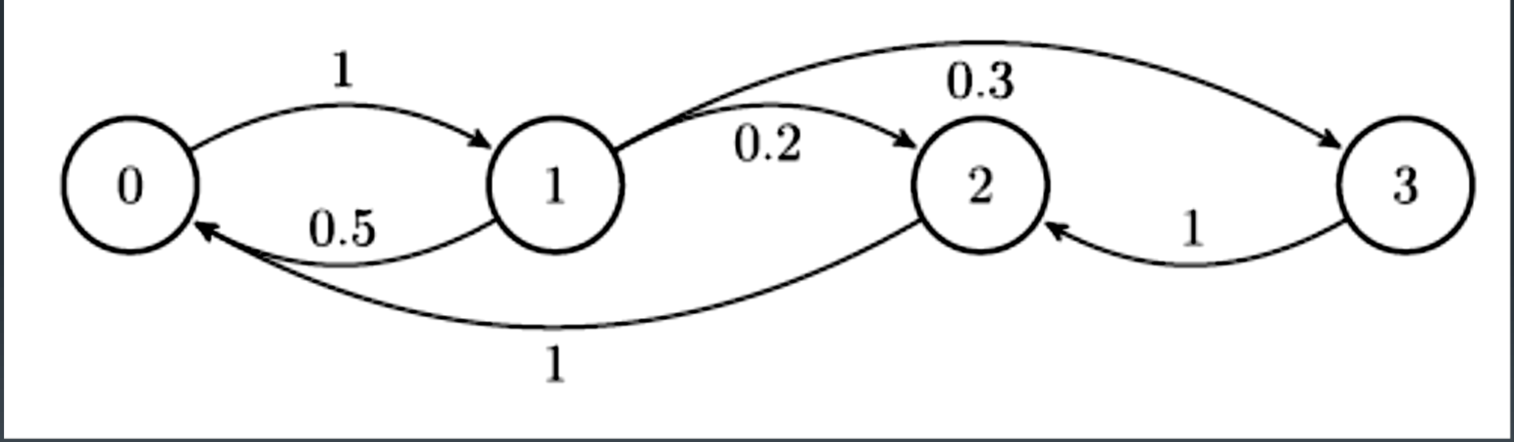
Ejercicio

- ¿Cuáles son sus clases? Cómo son sus estados? ¿Es periódica o aperiódica la CM? Si fuera periódica, ¿Cuál es el período?



Ejercicio

- ¿Cuáles son sus clases? Cómo son sus estados?¿Es periódica o aperiódica la CM? Si fuera periódica, ¿Cuál es el período?



Definiciones

- Una cadena de Markov se denomina uni-cadena si consta de un único conjunto cerrado de estados recurrentes más un conjunto posiblemente vacío de estados transitorios.
- Una uni-cadena sin estados transitorios se llama cadena irreducible o recurrente.
- Todos los estados en una cadena irreducible son estados recurrentes, que pertenecen a una única clase de comunicación cerrada.
- En una cadena irreducible, es posible pasar de cada estado a cualquier otro estado, no necesariamente en un solo paso.

Ejemplo

- Una cadena regular de Markov es el modelo para la difusión de dos gases para los cuales

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} .$$

Método práctico

- Un método práctico para verificar si la CM es regular, es hacer un seguimiento de si las entradas en las potencias de P son positivas. Esto se puede hacer sin calcular valores numéricos poniendo una x en la entrada si es positiva y un 0 en caso contrario.

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x & x & x & 0 \\ \mathbf{0} & x & x & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = PP = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x & x & x & 0 \\ \mathbf{0} & x & x & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x & x & x & 0 \\ \mathbf{0} & x & x & x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x & \mathbf{0} \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \mathbf{0} & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2P^2 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} x & x & x & \mathbf{0} \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \mathbf{0} & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & \mathbf{0} \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \mathbf{0} & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

- ¿La siguiente CM es regular?

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} .$$

Uni-cadenas reducibles

- Una uni-cadena con estados transitorios se llama uni-cadena reducible. Por lo tanto, una uni-cadena reducible consiste en una cadena recurrente más uno o más estados transitorios. Los estados transitorios son aquellos estados que no pertenecen a la cadena recurrente.
- El espacio de estados para una uni-cadena reducible se puede dividir en una cadena recurrente más uno o más estados transitorios. En aras de la brevedad, una uni-cadena reducible a menudo se denomina uni-cadena.

