Cadenas de Markov: Introducción

Cadenas de Markov (CM)

El contenido de estas diapositivas se han elaborado con el soporte de los siguientes libros:

Markov Chains. J. R. Norris. University of Cambridge, 1997-2009.

Introduction to Markov Chains. Ehrhard Behrends. Springer Fachmedien Wiesbaden 2000.

Introduction to Stochastic Processes, Second Edition. Gregory F. Lawler. Chapman & Hall/CRC, 2006. Taylor & Francis Group.

Cadenas de Markov (CM)

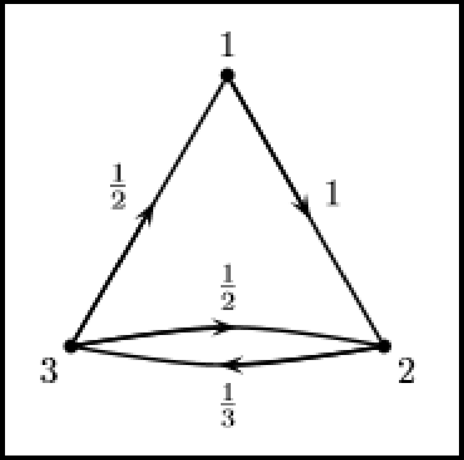
Un proceso estocástico muy especial es el que se refiere a una clase interesante de secuencias de variables aleatorias tomando valores en un conjunto finito o contable., que representa al conjunto de estados (ya definido), y que satisface una propiedad debida a Andréi Andréyevich Markov (1856 - 1922) el cual fue un matemático ruso que aportó trabajos de investigación en Teoría de Números y Teoría de Probabilidad .

La propiedad característica de este tipo de proceso es que no retiene ningún recuerdo de donde ha estado en el pasado. Esto significa que **sólo el estado actual del proceso puede influir** para conocer en dónde va a continuación. Tal proceso se llama un ***proceso de Markov***.

Lo que los hace importantes es que no sólo las cadenas de Markov modelan muchos fenómenos de interés, sino también la falta de propiedad de la memoria hace posible predecir cómo puede comportarse una cadena de Markov y calcular probabilidades y valores esperados que cuantifican ese comportamiento. Iniciaremos el estudio revisando algunos ejemplos considerando en tiempo discreto ($n \in \mathbb{Z}^+ = \{0,1,2, \ldots\}$) y tiempo continuo ($n \in \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$).

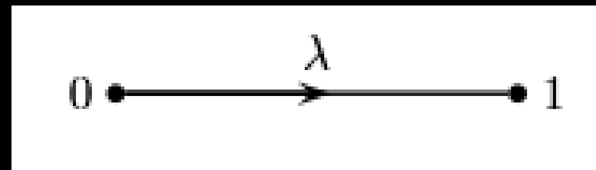
Las cadenas de Markov a menudo se describen mejor mediante diagramas, de los cuales ahora damos algunos ejemplos simples:

(tiempo discreto)



Se mueve del estado 1 al estado 2 con probabilidad 1. Del estado 3 se mueve a 1 oa 2 con probabilidad igual 1/2, y desde 2 salta a 3 con probabilidad 1/3, de lo contrario se queda en 2. Podríamos han dibujado un lazo de 2 a sí mismo con la etiqueta 2/3. Pero como la probabilidad total de saltar desde 2 debe ser igual a 1, esto no transmite más información y a veces se prefiere no dibujar el lazo.

