

ESPERANZA CONDICIONAL (PARTE 2)

DR. JOSÉ DIONICIO ZACARIAS FLORES



VARIANZA CONDICIONAL

- Otra forma de utilizar el condicionamiento es obtener la varianza de una variable aleatoria aplicando la fórmula de la varianza condicional. La varianza condicional de X dado que $Y = y$ es definida por

$$V(X|Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X|Y = y])^2$$

- A partir de la definición se desprende la siguiente propiedad:

$$V(X) = E[V(X|Y)] + V(E[X|Y])$$

- Prueba: $E[V(X|Y)] = E[E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2] = E[X^2] - E[(E[X|Y])^2]$, y $V(E[X|Y]) = E[(E[X|Y])^2] - (E[X])^2$

CALCULANDO PROBABILIDAD CONDICIONAL

- No sólo podemos obtener expectativas mediante el primer condicionamiento en una variable aleatoria apropiada, sino que también podemos usar este enfoque para calcular las probabilidades. Para ver esto, supongamos que E denote un evento arbitrario y definimos la variable aleatoria indicadora X por

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si } E \text{ ocurre} \\ 0, & \text{si } E \text{ no ocurre} \end{cases}$$

- A partir de la definición de X , se tienen los siguientes resultados:

$E(X) = P(E), \quad E[X|Y = y] = P(E|Y = y)$ para cualquier variable aleatoria Y .

- $P(E) = \begin{cases} \sum_y P(E|Y = y)P(Y = y), & \text{si } Y \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(E|Y = y) f_Y(y) dy, & \text{si } Y \text{ es continua} \end{cases}$

ALGUNAS APLICACIONES



UN MODELO DE LISTA

- Consideremos n elementos- $e_1, e_2, \dots, e_n$ -que están inicialmente dispuestos en alguna lista ordenada. En cada unidad de tiempo se hace una petición para uno de estos elementos e_i siendo solicitado, independientemente del pasado, con probabilidad P_i . Después de ser solicitado, el elemento se mueve al frente de la lista. Es decir, por ejemplo, si el presente ordenamiento es e_1, e_2, e_3, e_4 y si se solicita e_3 , entonces el siguiente ordenamiento es e_3, e_1, e_2, e_4 .
- Estamos interesados en determinar la posición esperada del elemento solicitado después de que este proceso ha estado en funcionamiento durante mucho tiempo.

UN GRAFO ALEATORIO

- Un grafo consiste en un conjunto V de elementos llamados nodos y un conjunto A de pares de elementos de V llamados arcos. Un grafo puede representarse gráficamente dibujando círculos para nodos y líneas de dibujo entre los nodos i y j cuando (i, j) es un arco. Por ejemplo, si $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (1, 2), (3, 3)\}$, Podemos representar este gráfico como se muestra en la Figura 1. Tenga en cuenta que los arcos no tienen dirección (un grafo en el que los arcos son pares ordenados de nodos se denomina grafo dirigido); y que en la figura hay múltiples arcos que conectan los nodos 1 y 2, y un arco propio (denominado self-loop) del nodo 3 a sí mismo. Hay otros casos, pero estamos interesados en determinar la probabilidad de que el gráfico aleatorio que sea obtenido esté conectado.

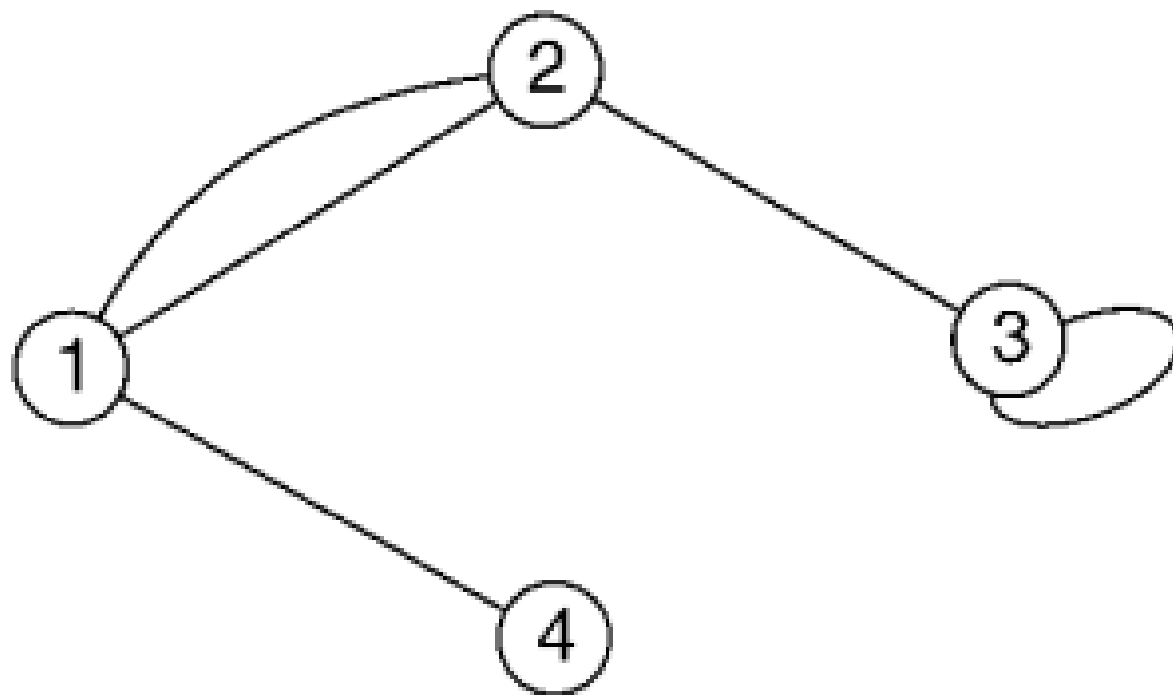


Figura I.

TIEMPO MEDIO PARA PATRONES

- Sea $X = (X_1, X_2, \dots)$ una secuencia de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas tales que $P_i = P\{X_j = i\}$
- Para una subsecuencia dada, o patrón, $i_1, \dots, i_n$, en que $T = T(i_1, \dots, i_n)$ denotan el número de variables aleatorias que necesitamos observar hasta que aparezca el patrón.
- Por ejemplo, si la subsecuencia de interés es 3, 5, 1 y la secuencia es $X =$
- $(5, 3, 1, 3, 5, 3, 5, 1, 6, 2, \dots)$ entonces $T = 8$. Queremos determinar $E[T]$.