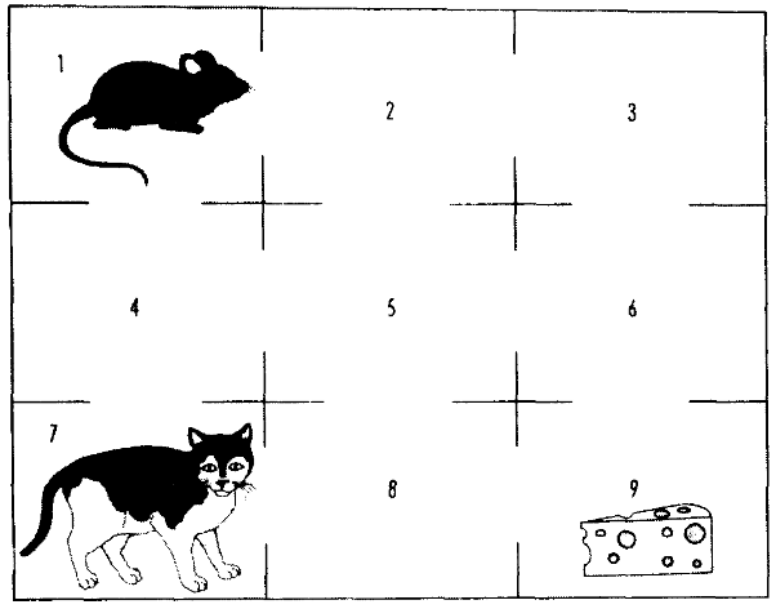
EJEMPLOS
de
CADENAS DE
MARKOV

Para la elaboración de este material, se tuvo el apoyo de la siguiente bibliografía:

An Introduction to Stochastic Processes, Edward P. C. Kao. China Machine Press, 2003.

Un ratón en un laberinto

Un ratón empieza a moverse a partir de la celda 1 del laberinto como se muestra en la figura siguiente. Un gato está pacientemente oculto en la celda 7, y hay un pedazo de queso en la celda 9. Ante la ausencia de aprendizaje , cuando el ratón está en una celda dada, elige visitar la siguiente celda con probabilidad 1/k, donde k es el número de celdas contiguas. Asumamos que una vez que el ratón encuentra el pedazo de queso o el gato, se quedará comprensiblemente ahí para siempre.



Si X_n denota la posición del ratón después de n cambios de celdas. El proceso estocástico $\{X_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$es una cadena de Markov con espacio de estados S ={1, 2, …, 9}, el vector de probabilidad del estado inicial es $p^{(0)}$ = (1,0,…, 0), y la matriz de probabilidades de transición P es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las cosas de interés para el ratón incluyen:

(i) la distribución de probabilidad para el tiempo, específicamente, el número de cambios en las celdas para alcanzar el trozo de queso antes de alcanzar al gato,

(ii) la distribución de probabilidad para el tiempo en alcanzar al gato antes de alcanzar el queso, y

(iii) la probabilidad de alcanzar primero al queso.

Una única cola de servidores con un número finito de salas de espera y un tiempo de servicio constante

Un muchacho limpiabotas funciona en la terminal de autobús de la autoridad portuaria en Manhattan. Hay cuatro sillas, tres de las cuales son para que esperen los clientes. Cuando todas las sillas están ocupadas, los clientes que lleguen buscarán el servicio en otra parte. Cada lustrado lleva exactamente diez minutos.

Sea X_n que denota el número de clientes que esperan inmediatamente después de la terminación del n-ésimo calzado y A_n el número de llegadas durante el n-ésimo calzado. Asumimos que $P\{A_n = i\} = a_i$, para $i = 0, 1, 2, \ldots,$ y $n = 1, 2, \ldots,$ y que una salida y una llegada no ocurren al mismo tiempo.

Al completar el calzado n-ésimo, si $X_n = 0$ el siguiente lustre de zapatos comienza cuando el próximo cliente llega y al terminar el trabajo, habrá $\min\{3, A_n+1\}$ de clientes que esperan.

Al término del n-ésimo calzado, si $X_n > 0$ entonces el siguiente calzado inicia inmediatamente y al terminar habrá $\min\{3, X_n-1+ A_{n+1}\}$ clientes esperando.

