3 Definición y ejemplos de Procesos Estocásticos

3.1 Definición de un Proceso Estocástico.

Supongamos que se estudia el número de personas que asisten al servicio médico en cierto hospital. En un intervalo de tiempo determinado, digamos una hora, se puede estudiar el comportamiento de llegadas mediante la definición de la variable aleatoria "Número de personas que llegan al consultorio en una hora". Si en vez de una hora, consideramos dos, es claro que el número de llegadas tiende a ser mayor, y por consiguiente, la distribución de probabilidad de esta nueva variable aleatoria será distinta a la anterior. Esto nos lleva a decir que para cada tiempo, se tendrá una nueva variable aleatoria, generalmente distinta. Y por lo tanto, una forma muy natural de controlar nuestro estudio, es definiendo una ***familia de variables aleatorias***, las cuales dependen de una variable determinista que es el tiempo. En situaciones como esta, decimos que estamos trabajando con un ***proceso estocástico***.

En particular, para nuestro ejemplo de introducción, definimos el proceso estocástico $X(t)$ como el número de personas que llegan en el intervalo $(0,t)$. Con lo cual, para cada valor de t que se elija se tiene una variable aleatoria diferente que representará al número de personas en ese momento. En el proceso estocástico, generado por el problema, se hace evidente que el resultado puede variar dependiendo del tiempo, por lo que queda definido como $\{X(t) : t \in T\}$, donde T representa al tiempo.

Puesto que la palabra estocástico es un sinónimo de aleatoriedad, entonces un proceso estocástico es un ***sistema*** que nos permite darle seguimiento a un fenómeno aleatorio a través del tiempo. Cada valor obtenido mediante la variable aleatoria definida, nos dará información de lo que sucede con el fenómeno aleatorio conforme transcurre el tiempo. A cada valor posible se le llama un ***estado*** y a los distintos cambios de un estado a otro

transición. A cada registro de este seguimiento se le conoce como ***realización*** del proceso, y son aplicables a cualquier sistema que comprenda variabilidad al azar conforme transcurre el tiempo.

A partir de esta discusión, llegamos a la siguiente definición:

Definición 3.1 La sucesión $\{X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ es un ***proceso estocástico*** si, para cada $t \in T$, $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria. Si $T = \{1, 2, ...\}$, el proceso estocástico $\mathbf{X_t}$, $t \in T$ es justamente una sucesión de variables aleatorias y, en tal caso, hablamos de un ***proceso estocástico de tiempo discreto***. Cuando T es un conjunto continuo (un intervalo), hablamos de un ***proceso estocástico de tiempo continuo***.

Notas.

- Nos referimos a t como el ***índice***, el cual es interpretado como el tiempo o el paso;
- Al conjunto T se le llama el ***conjunto índice*** o ***espacio del parámetro***;
- y a $X_t(\omega)$ o $X(t)$ o $\mathbf{X_t}$, como el ***estado*** del proceso en el tiempo t, y los cambios en el valor de X(t) reciben el nombre de ***transiciones*** entre sus estados. Y al conjunto de todos los valores posibles que las variables aleatorias X(t) pueden asumir, se les llama ***espacio de estados***.

Ejemplos.

- X(t) puede ser igual al número total de clientes que han entrado al supermercado en el tiempo t;
- X(t) puede ser el número de aprobados en el curso de procesos estocásticos en el tiempo t;
- X(t) puede ser la cantidad total de ventas que se han registrado en el supermercado en el tiempo t;

X(t) puede ser el tiempo que debe transcurrir antes de que un jugador pierda todo su capital.

Ejemplos.

¿Cuáles son el espacio de estados y el espacio del parámetro para un proceso estocástico que representa el posible marcador durante un partido de fútbol?

Solución.

El espacio de estados S es el conjunto de valores posibles que puede tomar el posible marcador, de donde $S = \{(x,y): x, y = 0, 1, 2, ...\}$. El espacio del parámetro es $T = (0,90)$. Notemos que el proceso se inicia en el estado (0,0) y habrá transiciones entre los distintos estados, siempre que sea anotado un gol. Con cada gol, puede hacer que x ó y se incrementen en uno, de donde, el marcador (x,y) pasa a (x+1,y) o a (x,y+1).

¿Cuáles son los espacios de estados y el espacio del parámetro, para un proceso estocástico que es la profundidad del mar en la posición X, en el instante t?

Solución.

