

ESPERANZA CONDICIONAL

DR. JOSÉ DIONICIO ZACARIAS FLORES



INTRODUCCIÓN

- Este concepto es de mucha importancia. En primer lugar, en la práctica, a menudo nos interesa calcular probabilidades y expectativas cuando hay alguna información parcial disponible; por lo tanto, las probabilidades y expectativas deseadas son condicionales.
- En segundo lugar, al calcular una probabilidad o expectativa deseada, a menudo es extremadamente útil la primera "condición" de alguna variable aleatoria apropiada

DEFINICIÓN (CASO DISCRETO)

- Sean F y E dos eventos, la probabilidad condicional de E dado que ocurre F es definida como

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Siempre que $P(F) > 0$.

Por lo tanto, si X y Y son variables aleatorias discretas, entonces, es natural definir la **función de masa de probabilidad condicional** de X dado que $Y = y$, por

$$p_{X|Y}(x|y) = P\{X = x|Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} = \frac{P(x, y)}{p_Y(y)}$$

Para todos los valores de y que satisfagan $P\{Y = y\} > 0$.

DEFINICIÓN

- De manera similar, la **función de distribución de probabilidad condicional** de X dado que $Y = y$ está definida, para todo y tal que $P\{Y = y\} > 0$, por

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\} = \sum_{a \leq x} p_{X|Y}(a|y) = \frac{P(x, y)}{p_Y(y)}$$

- Finalmente, la **esperanza condicional** de X dado que $Y = y$ es definida por

$$E[X|Y = y] = \sum_x x P\{X \leq x|Y = y\} = \sum_x p_{X|Y}(x|y)$$

- Nota: si X y Y son independientes, la función de masa de probabilidad condicional, función de distribución de probabilidad condicional y esperanza condicional, serían las mismas que se definen para la variable aleatoria X .

DEFINICIÓN (CASO CONTINUO)

- Si X y Y tienen una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$, entonces la función de densidad de probabilidad condicional de X , dado que $Y = y$, se define para todos los valores de y tales que $f_Y(y) > 0$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

- La esperanza condicional de X , dado que $Y = y$, se define para todos los valores de y tales que $f_Y(y) > 0$, por $E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$

DEFINICIÓN (GENERAL)

- Si X es una variable aleatoria discreta y $f_{X|Y}(x|y)$ es el valor de la distribución de probabilidad condicional de X dada $Y = y$ en x , la esperanza condicional de $u(X)$ dada $Y = y$, es

$$E[u(X)|y] = \sum_x u(x) \cdot f_{X|Y}(x|y)$$

- De manera similar, si X es la variable aleatoria continua y $f_{X|Y}(x|y)$ es el valor de la densidad de probabilidad condicional de X dada $Y = y$ en x , la esperanza condicional de $u(X)$ dada $Y = y$, es $E[u(X)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f_{X|Y}(x|y) dx$

DEFINICIÓN

- La **varianza condicional** de X , dado que $Y = y$, se define por
- $V(X|Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X|Y = y])^2$
- Propiedad. $V(X) = E[V(X|Y)] + V(E[X|Y])$
- Cálculo de probabilidades condicionales. Sea E que denota un evento cualquiera y definamos la variable aleatoria indicadora X por $X = \begin{cases} 1, & \text{si } E \text{ ocurre} \\ 0, & \text{si } E \text{ no ocurre} \end{cases}$, entonces:
- $E[X] = P(E)$, $E[X|Y = y] = P(E|Y = y)$, para cualquier variable aleatoria Y
- $P(E) = \begin{cases} \sum_y P(E|Y = y)P(Y = y), & \text{si } Y \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(E|Y = y)f_Y(y)dy, & \text{si } Y \text{ es continua} \end{cases}$