Por lo que se tiene:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(3, A_{n+1}) & si\ X_n = 0 \\ \min(3, X_n - 1 + A_{n+1}) & si\ X_n = 1,2,3 \end{cases}$$

Vemos que X_{n+1} es determinado probabilísticamente si X_n es conocida y el proceso estocástico $\{X_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados S = {0,1,2,3} y la matriz de probabilidades de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \geq a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \geq a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & \geq a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & \geq a_1 \end{bmatrix}.$$

Notemos que el estado de la CM es definido por el tiempo de un servicio completo para establecer la propiedad markoviana del proceso estocástico resultante. Esto es conocido como el *método de incrustamiento*. Además el intervalo entre transiciones sucesivas en general no son de igual longitud.

Las cosas de interés para el niño limpiabotas incluyen

(i) el número esperado de clientes perdidos por hora a largo plazo,

(ii) la ocupación media de la tienda y

(iii) la duración media de un período inactivo, tal que el limpiabotas pueda tomar un descanso de su trabajo.

Una revisión periódica (s,S) Sistema de inventarios

Supongamos que las demandas semanales de una pieza de repuesto de aeronave determinada en un depósito de mantenimiento son variables aleatorias i.i.d. con

$$P\{D_n = i\}, \quad i,n = 0,1,2, \ldots, \qquad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$$

Donde D_n denota la demanda en la semana n. Sea X_n que denota la posición del inventario en el inicio de la semana n, antes de la recepción de la reposición, si la hubiera.

Suponemos que la reposición de inventario es instantánea y se pierden demandas sin llenar. La política de inventario usada en el depósito es del tipo (s,S): Si al principio de la semana n, el nivel de valores X_n es s o más, no se hace alguna orden; si es inferior que s, se hace una orden para traer el nivel de inventario a S. En el lenguaje de la teoría de inventarios, el modelo es conocido como el caso de revisión periódica, entrega inmediata, y ventas perdidas. Para verificar que el proceso estocástico $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ forma una CM con espacio de estados $S = \{0, 1, \ldots, S\}$, notamos que

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max\{X_n - D_n, 0\} & si \ X_n \geq s \\ \max\{S - D_n, 0\} & si \ X_n < s. \end{cases}$$

Así X_{n+1} depende de la historia de solo a través de X_n $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, y el proceso es una CM con las siguientes probabilidades de transición:

$$p_{ij} = \begin{cases} r_S & \text{if } 0 \le i < s \text{ and } j = 0 \\ a_{S-j} & \text{if } 0 \le i < s \text{ and } 1 \le j \le S \\ r_i & \text{if } s \le i \le S \text{ and } j = 0 \\ a_{i-j} & \text{if } s \le i \le S \text{ and } 1 \le j \le i \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

donde $r_i = a_i + a_{i+1} + \ldots$ Para la política (s,S) = (2,5), desplegamos la matriz de transiciones como sigue:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & r_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & r_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 2 & r_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & r_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 4 & r_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 5 & r_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}.$$

Para este sistema de inventario, cosas de interés incluyen a: (i) la cantidad esperada de ventas perdidas, (ii) el nivel de inventario promedio por semana, y (iii) el número esperado de semanas entre reposiciones sucesivas.

Estudio del clima

Supongamos que el clima en Cleveland, Ohio, puede clasificarse como lloviendo, nevando, nublado o soleado. Observaciones del clima se realizan a la misma hora, cada día. Asumamos que el clima diario cumple la propiedad de Markov, lo que significa que el clima de mañana depende solo del clima de hoy. Entonces el clima puede ser modelado como una cadena de Markov con 4 estados, y X_n representa al clima en el día n para n = 0, 1, 2, 3, 4, ….

Supongamos que 1 representa el día con lluvia, 2 el día nevando, 3 el día nublado y 4 al día soleado, entonces el conjunto de estados es S = {1,2,3,4}, y las probabilidades de transición son establecidas sobre las siguientes observaciones. Si hoy llueve, mañana lloverá, nevará, se nublará o será soleado con probabilidades de 0.3, 0.1, 0.4 y 0.2, respectivamente. Si nieva voy, mañana lloverá, nevará, se nublará o será soleado con probabilidades de 0.2, 0.5, 0.2 y 0.1 respectivamente. Si hoy está nublado mañana llueve, nieva, se nubla o amanece soleado con probabilidades de 0.3, 0.2, 0.1, y 0.4 respectivamente. Finalmente si hoy amanece soleado, mañana llueva, se nubla o sale soleado con probabilidades de 0.6, 0.3 y 0.1 respectivamente.