La profundidad del mar se mide desde la cresta de una ola hasta el lecho del océano. Puesto que las olas se propagan en todas direcciones, la profundidad en cualquier punto fijo X variará con el tiempo, haciendo caso omiso de toda influencia a gran escala como las mareas. Puede medirse la profundidad en cualquier instante τ, y en cualquier posición X(t), de modo que el espacio del parámetro T es el conjunto de todas $t = (\tau,X)$ para las cuales $-\infty < \tau < \infty$ y $X \in \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de las referencias geográficas para todo el mar. Aquí no solo es el tiempo, sino una combinación de las coordenadas de tiempo y espacio. El espacio de estados S es el conjunto de todos los valores que puede tomar la profundidad. Así que $S = [0, \infty)$, donde la profundidad es 0 cuando queda expuesto el lecho del océano y no existe límite para la altura que pueden alcanzar las olas, aunque no se formará una ola de altura infinita a menos que se trate de un caso milagroso.

Un proceso epidemial. Un solo individuo infectado transmite una enfermedad mortal a toda una comunidad aislada. Descríbase cómo puede estudiarse la propagación de la enfermedad como un proceso estocástico.

Solución.

Supongamos que durante un período, las personas infectadas no presentan síntomas y no son infecciosas, pero aún no presentan los síntomas. Tras un período, los portadores muestran los síntomas de la enfermedad y son aislados. Estas personas se curan y se vuelven inmunes, o bien mueren.

Sea M la clase de los miembros inmunes que hay en la comunidad; S la clase de los propensos, es decir, la gente que corre el riesgo; N los incubadores no infecciosos de la enfermedad; C los portadores; I los portadores que han sido aislados, y D los fallecidos. Inicialmente, todos los miembros de la comunidad están en M o en S, excepto la única persona infectada que está en N o en C. Las transiciones entre las clases sólo se efectúan de acuerdo con las flechas que se muestran en la figura 3.1.

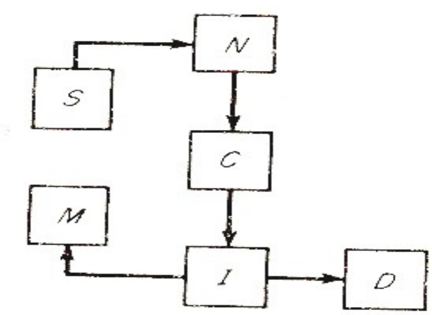

Fig. 3.1

Las variables aleatorias que interesan son los números en cada una de las clases en cada instante t. El progreso de la enfermedad dependerá del grado de inmunidad, la magnitud del contacto entre los portadores y los propensos, la rapidez con la que se detecten los portadores y la posibilidad de que se esté efectuando una cura. Los epidemiólogos usan la teoría de los procesos estocásticos para buscar las formas de influir en la rapidez de transición entre las clases.

Un proceso de préstamos de libros en una biblioteca. Un lector visita una biblioteca con regularidad, el mismo día cada semana. Si ha terminado de leer el libro que siempre solicita en préstamo, lo cambia; de lo contrario, tiene que volver a pedirlo. Considérese el proceso estocástico $\{Z_n: n = ..., -1, 0, 1, 2, ...\}$, donde Z_n es el número de renovaciones de préstamo del libro que actualmente tiene el lector al salir de la biblioteca en la semana n, donde las semanas se miden desde un punto de partida arbitrario.

Si se acaba de cambiar un libro, entonces $Z_n = 0$. ¿Cuál es el espacio de estados para este proceso y cuáles son las posibles transiciones de estado?

Solución.

El espacio de estados S es {0, 1,2,.. .}, ya que Z_n puede tomar cualquier valor 0, 1, 2, ...; aunque tendría que ser un tomo muy voluminoso para tener valores muy grandes. Si $Z_n =: k (k = 0, 1, 2, .. .)$, entonces si se completa en la semana n+1 el libro que se está leyendo, se cambia y se pide prestado un nuevo libro, de modo que $Z_{n+1} = 0$. En caso contrario, se renueva el préstamo por otra semana más, de modo que $Z_{n+1} = k+1$.

Funcionamiento de una fábrica. Una fábrica tiene dos máquinas, pero en cualquier día dado no se usa más que una. Esta máquina tiene una probabilidad constante p de sufrir una avería, y si así sucede, la avería ocurre al final del trabajo del día. Se emplea un solo hombre para repararla. A este hombre le toma dos días reparar una máquina y sólo trabaja en una máquina a la vez. Constrúyase un proceso estocástico que describa el funcionamiento de esta fábrica.

Solución.

Se debe seleccionar una variable aleatoria adecuada para observar. Evidentemente es necesario registrar su valor sólo al final de cada día, ya que todas las transiciones ocurren precisamente antes. Por lo tanto, el espacio parametral T será el conjunto de los días de trabajo durante los cuales este sistema está en uso. Nómbrese 1 al primer día, 2 al segundo y así sucesivamente; entonces T = {l, 2, 3, ...}. Un proceso estocástico apropiado es $\{X_n : n \in T\}$, donde el valor de X_n se registra al final del día n, esto es, el número de días que serían necesarios para que ambas máquinas estén nuevamente en condiciones de trabajar. Si ambas máquinas están en condiciones de trabajar, entonces X_n es 0. Si una de las máquinas está en condiciones de trabajar y la otra ya ha estado en reparación durante un día, entonces X_n es l. Si una de las máquinas está en condiciones de trabajar y la otra acaba de sufrir una avería, entonces X_n es 2. Si una de las máquinas se acaba de averiar y la otra ya ha estado en reparación durante un día, entonces X_n es 3. Estos son los únicos casos posibles, de donde, el espacio de estados es $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

Trabajo de clase.

