BENEMÉRITA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Postgrado en Ciencias Matemáticas

VALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS VÍA PROGRAMACIÓN DINÁMICA

TESIS

Que para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

Presenta:
Daniela Cortés Toto

Director de Tesis:
Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla, Pue., Noviembre 2011.

A mis padres

Agradecimientos

Quiero iniciar esta larga lista de agradecimientos con las personas que han sido el motor más importante en mi vida, y a quienes de manera especial dedico este trabajo, mis padres: Jesús y Blanca.

Gracias Jesús, porque sin duda eres el mejor padre que pude haber tenido, por tu apoyo y confianza incondicional en mí, porque cada paso firme que doy en este largo andar se sustenta en el gran amor que siempre me diste y en tú presencia, donde sea que estés.

Gracias Blanca, por todo tu esfuerzo durante estos años, por creer en mí y apoyarme en todo momento, por entregar gran parte de tu vida a mi cuidado, desarrollo y enseñanza, ayudando a que este momento llegara, por tu infinito amor. Muchas gracias porque siempre, aunque estos últimos años lejos, has estado a mi lado.

Quiero agradecer de manera especial a mi tío Arcadio y a mis tres ángeles: Ángel Cortés Silverio (D.E.P.), Ángel Cortés Hernández y Ángel Cortés Lozano, muchas gracias por su apoyo y por estar siempre al pendiente de mi, ustedes siempre serán una parte importante en mi vida. También agradezco a mis tíos: Diego, Francisco y Sara, por brindarme su cariño, apoyo y darme ánimos durante este proceso.

A Eduardo, por su amor, paciencia y compañía, por entender mis ausencias y malos momentos, gracias amor.

Agradezco a mi director de tesis, Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, por su tiempo, esfuerzo y apoyo, por confiar en mí para llevar a cabo este proyecto.

A mis sinodales, Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara, Dra. Rosa María Flores Hernández, Dra. Hortensia Reyes Cervantes, Dr. Raúl Montes de Oca Machorro, M.C. Enrique Lemus Rodríguez, por su atenta lectura, sugerencias y correcciones, que sin duda mejoraron en gran parte este trabajo.

A todas mis amigas y compañeros de la facultad, por la compañía y los buenos momentos que me han hecho vivir durante estos dos años, a mi amigo Edgar por su apoyo en la parte computacional, a Tere, en la parte administrativa, por su amabilidad y atención, a todos mis maestros de la licenciatura y maestría, pues de alguna forma aportaron un granito de arena a mi formación académica.

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de maestría, y a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP), por su apoyo parcial en la parte final de la tesis.

Agradezco a Dios, por permitirme culminar este proyecto.

Finalmente, agradezco a todos aquellos que lean o ya han leído este trabajo, porque por ese simple hecho ya forman parte de él.

Daniela Cortés Toto,
FCFM, BUAP.
Puebla, Pue., Noviembre 2011.

Introducción

La actual situación económica tan compleja y cambiante que se vive dentro del país y en general en el mundo, obliga aún más a las empresas y a las entidades financieras a buscar maneras de cubrirse de los riesgos financieros que pudieran ocasionarles esta situación, para continuar vigentes en un mercado tan competitivo y globalizado como el actual.

Una alternativa, para conseguir reducir tales riesgos, puede encontrarse en las opciones, las cuales son contratos que otorgan a su poseedor el derecho pero no la obligación de comprar o vender un bien subyacente a una fecha futura pactada de antemano.

El origen de la teoría moderna de opciones se remonta al año 1900, con el trabajo de tesis de Louis Bacheliere [2], en el cual usa por primera vez el movimiento Browniano en el contexto de opciones financieras.

Años más tarde, el trabajo de Bachelier concerniente a las finanzas encontraría su mayor éxito desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes en su trabajo desarrollado en 1973 [9]. En éste se establece una fórmula cerrada para calcular el precio de una opción europea, es decir, una opción que tiene como fecha de ejercicio únicamente el día en que vence la opción. Como consecuencia de esta situación, nace una nueva teoría financiera: la fijación de precios o valuación de instrumentos derivados.

El trabajo de Black y Scholes fue extendido casi inmediatamente por Robert Merton [33]. En 1997, Merton, Black y Scholes fueron galardonados con el Premio Nobel en economía, desafortunadamente para ese año Fisher Black ya había fallecido.

Actualmente, existen gran variedad de opciones además de las europeas, sin embargo, un tipo de opciones de gran importancia son las americanas, éstas son contratos muy flexibles, pues comparadas con las europeas, las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de su fecha de vencimiento.

El problema de valuación de opciones americanas se puede plantear como un problema de ecuaciones diferenciales parciales de frontera libre (véase [35]). Sin embargo, como en este caso la estrategia óptima puede ser el ejercer anticipadamente, la política de ejercicio óptimo es requerida para resolver las ecuaciones diferenciales, afectando al valor de la opción, la situación se complica debido a que esta política en realidad no se conoce.

La valuación de opciones americanas es un problema que no tiene una solución general analítica, excepto para algunos pocos casos, por ejemplo, se sabe que una opción americana de compra sobre acciones que no pagan dividendos, tiene como política óptima de ejercicio el no ejercer anticipadamente, por lo tanto, vale lo mismo que una opción europea de compra. Por otra parte, cuando la opción se sostiene sobre una acción que paga un único dividendo conocido durante toda la vida de la opción, se sabe que la fecha de ejercicio óptimo será el día anterior al pago del dividendo, en este caso puede encontrarse una solución analítica mediante el método de Roll-Geske-Whaley [40].

Para todos los demás casos, el precio de una opción americana se calcula usando alguna técnica de aproximación, por ejemplo, el método de diferencias finitas, el cual consiste en aproximar la ecuación diferencial continua mediante diferencias finitas, para posteriormente resolver este sistema de diferencias. Brennan y Schwartz [11] fueron de los primeros en aplicar el método de diferencias finitas en finanzas.

Algunas otras aproximaciones para el precio de una opción americana son, la aproximación de Johnson [27], para opciones americanas de venta, la cual es un enfoque puramente empírico de la estimación del precio de la opción. La aproximación de Geske y Johnson [20], la cual ve a la opción americana como el límite de una sucesión de opciones bermuda con un número creciente de fechas de ejercicio, las opciones bermuda pueden tomarse como una clase particular de opciones americanas, pues sólo pueden ser ejercidas en determinados momentos entre la emisión y la expiración del contrato, el valor de la opción americana es encontrado interpolando hacia adelante los valores de las opciones bermuda. Otro enfoque es la aproximación de Barone-Adesi y Whaley [3], la cual descompone la opción americana en una opción europea y un premio por el ejercicio anticipado, el premio por el ejercicio anticipado es relativamente más pequeño y fácil de aproximar. Finalmente, la aproximación de Bjerksund-Stensland [8], es un ejemplo de una cota inferior para el precio real de la opción americana, la forma de hallar esta cota consiste en especificar una cierta estrategia subóptima de ejercicio, tan pronto como esta estrategia es conocida, el valor de la opción será fácil de encontrar.

Un método de aproximación muy conocido y que quizá sea de los más sencillos, es la aproximación binomial, cuyo origen se basa en el modelo binomial de Cox-Rox-Rubinstein [14] para valuar opciones europeas, la cual resulta ser una versión simplificada del modelo de Black-Scholes. En [14] se demuestra que para el caso europeo el modelo de Cox-Rox-Rubinstein converge en distribución al modelo de Black Scholes, para el caso americano la convergencia se demuestra en [1].

El método de aproximación binomial, basa su solución en la subdivisión del problema en etapas y en la utilización de una ecuación recurrente hacia atrás, la cual al ser aplicada en cada etapa resuelve el problema de valuación de opciones americanas. Problemas que pueden resolverse usando esta idea, los encontramos en distintas áreas y casi siempre son problemas que pueden ser resueltos usando un tipo de programación matemática que transforma problemas de $K+1$ variables en $K+1$ problemas de una sola variable cada uno relacionados entre sí, simplificando así su solución, este tipo de programación matemática se conoce como programación dinámica.

La programación dinámica es un método de optimización desarrollado en 1957 por el matemático Richard Bellman [5], para la solución de problemas en procesos de decisión en múltiples pasos (véase [6]).

La principal herramienta de este método es la *ecuación funcional de programación dinámica* [6], la cual se obtiene para cada problema, a través del uso del *principio de optimalidad de Bellman*, esta ecuación permite, con mayor o menor esfuerzo dependiendo del caso, establecer una ecuación de recurrencia que es, en sí misma, un algoritmo que resuelve el problema en cuestión.

Frecuentemente, programación dinámica es utilizada en el área de control óptimo estocástico, para la solución de problemas de decisión de Markov, en particular en [4], se muestran aplicaciones a problemas financieros y de seguros de la teoría de procesos de decisión de Markov.

El método binomial para opciones americanas resuelve el problema usando programación dinámica, sin embargo, en general, la valuación de opciones americanas también se puede ver como un problema de optimización de un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo en una serie de etapas, en el cual, el objetivo es encontrar la secuencia de decisiones que optimiza el comportamiento de un proceso polietápico, debido a esto, se puede abordar este problema desde el punto de vista de programación dinámica, considerándolo como un proceso de decisión en múltiples pasos.

El trabajo de tesis se divide en dos partes, primero, se plantea el problema de valuación de opciones americanas como un problema de programación dinámica, en esta parte, se deduce en general la ecuación de recurrencia para este problema, y se aplica en particular en el método binomial, resolviéndolo y obteniendo la fórmula ya conocida para valuar opciones americanas. Finalmente, se realiza la implementación computacional para dicho método.

Como segunda parte, se estudia un método basado en la ecuación de recurrencia de programación dinámica, este método desarrollado por Broadie y Glasserman [12], da una buena estimación de una opción americana de compra sobre una acción que paga un dividendo continuo, el algoritmo funciona muy bien para el caso de opciones sobre múltiples variables de estado. Este tipo de opciones se han vuelto cada vez más populares en los mercados de derivados, ya que resultan generalmente más baratas que comprar un portafolio de opciones sobre activos individuales [34].

Métodos desarrollados para valuar opciones americanas sobre un solo activo han sido aplicados al caso multidimensional, por ejemplo, el método binomial para opciones sobre dos o tres activos aplicado por Boyle [10], o el método de diferencias finitas, el cual puede usarse para el caso de dos activos subyacentes, sin embargo, estos métodos sufren de un aumento exponencial en el costo computacional a medida que aumenta el número de dimensiones.

En este sentido, el método de Monte Carlo ofrece una tasa de convergencia que es independiente del número de variables de estado (véase [12]), por tanto, este método de simulación es más atractivo comparado con los métodos de redes cuando el número de variables aumenta. Sin embargo, la valuación de opciones americanas implica la estimación de la política de ejercicio óptimo, y dado que en los métodos de simulación estándar, las trayectorias de las variables de estado son simuladas con un procedimiento hacia adelante en el tiempo, existe cierta incompatibilidad con el procedimiento para determinar la estrategia óptima de ejercicio, pues para determinar ésta más fácilmente se requiere de un procedimiento hacia atrás en el tiempo, como es el caso de la programación dinámica.

El método que presenta Broadie y Glasserman, denominado método del árbol aleatorio, utiliza ambos métodos: Monte Carlo y programación dinámica, para calcular dos estimadores, uno con sesgo alto y el otro con sesgo bajo, ambos asintóticamente insesgados y convergentes al precio real de la opción, para finalmente obtener un intervalo de confianza para el precio real de la opción mediante la combinación de estos dos estimadores.

Después de estudiar el método del árbol aleatorio se realiza la implementación computacional y se compara con el método binomial, por ser de los más utilizados, y por basarse de igual manera en la metodología de programación dinámica

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presentan los antecedentes históricos de las opciones, los conceptos básicos de esta clase de instrumentos derivados y se explica el problema de valuación de opciones.

En el Capítulo 2 se dan los tópicos necesarios para comprender la metodología de programación dinámica, se plantea en general un problema cuya solución se encuentra mediante esta metodología, se formula el problema de valuación de opciones americanas siguiendo este enfoque y se deduce la ecuación de recurrencia. También se liga este planteamiento con el enfoque tradicional de tiempos de paro.

En el Capítulo 3 se estudia el modelo binomial para opciones americanas mediante programación dinámica, para ellos, se aplica la fórmula recursiva para hallar la solución del problema de valuación de opciones Americanas, también se estudia a fondo el método del árbol aleatorio, el cual emplea la misma metodología, ademas utiliza simulación Monte Carlo para la valuación de opciones americanas, este método mejora en cierto sentido al método binomial.

En el capítulo 4 se valúan opciones americanas de una empresa mexicana usando la implementación computacional realizada para ambos métodos, mediante esta valuación se hace la comparación del método del árbol aleatorio con el método binomial, se presentan los códigos de los algoritmos realizados en Mathematica 6 y MATLAB2010a respectivamente.

Finalmente, se presentan las Conclusiones y tres Apéndices con definiciones y resultados necesarios en la expocisión de los conceptos básicos de opciones.

Indice

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo inicial, se tiene como objetivo presentar de manera muy general los antecedentes históricos de las opciones, su situación actual en México, comprender qué es una opción y para que sirve, sus modalidades y características.

Se mencionan los factores de influencia para conocer el valor de una opción, y finalmente, dentro de un marco matemático se presentan los conceptos básicos relacionados con la teoría de opciones, los cuales servirán para plantear y resolver el problema principal: la valuación de opciones Americanas.

Parte de la bibliografía, utilizada como consulta o bien para estudiar los conceptos matemáticos relacionados con finanzas es la siguiente: [15], [16], [17], [26], [35], [39], además de los citados a lo largo del capítulo.

1.1. Opciones

1.1.1. Antecedentes históricos

Las opciones son instrumentos derivados que se han vuelto muy populares en los mercados financieros modernos.

En el contexto financiero, los instrumentos derivados son contratos que otorgan derechos y obligaciones para las partes que los celebran. Estos productos reciben el nombre de “derivados”porque su valor depende de algún bien o activo al cual se le conoce como bien o activo subyacente.

Los antecedentes históricos se remontan a la época de los antiguos griegos, romanos y fenicios, quienes negociaban contratos con claúsulas de opciones sobre la mercancía que transportaban.

Una muestra sobre el uso de opciones en la antigüedad se encuentra en la anéctoda descrita por Katz (véase [28]), la cual narra lo siguiente:

Según Aristóteles, Thales, el filósofo sofista que vivió en la isla mediterránea de Mileto, leía las hojas de té, y en una ocasión, interpretó los resultados de su lectura como la predicción de una muy abundante cosecha de olivas para el año que corría.

Thales tomó los ahorros de su vida (que no eran muchos), y partió a negociar con los propietarios de las prensas de olivas para adquirir el derecho de alquilarlas al precio usual durante la época de cosecha, a cambio de sus ahorros.

Efectivamente, la cosecha excedió las expectativas y cuando los productores fueron a extraer el aceite de las prensas, Thales cobró una tarifa más alta.

En esta anécdota se puede ver, que Thales al realizar este contrato, pagó a los propietarios de las prensas un monto por el derecho de alquiler de las mismas a un precio pactado de antemano, y se benefició cobrando un precio de mercado más alto a los productores de oliva.

Puesto que Thales tenía información relevante de antemano, pudo hacer uso de ella para obtener un beneficio, algo parecido sucede cuando se tiene información de antemano sobre las fluctuaciones de los precios a futuro de algún bien, basándonos en esto, se puede realizar una serie de operaciones con la finalidad de obtener una ganancia, en economía, a esta situación se le conoce como especulación.

La finalidad de las opciones son primordialmente las siguientes: especulación y cobertura de riesgo. La cobertura de riesgos, implica reducir o eliminar el riesgo ocasionado por la inseguridad económica dentro de las empresas o entidades financieras.

Retomando la historia de las opciones, a pesar de ser negociadas desde la antiguedad, es hasta el siglo XVII, en Amsterdam, cuando aparece el primer mercado de opciones: *The European Option Exchange* , y a principios del siglo XVIII, en Inglaterra comenzaron a negociarse opciones sobre las acciones de las principales compañías comerciales.

Para otoño de 1720, la *South Sea Company* tiene una fuerte caída en sus precios, ésto debido en parte a la especulación con opciones sobre acciones de esta compañía, lo cual provocó que el mercado de opciones fuese declarado ilegal. Esta prohibición estuvo vigente hasta el inicio del siglo XX. Sin embargo de manera clandestina se realizaban operaciones sobre opciones durante el período de la prohibición.

Del otro lado del globo, en América también se realizaban negociaciones con opciones, *The Chicago Board of Trade* (CBOT), se fundó en 1848, originalmente sólo se comercializaban productos agrícolas básicos como trigo, maíz y soya, sin embargo, el mercado formal de opciones se originó en abril de 1973, cuando el CBOT creó una bolsa especializada en este tipo de operaciones: *The Chicago Board Options Exchange* (CBOE).

Dos años más tarde, se comenzaron a negociar opciones en *The American Stock Exchange* (AMEX) y en *The Philadelphia Stock Exchange* (PHLX). En 1976 se incorporó *The Pacific Stock Exchange* (PSE).

Situación en México

A partir de 1978 se comenzaron a cotizar los primeros productos derivados en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), se inició con futuros. A partir de esta fecha, diversos tipos de derivados serían comercializados, así como instrumentos híbridos emitidos por el Gobierno Federal, como es el caso de los Petrobonos, los cuales estarían vigentes de 1977 a 1991.