- Con la información anterior formamos la siguiente matriz de probabilidad de transición:

P =

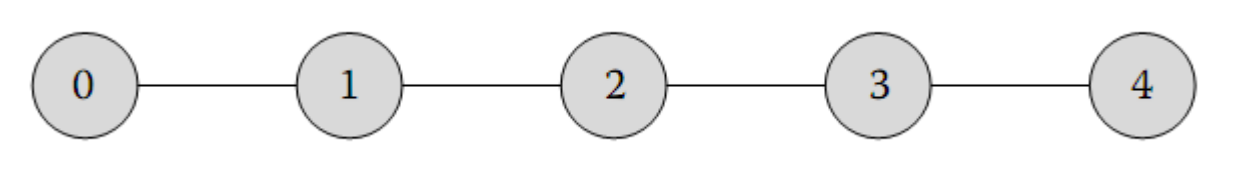
estado	1	2	3	4
1	0.3	0.1	0.4	0.2
2	0.2	0.5	0.2	0.1
3	0.3	0.2	0.1	0.4
4	0	0.6	0.3	0.1

¿Cuál será la probabilidad de una trayectoria particular que se muestra abajo, durante los siguientes 5 días, dado que el estado inicial es $X_0 = 3$?

$$P(X_1 = 1, X_2 = 4, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 4 \mid X_0 = 3)$$

Caminata aleatoria de 5 estados

- Consideremos una caminata aleatoria de 5 estados como se muestra a continuación



Si se camina una posición a la derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad 1-p, hasta que alcance alguna de las dos posiciones extremas llamados barreras.

a) ¿Cuál será la probabilidad de caminar hacia la derecha o izquierda si inicia en el estado i? $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

b) ¿Cuál es su matriz de transiciones?

a)

$$p_{ij} = \begin{cases} p & si \;\; j = i+1 \\ q = 1-p & si \;\; j = i-1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Si suponemos que cuando alcanza alguno de los puntos barrera se refleja volviendo al punto del cual proviene, la matriz de transiciones es:

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Y si ahora suponemos que cuando alcanza uno de sus puntos barrera, este se mueve al punto central la matriz de transiciones es:

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si suponemos ahora que cuando alcanza a cualquiera de los puntos barrera se queda en este con probabilidad ½ o se va al otro con probabilidad ½ , la matriz de transiciones es:

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y si ahora suponemos que cuando alcanza uno de sus puntos barrera, se mueve directamente al otro punto barrera, la matriz de transiciones es:

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

PROBLEMAS

Problema: cinco puntos son marcados sobre un círculo. Un proceso mueve a un punto sobre cualquiera de sus vecinos cercanos, con probabilidad ½ para cada vecino. ¿Cuál es la matriz de transiciones de esta cadena de Markov?

PROBLEMA

Sea S = {1, 2, 3, …, 10}, y consideremos la siguiente caminata:

Empezando en el estado 1, las transiciones en el k-ésimo paso son de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si se está en el estado 10, nos quedamos ahí.
- De lo contrario, lanzamos un dado, y si el resultado es d, nos movemos d unidades a la derecha si esto fuera posible, sino nos quedamos donde estemos.

¿Cuál es la matriz estocástica asociada con esta caminata?

1.1 The condition of a machine, which is observed at the beginning of each day, can be represented by one of the following four states:

State	Description
1 (NW)	Not Working, Under Repair
2 (MD)	Working, with a major defect
3 (mD)	Working, with a minor defect
4 (WP)	Working Properly

The next state of the machine depends only on the present state and is independent of its past history. Hence, the condition of the machine can be modeled as a four-state Markov chain. Let X_{n-1} denote the state of the machine when it is observed at the start of day n. The state space is $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Assume that at the start of each day, the engineer in charge of the machine does nothing to respond to the condition of the machine when it is in states 2, 3, or 4. A machine in states 2, 3, or 4 is allowed to fail and enter state 1, which represents a repair process. Therefore, a machine in state 1, not working, is assumed to be under repair.