1. Hágase una lista del conjunto de posibles transiciones entre los estados de la fábrica descrita en el último ejemplo.
2. Elíjanse las variables aleatorias apropiadas para estudiar el comportamiento del tráfico en el cruce entre un camino principal y una vía lateral.
3. Constrúyase un proceso para estudiar el escrutinio de los votos en una justa electoral entre sólo dos candidatos.
4. Descríbase el proceso $\{X_t\}$, donde X_t es el número de accidentes que tiene un individuo después de haber transcurrido el tiempo t, si nació en t = 0. evidentemente $X_0 = 0$.

3.2 Tipos Clásicos de Procesos Estocásticos.

El objetivo en esta parte es describir algunos de los tipos clásicos de los procesos estocásticos caracterizados por diferentes dependencias relacionadas con X(t). Siempre tomaremos $T = [0, \infty)$ a menos que se especifique lo contrario. Y también supondremos que las variables aleatorias son evaluadas en los reales. Se describirán algunos de los tipos, el resto se dejan a los alumnos preparar la exposición.

Procesos con Incrementos Independientes Estacionarios.

Si las variables aleatorias

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes para todas las elecciones de $t_1, \ldots, t_n$ satisfaciendo

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

entonces decimos que X_t es un proceso con *incrementos independientes*. Si el conjunto de índices contiene un índice más pequeño t_0, se asume también que

$$X_{t_0},\ X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes. Si el conjunto índice es discreto, esto es, T = {0, 1, ...}, entonces un proceso con incrementos independientes, se reduce a una sucesión de variables aleatorias independientes $Z_0 = X_0$, $Z_i = X_i - X_{i-1}$ (i = 1, 2, 3, ...), en el sentido que conociendo las distribuciones individuales de Z_0, Z_1, ...nos permite determinar la distribución conjunta de cualquier conjunto finito de las Z_i. De hecho,

$$X_i = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si la distribución de los incrementos $X(t_1+h) - X(t_1)$ depende sólo sobre la longitud h del intervalo y no sobre el tiempo t_1 el proceso se dice que tiene incrementos estacionarios. Para un proceso con incrementos estacionarios la distribución de $X(t_1+h) - X(t_1)$ es la misma distribución que la distribución de $X(t_2+h) - X(t_2)$, no importando qué valores sean de t_1, t_2 y h.

Si un proceso $\{X_t,\ t \in T\}$, donde $T = [0, \infty)$ o T = {0, 1, 2, ...} tiene incrementos independientes estacionarios y tiene una media finita, entonces es elemental demostrar que $E[X_t] = m_0 + m_1 t$ donde $m_0 = E[X_0]$ y $m_1 = E[X_t]-m_0$. Algo similar se cumple para la varianza:

$$\sigma_{X_t}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t$$

donde

$$\sigma_0^2 = E[(X_0 - m_0)^2$$

y

$$\sigma_1^2 = E[(X_1 - m_1)^2 - \sigma_0^2 .$$

Se muestra sólo la demostración para el caso de la media. Sea f(t) = $E[X_t] - E[X_0]$. Entonces para cada t y s

$f(t+s) = E[X_{t+s} - X_0] = E[X_{t+s} - X_s + X_s - X_0]$

$= E[X_{t+s} - X_s] + E[X_s - X_0] =$

$= E[X_t - X_0] + E[X_s - X_0]$ (usando la propiedad de incrementos estacionarios)

$= f(t) + f(s)$.

- **Martingalas.**

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico valuado en los reales con un conjunto de parámetros discreto o continuo. Decimos que $\{X_t\}$ es una **martingala**, si $E[|X_t|] < \infty$ para todo t, y si para cada $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$E\lfloor X_{t_{n+1}} \mid X_{t_1} = a_1, \ldots, X_{t_n} = a_n \rfloor = a_n$$

para todos los valores a_1, ..., a_n. Las martingalas pueden ser consideradas como modelos apropiados para juegos justos, en el sentido de que X_t significa la cantidad de dinero que un jugador tiene en el tiempo t. La propiedad de las martingalas establece entonces que, la cantidad promedio que un jugador tiene en el tiempo t_{n+1}, dado que él tenía la cantidad a_n en el tiempo t_n, es igual a a_n indiferente de lo que ha sido su suerte en el pasado.

Trabajo fuera de clase. Investigar un ejemplo donde se apliquen las martingalas.