(tiempo continuo)

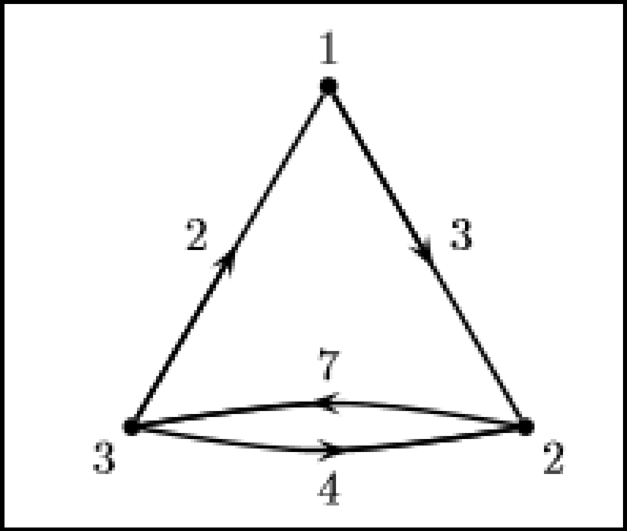


Cuando en el estado 0 espera un tiempo aleatorio con una distribución exponencial del parámetro λ ∈ (0, ∞), entonces salta a 1. Así, la función de densidad del tiempo de espera T viene dada por $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$. Donde T ~ E(λ) por brevedad.

(tiempo continuo)

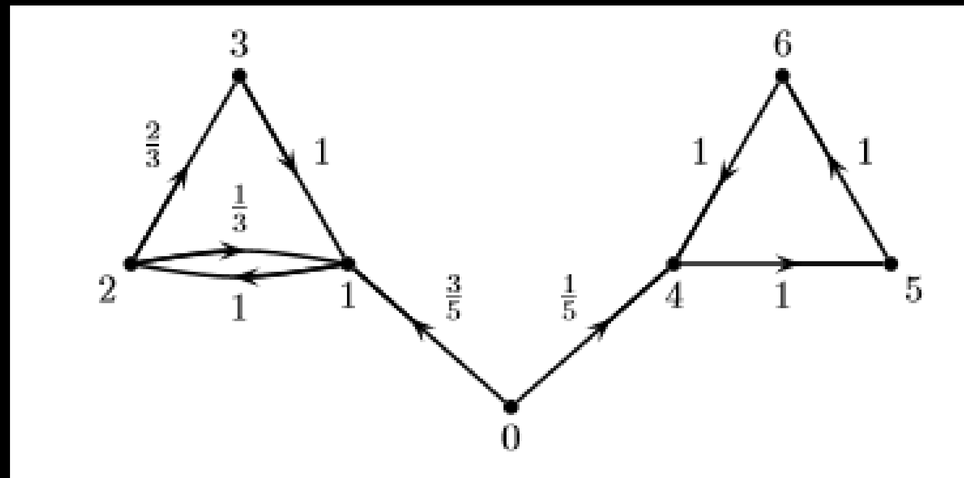
Aquí, cuando se llega a 1 no se detiene, pero después de otro tiempo exponencial independiente del parámetro λ salta a 2, y así sucesivamente. El proceso resultante se llama proceso de Poisson de tasa, proporción o razón λ.

(tiempo continuo)



En el estado 3 se toman dos tiempos exponenciales independientes T1 ~ E (2) y T2 ~ E (4); si T1 es el más pequeño que vaya a 1 después de tiempo T1, y si T2 es el más pequeño va a 2 después del tiempo T2. Las reglas para los estados 1 y 2 son como se ven. Es una cuestión simple demostrar que el tiempo gastado en 3 es exponencial del parámetro 2 + 4 = 6, y que la probabilidad de saltar de 3 a 1 es 2 / (2 + 4) = 1/3. Los detalles se dan más tarde.

(tiempo discreto)



Utilizamos este ejemplo para anticipar algunas de las ideas discutidas en detalle más adelante. Los estados pueden dividirse en clases de comunicación, a saber {0} {1,2,3} y {4,5,6}. Dos de estas clases están cerradas, lo que significa que no se puede escapar. Las clases cerradas aquí son recurrentes, lo que significa que se regresa una y otra vez a cada estado. La clase {0} es transitoria. La clase {4, 5, 6} es periódica, pero {1,2,3} no lo es. .