The repair process carried out when the machine is in state 1 (NW) takes 1 day to complete. When the machine is in state 1 (NW), the repair process will be completely successful with probability 0.5 and transfer the machine to state 4 (WP), or largely successful with probability 0.2 and transfer the machine to state 3 (mD), or marginally successful with probability 0.2 and transfer the machine to state 2 (MD), or unsuccessful with probability 0.1 and leave the machine in state 1 (NW). A machine is not repaired when it is in states 2, 3, or 4. A machine in state 2 (MD) will remain in state 2 with probability 0.7, or fail with probability 0.3 and enter state 1 (NW). A machine in state 3 (mD) will remain in state 3 with probability 0.3, or acquire a major defect with probability 0.5 and enter state 2, or fail with probability 0.2 and enter state 1 (NW). Finally, a machine in state 4 (WP) will remain in state 4 with probability 0.4, or acquire a minor defect with probability 0.3 and enter state 3, or acquire a major defect with probability 0.2 and enter state 2, or fail with probability 0.1 and enter state 1 (NW).

Construct the transition probability matrix for this four-state Markov chain model under which a machine is left alone in states 2, 3, and 4, and repaired in state 1.

1.2 Suppose that the machine modeled in Problem 1.1 is modified by making the repair time last 2 days. Two states are needed to represent both days of a 2-day repair process. When the machine fails, it goes to state 1 (NW1), which denotes the first day of the repair process. When the first day of repair ends, the machine must enter state 2 (NW2), which denotes the second day of repair. The condition of the machine, which is observed at the beginning of each day, can be represented by one of the following five states:

State	Description
1 (NW1)	Not Working, in first day of repair
2 (NW2)	Not Working, in second day of repair
3 (MD)	Working, with a major defect
4 (mD)	Working, with a minor defect
5 (WP)	Working Properly

The use of two states to distinguish the 2 days of the repair process allows the next state of the machine to depend only on the present state and to be independent of its past history. Hence, the condition of the machine can be modeled as a five-state Markov chain. Let X_{n-1} denote the state of the machine when it is observed at the start of day n. The state space is $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assume that at the start of each day, the engineer in charge of the machine does nothing to respond to the condition of the machine when it is in states 3, 4, or 5.

A machine in states 3, 4, or 5 that fails will enter state 1 (NW1). One day later the machine will move from state 1 to

state 2 (NW2). When the machine is in state 2 (NW2), the repair process will be completely successful with probability 0.5 and transfer the machine to state 5 (WP), or largely successful with probability 0.2 and transfer the machine to state 4 (mD), or marginally successful with probability 0.2 and transfer the machine to state 3 (MD), or unsuccessful with probability 0.1 and transfer the machine to state 1 (NW1). A machine in state 3 (MD) will remain in state 3 with probability 0.7, or fail with probability 0.3 and enter state 1 (NW1). A machine in state 4 (mD) will remain in state 4 with probability 0.3, or acquire a major defect with probability 0.5 and enter state 3, or fail with probability 0.2 and enter state 1 (NW1). Finally, a machine in state 5 (WP) will remain in state 5 with probability 0.4, or acquire a minor defect with probability 0.3 and enter state 4, or acquire a major defect with probability 0.2 and enter state 3, or fail with probability 0.1 and enter state 1 (NW1).

Construct the transition probability matrix for this five-state Markov chain model under which a machine is left alone in states 3, 4, and 5.

1.3 Consider a machine that breaks down on a given day with probability p. A repair can be completed in 1, 2, 3, or 4 days with respective probabilities q_1, q_2, q_3, and q_4. The condition of the machine can be represented by one of the following five states:

State	Description
0 (W)	Working
1 (D1)	Not Working, in first day of repair
2 (D2)	Not Working, in second day of repair
3 (D3)	Not Working, in third day of repair
4 (D4)	Not Working, in fourth day of repair

Since the next state of the machine depends only on its present state, the condition of the machine can be modeled as a five-state Markov chain.

Construct the transition probability matrix.