Por otra parte, a finales de 1992 se inició la negociación de opciones sobre ADR's de Telmex L en CBOE. Para 1994 se operaban diversas opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, AMEX, *New York Options Exchange* (NYOE) y PLHX, además de las bolsas de Londres y Luxemburgo.

Con toda esta experiencia previa con los instrumentos derivados financieros, en México se reflejo la necesidad de contar con un mercado nacional de derivados, por tal razón en diciembre de 1998 se constituyó el primer mercado de futuros y opciones en México: el *Mercado Mexicano de Derivados* (MexDer).

Hasta el 14 de abril de 1999, sólo participaban en MexDer los principales bancos del sistema. A partir del 15 de abril, MexDer se abrió oficialmente a todos aquellos participantes interesados en la negociación con productos derivados (personas físicas y morales), provocando que las cifras crecieran dramáticamente.

Actualmente, aunque MexDer tiene poco tiempo de haberse constituido, el mercado está funcionando según el plan, es decir, es un mercado *viable*, con toda la seguridad que goza cualquier otra bolsa internacional y con un volumen creciente de contratos operados, lo que manifiesta que puede alcanzar altos niveles de liquidez para funcionar con mayor eficacia.

1.1.2. El problema de la valuación de opciones

Definición 1.1.1. Una *opción* es un contrato financiero que otorga a su comprador (o propietario) el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un bien subyacente (o una cierta cantidad de bien) a un precio pactado de antemano, llamado precio de ejercicio.

Esta compra o venta se efectúa en alguna fecha futura o lapso de tiempo establecidos al inicio del contrato. El vendedor de dicha opción se obliga a vender o comprar el activo subyacente al precio convenido.

Las opciones se clasifican en dos tipos, dependiendo del derecho que adquiere el comprador:

- *Opción de compra*, cuando el propietario adquiere el derecho pero no la obligación de comprar el bien subyacente al precio de ejercicio y en una fecha futura establecida al inicio del contrato. En este caso el vendedor de la opción se obliga a vender el activo subyacente al precio convenido.

- *Opción de venta*, cuando el propietario adquiere el derecho pero no la obligación de vender el bien subyacente al precio de ejercicio y en una fecha futura establecida al inicio del contrato. En este caso el vendedor de la opción se obliga a comprar el activo subyacente al precio convenido.

El estilo de la opción lo define el periodo o fecha en que ésta puede ser ejercida, las más comúnes son las opciones europeas y americanas estándar, definidas a continuación.

- *Opción europea*, la cual otorga a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un bien subyacente (o una cierta cantidad del bien) al precio de ejercicio en una fecha futura convenida al inicio del contrato, llamada fecha de vencimiento.

- *Opción americana*, la cual otorga a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un bien subyacente (o una cierta cantidad del bien) al precio de ejercicio durante el lapso de tiempo comprendido entre la emisión del contrato y la fecha de vencimiento.

La clasificación entre opciones europeas y americanas tiene un origen histórico; en Estados Unidos de América las opciones sobre acciones siempre se han podido ejercer en cualquier instante durante la vigencia del contrato, por otro lado, en Europa tras el surgimiento del *European Option Exchange* en 1977, se estipula que las opciones negociadas en dicho mercado pueden ser ejercidas en una única fecha predeterminada.

Esta clasificación geográfica duró pocos años y hoy en día tanto opciones europeas como americanas son negociadas en los distintos mercados alrededor de todo el mundo, sin embargo, hay una mayor inclinación por las opciones americanas, puesto que son más flexibles (véase [29]).

Notemos que la negociación de una opción requiere de dos partes involucradas, el comprador o poseedor de la opción y el vendedor o emisor de la opción, para estas dos partes el riesgo asumido por la compra-venta del contrato es diferente, pues el poseedor siempre tiene el derecho y ninguna obligación, mientras que el emisor siempre tiene la obligación de satisfacer la demanda del poseedor de la opción.

Como es natural pensar, el comprador de la opción solo ejercerá su derecho si la evolución de los precios en el mercado del bien subyacente le permite obtener algún beneficio al ejercer su derecho, para el vendedor de la opción el ejercicio del contrato supone una pérdida, entonces, ¿Cuál es la razón por la que un agente económico vende una opción?

La respuesta es sencilla: el vendedor de la opción recibirá un pago por parte del comprador, a este pago se le conoce comúnmente como la prima del contrato, es decir, la prima es la compensación al vendedor de la opción por el riesgo que asume. El cálculo de este precio es el problema conocido como valuación de opciones (*option pricing*).

Por otra parte, dado que las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier instante previo a la fecha de vencimiento, la valuación de una opción de este estilo, consiste en calcular la estrategia de ejercicio óptima, para posteriormente calcular el valor de la opción.

El siguiente ejemplo ilustra el problema de valuación de opciones para el caso europeo, de igual manera proporciona una idea de porqué las opciones son un buen instrumento de cobertura.

Ejemplo 1.1.1. *Supongamos que una empresa regularmente tiene que tratar con un activo cuyo precio cambia constantemente de manera muy violenta en el mercado, es decir, un activo riesgoso, por ejemplo el petróleo. Supongamos que la misma empresa sabe que dentro de una fecha futura T necesitará comprar una cantidad específica de barriles de petróleo, esta situación es un tanto riesgosa para la empresa dada la naturaleza aleatoria en la fluctuación del precio del petróleo, sin embargo, comprando opciones de venta europeas con precio de ejercicio k la empresa podrá saber cuanto es la cantidad máxima que necesitará en la fecha T para comprar la cantidad especifica de barriles de petróleo.*

La opción de compra europea del Ejemplo 1.1.1 se puede ver como un seguro contra el aumento del precio del petróleo en el futuro, por tanto, en este caso, el problema de valuación de opciones consiste en determinar cuanto debe pagar la empresa por adquirir este seguro, dada una fecha de vencimiento T y un precio de ejercicio k, conociendo el precio del subyacente al día de hoy.

De manera intuitiva, en este ejemplo se logra ver que algunos elementos que podrían ser de utilidad en el momento de calcular la prima de la opción son la fecha de vencimiento, el precio de ejercicio y el precio del bien subyacente en la fecha actual, esto es cierto, sin embargo, existen otros factores que también tendrán que ser tomados en cuenta, de ellos hablaremos a continuación.

1.1.3. Principales elementos para calcular el precio de las opciones

Para determinar el pago de la prima de una opción, los siguientes elementos son de gran influencia:

- Precio actual del bien subyacente.
- Volatilidad subyacente.
- Tasa de interés libre de riesgo.
- Fecha de vencimiento.
- Precio de ejercicio.

Los tres primeros factores están determinados por el mercado, mientras que los dos últimos se especifican al emitir el contrato.

El precio del bien subyacente y el precio de ejercicio afectan el precio de las opciones en la siguiente forma, para una opción de compra, el ingreso obtenido al ser ejercida la opción, es la diferencia entre el precio del bien subyacente al momento de ejercicio y el precio de liquidación, de tal forma que la opción de compra tiene un mayor valor cuando el precio del bien subyacente aumenta y vale menos cuando el precio de ejercicio aumenta. En una opción de venta sucede lo contrario, el ingreso que se obtiene al ejercer la opción es igual a la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del bien subyacente, la opción de venta tiene menos valor cuando el precio del bien subyacente aumenta y más valor cuando el precio de ejercicio sube.

La volatilidad subyacente manifiesta la capacidad que tiene el precio del bien subyacente para variar sus movimientos en el futuro, el aumento en la volatilidad propicia un aumento en el precio de las opciones pues, a mayor volatilidad, la probabilidad de que el precio del bien subyacente cambie durante el tiempo de vigencia es mayor, acrecentando el riesgo de pérdida para los emisores y otorgando a los poseedores una probabilidad mayor de ejercicio de los contratos y por ende la obtención de algún beneficio. En el mercado de opciones se usa la desviación estándar del rendimiento que proporciona el bien subyacente (véase Apéndice A).

La tasa de interés libre de riesgo es el rendimiento que proporciona alguna inversión ausente de riesgo, en México esta inversión libre de riesgo está dada por los Certificados de la Tesosería (CETE) y es publicada semanalmente, cada martes por el Banco de México como tasa de interés simple anual convertible a 28, 91, 181 y 360 días. La tasa de interés libre de riesgo extranjera es publicada semanalmente, cada martes, en formato de interés instantáneo anual a tres meses por la *Federal Reserve*.

El tiempo hasta el vencimiento es el tiempo de vigencia de la opción y está limitado por la fecha de vencimiento, en el caso de las opciones americanas, dado que pueden ser ejercidas en cualquier momento durante la vigencia del contrato, se tiene que, entre mayor es el plazo hasta la fecha de vencimiento, son más las oportunidades de ejercicio y de generar beneficios para el poseedor, así, las opciones americanas valen más si el tiempo hasta el vencimiento aumenta.

1.1.4. Principios fundamentales para la valuación de opciones

El objetivo de esta sección, es presentar las herramientas principales para la valuación de opciones a tiempo discreto. Puesto que un desarrollo adecuado y completo de toda la teoría se extendería más allá de lo necesario para cubrir nuestros objetivos, en esta sección se plantearán solo las ideas que se consideran fundamentales para el desarrollo de la tesis.

Un modelo financiero a tiempo discreto, como el que buscamos, se basa en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $P(\{\omega\}) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, equipado con una filtración $\{\mathcal{F}_n : n = 1, 2, \ldots\}$ que representa la cantidad total de información presente (véase [29]).

El horizonte del problema (N) corresponde al vencimiento de la opción. El mercado consta de $d + 1$ activos o bienes subyacentes, cuyos precios estarán representados por la sucesión de variables aleatorias no negativas $\{S_n^i : i = 0, 1, \ldots, d;\ \ n = 0, 1, \ldots, N\}$ medibles con respecto a $\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, \ldots, N\}$, para $i = 0, 1, \ldots, d$ y $n = 0, 1, \ldots, N$.

El vector $S_n = (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d)$ es el vector de precios al tiempo n, el activo subyacente indexado con 0 es un activo sin riesgo y cumple que

$S_0^0 = 1$.

Si la ganancia sobre un periodo del activo sin riesgo es constante e igual a r, se tendrá que:

$$\begin{aligned} S_1^0 &= 1+r \\ S_2^0 &= (1+r)^2 \\ &\vdots \\ S_n^0 &= (1+r)^n \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

El coeficiente $r_n = \dfrac{1}{S_n^0}$ se interpreta como un factor de descuento del tiempo 0 al tiempo n, los activos subyacentes, indexados por $i = 1, \ldots, d$, representan activos riesgosos.

Portafolios de estrategia

Definición 1.1.2. Un portafolio de estrategia o estrategia de compra-venta basado en los activos $0, 1, ..., d$, es un proceso estocástico $\xi = \{\xi_n\}_{0 \leq n \leq N}$, donde $\xi_n = (\xi_n^0, \xi_n^1, \ldots, \xi_n^d)$, ξ_n^i representa la cantidad del activo i asignada al portafolio en el tiempo n, para $i = 1, \ldots, d$.

Además, el portafolio ξ es un proceso predecible, es decir, para cada $i = 0, 1, \ldots, d$, ξ_0^i es $\mathcal{F}_0$ medible, y para $n \geq 1$, ξ_n^i es $\mathcal{F}_{n-1}$ medible.

El valor del portafolio al tiempo n es el producto escalar:

$$V_n = \xi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^{d} \xi_n^i S_n^i, \tag{1.1.2}$$

y el valor descontado del portafolio al tiempo n es:

$$\widetilde{V}_n = \beta_n(\xi_n \cdot S_n) = \xi_n \cdot (\beta_n S_n) = \xi_n \cdot \widetilde{S}_n. \tag{1.1.3}$$

Donde, β_n es el descuento al tiempo n, $\widetilde{S}_n = (1, \widetilde{S}_n^1, \ldots, \widetilde{S}_n^d)$ es el vector de precios descontados y $\widetilde{S}_n^i = \beta_n S_n^i$, para cada $i \geq 1$.

Definición 1.1.3. Se dice que un portafolio de estrategia es autofinanciable si para cada $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, se cumple lo siguiente:

$$\xi_n \cdot S_n = \xi_{n+1} \cdot S_n \tag{1.1.4}$$

Es decir, un portafolio es autofinanciable si al inicio del nuevo periodo de tiempo $[n, n+1]$ siempre se reinvierte el valor total obtenido del portafolio al final del periodo anterior $[n-1, n]$, en otras palabras, esto significa que no puede haber ninguna entrada extra de dinero durante la transición del final de $[n-1, n]$ al inicio de $[n, n+1]$.

El siguiente resultado será útil para caracterizar el precio de un derivado en términos de esperanza condicional, pero esto se discutirá un poco más adelante.

Proposición 1.1.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *El portafolio de estrategia* $\{\xi_n\}_{0\leq n\leq N}$ *es autofinanciable*

(ii) *Para cualquier* $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\widetilde{V}_n = \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}). \tag{1.1.5}$$

Demostración: Como ξ es autofinanciable, entonces

$$\xi_{n-1} \cdot S_{n-1} = \xi_n \cdot S_{n-1},$$

para $n = 1, \dots, N$.

Dividiendo ambos lados de la igualdad entre $(1+r)^{n-1}$, y considerando que $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$, se tiene que

$$\xi_n \cdot \widetilde{S}_n = \xi_{n+1} \cdot \widetilde{S}_n, \tag{1.1.6}$$

para $n = 1, \dots, N-1$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_n &= \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{V}_j - \widetilde{V}_{j-1}) \\
&= \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \widetilde{S}_j - \xi_{j-1} \cdot \widetilde{S}_{j-1} \\
&= \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \widetilde{S}_j - \xi_j \cdot \widetilde{S}_{j-1} \\
&= \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}), \quad n = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Suponiendo ahora que se cumple (ii), se tiene,

$$\widetilde{V}_n - \widetilde{V}_{n-1} = \xi_n \cdot (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{n-1}).$$

Por consiguiente

$$\xi_n \cdot \widetilde{S}_n - \xi_{n-1} \cdot \widetilde{S}_{n-1} = \xi_n \cdot (\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{n-1}),$$

y

$$\xi_{n-1} \cdot \widetilde{S}_{n-1} = \xi_n \cdot \widetilde{S}_{n-1},$$

para $n = 1, \ldots, N$.

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $(1 + r)^{n-1}$, se tiene la condición de autofinanciamiento. $\square$

La identidad (1.1.5) indica que cuando un portafolio es autofinanciable, el valor descontado del portfolio al tiempo n está dado por la suma de las ganancias descontadas y las pérdidas registradas en todos los períodos de tiempo, desde 0 hasta n.

La suma en (1.1.5) también se refiere a una integral estocástica en tiempo discreto del portafolio $\{\xi_n\}_{1\leq n\leq N}$ con respecto al proceso de los precios descontados $\{\widetilde{S}_n\}_{0\leq n\leq N}$.

Por otra parte, note que el signo de las cantidades ξ_n^i puede ser positivo o negativo, pues no se ha mencionado ninguna restricción en este sentido. Si $\xi_n^0 < 0$, significa que se ha tomado prestada la cantidad $\mid \xi_n^0 \mid$ de activo sin riesgo, sin embargo, si $\xi_n^i < 0$ para $i \geq 1$, diremos que nos hará falta la cantidad de ξ_n^i de activo riesgoso i.

Una venta en corto o al descubierto, es aquella que se realiza sin poseer al momento de la operación lo que se está vendiendo, y es necesario comprarlo posteriormente para cubrir dicha venta. Los préstamos y las ventas en corto se permiten dentro del mercado, sin embargo, el valor del portafolio debe ser positivo en cualquier instante de tiempo (véase [29]).

Definición 1.1.4. Una estrategia ξ es admisible si es autofinanciable y $V_n \geq 0$ para cada $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Arbitraje y medida de probabilidad neutral al riesgo

Un concepto fundamental para la valuación de opciones es el de arbitraje, una oportunidad de arbitraje es la posibilidad de obtener una cantidad positiva de dinero a partir de cero o de una cantidad negativa. Esta noción se puede formalizar como sigue a continuación.

Definición 1.1.5. Una oportunidad de arbitraje es una estrategia admisible con valor inicial menor o igual que cero y valor final distinto de cero.

El arbitraje funciona como punto de partida para establecer un modelo para valuar opciones, especificando que no se puede obtener una ganancia libre de riesgo, es decir, que no puede haber oportunidades de arbitraje, bajo este supuesto se pueden determinar los precios correctos para las opciones. La ausencia de arbitraje se ilustra mejor en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.3. *Durante el intervalo de tiempo* $[0, N]$*, una empresa emite derechos para comprar acciones a un precio de* k *unidades. Este derecho se comporta como una opción de compra, pues otorga el derecho pero no la obligación de comprar la acción a un precio de ejercicio* k*. En la fecha de emisión de los derechos el precio de las acciones de esta empresa cerraron a* S *unidades. La pregunta ahora es: ¿Como valuar el precio* C *del derecho a comprar el bien subyacente? Esta respuesta puede ser contestada a través de la búsqueda de oportunidades de arbitraje. Note que existen dos formas para comprar el subyacente:*

1. *Comprar el subyacente en el mercado a* S *unidades.*

2. *Comprar la opción al precio* C *y luego el subyacente a* k *unidades. El costo total sería de* $C + k$ *unidades.*

Para un inversionista quien no posee acciones ni derechos, si $C+k < S$ *puede realizar arbitraje, comprando la opción en* C *unidades, luego el subyacente en* k *unidades y finalmente vendiendo el subyacente en el mercado en* S *unidades, la ganancia sería igual a*

$$S - (C + k) > 0.$$

Por otra parte, para un inversionista que posee la opción, si $C + k > S$ *puede realizar arbitraje, vendiendo la opción en* C *unidades, comprando el subyacente en el mercado en* S *unidades. En* N *el subyacente puede ser vendido en* k *unidades y la ganancia sería igual a*

$$C + k - S > 0.$$

En ausencia de oportunidades de arbitraje, lo anterior nos indica que C *debe satisfacer:*

$$C + k - S = 0$$

Así, el precio justo para la opción es:

$$C = S - k \tag{1.1.7}$$

El supuesto de ausencia de arbitraje se relaciona con la noción de *medida de probabilidad neutral al riesgo*. Por lo que a continuación se presenta esta definición, la cual menciona que bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo, el rendimiento esperado de cada activo riesgoso indexado con el superíndice $1, ..., d$, es igual al rendimiento del activo no riesgoso, el cual se indexa con el superíndice cero.