Ejemplo

En algunos lugares el uso de los cajeros automáticos puede convertirse en un tema bastante sensible.

Supongamos que si el cajero está libre durante algún período de tiempo, digamos el minuto n, entonces con probabilidad p, donde $0 < p < 1$, estará ocupado durante el siguiente minuto. Si el cajero ha estado ocupado durante el minuto n, se liberará durante el siguiente minuto con probabilidad q, donde $0 < q < 1$. Suponga que el cajero está libre en el minuto cero. Nos gustaría responder a las siguientes dos preguntas.

1) ¿Cuál es la probabilidad x_n de que el cajero estará libre en el minuto n?
2) ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} x_n$, si existe?.

Ejemplo

Denotemos por A_n el evento de que el cajero está libre durante el minuto n y sea $B_n = \Omega \backslash An$ su complemento, es decir, el evento de que el cajero está ocupado durante el minuto n.

Las condiciones del ejemplo nos dicen que:

$$P(B_{n+1}|A_n) = p \qquad (*)$$

Y

$$P(A_{n+1}|B_n) = q \qquad (**)$$

Se asume también que $P(A_0) = 1$, es decir, $x_0 = 1$. Usando esta notación se tiene que $x_n = P(A_n)$.

Utilizando la fórmula de probabilidad total, (*) y (**) se tiene

$$x_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)\, P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)\, P(B_n)$$

$$= (1\text{-}p)\, x_n + q(1\text{-}x_n) = q + (1\text{-}p\text{-}q)\, x_n \qquad \text{(A)}$$

Ejemplo

Es un poco complicado encontrar una fórmula explícita para x_n. Por lo que supondremos que la secuencia es convergente, es decir

$$\lim_{n\to\infty} x_n, = x.$$

Usando propiedades de límites y (A) tenemos que

$$x = q + (1-p-q)x$$

De donde $x = \frac{q}{q+p}$. En particular,

$$\frac{q}{q+p} = q + (1-p-q)\frac{q}{q+p} \quad \text{(B)}$$

Restando (B) de (A) tenemos

$$x_{n+1} - \frac{q}{q+p} = (1-p-q)\left(x_n - \frac{q}{q+p}\right) \quad \text{(C)}$$

Esta diferencia es una sucesión geométrica y por lo tanto, para todo n natural,

Ejemplo

$x_n - \frac{q}{q+p} = (1-p-q)^n \left(x_0 - \frac{q}{q+p}\right)$

De aquí, tomando en cuenta la condición inicial $x_0 = 1$, tenemos

$$x_n = \frac{q}{q+p} + (1-p-q)^n \left(x_0 - \frac{q}{q+p}\right)$$

$$x_n = \frac{q}{q+p} + \frac{p}{q+p}(1-p-q)^n$$

Y como $0 < p, q < 1$. implica que $|1-p-q| < 1$, por lo que $(1-p-q)^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de aquí se cumple 2).

Iniciando el estudio a CM

El modelo de paseos aleatorios, el problema de la ruina del jugador y otros casos especiales pueden generalizarse en gran medida al de las cadenas de Markov, nombradas así después de que las definió A.A. Markov.

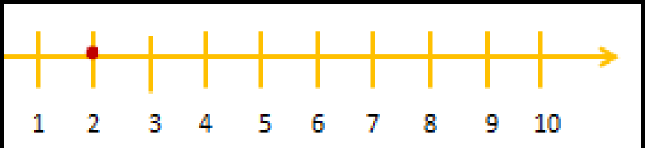
Como dice el refrán, uno puede dejar de ver el bosque a causa de los árboles.

Al eliminar algunas características incómodas e incidentales de casos especiales, surge una teoría general que es más clara y más sencilla y cubre una gama más amplia de aplicaciones. Este capítulo está dedicado a los elementos de tal teoría.

