CLASIFICACIÓN DE ESTADOS

Dr. José Dionicio Zacarias Flores

Propiedades relevantes de una CM

- Subconjuntos cerrados de una cadena de Markov.
- Comunicación de estados.
- El período de un estado, y
- Estados recurrentes y transitorios

Subconjuntos cerrados de un espacio de estados

- Definición. Un subconjunto no vacío C de S es llamado *cerrado* (o *invariante*) probando que: $p_{ij} = 0 \; siempre \; que \; i \in C \; y \; j \quad C$.
- Esto nos hace ver que S puede dividirse en clases.
- Decimos que una clase C es ***cerrad***a si

  $i \in$ C, $i \rightarrow$ j implica que j $\in$ C.

Lema

(i) Uniones e intersecciones no vacías de conjuntos cerrados son cerrados.
(ii) Sean C_1, C_2 conjuntos cerrados diferentes los cuales son mínimos con respecto a C. Entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.
(iii) Cada conjunto cerrado contiene un mínimo.

Dem. Ejercicio.

Nota. Para que se cumpla (iii) es necesario que S sea finito.

Estados comunicados

- Un estado $j \in S$ es ***accesible*** desde $i \in S$ y escribimos

$$i \to j$$

si existe un entero finito $n \geq 0$ tal que

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$$

Es decir, siempre hay la posibilidad de llegar de *i* a j en un cierto número (aleatorio) finito de pasos con una probabilidad positiva.

En el caso en que $i \to j$ y $j \to i$ decimos que *i* y j se ***comunican*** y se denota por $i \leftrightarrow j$.

La relación binaria $\leftrightarrow$ satisface las siguientes propiedades:

Reflexividad, simetría y transitividad por lo que es una *relación de equivalencia.*

- Para estados distintos *i* y j las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- a) $i \rightarrow j$
- b) $p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} > 0 \; para\ algunos\ estados\ i_0, i_1, \ldots, i_n$ con $i_0 = i$ y $i_n = j$
- c) ${p_{ij}}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$.
- Dem.

La equivalencia entre a) y c) se sigue de

${p_{ij}}^{(n)} \leq P(X_n = j \text{ para algún } n \geq 0 \mid X_0 = i) \leq \sum_{n=0}^{\infty} {p_{ij}}^{(n)}$

La equivalencia entre b) y c) se sigue a partir de

${p_{ij}}^{(n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1}j}$

- Puesto que $\leftrightarrow$ es una relación de equivalencia sobre S, particiona a S en clases comunicadas.
- Un estado *i* es ***absorbente*** si {*i*} es una clase cerrada. Una cadena con matriz de transición P donde E es una clase simple es llamada ***irreducible***.
- La estructura de la clase de puede deducir por medio del diagrama de probabilidades de transición.
- Ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las clases son {1,2,3}, {4}, y {5,6}, con solo {5,6} siendo cerrada.

- El ***período*** *i* se define como el máximo común denominador del conjunto de $\{n: n > 0 \text{ con } P^n(i,i) > 0\}$. De donde se deduce que el período no depende de *i*, digamos que es d. Por lo que S es la unión disjunta de conjuntos $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$, tal que

$$i \in C_n \text{ y } P(i,j) > 0 \ \text{ implica } i \in C_{n \oplus 1},$$

donde $\oplus$ significa suma modulo d.

Ejemplo 1: Supongamos que S = {1,2,3,4} P la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces S tiene período 2, y $C_0 = \{1,2\}$ y $C_1 = \{3,4\}$

Ejemplo 2

- (Predicción del tiempo) Supongamos que la probabilidad de lluvia mañana depende de las condiciones climáticas anteriores sólo a través de si está o no lloviendo hoy y no en las condiciones climáticas del pasado. Supongamos también que si llueve hoy, entonces mañana lloverá con una probabilidad α; y si no llueve hoy, entonces mañana lloverá con probabilidad β.
- Si decimos que el proceso está en el estado 0 cuando llueve y el estado 1 cuando no llueve, entonces el precedente es una cadena de Markov de dos estados cuyas probabilidades de transición están dados por

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}$$

Ejemplo 3

- Continuando con el ejemplo anterior, si α = 0.7 y β = 0.4, calcular la probabilidad de que llueva 4 días seguidos,
- Solución.

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{(4)} = (\mathbf{P}^2)^2 = \begin{Vmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{Vmatrix}$$

Por lo que la probabilidad deseada es ${P_{00}}^{(4)}$ es 0.5749.

Ejemplo 4

- Continuando con el ejemplo anterior, calcular:
- a) que llueva alternado, en ambos casos sabiendo que está lloviendo hoy.
- b) que no llueva en los siguientes 4 días.
- c) que llueva sin parar toda la semana (7 días).

Transformación de un proceso en una Cadena de Markov

- Supongamos que si llueve o no hoy depende de las condiciones climáticas anteriores a través de los últimos dos días. En concreto, supongamos que si ha llovido en los últimos dos días, y luego va a llover mañana con probabilidad 0,7; si llovió hoy, pero no ayer, luego que va a llover mañana con probabilidad 0,5; si llovió ayer, pero no hoy, mañana lloverá con probabilidad 0,4; si no ha llovido en los últimos dos días, y luego va a llover mañana con una probabilidad de 0,2.