Definición 1.1.6. Una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, es llamada medida neutral al riesgo si

$$\mathbb{E}^*[S_{n+1}^i|\mathcal{F}_n] = (1+r)S_n^i, \tag{1.1.8}$$

donde, $i = 0, 1, ..., d$ y $n = 0, 1, ..., N-1$. $\mathbb{E}^*$ denota la esperanza bajo $\mathbb{P}^*$.

La definición de medida neutral al riesgo se puede plantear desde un enfoque de martingalas.

Proposición 1.1.4. *Una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, es una medida neutral al riesgo si y sólo si el proceso $\{\widetilde{S}_n^i\}$ de los precios descontados es una martingala bajo $\mathbb{P}^*$, es decir,*

$$\mathbb{E}^*[\widetilde{S}_{n+1}^i|\mathcal{F}_n] = \widetilde{S}_n^i, \tag{1.1.9}$$

donde, $i = 0, 1, ..., d$ y $n = 0, 1, ..., N-1$.

Demostración: Note que

$$S_n^i = (1+r)^n \widetilde{S}_n^i,$$

así

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[S_{n+1}^i|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}^*[(1+r)^{n+1}\widetilde{S}_{n+1}^i|\mathcal{F}_n] \\ &= (1+r)^{n+1}\mathbb{E}^*[\widetilde{S}_{n+1}^i|\mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

Para cada $n = 0, 1, ..., N$, $i = 1, ..., d$.

Por lo tanto, (1.1.8) y (1.1.9) son equivalentes. $\square$

Definición 1.1.7. Se dice que un mercado es viable si no existen oportunidades de arbitraje.

El siguiente teorema es útil para revisar la existencia de oportunidades de arbitraje y se conoce como primer teorema fundamental de valuación de activos.

Teorema 1.1.5. *Un mercado es viable si y sólo si admite al menos una medida neutral al riesgo.*

Demostración: Supongamos que el mercado admite al menos una medida neutral al riesgo, entonces, bajo esta medida los precios descontados son martingalas.

Para cualquier portafolio de estrategia ξ, se cumple por Proposición 1.1.2 que

$$\widetilde{V}_n = \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}).$$

Luego, por Proposición B.0.2 del Apéndice B, se tiene que $\widetilde{V}_n$ es una $\mathbb{P}^*$- martingala. Por lo tanto

$$\mathbb{E}(\widetilde{V}_N) = \mathbb{E}(\widetilde{V}_0).$$

De tal forma, que si la estrategia es admisible, y su valor inicial es cero, entonces,

$$\mathbb{E}(\widetilde{V}_N) = 0,$$

con $\widetilde{V}_N \geq 0$. Puesto que para todo $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$, se tiene que

$$\widetilde{V}_N = 0.$$

La implicación contraria es un poco más complicada, y requiere del Teorema de Separación de Conjuntos Convexos (véase Apéndice C, Teorema C.0.4).

A continuación se dará una idea general de la demostración de esta implicación, los detalles pueden consultarse en [29], Teorema 1.2.7.

Sea L el cono convexo de las variables aleatorias estrictamente positivas.

El mercado será viable si y sólo si para cualquier estrategia admisible $\xi, \quad V_0 = 0$, entonces $\widetilde{V}_N \notin L$.

Para cualquier proceso admisible $(\xi_n^0, \ldots, \xi_n^d)$, se asociará el proceso definido a continuación

$$\widehat{G}_n = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \xi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d).$$

Este proceso corresponde a la ganancia acumulada descontada obtenida por el portafolio de estrategia autofinanciable $\xi_n^1, \ldots, \xi_n^d$.

Un argumento financiero nos indica que entonces deberá existir un único proceso ξ_n^0, tal que la estrategia $\{(\xi_n^0, \xi_n^1, \ldots, \xi_n^d) : n = 1, \ldots, N\}$ es autofinanciable y tiene valor inicial cero, (véase [29], Proposición 1.1.3).

El proceso que se asocia a esta estrategia corresponde al valor descontado de la estrategia al tiempo n, y puesto que el mercado es viable, se tiene que si $\widehat{G}_n \geq 0$ para cualquier $n = 1, \dots N$, entonces debe cumplirse que $\widehat{G}_N = 0$.

Considere ahora el conjunto Ψ de las variables aleatorias $\widehat{G}_N(\xi)$, donde ξ es un proceso predecible en $\mathbb{R}^d$, el cual es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^\Omega$, donde $\mathbb{R}^\Omega$ es el conjunto de las variables aleatorias reales definidas en Ω.

Se puede probar que el subespacio Ψ no intersecta a L (véase [29], Lema 1.2.6), por tanto, tampoco intersecta al conjunto convexo $K = \{X \in L | \sum_\omega X(\omega) = 1\} \subset L$.

Entonces, como resultado del Teorema de Separación de Conjuntos Convexos, existe $\lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega$, tal que

1. Para todo $K \in X$, $\sum_\omega \lambda(\omega) X(\omega) > 0$.
2. Para cualquier proceso predecible ξ, se cumple que
$$\sum_\omega \lambda(\omega) \widehat{G}_N(\xi)(\omega) = 0.$$

De 1 se deduce que $\lambda(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Por lo tanto, la probabilidad $\mathbb{P}^*$ definida como sigue

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{w' \in \Omega} \lambda(\omega')},$$

es equivalente a $\mathbb{P}$.

Sea $\mathbb{E}^*$ la esperanza bajo la medida $\mathbb{P}^*$, de la propiedad 2 se tiene que, para cualquier proceso predecible $\{\xi_n\}$ en $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \Delta \widetilde{S}_j \right) = 0.$$

De aquí que, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$ y para cualquier sucesión predecible en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathbb{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^i \Delta \widetilde{S}_j^i \right) = 0.$$

Por lo tanto, por Proposición B.0.3 del Apéndice B, se concluye que los precios descontados $\{\widetilde{S}_n^1\}, \dots, \{\widetilde{S}_n^d\}$ son $\mathbb{P}^*$-martingalas.

Por lo tanto, existe una medida de probabilidad neutral al riesgo. $\square$

Mercados completos y portafolios replicantes

Se ha explicado que una opción es un instrumento derivado y que éstos son contratos efectuados entre dos agentes, además, los instrumentos derivados reditúan una función de pago aleatoria $f_N \geq 0$ al tiempo N.

En el caso de una opción europea de compra, con vigencia N, basada en un bien subyacente S^1 y con precio de ejercicio K, la función de pago que reditúa la opción en el instante N es

$$f_N(S) = \max\{S_N^1 - K, 0\} := (S_N^1 - K)^+. \tag{1.1.10}$$

Para una opción de venta europea sobre el mismo bien subyacente y precio de ejercicio K, la función de pago en el instante N es:

$$f_N(S) = \max\{K - S_N^1, 0\} := (K - S_N^1)^+. \tag{1.1.11}$$

Para el caso de opciones europeas, la función de pago depende únicamente de S_N^1, sin embargo para el caso de opciones americanas, la función de pago puede ser redituada en cualquier instante previo a la fecha de expiración de la misma, por lo que se tendrá una función de pago para cada instante de tiempo $n \leq N$.

Si la opción americana es de compra, entonces

$$f_n(S) = \max\{S_n^1 - K, 0\} := (S_n^1 - K)^+, \quad n \leq N. \tag{1.1.12}$$

En caso de que la opción americana sea de venta, se tendrá que

$$f_n(S) = \max\{K - S_n^1, 0\} := (K - S_n^1)^+, \quad n \leq N. \tag{1.1.13}$$

En este caso, la función de pago en el instante n se puede interpretar como el pago por el ejercicio anticipado.

Definición 1.1.8. Un derivado con función de pago f_N se dice que es alcanzable, si existe una estrategia admisible ξ, tal que

$$f_N = \xi_N \cdot S_N. \tag{1.1.14}$$

Es decir, un derivado es alcanzable si existe un portafolio de estrategia admisible tal que su valor en la fecha de vencimiento sea igual que la función de pago del derivado en la misma fecha. En este caso decimos que el portafolio ξ *cubre* o *replica* al derivado.

Definición 1.1.9. Se dice que un mercado es completo si cada instrumento derivado es alcanzable.

El interés en mercados completos se debe a que esta situación permite una teoría más simple para la valuación de opciones mediante la cobertura.

El siguiente resultado se conoce como el segundo teorema fundamental de valuación de activos y da una caracterización más precisa de los mercados completos.

Teorema 1.1.6. *Un mercado viable es completo si y sólo si admite sólo una medida de probabilidad neutral al riesgo.*

Demostración: Los detalles de la demostración se pueden consultar en [29], Teorema 1.3.4. □

Podemos resumir que las supocisiones y los elementos necesarios para el modelo que requerimos serán los siguientes.

Primero, debemos suponer un mercado viable y completo, entonces, existirá una única medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ bajo la cual los precios descontados del bien subyacente serán martingalas.

La función de pago f_N será una variable aleatoria $\mathcal{F}_N$-medible y no negativa, y requerimos también de una estrategia admisible ξ que replique al derivado.

En particular, la expresión (1.1.5) muestra que $\{\widetilde{V}_n\}_{0\leq n\leq N}$ es también una martingala con respecto de $\mathbb{P}^*$, (véase [29], Proposición 1.2.3). De este hecho se tiene que

$$V_0 = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N) = \mathbb{E}^*\left(\frac{f_N}{S_N^0}\right), \tag{1.1.15}$$

y más generalmente

$$V_n = S_n^0 \mathbb{E}^*\left(\frac{f_N}{S_N^0}|\mathcal{F}_n\right), \tag{1.1.16}$$

para $n = 0, \ldots, N$.

La identidad (1.1.16) se deduce del siguiente resultado.

Teorema 1.1.7. *Para cualquier medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{P}^*$, el valor descontado del portafolio de estrategia autofinanciable ξ que cubre al derivado con función de pago f_N, está dado por*

$$\widetilde{V}_n = \mathbb{E}^*\left[\widetilde{f}_N|\mathcal{F}_n\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{1.1.17}$$

$\widetilde{f}_N$ representa el valor descontado de la función de pago, es decir,

$$\widetilde{f}_N = \frac{f_N}{(1+r)^N}. \tag{1.1.18}$$

Demostración: Puesto que el portafolio de estrategia $\{\xi_n : n = 1, 2, \ldots, N\}$ es autofinanciable, por la relación (1.1.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[\widetilde{f}_N|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\widetilde{V}_N|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{N} \xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}^*[\widetilde{V}_0|\mathcal{F}_n] + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] \\
&= \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] \\
&\quad + \sum_{j=n+1}^{N} \mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] \\
&= \widetilde{V}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (S_j - S_{j-1}) \\
&\quad + \sum_{j=n+1}^{N} \mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] \\
&= \widetilde{V}_n + \sum_{j=n+1}^{N} \mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n].
\end{aligned}$$

Para concluir la demostración sólo resta probar que

$$\sum_{j=n+1}^{N} \mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] = 0. \tag{1.1.19}$$

Para esto, veamos que

$$\mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] = 0,$$

para todo $j = t+1, \ldots, N$.

Puesto que $0 \leq n \leq j-1$, entonces $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1}$, luego por la propiedad de la torre de la esperanza condicional se tiene que

$$\mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[\mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_n].$$

De tal forma, que basta con demostrar

$$\mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Note que la asignación del portafolio ξ_j sobre el periodo de tiempo $[j-1, j]$ se decide al tiempo $j-1$, por tanto, solo depende de la información $\mathcal{F}_{j-1}$ conocida hasta el tiempo $[j-1, j]$, por lo tanto

$$\mathbb{E}^*[\xi_j \cdot (S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = \xi_j \cdot \mathbb{E}^*[S_j - S_{j-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Finalmente, puesto que $\{\widetilde{S}_n : n = 0, 1, \ldots, N\}$ es una martingala bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{P}^*$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_j|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_{j-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_j|\mathcal{F}_{n-1}] - \widetilde{S}_{j-1} \\
&= 0, \quad j = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.1.19) se cumple, quedando así demostrado el teorema.
□

Multiplicando ambos lados de la igualdad (1.1.17) por $(1+r)^n$, se obtiene la identidad (1.1.16), esta relación, indica que en cualquier instante, el valor del portafolio que replica al derivado es igual a la riqueza necesaria al tiempo n para replicar f_N al tiempo N, mediante la estrategia ξ.

Por lo tanto, si al tiempo 0 se vende la opción a

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{f_N}{S_N^0}\right),$$

será posible seguir una estrategia que replique la opción, es decir, generar la cantidad f_N al tiempo N, en este caso se dice que el derivado es perfectamente replicable.

Resumiendo las ideas de esta sección, encontramos que, para la valuación de opciones las siguientes tres ideas son importantes.

1. Si un derivado es perfectamente replicable, entonces, el precio del derivado será el costo del portafolio de estrategia comercial de la replicación.

2. Los precios descontados del subyacente son martingalas bajo una medida de probabilidad asociada con un factor de descuento. El precio del derivado, es la esperanza de la función de pago descontada, bajo tal medida de probabilidad.

3. En un mercado completo cualquier función de pago puede ser alcanzada mediante un portafolio de estrategia comercial, además, la medida martingala asociada con el factor de descuento es única.

Capítulo 2

Programación dinámica

La programación dinámica, abordada en 1957 por el matemático Richard Bellman [5], fue pensada originalmente para resolver problemas en procesos de decisión en múltiples pasos, este último, fue un tema de investigación que surgió en años posteriores a la segunda guerra mundial.

Después de desarrollar el método de programación dinámica en el área de problemas de decisión en tiempo discreto, Bellman y sus colaboradores se dedicaron a la tarea de formular diferentes problemas en términos de programación dinámica. Como resultado de esta labor, encontraron que las ideas centrales del método, en particular el Principio de Optimalidad, podían ser aplicadas satisfactoriamente en muchos de los problemas abordados [6]. En la actualidad, un problema que puede ser resuelto usando programación dinámica, es el problema de valuación de opciones americanas.

En este capítulo se estudian los elementos básicos y las características que debe tener un problema para poder resolverse usando programación dinámica, se ilustra con un ejemplo y finalmente se deduce la ecuación funcional para el problema de valuación opciones americanas. La bibliografía de consulta utilizada es la siguiente: [18], [24], [36], [37], [4], incluyendo los que se citan a lo largo del capítulo.

2.1. Conceptos básicos

2.1.1. Principio de optimalidad de Bellman

La metodología de programación dinámica está orientada a la solución de problemas en los cuales se deben tomar decisiones en etapas sucesivas, con el objetivo de optimizar el costo o la recompensa total sobre dichas decisiones.

Esta metodología es útil para resolver un amplio número de problemas, los cuales se caracterizan por una estructura básica y ciertas condiciones para su solución. La idea clave para encontrar la solución óptima global consiste en la aplicación del Principio de Optimalidad de Bellman, este principio es la clave para elaborar el algoritmo de Programación Dinámica.

Principio de optimalidad de Bellman: *Una política óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera que sean el estado y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión.*

Para entender mejor este principio, supongamos un sistema que consiste de n etapas, en cada etapa se toma una decisión q y dependiendo de estas decisiones el sistema tendrá (en cada etapa) un vector p denominado vector de estados, conociendo el estado inicial del sistema, y un determinado valor numérico llamado costo o recompensa.

El problema radica en determinar los valores óptimos de las variables para los cuales se minimice o maximice la función costo o recompensa tras una cierta transición o evolución del sistema. Es decir, se pretende resolver una secuencia de n subproblemas, uno para cada etapa, de manera que el costo o la recompensa final del sistema sea óptimo.

Para poder asumir el principio de optimalidad de Bellman, se debe pedir que, en cada etapa el estado se vea afectado sólo por el estado en que se encontraba en la etapa anterior y la decisión que se tomó en ella. Es decir, el escenario en el que se trabaja debe ser markoviano.

Así, cada vez que se toma una decisión, el sistema evoluciona pasando a un nuevo estado, pagando un costo o bien obteniendo una recompensa.

Sea $f(p)$ el costo o recompensa del sistema cuando se estudia la decisión apropiada para la etapa en el estado p, es decir, $f(p)$ representa el rendimiento óptimo en el estado p.

Entonces, la formalización del método de programación dinámica se basa en la siguiente relación, llamada ecuación funcional de programación dinámica.

$$f(p) = \min_q \{H(p, q, f(T(p, q)))\}, \tag{2.1.1}$$

donde p: estado, q: decisión, $T(p, q)$: función de transición, H es una función real valuada conocida, la cual depende de p, q y la trancisión del problema.