- La matriz de probabilidad de transición para una uni-cadena genérica reducible de cuatro estados se muestra a continuación.

$$P = [p_{ij}] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ \hline p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{array} \right].$$

- La matriz de transición está dividida para mostrar que los estados 1 y 2 pertenecen a la cadena recurrente denotada por R = {1, 2}, y los estados 3 y 4 son transitorios. El conjunto de estados transitorios se denota por T = {3, 4}.
- Si la cadena recurrente consiste en un solo estado absorbente, la uni-cadena reducible se llama uni-cadena absorbente o una *cadena de Markov absorbente*.

Representación Canónica

Clases mínimas absorbentes

Definición

- Un subconjunto no vacío C de $\{1,. . . , N\}$ se llama una clase cerrada o una clase absorbente para P si para cualquier $i \in C$ y para cualquier $j \notin C$, j no es accesible desde i; de manera equivalente, C es una clase cerrada si y solo si $i \in C$ y $i \to j$ implican $j \in C$.

Notas

- En otras palabras, C es una clase cerrada si no hay una ruta que comience desde cualquier punto de C y llegue a puntos fuera de C.
- Observe que no se requiere que los puntos de C estén conectados por pares.
- La forma más simple de enumerar las clases cerradas de {1,. . . , N} es considerar para cualquier i ∈ {1,. . . , N} el conjunto de nodos a los que se puede acceder desde i $\{j \in \{1, \ldots, N\} | \; i \to j\}$
- Trivialmente, todo el conjunto de índices es una clase cerrada para P.

Notas

- Además, es fácil mostrar que si C y D son clases cerradas, entonces también lo es $C \cup D$, y también lo es $C \cap D$ siempre que no esté vacío. Por lo tanto, las clases cerradas se ordenan parcialmente con respecto a la inclusión, y las clases cerradas mínimas $C_1, . . . , C_r$, $r \geq 1$ existen ya que P es finito; cada C_i es una clase cerrada tal que si D es una clase cerrada y $D \subset C_i$, entonces $D = C_i$.

Notas

- En particular, las clases cerradas mínimas son disjuntas por pares. Las clases cerradas mínimas se pueden encontrar en el conjunto de todas las clases cerradas. Usando el orden parcial con respecto a la inclusión, escribimos el diagrama de árbol de las clases cerradas comenzando desde la clase cerrada máxima {1,. . . , N}; entonces las hojas del árbol son las clases mínimas cerradas.

Teorema

- Una clase cerrada es mínima si y solo si todos sus elementos se comunican por pares.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea C una clase cerrada cuyos elementos se comunican por parejas.

Supongamos, por contradicción, que C no es mínima: entonces existe una clase cerrada mínima $D \subset C$, $D \neq C$, y cada elemento de D se comunica con al menos un elemento en $C \setminus D \subset D^c$, una contradicción.

- $\Leftarrow$) Por el contrario, supongamos que C es una clase cerrada mínima. Sea $j \in C$ y definamos

$$D_j := \left\{ i \,\middle|\, i \nrightarrow j \right\}.$$

Queremos demostrar que $D_j = \emptyset$. Claramente, $j \notin D_j$, por lo tanto, D_j es un subconjunto propio de C. Mostramos que si $D_j \neq \emptyset$, entonces D_j es una clase cerrada, que es una contradicción ya que $D_j \subset C$, $D_j = C$ y C es mínimal.

Supongamos que $D_j = \emptyset$. Para demostrar que D_j es una clase cerrada, solo necesitamos mostrar que $i \nrightarrow k$ para $i \in D_j$ y $k \notin D_j$. Distinguimos entre dos casos:

- Si k $\notin$ C, entonces $i \nrightarrow k$ puesto que C es una clase cerrada.

- Si k $\in$ C \ D_j, entonces k $\rightarrow$ j por la definición de D_j. Si i $\rightarrow$ k, entonces por transitividad i $\rightarrow$ j, una contradicción puesto que i $\in$ D_j.