Iniciando el estudio a CM

Para entender la idea simple de lo que debemos entender por una cadena de Markov, describamos algunos de los casos más simples, los cuales son mostrados desde los primeros cursos de probabilidad. Estos son los paseos aleatorios.

Consideremos una caminata sobre un intervalo finito {I, 2, ..., N} de enteros.

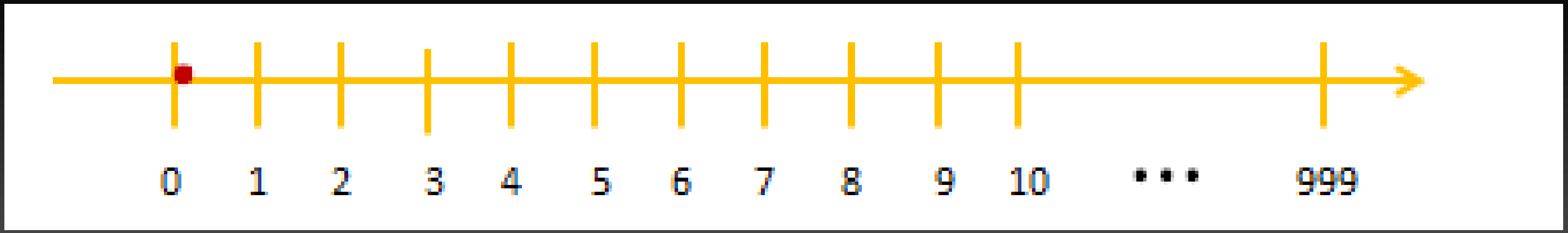


La caminata comienza en 2, digamos, y cada paso es a la izquierda o a la derecha con probabilidades igual a 0.5; si la caminata está en la posición 1 o N, debe aplicarse alguna regla extra (por ejemplo, se puede prescribir que la siguiente posición es la posición inicial).

Hay muchas otras posibilidades, veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Empieza en cero. Entonces "anda o camina" en {O, ..., 999} de acuerdo con la siguiente regla: cada vez que estés en la posición i, pasas a 2i + i' mod 1000, donde i' $\in$ {l, 2, 3, 4, 5 , 6} se obtiene lanzando un dado legal. Por ejemplo, si el dado nos muestra sucesivamente los números 2,1,1,6, ..., sus posiciones incluyendo la posición inicial serán 0,2,5,11,28, ...



Iniciando el estudio a CM

La característica común en los ejemplos es la siguiente.

- En primer lugar, hay un conjunto prescrito de posiciones posibles (en nuestro caso un intervalo de enteros).
- En segundo lugar, hay un procedimiento determinista o aleatorio para determinar por dónde empezar.
- Y por último, con cada posición se asocia un generador aleatorio que tiene que ser aplicado antes de seguir adelante.

En cualquiera de los casos ya mencionados, cuando se cambia de un estado a otro este es controlado por las leyes de probabilidad que mide la posibilidad de que se de el cambio o la ***transición***.

Iniciando el estudio a CM

Hay un conjunto de *probabilidades de transición* p_{ij} , donde i $\in$ I, j $\in$ I, tal que si el elemento está en el estado i en cualquier tiempo, independientemente del estado en el que haya estado antes, la probabilidad de que esté en el estado j después de un paso viene dada por p_{ij}.

En símbolos, si X_n denota el estado del elemento en el tiempo n, entonces tenemos

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i; A\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}$$

Para un evento arbitrario A determinado sólo por $\{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$.

En otras palabras, A puede representar el pasado.

Definiciones

Todo lo anterior nos lleva a las siguientes definiciones:

Def. Una **Cadena de Marko**v (CM) es una colección indexada de variables aleatorias usadas para modelar una sucesión de eventos dependientes tal que la probabilidad del siguiente evento depende solo del evento presente.

Def. Un **Proceso de Decisión de Markov** (PDM), es un proceso de decisión secuencial para el cual las decisiones producen una sucesión de cadenas de Markov con recompensas.