Características de un problema de programación dinámica

Dado un problema de optimización, este puede ser resuelto vía programación dinámica si se cumple lo siguiente.

1. El problema es divisible en etapas.
2. Cada etapa se puede caracterizar mediante estados y posibles decisiones.
3. La decisión óptima tomada en cada etapa, determina cual será el estado en la siguiente etapa.
4. La decisión óptima en cada etapa, depende únicamente del estado actual y no de las decisiones anteriores.
5. Existe una fórmula recursiva que define el costo o recompensa de una decisión en una etapa a partir del costo o recompensa de una decisión en la etapa anterior.

2.1.2. Planteamiento de un problema de programación dinámica

Para plantear un problema de programación dinámica debemos seguir los siguientes pasos:

(*i*) Identificación de etapas, estados y variables de decisión

- Cada etapa debe tener asociado una o más posibles decisiones, las cuales dependen de las decisiones anteriores mediante las variables de estado.
- Cada estado debe contener toda la información necesaria para tomar la decisión asociada al período.
- Las variables de decisión son aquellas sobre las cuales se optimiza el beneficio acumulado y modifican el estado en la siguiente etapa.

(*ii*) Descripción de la ecuación de recurrencia

Esta ecuación debe indicar cómo se acumula la función de costo o recompensa a optimizar, así como la forma en que varían las funciones de estado de una etapa a otra.

(*iii*) Optimización de la función objetivo

Siguiendo el principio de optimalidad, se debe optimizar cada subproblema por etapas, en función de la solución del subproblema en la etapa siguiente. En este punto se debe aclarar que, para que la recurrencia esté bien definida, es necesario una condición de frontera. La recursividad puede ser hacia adelante o hacia atrás.

Sean

- k: índice de cada etapa $k = 0, \ldots, n$.
- x_k: estado del sistema en la etapa k.
- u_k: decisión tomada en el período k, la influencia de esta decisión se observa en el período $k + 1$.
- w_k: variables exógenas sobre el sistema en el período k.

El estado siguiente en cada etapa dependerá del estado actual del sistema, de las decisiones tomadas en esa etapa y de las variables exógenas

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k).$$

El principio de optimalidad de Bellman sugiere abordar el problema de manera parcial.

Llamemos P_0 al problema global y P_k al problema que resulta de considerar las etapas desde k hasta la etapa final.

Haciendo recursión hacia atrás, empezamos por resolver el problema P_{N-1}, la solución de este subproblema se obtiene como sigue.

- El costo futuro al que se incurre por estar en el estado final N es conocido (condición de frontera).
- Para cada estado x_{N-1}, al inicio de la etapa, se puede calcular el costo asociado a cada una de las posibles decisiones u_{N-1}.
- Se escoge para cada posible estado x_{N-1} la decisión que optimice el costo o recompensa.
- La solución al problema P_{N-1} consiste en una estrategia óptima y un costo o beneficio asociado para cada estado inicial posible.

Una vez resuelto el problema P_{N-1}, se procede a resolver el problema P_{N-2} como a continuación.

- Para cada estado x_{N-2}, se calculan los costos asociados a las posibles decisiones u_{N-2}, este se compondrá de dos términos:
    1. El costo de la etapa $N - 2$ asociado a la decisión tomada.
    2. El costo futuro, debido al estado final del sistema x_{N-1}, este valor es la solución del problema P_{N-1}, resuelto previamente.

- El costo futuro para el estado final del sistema x_{N-1} que se obtuvo como óptimo para el problema P_{N-1} forma parte de la solución óptima por el principio de optimalidad.
- Para cada estado x_{N-2} se selecciona la decisión que optimice el costo, obteniendo así la solución al problema P_{N-2}.

Este proceso se repite de forma recursiva hacia atrás hasta llegar a la solución del problema P_0.

A continuación se presenta un ejemplo resuelto por programación dinámica.

Ejemplo 2.1.1. ***Problema del reemplazo de máquinas***

El problema del reemplazo de máquinas consiste en optimizar la edad de vida útil de una cierta máquina, ya que, mientras más tiempo esté en servicio, los costos operacionales y de manutención serán mayores, mientras que la productividad será menor, por esta razón en ocasiones resulta más económico reemplazar el equipo.

Supongamos este problema de reemplazo de equipos a lo largo de n años, así, al inicio de cada año se debe decidir si se mantiene un año más el servicio del equipo o se reemplaza por uno nuevo.

Sean

$r(x)$*: beneficio anual de un equipo con* x *años de antigüedad.*
$c(x)$*: costo de operación de un equipo con* x *años de antigüedad.*
$s(x)$*: valor de rescate de un equipo que tiene* x *años de antigüedad.*
I*: costo de adquisición de un equipo nuevo en cualquier año.*

Solución

Los elementos del modelo de programación dinámica son

- **Etapas**

  Las etapas estarán dadas por los años $k = 1, \ldots, n$.

- **Variable de estado**

  x_k: edad de la máquina al principio del año k.

- **Variable de decisión**

  1. Conservar la máquina al principio del año k, obteniendo un beneficio de

$$r(x) - c(x).$$

2. Reemplazar la máquina al principio del año k, obteniendo un beneficio de

$$s(x) - I.$$

- **Ecuación recursiva**

  Sea

  $f_k(x)$: ingreso neto máximo para los años $k, k+1, \ldots, n$, dado que la máquina tiene x años de antiguedad al inicio del año k.

  La ecuación recursiva estará dada por

$$f_k(x) = \max \begin{cases} r(x) - c(x) + f_{k+1}(x+1) & \text{conservar,} \\ s(x) - I + r(0) - c(0) + f_{k+1}(1) & \text{reemplazar.} \end{cases}$$

- **Condición de frontera**

  Al final de los n años, lo más conveniente será vender el equipo a valor residual, esto es, al valor depreciado del equipo al final de su vida útil, por lo tanto:

$$f_{n+1}(x) = s(x).$$

A continuación se darán valores específicos para el problema del reemplazo de máquinas, con la finalidad de resolverlo e ilustrar la metodología de programación dinámica.

Ejemplo 2.1.2. ***Problema numérico***

Se necesita determinar la política de reemplazo óptima durante los próximos 4 años para una máquina que en la actualidad tiene 3 años de edad, es decir, se debe hallar la política de reemplazo óptima de la máquina hasta principios del año 5.

La compañía requiere que toda máquina de 6 años de edad sea reemplazada, el costo de una máquina nueva es de \$100,000.00

La siguiente tabla, reune los datos del problema, las cantidades están dadas en miles de pesos.

Edad (t)	Utilidad ($r(t)$)	Costo ($c(t)$)	Rescate ($s(t)$)
0	20	0.2	-
1	19	0.6	80
2	18.5	1.2	60
3	17.2	1.5	50
4	15.5	1.7	30
5	14	1.8	10
6	12.200	2.2	5

Cuadro 2.1: Datos para el problema numérico del reemplazo de máquinas.

Para distinguir más claramente los estados posibles, es recomendable realizar un dibujo, de la edad de la máquina contra el año de la decisión.

Figura 2.1: Etapas y posibles estados del problema numérico.

Solución del problema

La solución de la red en la Figura 2.1 equivale a determinar el camino que genere la mayor utilidad desde el inicio del año 1, hasta el final del año 4.

Año 4

Al iniciar el cuarto año, las posibles edades de las máquinas serán 1, 2, 3 ó 6 años.

La función utilidad para cada posible decisión (conservar ó reemplazar), está dada por

$$C = r(t) + s(t+1) - c(t), \tag{2.1.2}$$

$$R = r(0) + s(t) - c(0) + s(1) - I. \tag{2.1.3}$$

Las siguientes tablas muestran los cálculos necesarios.

$i=4$	Utilidad (C)	Utilidad (R)
t	$r(t)+s(t+1)-c(t)$	$r(0)+s(t)-c(0)+s(1)-I$
1	19+60-0.6=78.4	20+80-0.2+80-10=79.8
2	18.5+50-1.2=67.3	20+60-0.2+80-100=59.8
3	17.2+30-1.5=45.7	20+50-0.2+80-100=49.8
6	Reemplazar	4.8

Cuadro 2.2: Utilidad de las posibles decisiones en la etapa 4.

$i=4$ t	C	R	$f_4(t)$	Decisión óptima
1	78.4	79.8	79.8	R
2	67.3	59.8	67.3	C
3	45.7	49.8	49.8	R
6	-	4.8	4.8	R

Cuadro 2.3: Decisión óptima y beneficio para cada posible estado en la etapa 4.

Año 3

Al iniciar el tercer año, las posibles edades de las máquinas serán 1, 2 ó 5 años.

La función utilidad para cada posible decisión (conservar ó reemplazar), esta dada por

$$C = r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1), \tag{2.1.4}$$

$$R = r(0) + s(t) - c(0) - I + f_{i+1}(1). \tag{2.1.5}$$

Las siguientes tablas muestran los cálculos necesarios en la etapa 3.

$i=3$	Utilidad (C)	Utilidad (R)
t	$r(t)-c(t)+f_4(t+1)$	$r(0)+s(t)-c(0)-I+f_4(1)$
1	19-0.6+67.3=85.7	20+80-0.2-100+79.8=79.6
2	18.5-1.2+49.8=67.1	20+60-0.2-100+79.8=59.6
5	14-1.8+4.8=17	20+10-0.2-100+79.8=19.6

Cuadro 2.4: Utilidad de las posibles decisiones en la etapa 3.

$i=3$ t	C	R	$f_3(t)$	Decisión óptima
1	85.7	79.6	85.7	C
2	67.1	59.6	67.1	C
5	17	19.6	19.6	R

Cuadro 2.5: Decisión óptima y beneficio para cada posible estado en la etapa 3.

Año 2

Al iniciar el segundor año, las posibles edades de las máquinas serán 1 ó 4 años.

Las siguientes tablas muestran los cálculos necesarios en la etapa 2.

$i=2$	Utilidad (C)	Utilidad (R)
t	$r(t)-c(t)+f_3(t+1)$	$r(0)+s(t)-c(0)-I+f_3(1)$
1	19-0.6+67.1=85.5	20+80-0.2-100+85.7=85.5
4	15.5-1.7+19.6=33.4	20+30-0.2-100+85.7=35.5

Cuadro 2.6: Utilidad de las posibles decisiones en la etapa 2.

$i = 2$ t	C	R	$f_2(t)$	Decisión óptima
1	85.5	85.5	85.5	C ó R
4	33.4	35.5	35.5	R

Cuadro 2.7: Decisión óptima y beneficio para cada posible estado en la etapa 2.

Año 1

Al iniciar el primer año, la edad posible de las máquinas será de 3 años.

Las siguientes tablas muestran los cálculos necesarios en la etapa 1.

$i = 1$	Utilidad (C)	Utilidad (R)
t	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_2(1)$
3	17.2-1.5+35.5=51.2	20+50-0.2-100+85.5=55.3

Cuadro 2.8: Utilidad de las posibles decisiones en la etapa 1.

$i = 1$ t	C	R	$f_1(t)$	Decisión óptima
3	51.2	55.3	55.3	R

Cuadro 2.9: Decisión óptima y beneficio para cada posible estado en la etapa 1.

Política óptima

La política óptima se ilustra a través de la siguiente tabla

<table>
<tr><th>Año 1</th><th>Año 2</th><th>Año 3</th><th>Año 4</th><th>Año 5</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$t = 3 \rightarrow$R$\rightarrow$</td><td>C$\rightarrow$</td><td>$t = 2 \rightarrow$C$\rightarrow$</td><td>$t = 3 \rightarrow$R$\rightarrow$</td><td rowspan="3">R</td></tr>
<tr><td>$t = 1$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>R$\rightarrow$</td><td>$t = 1 \rightarrow$C$\rightarrow$</td><td>$t = 2 \rightarrow$C$\rightarrow$</td></tr>
</table>

Cuadro 2.10: Política óptima para el problema numérico del reemplazo de máquinas.

Por lo tanto, existen dos alternativas de políticas óptimas iniciando en el año uno,

$$(RCCR)$$

y

$$(RRCC),$$

con un costo total de \$55,300.00. $\square$

El Ejemplo 2.1.1, plantea un problema de programación dinámica determinista. Existen sin embargo, otro tipo de problemas que pueden resolverse usando programación dinámica estocástica, en estos casos, las variables exógenas que actúan sobre el sistema se consideran variables aleatorias, y aunque no se conoce el valor exacto de tales variables, su función de distribución si es conocida.

Las ideas básicas para determinar los estados, las etapas y la ecuación recursiva seguirán siendo válidas, pero ahora tomarán una forma distinta. La aleatoriedad que aparece, introduce de manera natural un proceso estocástico, y debido al entorno markoviano que debe de cumplirse en estos problemas, el proceso estocástico será un proceso de Markov. Finalmente, para estos problemas, la decisión óptima será la que optimice el costo (o recompensa) esperado.

El problema de valuación de una opción americana puede plantearse como un problema de programación dinámica estocástica, ésto debido a que los precios del bien subyacente son aleatorios, sin embargo, podemos suponer que tienen cierta distribución de probabilidad.

En la siguiente sección se planteará esta situación como un problema de programación dinámica.

2.2. Formulación del problema de valuación de opciones americanas

2.2.1. Enfoque de programación dinámica

Empezemos definiendo las etapas, los estados y las decisiones.

Etapas

La opción tiene un periodo de vigencia definido desde la fecha de emisión del contrato hasta su vencimiento, tomaremos este periodo como el intervalo de tiempo $[0, T]$, donde la fecha de emisión del contrato se tomará como el instante cero y T será el tiempo de vigencia de la opción, por ejemplo, si $T = 1$, estaremos diciendo que la vigencia de la opción es de un año, si $T = 1/2$ entonces la opción tendrá vigencia de seis meses, por mencionar algunos casos.

Las etapas estarán constituidas por los subintervalos en que se divida la vigencia de la opción y se indexarán con la letra $n = 1, 2, \ldots, N$.

Estados

Los estados X_n están dados por los posibles precios del subyacente en cada etapa n. La distribución de probabilidad de estos precios se tomará como una distribución lognormal. Este supuesto se toma del modelo de Black-Scholes [9].

Antes de determinar cuáles serán las decisiones en este problema, analicemos lo siguiente.

Recordemos que el modelo financiero que buscamos, se basa en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ junto con una filtración $\{\mathcal{F}_n\}$, la cual representa la cantidad total de información hasta el tiempo n.

Por otra parte, debido a que una opción americana puede ser ejercida en cualquier instante previo a la fecha de vencimiento, ésta tendrá una función de pago asociada a cada instante de tiempo n. Dependiendo de si la opción es de compra o de venta, su función de pago en el instante n estará dada por (1.1.12) y (1.1.13) respectivamente.

Definiendo la sucesión positiva $\{f_n\}_{0\leq n\leq N}$ como la sucesión de pago por el ejercicio anticipado (función de pago), se tiene que, $\{f_n\}$ es una sucesión adaptada a la filtración.

Para lograr hallar un precio de la opción que éste asociado con la sucesión $\{f_n\}_{0\leq n\leq N}$ se debe recurrir a la ecuación recursiva, empezando desde N. Por este motivo debemos dar la condición de frontera, para que la ecuación recursiva quede bien definida.

Condición de frontera

Sea

$V_n(x)$ el valor de la opción en la etapa n dado el estado x, entonces,

$$V_N(x) = f_N(x),$$

es decir, la condición de frontera nos indica que el precio de la opción en la fecha de vencimiento es igual a la ganancia obtenida por el ejercicio al tiempo N.

Ahora que ya se tiene la condición de frontera y que esta misma nos da el valor de la opción en la fecha de vencimiento, la pregunta que resulta natural es la siguiente: ¿Cuánto valdrá la opción en el instante $N-1$?

La respuesta a esta pregunta, nos dará la ecuación recursiva y las posibles decisiones en cada etapa.

Si el poseedor de la opción decide ejercer su derecho inmediatamente, ganará f_{N-1}, en caso contrario el vendedor de la opción deberá contar con la cantidad f_N para cubrir el pago por el posible ejercicio en el instante N.

Por consiguiente, en el instante $N-1$, el vendedor deberá contar con el máximo entre f_N y la cantidad necesaria al tiempo $N-1$ para generar f_N al tiempo N.

Por lo tanto, el precio de la opción americana en el instante $N-1$, es igual al máximo entre el pago por el ejercicio anticipado (en el instante $N-1$) y un valor de continuación, mientras que las decisiones serán las posibles cantidades de activo asignadas para formar el portafolio de estrategia.

Ecuación recursiva

$$\begin{aligned} V_N(x) &= f_N(x) \qquad (2.2.1) \\ V_n(x) &= \max\{f_n(x), E\left[D_{n,n+1}(X_{n+1})V_{n+1}(X_{n+1})|X_n = x\right]\} \\ n &= 1, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Donde $D_{n,n+1}(X_{n+1})$ es el factor de descuento de n a $n+1$ y suponemos que es una función determinista de X_n. Para tal función sólo requerimos que la esperanza sea tomada con respecto a la medida de probabilidad consistente con la elección del factor de descuento.

Calcular la esperanza condicional en la ecuación (2.2.1) es la mayor dificultad del problema, incluso para el problema de dos etapas, además, se agrava por la anidación de las esperanzas condicionales mientras el número de etapas decrece.

2.2.2. Enfoque de tiempos de paro

La fórmula recursiva de programación dinámica (2.2.1) funciona para la valuación de opciones americanas, sin embargo, otro enfoque muy usual de este problema es a través de tiempos de paro.