Transformación de un proceso en una Cadena de Markov

- Si dejamos que el estado en el instante n depende sólo de si está o no lloviendo en el tiempo n, entonces el modelo anterior no es una cadena de Markov (¿por qué no?). Sin embargo, podemos transformar este modelo en una cadena de Markov diciendo que el estado en cualquier momento se determina por las condiciones meteorológicas, tanto durante ese día y el día anterior. En otras palabras, podemos decir que el proceso está en: estado 0 si llovió ayer y hoy, estado 1 si llovió hoy pero ayer no, estado 2 si llovió ayer pero hoy no, por último el estado 3 si no llovió ni ayer ni hoy.

Transformación de un proceso en una Cadena de Markov

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{Vmatrix}$$

Ejemplo 5

- Si en el ejemplo anterior, sabemos que llovió lunes y martes, ¿cuál es la probabilidad de que llueva el jueves?
- ¿Qué llueva el viernes?
- ¿Qué llueva jueves y viernes?

- Todas las probabilidades trabajadas hasta ahorita, se basan en la probabilidad condicional, así es ${P_{ij}}^n$, que significa la probabilidad de que en el tiempo n se encuentre en el estado j sabiendo que en el tiempo inicial estaba en el estado *i*. Si la distribución no condicional del estado en el tiempo n se desea conocer, es necesario especificar la distribución de del estado inicial.
- Si denotamos por

$$\alpha_i = P\{X_0 = i\}, \quad i \geq 0 \ \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1\right)$$

Todas las probabilidades no condicionadas pueden ser calculadas condicionando sobre el estado inicial, es decir,

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n \alpha_i \end{aligned}$$

Ejemplo 6

- Consideremos una CM consistente de 4 estados 0, 1, 2, 3 y teniendo matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

- ¿Cuáles son sus clases? ¿Qué puede decirse de los estados?

Ejemplo 7

- Una urna contiene dos bolas sin pintar. En una secuencia de veces que una bola se elige al azar, es pintada de rojo o negro, y se vuelve a poner en la urna. Si la bola estaba sin pintar, la elección del color se hace al azar. Si estaba pintada, su color es cambiado. Formamos una CM tomando como un estado tres números (x,y,z) donde x es el número de bolas sin pintar, y el número de bolas rojas, y z el número de bolas negras. ¿Cuál es su matriz de probabilidades de transición?

Solución

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} (0,1,1) & (0,2,0) & (0,0,2) & (2,0,0) & (1,1,0) & (1,0,1) \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,1,1) \\ (0,2,0) \\ (0,0,2) \\ (2,0,0) \\ (1,1,0) \\ (1,0,1) \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Estados recurrentes

- Para cualquier estado *i* sea f_i que denota la probabilidad de que, a partir del estado *i*, el proceso volverá a volver a entrar en el estado *i*. El estado *i* se dice que es **recurrente** si $f_i = 1$ y **transitorio** si $f_i < 1$.
- Conclusión: si el estado es recurrente entonces, comenzando en el estado i, el proceso volverá a entrar al estado *i* otra vez y otra vez y otra vez, de hecho, a menudo infinitamente.
- Por otra parte, si es transitorio, cada vez que entre al estado i, lo hará con una probabilidad positiva f_i, y naturalmente con una probabilidad $1-f_i$ de que no vuelva a entrar a ese estado. Así, empezando en el estado i, la probabilidad de que el proceso vuelva a entrar al estado *i* por exactamente n períodos es ${f_i}^{n-i}\,(1-f_i)$, $n \geq 1$. Es decir, si el estado *i* es transitorio entonces, empezando en el estado *i*, el número de períodos de tiempo que el proceso estará en el estado *i* tiene una distribución geométrica con media finita $1/\,(-f_i)$.

Teorema

- El estado i es:

  a) recurrente si $\sum_{n=1}^{\infty} {P_{ii}}^{n} = \infty$

  b) transitorio si $\sum_{n=1}^{\infty} {P_{ii}}^{n} < \infty$

Demostración.

Haciendo $I_n = \begin{cases} 1, & si\ X_n = i \\ 0, & si\ X_n \neq i \end{cases}$, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ representa el número de períodos que el proceso está en el estado *i*.

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n |\, X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[I_n \mid X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} {P_{ii}}^{n}$$

Ejercicios

- Demostrar que si $s_j \leftrightarrow s_k$, entonces $d_j = d_k$.
- Una matriz estocástica se considera determinista si contiene en cada fila sólo una entrada distinta de cero. Probar que la cadena asociada no puede ser irreducible y aperiódica en este caso. ¿Puede ser irreducible? ¿Es posible que existan estados aperiódicos?
- Sea $i \in C$, donde C es un subconjunto cerrado de S con r elementos. Demostrar que $d \leq r$ si i tiene periodo d.
- Demuestre que cada matriz de transición en un estado finito tiene al menos una clase comunicante cerrada. Encuentre un ejemplo de una matriz de transición sin clase de comunicación cerrada.

Ejercicios

- Identificar las clases que se comunican de la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- ¿Cuáles clases son cerradas? ¿Qué estados son recurrentes y cuáles transitorios?

Ejercicios

- Identificar las clases que se comunican de la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdot & \cdot & N-1 & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

- ¿Cuáles clases son cerradas? ¿Qué estados son recurrentes y cuáles transitorios?