Definiciones

Detallada la definición de una CM finita puede entenderse como:

- Un conjunto finito no vacío S, el ***espacio de estados***; los elementos de S se llaman ***estados***, son las posiciones posibles de nuestra "caminata aleatoria"; usualmente identificaremos S con un conjunto {I, ..., N};
- Un ***vector de probabilidad***, es decir, números (p_i) $i \in$ S con $p_i \geq 0$, para todo *i* y $\sum p_i$ = 1; estos números determinan el generador aleatorio para la posición inicial, con probabilidad p_i la caminata comienza en la posición *i*;

Definiciones

- Una ***matriz estocástica*** P = (p_{ij}) i, j $\in$ S: todos los p_{ij} son no negativos y $\sum_j p_{ij}$ = 1 para cada *i*; la matriz P es nada más que una abreviatura conveniente de una descripción de los generadores aleatorios asociados con los estados: una caminata que ahora está en *i* estará en j después del siguiente paso con probabilidad p_{ij}.

$$[\,P_{i,j}\,]_{i,j\in\mathbb{Z}_+} = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & \cdots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Estados y transiciones

Un proceso aleatorio o proceso estocástico es una sucesión indexada de variables aleatorias ({X_t: t $\in$ I}) Suponga que la secuencia se observa en puntos equidistantes en el tiempo llamado ***épocas***. El intervalo de tiempo entre épocas sucesivas se llama un ***período*** o ***etapa***. En cada época, se observa el sistema para estar en uno de un número finito de categorías mutuamente excluyentes o ***estados***. Un estado es uno de los posibles valores que la variable aleatoria puede tener.

Una cadena de Markov es el tipo más simple de proceso estocástico. La propiedad de Markov, asume el tipo más simple de dependencia.

Estados y transiciones

Esta simplificación ha hecho que se puedan desarrollar matemáticamente modelos manejables que pueden ser usados para analizar una variedad de sistemas físicos, económicos y sociables.

Un proceso aleatorio que carece de la propiedad de Markov, es un proceso el cual necesita de su historia pasada para modelar probabilísticamente su comportamiento futuro.

Asumiremos que una cadena de Markov tiene un número finito de estados, digamos N. El conjunto de estados será denotado por E o S.

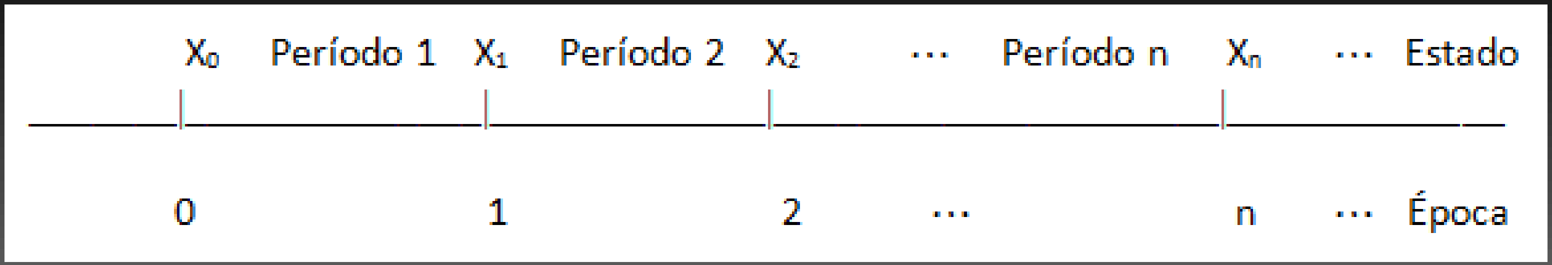
Estados y transiciones

Se observa el estado de la cadena en puntos igualmente espaciados en el tiempo llamado épocas. Una época es denotada por n = 0, 1, 2, ... Época n designa el final del período de tiempo n, que es también el principio del periodo n + 1. Una secuencia de n periodos de tiempo consecutivos, cada uno marcado por una época, que marca el fin del período.