A pesar de esto, este enfoque cumple de cierta manera la ecuación de programación dinámica, en esta sección se explicará el problema de valuación de una opción americana a través de tiempos de paro, y en la siguiente sección, la relación que guarda con programación dinámica.

Sean

- $\widehat{f}_n(X_n)$, $0 \leq n \leq N$, el proceso que representa el pago descontado por el ejercicio al tiempo n, en el estado X_n.
- $\mathcal{T}$, una clase de tiempos de paro admisibles en el intervalo $[0, N]$.

El problema consiste en encontrar el valor esperado del pago descontado óptimo, es decir,

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E[\widehat{f}_\tau(X_\tau)]. \tag{2.2.2}$$

Nuevamente, el proceso que representa el pago por el ejercicio anticipado al tiempo n, en el estado X_n, lo denotamos por $f_n(X_n)$, y la esperanza en (2.2.2) la tomamos con respecto a la medida de probabilidad neutral al riesgo.

Por lo tanto, para una opción americana de venta, con precio de ejercicio K, basada en un sólo bien subyacente, con precio S_n al tiempo n y tasa de interés libre de riesgo, el valor de la opción al inicio del contrato es

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+]. \tag{2.2.3}$$

El supremo en (2.2.3) se consigue mediante un tiempo de paro óptimo τ^* que tiene la siguiente forma,

$$\tau^* = \inf\{n \geq 0 : S_n \leq b^*(n)\}, \tag{2.2.4}$$

para alguna frontera óptima de ejercicio b^*.

2.2.3. Tiempos de paro y programación dinámica

Note que cualquier tiempo de paro τ determina un valor mediante

$$V_0^\tau(X_0) = E[f_\tau(X_\tau)]. \tag{2.2.5}$$

Inversamente, cualquier regla que asigna un valor a $\widehat{V}_i(x)$ en cada estado $x \in \mathbb{R}^d$ y oportunidad de ejercicio i, con $\widehat{V}_N = f_N$, determina una regla de ejercicio

$$\widehat{\tau} = \min\{i \in \{1, \ldots, N\} : f_i(X_i) \geq \widehat{V}_i(x)\}. \tag{2.2.6}$$

La región de ejercicio determinada por $\widehat{V}_i$ en la i-ésima fecha de ejercicio es el conjunto

$$\{x : f_i(x) \geq \widehat{V}_i(x)\}. \tag{2.2.7}$$

La regla de ejercicio $\widehat{\tau}$ puede describirse como la primera vez que la cadena de Marvok X_i entra en una región de ejercicio.

Valor de continuación de una opción americana

La región de continuación es el complemento del conjunto (2.2.7).

El valor de continuación de una opción americana con un número finito de oportunidades de ejercicio, es el valor asignado por mantener la opción en lugar de ejercerla inmediatamente.

El valor de continuación en el estado x en la fecha t_i, es

$$C_i(x) = E[D_{i,i+1}(X_{i+1})V_{i+1}(X_{i+1})|X_i = x], \tag{2.2.8}$$

para $i = 0, \ldots, N-1$.

Este valor también satisface la ecuación de programación dinámica, pues

$$\begin{aligned} C_N(x) &\equiv 0 \qquad (2.2.9) \\ C_i(x) &= E\left[\max\{f_{i+1}(X_{i+1}), C_{i+1}(X_{i+1})\}|X_i = x\}\right] \\ i &= 0, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Las funciones de valor V_i, determinan el valor de continuación mediante (2.2.8).

Inversamente

$$V_i(x) = \max\{f_i(x), C_i(x)\}, \tag{2.2.10}$$

para $i = 0, \ldots, N-1$.

Una aproximación $\widehat{C}_i$ al valor de continuación, determina una regla de ejercicio mediante

$$\widehat{\tau} = \min\{i \in \{1, \ldots, N\} : f_i(X_i) \geq \widehat{C}_i(X_i)\}. \tag{2.2.11}$$

Esta regla de paro es la misma que en (2.2.6), si las aproximaciones satisfacen $\widehat{V}_i(x) = \max\{f_i(x), \widehat{C}_i(x)\}$.

Como se aprecia en esta sección, la valuación de opciones americanas, implica resolver un problema de programación dinámica de la forma

(2.2.1). Sin embargo, este problema lleva implícito otro subproblema: el cálculo de la esperanza condicional del valor de continuación.

Este valor de continuación no siempre será el mismo, este hecho dependerá de los supuestos que se consideren.

En el siguiente capítulo se estudian e implementan dos métodos, los cuales, a pesar de tener como base la ecuación recursiva (2.2.1) para su solución, emplean valores de continuación distintos.

Capítulo 3

Modelos para valuar opciones americanas vía programación dinámica

3.1. Modelo binomial

En esta sección, se plantea la ecuación funcional para el valor de continuación, posteriormente se resuelve esta ecuación obteniendo una fórmula recursiva para tal valor, mediante la cual se encontrará la solución del problema, posteriormente, se obtienen las fórmulas para valuar opciones americanas de compra y venta sobre opciones que no reparten dividendos. Finalmente, se ilustra este método con un ejemplo de una opción sobre acciones de una empresa mexicana. La bibliografía utilizada para consulta fue la siguiente: [26], [38], [39], [29], así como los citados a lo largo de la sección.

3.1.1. Supuestos y notación

Consideremos una opción americana basada en un bien subyacente (una acción que no paga dividendos), cuyo precio al emitirse el contrato es S, con un precio de liquidación K, y tiempo de vigencia T.

El modelo binomial es un modelo en tiempo discreto para valuar opciones americanas, el cual esta basado en la suma finita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas binomialmente.

En este modelo, el tiempo de vigencia de la opción puede dividirse en $n = 1, \ldots, N$ etapas, el modelo más simple, es el modelo binomial de un periodo, que supone que el tiempo de vigencia se divide en dos instantes de tiempo: $t_0 = 0$ y $t_n = T$.

Por supuesto que el modelo binomial de un periodo no es adecuado para modelar la evolución del precio del bien subyacente en el mercado, sin embargo, ayuda en la construcción del modelo binomial de n periodos.

Por otra parte, en el modelo binomial los precios del bien subyacente se modelan siguiendo el supuesto binomial, el cual dicta lo siguiente.

Suposición 3.1.1. El precio del bien subyacente evoluciona siguiendo un proceso binomial multiplicativo.

La Suposición 3.1.1 implica lo siguiente: si S es el precio del bien subyacente en la fecha actual, entonces, al final de cada periodo el precio del bien subyacente puede tener sólo dos posibles valores: uno cuando el precio está al alza y otro cuando el precio está a la baja, con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Además, después de n etapas de tiempo, el precio del bien subyacente tendra 2^n posibles valores.

Convencionalmente, se supone que todas las etapas en las que se divide el intervalo $[0, T]$ tienen la misma longitud, de tal forma que cada instante de tiempo, está dado por $t_i = \frac{iT}{n}$ para toda $i = 0, 1, ..., n$.

Además, del supuesto binomial y el de ausencia de arbitraje, se tomarán en cuenta las siguientes supocisiones.

Suposición 3.1.2. Supuestos para el modelo binomial

a) No existen costos de transacción y/o impuestos.

b) Se puede prestar y pedir prestado a la tasa de interés libre de riesgo.

c) Todos los activos son divisibles.

d) La tasa de interés libre de riesgo es positiva.

e) Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea sin afectar los precios en el mercado.

f) Se puede vender el bien subyacente sin poseerlo previamente, con el compromiso de entrega en una fecha posterior.

3.1.2. Valor de continuación

El método binomial resuelve el problema de valuación de opciones americanas usando la ecuación recursiva (2.2.1).

Como se menciona en el capítulo anterior, el principal problema para aplicar esta ecuación se debe al cálculo de la esperanza condicional en el valor de continuación, sin embargo, se ha visto que este valor también satisface la ecuación recursiva de programación dinámica. Por lo tanto, podemos resolver este problema con esta misma metodología.

En esta sección, se deduce la ecuación funcional de programación dinámica para el valor de continuación en el caso particular del método binomial.

Recordemos que un supuesto en el método binomial es la ausencia de arbitraje, por tanto, estamos suponiendo que el mercado es viable, y aún más, el mercado será completo, ésto se va a demostrar más adelante, por lo tanto, debe existir un portafolio de estrategia admisible ξ que cubre al derivado.

Por otro lado, el valor de continuación es, por definición, el valor asignado por mantener la opción en lugar de ejercerla, como se explicó en el capítulo anterior, este valor será igual a la cantidad de dinero necesaria al tiempo n para generar la cantidad f_N al tiempo N.

Por lo tanto, el valor de continuación, es el valor al tiempo n del portafolio de estrategia admisible que cubre al derivado.

Ecuación funcional de programación dinámica

Note que en cada etapa n, cualquier asignación del portafolio producirá una función de utilidad en dicha etapa, y la asignación óptima producirá la recompensa óptima o ganancia.

Sean,

- $Z_x(n)$ la ganancia en la etapa n en el estado x;
- $U(Z^{\xi}(n))$ la función de utilidad en la etapa n al aplicar la estrategia ξ;
- $\xi^* = \{\xi_1^*, \xi_2^*, ..., \xi_n^*\}$ la estrategia óptima en el periodo $[0, n]$;
- ξ_i^* la estrategia óptima en el periodo $[i-1, i]$.

Entonces, la función objetivo en la etapa n es

$$V(x,n) = \sup_{\xi} E\left(U\left(Z^{\xi}(n+1)\right) | Z_x(n)\right), \tag{3.1.1}$$

sujeto a

$$Z_x(n) = \sup_{\xi_{n+1}} U\left(Z^{\xi_{n+1}}(n)\right). \tag{3.1.2}$$

El supremo se toma sobre las estrategias ξ_{n+1} en el periodo $[n, n+1]$.

Sea $Z(n)$ el valor máximo de la ganancia en la etapa n, de tal forma que,

$$V(x,n) = \sup_{\xi_{n+1}} E\left(U\left(Z^{\xi_{n+1}}(n)\right)|Z(n)\right). \tag{3.1.3}$$

Entonces, el principio de programación dinámica se expresa mediante la ecuación funcional siguiente

$$V(x,n) = \sup_{\xi_{n+1}} E\left(V\left(Z^{\xi_{n+1}}(n+1), n+1\right)|Z(n)\right). \tag{3.1.4}$$

Note que

$$V(Z^{\xi_{n+1}}(n+1), n+1) = \sup_{\xi_{n+1}} E[U(Z_{n+1}^{\xi_{n+1}})],$$

es decir, la utilidad máxima en la etapa $n+1$ es igual al supremo sobre todas las decisiones factibles de la esperanza de la función de utilidad en la etapa $n+1$.

Por tanto, la utilidad máxima en la etapa n es

$$V_n = \sup_{\xi_{n+1}} E\left(\sup_{\xi_{n+1}} E\left(U(Z_{n+1}^{\xi_{n+1}})\right) \mid Z_n\right), \tag{3.1.5}$$

donde Z_n es la riqueza en la etapa n.

Solución de la ecuación funcional de programación dinámica

Para conocer cual es el valor de continuación de una opción americana en el método binomial, es necesario establecer por medio de la ecuación funcional, una ecuación de recurrencia que nos dé un algoritmo para resolver este problema. En esta sección se deducirá tal ecuación recursiva.

Supongamos el caso de una opción americana de compra, cuya vigencia se divide en $n = 1, \ldots, N$ etapas, este modelo se conoce como método binomial de n periodos.

El objetivo es encontrar un portafolio de estrategia $\{\xi_n : n = 0, 1 \ldots, N\}$, tal que cubra a la opción, donde $\xi_n = (\xi_n^0, \xi_n^1)$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N$.

ξ_n^0 es la cantidad de activo sin riesgo asignada al portafolio en el instante t_n, $n = 1, 2, \ldots, N$.

ξ_n^1 es la cantidad de activo con riesgo asignada al portafolio en el instante t_n, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Sean

- (n, j) el nodo que representa la etapa $n = 1, 2, \ldots, N$, en el estado $j = 0, 1, ..., n$.
- $S(n, j)$ el precio del bien subyacente en el nodo (n, j).
- $B(n, j)$ el precio del activo sin riesgo en el nodo (n, j).
- $C(n, j)$ el valor de continuación en el nodo (n, j).
- $A_c(n, j)$ el valor de la opción americana de compra en el nodo (n, j).

De acuerdo al supuesto binomial, durante el transcurso de cada periodo el precio del subyacente puede moverse de distintas maneras, pero al finalizar cada etapa aumentará un factor u con probabilidad p ó disminuirá un factor d con probabilidad $q = 1 - p$.

Por lo tanto, el precio del bien subyacente en el nodo (n, j) se modela de acuerdo a la siguiente expresión

$$S(n, j) = Su^j d^{n-j} \tag{3.1.6}$$

$n = 1, 2, ..., N$, $j = 0, 1, ..., n$.

t_0	t_1	$\cdots$		t_{N-1}	t_N
					Su^N
				Su^{N-1}	
			$\iddots$		$Su^{N-1}d$
		Su^2			
	Su			$\cdot$	$\cdot$
S		Sud		$\cdot$	$\cdot$
	Sd			$\cdot$	$\cdot$
		Sd^2			
			$\ddots$		Sud^N
				Sd^{N-1}	
					Sd^N

Cuadro 3.1: Evolución del bien subyacente en el tiempo.

Por otro lado, suponemos que en el instante inicial $t_0 = 0$, el activo sin riesgo tiene valor 1 y gana la tasa de interés libre de riesgo $r \geq 0$.

La evolución del activo sin riesgo se da de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} \text{En } \ t_1 & B(1,0) = B(1,1) = 1 + r := r_1 \\ \text{En } \ t_2 & B(2,0) = B(2,1) = B(2,2) = (1+r)^2 := r_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \text{En } \ t_N & B(N,0) = \cdots = B(N,N) = (1+r)^N := r_N \end{array} \tag{3.1.7}$$

Antes de empezar a calcular el valor de continuación, note que, en la fecha de vencimiento éste valdrá cero, pues no tiene sentido asignarle algún otro valor puesto que no habrá una etapa siguiente, esta condición se encuentra ya escrita en (2.2.9).

Por lo tanto, $C(N, i) = 0$ para toda $i = 0, \ldots, N$.

Se desea que el portafolio de estrategia cubra a la opción, además se requiere que éste sea libre de riesgo, es decir, que gane la tasa de interés libre de riesgo, para ello se necesita que sin importar que el precio del subyacente aumente o disminuya, el valor del portafolio sea siempre el mismo.

Supongamos que en la etapa n el precio del bien subyacente es $S(n, j)$, para algún $j = 0, 1, \ldots, n$, fijo. Aplicando (1.1.2) y la Definición 1.1.8 se debe cumplir que

$$\xi^1_{n+1} S(n+1, j+1) + \xi^0_{n+1} r_{n+1} = A_c(n+1, j+1), \tag{3.1.8}$$

$$\xi^1_{n+1} S(n+1, j) + \xi^0_{n+1} r_{n+1} = A_c(n+1, j), \tag{3.1.9}$$

luego,

$$\begin{array}{c} \dfrac{A_c(n+1, j+1) - \xi^1_{n+1} S(n+1, j+1)}{r_{n+1}} \\ = \\ \dfrac{A_c(n+1, j) - \xi^1_{n+1} S(n+1, j)}{r_{n+1}}. \end{array} \tag{3.1.10}$$

Por lo tanto,

$$\xi^1_{n+1} = \frac{A_c(n+1, j+1) - A_c(n+1, j)}{S(n+1, j+1) - S(n+1, j)}. \tag{3.1.11}$$

Aplicando la ecuación funcional de programación dinámica se tiene que

$$V(x,n)=\sup_{\xi_{n+1}} E\Big(V(\Big(Z^{\xi_{n+1}}(n+1),n+1\Big)\,|Z(n)\Big). \tag{3.1.12}$$

Por (3.1.5), la utilidad máxima en la etapa n en el estado j es

$$V_n^j=\sup_{\xi_{n+1}} E\left(\sup_{\xi_{n+1}} E\left(U(Z_{n+1}^{\xi_{n+1}})\right)\mid Z_n\right). \tag{3.1.13}$$

Donde, Z_n es la riqueza en el estado n.

Tomando para cada $n=1,\ldots,N$, la función de utilidad en la etapa n al aplicar la estrategia ξ_n y la riqueza en el periodo n, de la siguiente forma:

1. $U(Z^{\xi_n}(n))=[A_c(n)-\xi_n S(n)]r_n^{-1}$;
2. $Z_n=V_n-\xi_{n+1}^1 S(n)$,

se tiene que

$$\begin{aligned}
V_n^j&=\sup_{\xi_{n+1}} E\left(\sup_{\xi_{n+1}} E\left(U\left(Z_{n+1}^{\xi_{n+1}}\right)\right)\Big|Z_n\right)\\
&=\sup_{\xi_{n+1}} E\left(\sup_{\xi_{n+1}}\left\{p\left[\frac{A_c(n+1,j+1)-\xi_{n+1}^1 S(n+1,j+1)}{r_{n+1}}\right]\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+q\left[\frac{A_c(n+1,j)-\xi_{n+1}^1 S(n+1,j)}{r_{n+1}}\right]\right\}\Big|Z_n\right)\\
&=\sup_{\xi_{n+1}} E\left(\frac{1}{r_{n+1}}\left[\left(\frac{S(n+1,j+1)A_c(n+1,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)}\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\left(\frac{S(n+1,j)A_c(n+1,j+1)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)}\right)\right]\Big|Z_n=V_n-\xi_{n+1}^1 S(n,j)\right).
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Note que

$$\frac{S(n+1,j+1)A_c(n+1,j)-S(n+1,j)A_c(n+1,j+1)}{r_{n+1}\big[S(n+1,j+1)-S(n+1,j)\big]}=\xi_{n+1}^0, \tag{3.1.15}$$

y

$$\xi_{n+1}^0=V_n-\xi_{n+1}^1 S(n,j), \tag{3.1.16}$$

entonces,

$$V_n^j = \sup_{\xi_{n+1}} E(\xi_{n+1}^0) = \sup_{\xi_{n+1}} \xi_{n+1}^0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
V_n^j &= \sup_{\xi_{n+1}} \left(\frac{1}{r_{n+1}} \left[\frac{S(n+1,j+1)A_c(n+1,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} \right.\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{S(n+1,j)A_c(n+1,j+1)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} \right] + \xi_{n+1}^1 S(n,j) \right)\\
&= \frac{S(n+1,j+1)A_c(n+1,j) - S(n+1,j)A_c(n+1,j+1)}{r_{n+1}\Big[S(n+1,j+1)-S(n+1,j)\Big]}\\
&\quad + \frac{A_c(n+1,j+1)-A_c(n+1,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} S(n,j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r_{n+1}} \left[A_c(n+1,j+1) \left(\frac{r_{n+1}S(n,j)-S(n+1,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} \right) \right.\\
&\quad \left. + A_c(n+1,j) \left(\frac{S(n+1,j+1)-r_{n+1}S(n,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Note que en (3.1.17), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{r_{n+1}S(n,j)-S(n+1,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} &= \frac{r_{n+1}Su^jd^{n-j} - Su^jd^{n+1-j}}{Su^{j+1}d^{n-j} - Su^jd^{n+1-j}}\\
&= \frac{Su^jd^{n-j}(r_{n+1}-d)}{Su^jd^{n-j}(u-d)}\\
&= \frac{r_{n+1}-d}{u-d} =: p_n^* \qquad (3.1.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{S(n+1,j+1)-r_{n+1}S(n,j)}{S(n+1,j+1)-S(n+1,j)} &= \frac{Su^{j+1}d^{n-j} - r_{n+1}Su^jd^{n-j}}{Su^{j+1}d^{n-j} - Su^jd^{n+1-j}}\\
&= \frac{Su^jd^{n-j}(u-r_{n+1})}{Su^jd^{n-j}(u-d)}\\
&= \frac{u-r_{n+1}}{u-d} =: q_n^* \qquad (3.1.19)
\end{aligned}$$

Además, el valor de la opción americana en la etapa siguiente, es la utilidad máxima en la etapa $n+1$, de acuerdo a la fórmula recursiva

(2.2.1).

Así que, $A_c(n+1, j+1) = V_{n+1}^{j+1}$ y $A_c(n+1, j) = V_{n+1}^{j}$.

Por lo tanto,

$$V_n^j = \frac{1}{r_{n+1}} \left(p_n^* V_{n+1}^{j+1} + q_n^* V_{n+1}^{j} \right). \tag{3.1.20}$$

- p_n^* y q_n^* son las probabilidades libres de riesgo provenientes de la única medida de probabilidad neutral al riesgo que admite el mercado, en la siguiente sección se probará este hecho.
- $\dfrac{1}{r_{n+1}}$ es el factor de descuento, en este caso cumple con ser una función determinista, pues puede verse como una función constante, más adelante se especificará claramente quien será este descuento.

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V_n^j &= \frac{1}{r_{n+1}} \left(p_n^* V_{n+1}^{j+1} + q_n^* V_{n+1}^{j} \right) \\ &= \mathbb{E}^* \Big(D_{n,n+1} V_{n+1}(j) \Big) = C(n, j), \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

para $j = 0, 1, \ldots, n$ y $n = 1, \ldots, N$.

3.1.3. Fórmula para valuar opciones americanas

En esta sección se dará la fórmula explícita para valuar opciones americanas mediante el método binomial.

En la sección anterior se halló el valor de continuación (3.1.21), pero aún falta aclarar dos puntos importantes que aparecen en esta ecuación: las probabilidades neutrales al riesgo y el factor de descuento. Las siguientes dos secciones están dedicadas a estudiar estos temas.

En la penúltima sección se especifica la fórmula de valuación de opciones americanas, y finalmente, en la última sección se resuelven algunos ejemplos numéricos.

Probabilidades neutrales al riesgo

Al considerar el modelo binomial con $N+1$ instantes de tiempo y $d = 1$ activo con riesgo, se tiene por (3.1.7) que el activo sin riesgo evoluciona de la siguiente forma

$$\xi_t^0 = \xi_0(1+r)^t, \quad t = 0, 1, \ldots, N.$$

Sea R_t el rendimiento del activo con riesgo, definido como a continuación:

$$R_t := \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, \quad t = 1, \ldots, N.$$

Este rendimiento es aleatorio y puede tomar solo dos posibles valores en cada instante de tiempo, es decir

$$R_t \in \{u, d\}, \quad t = 1, \ldots, N.$$

Por lo tanto, la evolución de S_{t-1} a S_t es aleatoria y está dada por

$$S_t = \begin{cases} (1+d)S_{t-1} & \text{si} \quad R_t = d, \\ \\ (1+u)S_{t-1} & \text{si} \quad R_t = u. \end{cases}$$

El siguiente teorema prueba que si p_n^* y q_n^* son definidas como en (3.1.18) y (3.1.19) respectivamente, entonces, no existe arbitraje en el mercado, además si $d < r < u$, se tiene que estas probabilidades neutrales al riesgo son únicas.

Teorema 3.1.1. *Hay ausencia de arbitraje en el modelo binomial si y sólo si $d < r < u$, además si esto sucede, el mercado es completo.*

Demostración: Según el Teorema 1.1.5, se debe hallar una medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{P}^*$. De acuerdo a la definición de medida neutral al riesgo, $\mathbb{P}^*$ deberá satisfacer (1.1.6), es decir,

$$\mathbb{E}^*[S_{t+1}^i|\mathcal{F}_t] = (1+r)S_t^i, \quad t = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Podemos reescribir esta esperanza condicional como sigue:

$$\mathbb{E}^*[S_{t+1}^i|\mathcal{F}_t] = (1+u)S_t\mathbb{P}^*(R_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) + (1+d)S_t\mathbb{P}^*(R_{t+1} = d|\mathcal{F}_t).$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}^*$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} (1+u)S_t\mathbb{P}^*(R_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) + (1+d)S_t\mathbb{P}^*(R_{t+1} = d|\mathcal{F}_t) = (1+r)S_t, \\ \\ \mathbb{P}^*(R_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) + \mathbb{P}^*(R_{t+1} = d|\mathcal{F}_t) = 1, \end{cases}$$

o bien,

$$\begin{cases} u\mathbb{P}^*(R_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) + d\mathbb{P}^*(R_{t+1} = d|\mathcal{F}_t) = r, \\ \\ \mathbb{P}^*(R_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) + \mathbb{P}^*(R_{t+1} = d|\mathcal{F}_t) = 1. \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\mathbb{P}^*(R_{t+1} = u|\mathcal{F}_t) = \frac{r-d}{u-d}, \tag{3.1.22}$$

y

$$\mathbb{P}^*(R_{t+1} = d|\mathcal{F}_t) = \frac{u-r}{u-d}. \tag{3.1.23}$$

Por lo tanto, si $r-d > 0$ y $u-r > 0$, se tiene que las probabilidades (3.1.22) y (3.1.23) son distintas de cero, y la medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ es no singular. En este caso, la solución $\mathbb{P}^*$ del problema es única y por (1.1.6), el mercado será completo. $\square$

Note, que (3.1.22) y (3.1.23) no son valores aleatorios, y por tanto, son independientes de la información contenida en $\mathcal{F}_t$. Como consecuencia de este hecho, bajo $\mathbb{P}^*$, R_{t+1} es independiente de $\mathcal{F}_t$ para todo $t = 1, \ldots, N-1$.

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}^*(R_{t+1} = u) = \frac{r-d}{u-d}, \tag{3.1.24}$$

y

$$\mathbb{P}^*(R_{t+1} = d) = \frac{u-r}{u-d}. \tag{3.1.25}$$

De esta forma, queda claro que, (3.1.18) y (3.1.19) son las probabilidades neutrales al riesgo requeridas.

A continuación se estudiará el factor de descuento.

Factor de descuento

En la ecuación (3.1.7) puede verse que en el instante de tiempo t_N, el valor del activo no riesgoso es de $(1+r)^N$.

Una idea fundamental en el método binomial consiste en dividir el tiempo de vigencia de la opción en $n = 1, \ldots, N$; etapas de igual longitud $\delta = \frac{1}{n}$, para un n suficientemente grande. Sin embargo, notemos que:

$$\lim_{N\to\infty} (1+r)^N = \infty.$$

Por lo tanto se necesita normalizar r para que la tasa de interés $\widehat{r}_N$ en cada intervalo de tiempo sea tal que $\lim\limits_{N\to\infty} \widehat{r}_N = 0$.

Esto se obtiene de la siguiente forma,

$$\widehat{r}_N = r\frac{\delta T}{N}. \tag{3.1.26}$$

De modo que,

$$\lim_{N\to\infty}(1+\widehat{r}_N)^N = e^{r\delta T}, \quad T\in\mathbb{R}^+. \tag{3.1.27}$$

Por lo tanto, el factor de descuento que se utilizará será el calculado en (3.1.27).

De esta forma, el precio del activo con riesgo satisface lo siguiente

$$\xi_t^0 = \xi_0 e^{rt},$$

que es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\xi_t^0}{dt} = r\xi_t^0.$$

Es decir,

$$\frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} = rdt. \tag{3.1.28}$$

La ecuación (3.1.28) significa que el rendimiento del activo sin riesgo es rdt en el pequeño intervalo de tiempo $[t, t+dt]$. Se dice que r es el interés instantáneo por unidad de tiempo.

Valuación de opciones americanas sobre acciones que no pagan dividendos.

Supusimos desde el inicio, una opción americana de compra sobre una acción que no reparte dividendos, cuyo precio al inicio del contrato es S, precio de liquidación K y tiempo de vigencia T.

Entonces, de acuerdo a la fórmula recursiva de programación dinámica dada por (2.2.1), el valor para el factor de descuento expresado en (3.1.27) y las probabilidades libres de riesgo dadas por (3.1.18) y (3.1.19), el precio de una opción americana de compra puede hallarse calculando de forma recursiva el valor de la opción al término de cada periodo y analizando el ejercicio anticipado en cada estado, mediante la siguiente fórmula:

$$A_c(n,j) = \begin{cases} \max\left\{\Big(S(n,j)-K\Big)^+, V_n^j\right\} & \text{si} \quad n=0,1,\ldots,N-1, \\ \\ \Big(S(N,j)-K\Big)^+ & \text{si} \quad n=N, \end{cases} \tag{3.1.29}$$

para todo $j=0,1\ldots,n$,

donde

$$V_n^j = \frac{1}{e^{r\delta T}}\Big[p^* V_{n+1}^{j+1} + q^* V_{n+1}^{j}\Big], \tag{3.1.30}$$

$$p^* = \frac{e^{r\delta T} - d}{u - d}, \tag{3.1.31}$$

y

$$q^* = \frac{u - e^{r\delta T}}{u - d}. \tag{3.1.32}$$

Finalmente, aplicando una renormalización a u y d (véase [35]) similar a (3.1.26), obtenemos:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta T}}, \tag{3.1.33}$$

y

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}, \tag{3.1.34}$$

donde $\sigma > 0$ es la volatilidad histórica y $d < e^{r\delta T} < u$.

De manera análoga, si se tiene una opción americana de venta, sostenida sobre el mismo subyacente, precio de ejercicio y expiración, que la opción americana de compra anterior, la fórmula para valuarla será la siguiente

$$A_v(n,j) = \begin{cases} \max\Big\{\Big(K - S(n,j)\Big)^+, V_n^j\Big\} & \text{si} \quad n = 0, 1\ldots, N-1, \\ \\ \Big(K - S(N,j)\Big)^+ & \text{si} \quad n = N, \end{cases} \tag{3.1.35}$$

para todo $j = 0, 1\ldots, n$.

Todos los demás valores se calculan de igual forma que en la opción de compra.

Es conveniente mencionar que para el caso de opciones americanas de compra sobre acciones que no pagan dividendos, el ejercicio anticipado nunca es óptimo. Por lo tanto, una opción americana de compra sobre una acción que no paga dividendos vale lo mismo que su contraparte europea y entonces, puede valuarse de igual manera (véase [30], página 264).

En el caso de opciones americanas de venta sobre acciones que no pagan dividendos, puede suceder que el ejercicio anticipado sea óptimo. Por lo tanto, puede usarse la fórmula (3.1.35) para calcular el valor de la opción y los posibles momentos óptimos de ejercicio.

Cuando la acción de compra americana sobre la cual se basa la opción, reparte dividendos, el ejercicio anticipado puede ser óptimo.

Para este tipo de acciones, el método binomial puede ser utilizado realizándole una ligera modificación. En la siguiente sección se explica esto.

Valuación de opciones americanas sobre acciones que pagan dividendos

Supongamos que la acción sobre la que se sostiene la opción paga un dividendo continuo, y que la tasa de dividendo β (el dividendo como porcentaje de la acción) es conocida, entonces, si al tiempo n, $\frac{T}{N}$ se encuentra antes de la fecha del pago del dividendo, los nodos correspondientes al precio de la acción se modelarán de acuerdo a (3.1.6), es decir:

$$S(n,j) = Su^j d^{n-j},$$

$n = 1, 2, ..., N$, $j = 0, 1, ..., n$, con u y d como en (3.1.33) y (3.1.34), respectivamente.

Si al tiempo n, $\frac{T}{N}$ se encuentra después de la fecha del pago del dividendo, los nodos correspondientes al precio de la acción se modelarán de acuerdo a

$$S(n,j) = S(1-\beta)u^j d^{n-j} \tag{3.1.36}$$

$n = 1, 2, ..., N$, $j = 0, 1, ..., n$, con u y d como en (3.1.33) y (3.1.34), respectivamente.

La siguiente figura muestra la evolución del precio de la acción.

t_0	t_1	t_β	$\cdots$	t_{N-1}	t_N
					$S(1-\beta)u^N$
				$S(1-\beta)u^{N-1}$	
			$\iddots$		$S(1-\beta)u^{N-1}d$
		$S(1-\beta)u^2$			
	Su			$\cdot$	$\cdot$
S		$S(1-\beta)ud$		$\cdot$	$\cdot$
	Sd			$\cdot$	$\cdot$
		$S(1-\beta)d^2$			
			$\ddots$		$S(1-\beta)ud^N$
				$S(1-\beta)d^{N-1}$	
					$S(1-\beta)d^N$

Cuadro 3.2: Evolución del precio de la acción que paga una tasa del dividendo β al tiempo t_β.

Después de obtener el árbol que modela la evolución del precio de la acción, se sigue el mismo procedimiento para el caso en que la acción no paga dividendos, y se calcula el precio de la opción americana de compra o venta de acuerdo a (3.1.29) y (3.1.35) respectivamente, usando los precios de la acción del Cuadro 3.2.

Cuando existen en distintas fechas n, varios pagos de dividendos conocidos, con tasa β_n, se puede proceder de manera similar. Al tiempo n, los nodos correspondientes al precio de la acción se modelarán de acuerdo a

$$S(n,j) = S(1-\beta_n)u^j d^{n-j} \tag{3.1.37}$$

$n = 1, 2, ..., N$, $j = 0, 1, ..., n$, con u y d como en (3.1.33) y (3.1.34).

3.1.4. Ilustración del método binomial

Ejemplo 3.1.2. ***Valuación de una opción americana de venta sobre una acción que no reparte dividendos***

El primer ejemplo de esta sección, consiste en valuar una opción americana de venta sobre una acción de la empresa mexicana Grupo Bimbo

S.A.B. DE C.V., supongamos que esta acción no paga dividendos.

La opción es emitida el día 18 de agosto de 2011, en este día el precio de cierre de la acción fue de 24.55 unidades, este precio, así como los precios históricos fueron consultados en el sitio de internet http://mx.finance.yahoo.com/.

Supongamos que la vigencia de la opción es de 1 año y que se dividirá en tres etapas, es decir, el periodo de cada etapa durará 4 meses.

La tasa de interés libre de riesgo nacional, basada en el CETES 175 es del 4.39 %, y el precio de liquidación será de 25 unidades.

La volatilidad histórica se calcula de acuerdo al Apéndice A, para ello se observan los precios históricos diarios de la acción a 180 días, a partir de la fecha de emisión del contrato, además, en (A.0.8) se toma $t = 252$*, pues en un año es el número de días que trabajan los mercados.*

Los valores de u, d y las probabilidades neutrales al riesgo se calculan usando (3.1.33), (3.1.34), (3.1.31) y (3.1.32), respectivamente.

La siguiente tabla muestra los valores de los datos mencionados hasta ahora.

Parámetro	Valor
S	24.55
T	1
δ	$\frac{1}{3}$
r	0.0439
σ	3.27
K	25
u	6.620
d	0.152
p^*	0.133
q^*	0.866

Cuadro 3.3: Parámetros de entrada para el problema de valuación de una opción americana de venta.