	Período 1	Período 2	···	Período n	···
Época 0	Época 1	Época 2 ···	Época n-1	Época n	···

Estados y transiciones

La variable aleatoria X_n representa el estado de la cadena en la época n. Una cadena de Markov es una sucesión indexada de variables aleatorias $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$, la cual tiene la propiedad de Markov. El índice n, es la época en la cual el estado de la variable aleatoria es observada. Así, una cadena de Markov puede ser vista como una sucesión de estados, los cuales son observados en épocas consecutivas, como se muestra a continuación:



Estados y transiciones

Mientras que el índice n representa más comúnmente una época o momento de la observación, también puede representar otros parámetros, tales como el orden de una observación. Por ejemplo, el índice n puede indicar el elemento enésimo inspeccionado, o el cliente enésimo servido, o el ensayo enésimo en un concurso.

Si en la época n la cadena está en el estado *i*, entonces $X_n = i$.

La probabilidad de que la cadena esté en el estado *i* en la época n, que puede representar la época actual, se denota por $P(X_n = i)$. Entonces, la probabilidad de que la cadena esté en el estado j en la época n+1, la siguiente época se denota por $P(X_{n+1} = j)$.

Estados y transiciones

La probabilidad de transición $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ representa la probabilidad condicional de que si se está en el estado *i* en la época actual, entonces estará en el estado j en la siguiente época.

Nota. Esto significa que una probabilidad de transición es constante, independiente de la época n, es decir,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Estados y transiciones

Las probabilidades de transición para una cadena de Markov con N estados pueden representarse de manera matricial.

Ejemplo:

$$P = \begin{array}{c|cccc|} X_n \backslash X_{n+1} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 4 & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{array}.$$

Estados y transiciones

NOTAS.

- Cada fila de P representa el estado actual, en la época n. Cada columna representa el siguiente estado, en la época n+1.
- Como la probabilidad de transición está condicionada por el estado presente, las entradas en cada fila de P suma uno.
- Todas las entradas son no negativas, y ninguna entrada es mayor que uno.
- P es llamada ***matriz estocástica***.
- Cuando el número de estados en una cadena de Markov es pequeño, la cadena puede ser representada por un grafo, donde los nodos denotan un estado y un arco dirigido de i a j representa una transición con probabilidad p_{ij}.

Probabilidad de transición en dos pasos

Si se está interesado en conocer la probabilidad de transición en dos pasos $P(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$, aunque esta probabilidad no aparece en la matriz de transiciones puede ser calculada a partir de la matriz P como sigue:

$$P(X_{n+2} = j \mid X_n = i) = \sum_{k \in S} P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k \mid X_n = i)$$

$$= \sum_{k \in S} \frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_n=i)} =$$

$$\sum_{k \in S} \frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_{n+1}=k, X_n=i)} \frac{P(X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_n=i)}$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k, X_n = i) P(X_{n+1} = k \mid X_n = i)$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k)$$

$$= \sum_{k \in S} P_{i,k} P_{k,j} = P_{i,j}^{\ 2}, \ i,j \in S.$$

Probabilidad de transición en más de dos pasos

Si se está interesado en conocer la probabilidad de transición en más de dos pasos, es decir, para todo k $\in \mathbb{N}$ tenemos:

P(X_{n+k+1} = j | X_n = i) = $\sum_{k \in S} P(X_{n+k+1} = j, X_{n+k} = l \,|X_n = i)$