Note que se cumple $\sigma > 0$ *y* $d < e^{r\delta T} < u$*.*

Solución

El precio de la acción se modela de acuerdo a (3.1.6) y genera el siguiente árbol.

t_0	t_1	t_2	t_3
			7125.58
		1076.21	
	162.545		162.545
24.55		24.55	
	3.707		3.707
		0.560	
			0.084

Cuadro 3.4: Evolución del precio subyacente en el tiempo.

De acuerdo a la ecuación recursiva de programación dinámica (3.1.35), los valores de la opción en la frontera estarán dados por:

$$A_v(3,i) = \Big(K - S(3,i)\Big)^+ \quad i = 0,1,2,3.$$

Por lo tanto,

Estado	Valor de la opción	V_3^i
i = 0	$A_v(3,0) = 24.9154$	$V_3^0 = 24.9154$
i = 1	$A_v(3,1) = 21.2921$	$V_3^1 = 21.2921$
i = 2	$A_v(3,2) = 0$	$V_3^2 = 0$
i = 3	$A_v(3,3) = 0$	$V_3^3 = 0$

Cuadro 3.5: Valores de la opción en los posibles estados de la frontera.

Nuevamente, aplicando (3.1.35) para calcular el valor de la opción en las etapas intermedias, se tiene que

$$A_v(n,j) = \max\left\{\Big(K - S(n,j)\Big)^+, V_n^j\right\} \;\; n = 0,1,2. \;\; i = 0,\ldots,n.$$

Las siguientes tablas muestran los valores de la opción en cada etapa y estados respectivos, también indica si pudiera ser óptimo el ejercicio *anticipado o no.*

Etapa 2	(n = 2)			
Estado	V_2^i	$(K - S(2,1))^+$	$A_v(2,i)$	Ejercer ahora
i = 0	24.06	24.44	24.44	sí
i = 1	18.181	0.45	18.181	no
i = 2	0	0	0	no

Cuadro 3.6: Valores de la opción americana de venta en la etapa 2.

Etapa 1	(n = 1)			
Estado	V_1^i	$(K - S(1,1))^+$	$A_v(1,i)$	Ejercer ahora
i = 0	23.26	21.29	23.26	no
i = 1	15.52	0	15.52	no

Cuadro 3.7: Valores de la opción americana de venta en la etapa 1.

Etapa 0	(n = 0)			
Estado	V_0	$(K - S)^+$	$A_v(0,0)$	Ejercer ahora
i = 0	21.906	0.45	21.906	no

Cuadro 3.8: Valores de la opción americana de venta al inicio del contrato.

El árbol que contiene los precios de la opción en cada nodo es el siguiente

t_0	t_1	t_2	t_3
			0
		0	
	15.52		0
$V_0 = 21.906$		18.181	
	23.26		21.292
		24.44*	
			24.915

Cuadro 3.9: Precios de la opción americana de venta en cada posible estado.

Note que el ejercicio óptimo se da en el estado $(2, 0)$*, es decir, se requiere que el precio del bien subyacente siempre esté a la baja.*

Puesto que una opción americana tiene más posibilidades de ejercicio que una opción europea, entonces, la opción americana debe valer al menos lo que su contraparte europea. Para ilustrar esta situación, en el siguiente ejemplo valuaremos la opción europea correspondiente a los datos de la opción del ejemplo anterior.

Las opciones europeas solo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento, por lo que no es necesario ir revisando el ejercicio anticipado en cada estado, sin embargo, como en el caso americano, la ecuación recursiva de programación dinámica también es útil para valuar opciones europeas.

Ejemplo 3.1.3. ***Valuación de una opción europea de venta sobre una acción que no reparte dividendos***
La opción europea de venta que se valuará en este ejemplo, es la contraparte de la opción del ejemplo anterior, esto significa que todos los parámetros de entrada serán los mismo para ambas.

Solución

El precio de la acción se modela de la misma forma y da como resultado el mismo árbol binomial mostrado en el Cuadro 3.4.

Para calcular el valor de la opción, se utiliza nuevamente la ecuación recursiva (2.2.1) con una ligera modificación de la ecuación recursiva (3.1.35), como en este caso no hay necesidad de calcular la fecha de ejercicio óptimo, bastará con encontrar en las etapas intermedias el valor de V_n^i, para cada $n = 0, 1, \ldots, N$, $i = 0, 1, \ldots, n$, mediante la relación (3.1.30), hasta llegar a V_0, que es el valor de la prima de la opción.

Los valores en la frontera se calculan igual que en el caso americano, estos se muestran en el Cuadro 3.5.

El siguiente árbol muestra los valores de V_n^i, para cada $n = 2, 1, 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, la prima de la opción corresponde al valor V_0.

t_0	t_1	t_2	t_3
			0
		0	
	15.52		0
$V_0 = 21.613$		18.181	
	22.928		21.292
		24.06	
			24.915

Cuadro 3.10: Valores de V_n^i, para cada $n = 2, 1, 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, para la opción europea de venta.

Si comparamos el Cuadro 3.10 con el Cuadro 3.9, podremos ver que los precios de la opción americana en cada posible estado son mayores o iguales que los de su contraparte europea. $\square$

Puesto que el método binomial para el caso americano y europeo se aproxima bien al precio de la opción cuando el número de etapas en que se divide la vigencia tiende a infinito (véase [1] y [14]), es deseable recurrir a un algoritmo computacional para realizar los mismo cálculos que los mostrados en estos ejemplos, con la diferencia de que el número de etapas se tomará tan grande como se desee.

El algoritmo implementado se realizó en Mathematica 6 y se puede ver en el Capítulo 4, así como su uso en la valuación de opciones americanas sobre acciones de una empresa mexicana.

El método binomial se utiliza con frecuencia para la valuación de opciones europeas y americanas, pues es fácil de implementar y la convergencia se cumple en ambos casos, sin embargo, para el caso de opciones sobre múltiples variables de estado, tales como opciones canasta u opciones sobre el máximo o el mínimo, los costos computacionales de los métodos tradicionales de rejilla crecen exponencialmente, haciendo que dichos métodos funcionen sólo para opciones sobre una cantidad pequeña de activos subyacentes.

En la siguiente sección se estudiará e implementará un método que se basa también en la ecuación recursiva de programación dinámica, este método es muy efectivo para opciones basadas en múltiples activos subyacentes y utiliza un valor de continuación distinto al que utiliza el método binomial.

3.2. Modelo del árbol aleatorio

El método presentado en esta sección recae nuevamente en la ecuación recursiva de programación dinámica (2.2.1), este método es efectivo para opciones basadas en múltiples activos subyacentes.

Este algoritmo fue desarrollado por Broadie y Glasserman [12], y es denominado método del árbol aleatorio, dicho algoritmo busca resolver el problema de paro óptimo y estimar el valor real de la opción americana. Además de programación dinámica utiliza simulación Monte Carlo [22].

Dicho algoritmo ha sido considerado a lo largo del tiempo como un método incompatible con la valuación de opciones americanas, pues los procedimientos de simulación estándar simulan hacia adelante en el tiempo trayectorias de las variables de estado, sin embargo, al valuar opciones americanas se tiene la necesidad de estimar la fecha de ejercicio óptimo y para hacerlo se requiere de programación dinámica, por lo tanto, el problema de usar simulación para opciones americanas se debe a la dificultad de aplicar un procedimiento que va hacia adelante en el tiempo a un problema que requiere un procedimiento hacia atrás en el tiempo para encontrar su solución.

En este sentido, el método del árbol aleatorio funciona muy bien porque conjunta ambas metodologías, la idea consiste en usar simulación Monte Carlo para simular árboles de ramificación de las variables de estado, y posteriormente mediante programación dinámica calcular la estrategia óptima de ejercicio para resolver el problema de valuación de opciones americanas.

El algoritmo calcula dos estimadores, uno con sesgo alto y el otro con sesgo bajo, ambos asintóticamente insesgados y convergentes al precio real de la opción, combinando estos estimadores se obtiene un intervalo de confianza para el precio real de la opción.

La principal desventaja de este algoritmo radica en que el tiempo computacional aumenta con el número de oportunidades de ejercicio, por tanto, el método es eficiente cuando se tienen pocas oportunidades de ejercicio, a este tipo de opciones también se les conoce como opciones bermuda, las cuales son un caso particular de las opciones americanas, pero a lo largo de la sección las referiremos como opciones americanas.

3.2.1. Valuación neutral al riesgo

Un supuesto importante en la valuación de opciones, como se ha visto, es el de ausencia de arbitraje, este supuesto implica la existencia de un factor de descuento, mismo que se refleja en la expresión (1.1.15), la cual presenta el precio de una opción como la esperanza de la función de pago en la fecha de vencimiento, descontada a la tasa de interés libre de riesgo a través del factor de descuento.

Esta esperanza está tomada con respecto a la medida de probabilidad neutral al riesgo, por lo tanto, estimar esta esperanza mediante simulación Monte Carlo, implica simular bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo.

Para encontrar esta medida, partimos del supuesto de que los precios del bien subyacente S siguen un movimiento Browniano geométrico, es decir,

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \delta)dt + \sigma dW_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.2.1}$$

donde μ, δ y σ son constantes que representan el rendimiento esperado del activo, la tasa del dividendo y la volatilidad, respectivamente. El proceso $\{W_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ es un moviento Browniano estándar.

Este supuesto se debe a que se trabajará en un contexto de Black-Scholes-Merton formalizado en [33].

La expresión (3.2.1) puede reescribirse de la siguiente forma,

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta)dt + \sigma\left(\frac{(\mu - \delta) - (r - \delta)}{\sigma}dt + dW_t\right), \tag{3.2.2}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo.

Definiendo

$$\lambda = \frac{(\mu - \delta) - (r - \delta)}{\sigma} \tag{3.2.3}$$

y

$$W_t^* = \lambda t + W_t, \ \ t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.2.4}$$

podemos reescribir (3.2.2) como a continuación

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta)dt + \sigma dW_t^*. \tag{3.2.5}$$

Por lo tanto, la búsqueda de una medida de probabilidad neutral al riesgo puede reemplazarse por la búsqueda de una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ bajo la cual, $\{W_t^* : t \in \mathbb{R}^+\}$ sea un movimiento Browniano estándar.

Aplicando el Teorema de Girsanov [21] a (3.2.3), se obtiene el resultado deseado, es decir, (3.2.4) es un movimiento Browniano estándar bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ definida de la siguiente forma

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp\Big(- \lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\Big). \tag{3.2.6}$$

Por lo tanto, usando esta medida de probabilidad, podemos simular los precios de las opciones usando Monte Carlo sin la necesidad de estimar la tendencia del precio subyacente ni de modelar el factor de descuento, y obtener aún los mismos precios que en un mercado con ausencia de arbitraje.

A continuación, se dará la notación que será empleada a lo largo de la sección.

Notación

Para este método dividiremos el intervalo de vigencia de la opción en m etapas de igual longitud. Con esto tendremos un intervalo dividido en $d = m + 1$ instantes de tiempo: $t = t_0, t_1, \ldots, t_d$ con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d = T$, donde T es la fecha de vencimiento de la opción. Cada t_i indica el tiempo de la i-ésima oportunidad de ejercicio.

Haciendo un abuso de notación se indexará el tiempo con $t = 0, 1, \ldots, T$, entonces, la notación será la siguiente,

- $\{S_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ es una cadena de Markov (posiblemente vector-valuada) que registra las variables de estado.
- e^{-R_t} es el factor de descuento de $t-1$ a t, se supondrá que $R_t > 0$ para toda t y constante.
- $h_t(s)$ es el pago por el ejercicio al tiempo t en el estado s.
- $f_t(s)$ es el valor de la opción al tiempo t en el estado s.
- $g_t(s)$ es el valor de continuación de la opción al tiempo t en el estado s.

3.2.2. Árbol aleatorio

Un árbol aleatorio con b ramas por nodo es representado por el siguiente arreglo,

$$\{S_t^{i_1 \cdots i_t} : t = 0, 1, \ldots, T; \;\; i_j = 1, \ldots, b; \;\; j = 1, \ldots, t\}.$$

S_0 es el estado inicial fijo, y $S_{t+1}^{i_1 \cdots i_t j}$, $j = 1, \ldots, b$ son independientes condicionalmente entre ellos y de todos los $S_u^{i'_1 \cdots i'_u}$, con $u < t$ o $i'_t \neq i_t$, dado $S_t^{i_1 \cdots i_t}$.

Dado $S_t^{i_1 \cdots i_t}$, cada $S_{t+1}^{i_1 \cdots i_t j}$ tiene la distribución de S_t dado $S_{t-1} = S_{t-1}^{i_1 \cdots i_{t-1}}$.

Entonces, cada sucesión $S_0, S_1^{i_1}, S_2^{i_1 i_2}, \ldots, S_T^{i_1 \cdots i_T}$ es una realización de la cadena de Markov $\{S_t\}$, y dos sucesiones de esta forma evolucionan independientemente una de la otra, una vez que se diferencian en algún i_t.

Luego, bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo definida en (3.2.6), cada simulación de los movimientos del bien subyacente son generados mediante la cadena de Markov siguiente,

$$S_i = S_{i-1} \exp\left\{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}w_i\right\} \qquad (3.2.7)$$

donde, $\{w_i : i = 1, \ldots, T\}$ son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar.

Como su nombre lo indica el método del árbol aleatorio esta basado en la simulación de trayectorias de la cadena de Markov $S_0, S_1, \ldots, S_m$, que representa la evolución en el tiempo del bien subyacente, S_t representa el precio del subyacente en el tiempo $t \in T$.

Fijando el parámetro $b \geq 2$, el cual representa el número de ramas por nodo, para el estado inicial S_0 se simulan b estados sucesivos independientes: $S_1^1, \ldots, S_1^b$. Luego, para cada S_1^i, $i = 1, \ldots, b$ se simulan b estados sucesivos independientes: $S_2^{i1}, \ldots, S_2^{ib}$, y se continua procediendo de la misma forma. En la m-ésima etapa se tendrán b^m estados.

Sea $S_i^{j_1 j_2 \cdots j_i}$ un nodo genérico en el árbol al tiempo i, los superíndices indican que el nodo se alcanza tomando la j_1-ésima rama desde S_0, luego la j_2-ésima rama desde $S_1^{j_1}$, y así sucesivamente.

De este árbol aleatorio se definen los estimadores alto y bajo en cada nodo, mediante inducción hacia atrás, para ello se usa la ecuación recursiva de programación dinámica descrita en (2.2.1), finalmente, combinando estos dos estimadores, se obtiene un intervalo de confianza para el valor real de la opción.

En la siguiente sección se tratará más detalladamente el tema del intervalo de confianza.

3.2.3. Intervalo de confianza

En esta sección se explicará en que forma, combinando el estimador alto y bajo, es posible obtener un intervalo de confianza para el precio de la opción.

Sean, $\widehat{V}_n(b)$ y $\widehat{v}_n(b)$, las medias muestrales de n repeticiones independientes, para cada valor de un parámetro de simulación b.

Suponga que como estimadores de algún valor V_0, los estimadores anteriores tienen sesgo alto y bajo respectivamente, es decir,

$$E[\widehat{V}_n(b)] \geq V_0 \geq E[\widehat{v}_n(b)]. \tag{3.2.8}$$

Suponga que para algún $H_n(b)$

$$\widehat{V}_n(b) \pm H_n(b)$$

es un intervalo de confianza válido al 95 % para $E[\widehat{V}_n(b)]$, es decir, que el intervalo contiene estos puntos con una probabilidad del 95 %.

De manera similar, suponga que para algún $L_n(b)$

$$\widehat{v}_n(b) \pm L_n(b)$$

es un intervalo de confianza válido al 95 % para $E[\widehat{v}_n(b)]$.

Entonces, tomando el límite inferior del intervalo de confianza para el estimador bajo y el límite superior del intervalo de confianza para el estimador alto, podemos formar el intervalo

$$\left[\widehat{v}_n(b) - L_n(b), \widehat{V}_n(b) + H_n(b)\right] \tag{3.2.9}$$

que contiene el valor V_0 con probabilidad al menos del 90 %.

Por lo tanto, se puede producir un intervalo de confianza válido, mediante la combinación del estimador alto y bajo.

Para la aplicación de esta idea en el método del árbol aleatorio, las inecuaciones en (3.2.8) se vuelven igualdades cuando $b \to \infty$, además, cuando $n \to \infty$, $H_n(b)$ y $L_n(b)$ se aproximan a cero.

Así, el intervalo (3.2.9) se puede hacer disminuir a V_0 en el límite, cuando el esfuerzo computacional crece.

En las siguientes secciones se estudiarán los estimadores alto y bajo, así como sus propiedades.

3.2.4. Estimador alto

Sea $\Theta_t^{i_1,\ldots i_t}$ el valor del estimador alto en el estado $S_t^{i_1,\ldots i_t}$, entonces, este estimador se define de la siguiente forma,

$$\Theta_T^{i_1\cdots i_T} = h_T(S_T^{i_1\cdots i_T}), \tag{3.2.10}$$

y

$$\Theta_t^{i_1\cdots i_t j} = \max\left\{h_t(S_t^{i_1\cdots i_t}), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \exp\{-R_{t+1}^{i_1\cdots i_t j}\}\Theta_{t+1}^{i_1\cdots i_t j}\right\}, \tag{3.2.11}$$

para $t = 0, \ldots, T-1$.

Es decir, el estimador alto es el resultado de aplicar la ecuación de programación dinámica descrita en (2.2.1) al árbol aleatorio, con un valor de continuación distinto que el del método binomial, pues en este caso se asigna igual probabilidad a cada rama del árbol.