Por inducción puede verse que se cumple. En general

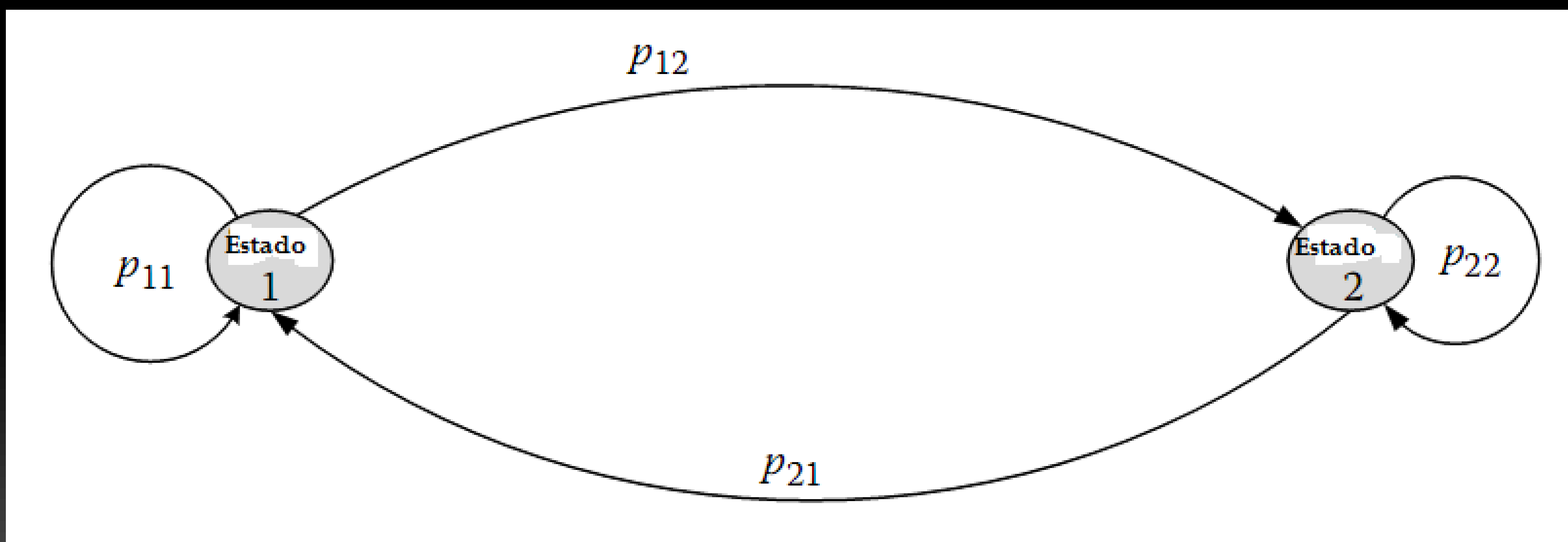
$$P^{m+n}{}_{i,j} = \sum P^{m}{}_{i,l}\, P^{n}{}_{l,j} = P^{m+n}$$

La cual puede reescribirse como:

$P(X_{n+m} = j \,|\, X_0 = i) =$
$\sum_{l \in S} P(X_m = j \,|\, X_n = l)\, P(X_n = l \,|\, X_0 = i)$

Expresión que es conocida como ***ecuación de Chapman-Kolmogorov***.

Ejemplo de un grafo para una probabilidad de transición de una cadena de Markov con dos estados



Estados y transiciones

NOTAS.

- La probabilidad del estado inicial para un estado j es la probabilidad de que en la época 0 el proceso inicie en el estado j. Sea $P_j^{(0)} = P(X_0 = j)$ que denota la probabilidad del estado inicial para el estado j.
- Ejemplo. Las probabilidades del estado inicial para todos los estados en una cadena de Markov con 4 estados son arreglados en un vector fila de probabilidades en el estado inicial, se designa por

$$
\begin{aligned}
p^{(0)} &= [p_1^{(0)} \quad p_2^{(0)} \quad p_3^{(0)} \quad p_4^{(0)}] \\
&= [P(X_0 = 1) \quad P(X_0 = 2) \quad P(X_0 = 3) \quad P(X_0 = 4)].
\end{aligned}
$$

$$p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} + p_4^{(0)} = 1.$$