Propiedades del estimador alto

Este estimador cumple con dos propiedades importantes, es consistente y tiene sesgo alto, antes de demostrar estas dos propiedades, se enunciará y demostrará el siguiente lema, el cual es necesario para las otras dos demostraciones.

Puesto que los estimadores tanto alto como bajo dependen del número de ramas por nodo, se incluirá b como un parámetro. Se denotará $\overline{\Theta}_0$ a la media muestral de n repeticiones independientes de Θ_0.

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considere el espacio L_p, $(1 \le p \le \infty)$,

$$L_p = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ es variable aleatoria y } E(|X|^p) < \infty\}.$$

Una norma natural definida en este espacio, es la siguiente

$$\|X\| = (E(|X|^p))^{1/p},$$

conocida como norma L_p.

A lo largo de la sección se usará la norma condicionada, a la que llamaremos p-norma y denotaremos por $\|X\|_{S_t}$, es decir,

$$\|X\|_{S_t} = (E[|X|^p|S_t])^{1/p}.$$

El espacio L_p dotado de la p-norma cumple con las mismas propiedades básicas que se prueban cuando se dota el mismo espacio con la norma L_p, por ejemplo la propiedad de completitud.

Lema 3.2.1. *Si para todo t, $\|h_t(S_t)\| < \infty$ para $p \geq 1$, entonces, las siguientes normas también son finitas para cada $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$,*

1. $\|f_{t_2}(S_{t_2})\|_{S_{t_1}}$,
2. $\sup_b \|\Theta_{t_2}(b)\|_{S_{t_1}}$,
3. $\sup_b \|\theta_{t_2}(b)\|_{S_{t_1}}$.

Demostración: Por hipótesis, para cada t, $h_t(S_t)$ tiene momento p-ésimo finito, y dado que la esperanza condicional preserva la finitud en los momentos, entonces $\|h_{t_2}(S_{t_2})\|_{S_{t_1}} < \infty$.

Primero veamos que se cumple 1.

Por la definición de p-norma, se tiene que

$$\|f_{t_2}(S_{t_2})\|_{S_{t_1}} = \left(E\Big(|\max\left\{h_{t_2}(S_{t_2}), g_{t_2}(S_{t_2})\right\}|^p\Big|S_{t_1}\Big)\right)^{1/p}.$$

Si $\max\left\{h_{t_2}(S_{t_2}), g_{t_2}(S_{t_2})\right\} = h_{t_2}(S_{t_2})$, entonces

$$\begin{aligned}\|f_{t_2}(S_{t_2})\|_{S_{t_1}} &= \left(E\Big(|h_{t_2}(S_{t_2})|^p\Big|S_{t_1}\Big)\right)^{1/p} \\ &= \|h_{t_2}(S_{t_2})\|_{S_{t_1}} < \infty.\end{aligned}$$

Si $\max\left\{h_{t_2}(S_{t_2}), g_{t_2}(S_{t_2})\right\} = g_{t_2}(S_{t_2})$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|f_{t_2}(S_{t_2})\|_{S_{t_1}} &= \Big(E\Big(|g_{t_2}(S_{t_2})|^p\big|S_{t_1}\Big)\Big)^{1/p} \\
&= \bigg(E\bigg(\Big|E\Big(e^{-R_T}h_T(S_T)\big|S_{t_2}=s\Big)\Big|^p\bigg|S_{t_1}\bigg)\bigg)^{1/p} \\
&= \bigg[\Big(e^{-R_T}\Big)^p E\bigg(\Big|E\big(h_T(S_T)|S_{t_2}=s\big)\Big|^p\bigg|S_{t_1}\bigg)\bigg]^{1/p} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Pues,

$$
\begin{aligned}
\Big|E\Big(h_T(S_T)\big|S_{t_2}\Big)\Big|^p &\leq E\Big(\big|h_T(S_T)\big|^p\Big|S_{t_2}\Big) \\
&= \|h_T(S_T)\|.
\end{aligned}
$$

La desigualdad anterior se cumple usando la desigualdad de Jensen, por lo tanto, se cumple 1.

Ahora veamos que se cumple 2, para esto fijemos t_1 y procedamos hacia atrás haciendo inducción sobre t_2, de T a t_1.

En $t_2 = T$,

$$\Theta_{t_2}(b) = f_{t_2}(S_{t_2})(b),$$

luego,

$$\|\Theta_{t_2}(b)\|_{S_{t_1}} = \|f_{t_2}(S_{t_2})(b)\|_{S_{t_1}} < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\sup_b \|\Theta_{t_2}(b)\|_{S_{t_1}} < \infty.$$

En $t_2 < T$,

$$
\begin{aligned}
&\sup_b \left\|\Theta_{t_2}(b)\right\|_{S_{t_1}} \\
&\quad = \sup_b \left\| \max\left\{ h_{t_2}(S_{t_2}), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R^j_{t_2+1}} \Theta^j_{t_2+1}(b) \right\} \right\|_{S_{t_1}} \\
&\quad \leq \left\| h_{t_2}(S_{t_2}) \right\|_{S_{t_1}} + \sup_b \left\| \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R^j_{t_2+1}} \Theta^j_{t_2+1}(b) \right\|_{S_{t_1}} \\
&\quad \leq \left\| h_{t_2}(S_{t_2}) \right\|_{S_{t_1}} + \sup_b \left\| \Theta_{t_2+1}(b) \right\|_{S_{t_1}} \\
&\quad < \infty \text{ (usando la hipótesis inductiva).}
\end{aligned} \tag{3.2.12}
$$

El argumento para 3 es esencialmente el mismo. $\square$

Teorema 3.2.2. *Supongamos que* $E(|h_t(S_t)|^{p'}) < \infty$ *para todo* t *y para algún* $p' > 1$. *Entonces,* $\overline{\Theta}_0(b)$ *converge a* $f_0(S_0)$ *en* p*-norma, para algún* $0 < p < p'$ *cuando* $b \to \infty$ *con* n *arbitrario. En particular* $\overline{\Theta}_0(b)$ *converge a* $f_0(S_0)$ *en probabilidad, y por lo tanto el estimador es consistente.*

Demostración: Tomemos el tamaño de la muestra $n = 1$, probaremos que se cumple la convergencia haciendo inducción sobre t procediendo hacia atrás.

La hipótesis inductiva supone que $\|\Theta_{t+1}(b) - f(S_{t+1})\|_{S_{t+1}} \to 0$, cuando $b \to \infty$.

En la fecha de vencimiento T, $\Theta_T = f(S_T)$, por lo tanto se cumple que $\|\Theta_T(b) - f(S_T)\|_{S_T} \to 0$ cuando $b \to \infty$.

Procederemos a probar que $\|\Theta_t(b) - f(S_t)\|_{S_t} \to 0$ cuando $b \to \infty$, para $t < T$.

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Theta_t(b) - f(S_t)\right\|_{S_t} \\
&\quad = \left\| \max\left\{ h_t(S_t), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R^j_{t+1}} \Theta^j_{t+1}(b) \right\} - \max\left\{ h_t(S_t), g_t(S_t) \right\} \right\|_{S_t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^{j}} \Theta_{t+1}^{j}(b) - g_t(S_t) \right\|_{S_t} \\
&\leq \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^{j}} \Big(\Theta_{t+1}^{j}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}^{j}) \Big) \right\|_{S_t} \\
&+ \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^{j}} f_{t+1}(S_{t+1}^{j}) - g_t(S_t) \right\|_{S_t} \\
&\equiv B_1 + B_2.
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

La última desigualdad se obtiene sumando y restando el término

$$
\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^{j}} f_{t+1}(S_{t+1}^{j})
$$

dentro de la norma, y posteriormente aplicando desigualdad del triángulo.

Dado S_t, note que $\{e^{-R_{t+1}^{j}} f_{t+1}(S_{t+1}^{j})\}$ es una sucesión de variables aleatorias $i.i.d$ con media $g(S_t)$ y norma finita. Por el Teorema 4.1 de [23], se tiene que $B_2 \to 0$.

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^{j}} \Big(\Theta_{t+1}^{j}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}^{j}) \Big) \right\|_{S_t} \\
&\leq \frac{1}{b} \Bigg[\left\| e^{-R_{t+1}^{1}} \Big(\Theta_{t+1}^{1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}^{1}) \Big) \right\|_{S_t} + \dots \\
&\qquad \dots + \left\| e^{-R_{t+1}^{b}} \Big(\Theta_{t+1}^{b}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}^{b}) \Big) \right\|_{S_t} \Bigg] \\
&\leq \frac{1}{b} \Bigg[\left\| \Theta_{t+1}^{1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}^{1}) \right\|_{S_t} + \dots \\
&\qquad \dots + \left\| \Theta_{t+1}^{b}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}^{b}) \right\|_{S_t} \Bigg] \\
&= \frac{1}{b} \Bigg[\left\| \Theta_{t+1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}) \right\|_{S_t} + \dots \\
&\qquad \dots + \left\| \Theta_{t+1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1}) \right\|_{S_t} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$= \quad \Big\|\Theta_{t+1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1})\Big\|_{S_t}.$$

Donde $\Theta_{t+1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1})$ indica una copia genérica de la variable aleatoria $\Theta^j_{t+1}(b) - f_{t+1}(S^j_{t+1})$, $j = 1, \ldots, b$.

La hipótesis inductiva implica que $\|\Theta_{t+1}(b) - f(S_{t+1})\|_{S_{t+1}} \to 0$, mediante una condición de integrabilidad uniforme (véase[23]), se tiene que

$$\|\Theta_{t+1}(b) - f(S_{t+1})\|_{S_t} \to 0 \tag{3.2.14}$$

si

$$\sup_b E\bigg(|\Theta_{t+1}(b) - f_{t+1}(S_{t+1})|^{p+\varepsilon}\bigg|S_t\bigg) < \infty. \tag{3.2.15}$$

Sea $\varepsilon > 0$, por el Lema 3.2.1, se cumple que

$$\sup_b E\bigg(|\Theta_{t+1}(b)|^{p+\varepsilon}\bigg|S_t\bigg) < \infty$$

y también

$$\sup_b E\bigg(|f_{t+1}(S_{t+1})|^{p+\varepsilon}\bigg|S_t\bigg) < \infty.$$

Luego, (3.2.15) se cumple y por tanto (3.2.14) también.

El mismo argumento se aplica para el promedio de n repeticiones independientes de $\Theta_0(b)$, sin importar como cambie n con respecto a b. $\square$

Una consecuencia del Teorema 3.2.2 es la siguiente, tomando $n = 1$, se tiene que $E[\Theta_0(b)] \to f_0(S_0)$ cuando $b \to \infty$, por lo tanto, el estimador es asintóticamente insesgado.

Teorema 3.2.3. *El estimador alto es sesgado por arriba, es decir*

$$E[\Theta_0(b)] \geq f_0(S_0), \tag{3.2.16}$$

para todo b.

Demostración: Se demostrará más generalmente que, para todo $t = 0, 1, \ldots, T$

$$E(\Theta_t|S_t) \geq f_t(S_t).$$

La prueba se hará por inducción hacia atrás.

Por definición, $\Theta_T = f_T(S_T)$, de tal forma que $E(\Theta_T|S_T) \geq f_T(S_T)$ se cumple trivialmente.

La hipótesis inductiva (H.I.) afirma que $E(\Theta_{t+1}|S_{t+1}) \geq f_{t+1}(S_{t+1})$ para algún t.

Así,

$$\begin{aligned}
E(\Theta_t|S_t) &= E\bigg(\max\Big\{h_t(S_t), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}}\Theta_{t+1}\Big\}\Big|S_t\bigg) \\
&\geq \max\Big\{h_t(S_t), E(e^{-R_{t+1}}\Theta_{t+1}|S_t)\Big\} \qquad (3.2.17) \\
&= \max\Big\{h_t(S_t), E\big(e^{-R_{t+1}}E(\Theta_{t+1}|S_{t+1})\big|S_t\big)\Big\} \\
&\geq \max\{h_t(S_t), E(e^{-R_{t+1}}f_{t+1}(S_{t+1})|S_t)\}, \text{ (por H.I.)} \\
&= \max\big\{h_t(S_t), g_t(S_t)\big\} = f_t(S_t).
\end{aligned}$$

La desigualdad (3.2.17) se obtiene por la desigualdad de Jensen.

Finalmente, queda demostrado que el estimador alto es sesgado por arriba. □

El sesgo alto de este estimador, puede atribuirse a que se está utilizando la misma información tanto para decidir si ejercer o no, como para calcular el estimador del valor de continuación.

Esta situación se encuentra implícita en la fórmula recursiva (2.2.1), de tal forma que, al escoger el máximo entre los dos términos, se está decidiendo si ejercer la opción o mantenerla, sin embargo, el estimador para el valor de continuación está basado en los nodos siguientes, por lo tanto, el estimador esta obteniendo información de manera ventajosa sobre las decisiones de ejercicio en el futuro.

Para finalizar esta sección, sea $\overline{\Theta}_0(n,b)$, la media muestral de n repeticiones independientes de Θ_0 calculado como se define anteriormente.

Sea $s_\Theta(n,b)$ la desviación estándar de esta muestra.

Entonces,

$$\overline{\Theta}_0(n,b) \pm z_{\alpha/2}\frac{s_\Theta(n,b)}{\sqrt{n}}, \qquad (3.2.18)$$

es un intervalo de confianza al $(1-\alpha)\,\%$, asintóticamente válido cuando $n \to \infty$, para $E[\Theta_0]$, $z_{\alpha/2}$ es el $1-\alpha/2$ cuantil de la distribución normal.

El límite superior del intervalo de confianza para el estimador alto, esta dado por

$$\overline{\Theta}_0(n,b) + z_{\alpha/2}\frac{s_\Theta(n,b)}{\sqrt{n}}, \tag{3.2.19}$$

y

$$H_n(b) = z_{\alpha/2}\frac{s_\Theta(n,b)}{\sqrt{n}}. \tag{3.2.20}$$

3.2.5. Estimador bajo

Para solucionar el problema del sesgo alto, se debe separar la decisión de ejercicio del valor actual de continuación.

Sea $a \in \mathbb{R}$, y Y una variable aleatoria, considere el siguiente problema de optimización,

$$\max(a, E[Y]), \tag{3.2.21}$$

donde $E[Y]$ se determina en base a repeticiones independientes: $Y_1, ..., Y_b$, con la misma distribución que Y. En este caso, consideremos a $\overline{Y}$ como la media muestral de las Y_i.

El estimador $\max(a, \overline{Y})$ tiene sesgo alto, pues,

$$E[\max(a, \overline{Y})] \geq \max(a, E[\overline{Y}]) = \max(a, E[Y]).$$

Supongamos que en lugar de separar las Y_i en dos conjuntos disjuntos y calcular sus medias muestrales $\overline{Y}_1$ y $\overline{Y}_2$, ahora se considera que son independientes unas de otras.

Sea

$$\widehat{v} = \begin{cases} a & \text{si} \quad \overline{Y}_1 \leq a \\ \\ \overline{Y}_2 & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El estimador $\widehat{v}$ usa $\overline{Y}_1$ para decidir si ejercer o no, y en caso de decidir que no, usa $\overline{Y}_2$ para estimar el valor de continuación. Además el estimador es sesgado por debajo.

El esimador bajo, es uno ligeramente diferente a $\widehat{v}$, pues este estimador utiliza todas, excepto una Y_i para calcular $\overline{Y}_1$, y usa las restantes para calcular $\overline{Y}_2$, luego promedia el resultado sobre todas las b formas posibles para dejar fuera una Y_i, este promedio es finalmente el estimador bajo.

A continuación se define de manera formal.

En la fecha de vencimiento T, el valor del estimador es igual al valor de la opción en T, es decir:

$$\theta_T^{i_1 \cdots i_T} = f_T(S_T^{i_1 \cdots i_T}), \tag{3.2.22}$$

y en cualquier instante de tiempo $t < T$, se define el estimador bajo de la siguiente forma:

$$\theta_t^{i_1 \cdots i_t} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \eta_t^{i_1 \cdots i_t j}, \tag{3.2.23}$$

para $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Donde

$$\eta_t^{i_1 \cdots i_t j} = \begin{cases} h_t(S_t^{i_1 \cdots i_t}) & \text{si} \quad h_t(S_t^{i_1 \cdots i_t}) \geq \frac{1}{b-1} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} e^{-R_{t+1}^{i_1 \cdots i_t i}} \theta_{t+1}^{i_1 \cdots i_t i} \\ \\ e^{-R_{t+1}^{i_1 \cdots i_t j}} \theta_{t+1}^{i_1 \cdots i_t j} & \text{si} \quad h_t(S_t^{i_1 \cdots i_t}) < \frac{1}{b-1} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} e^{-R_{t+1}^{i_1 \cdots i_t i}} \theta_{t+1}^{i_1 \cdots i_t i}, \end{cases} \tag{3.2.24}$$

para $j = 1, \ldots, b$.

Ahora veamos un ejemplo para ilustrar como se calcula este estimador.

Ejemplo 3.2.4. ***Cálculo del estimador bajo***

Supongamos una opción americana de compra con vigencia de un año, sobre una acción de la empresa mexicana Gruma SAB DE CV.

La opción es emitida el día 18 de agosto de 2011, en este día el precio de cierre de la acción fue de 23.5 unidades, este precio, así como los precios históricos fueron consultados en el sitio de internet http://mx.finance.yahoo.com/.

La tasa de interés libre de riesgo nacional, basada en el CETES 175 es del 4.39 %, la volatilidad histórica se calcula de acuerdo al Apéndice A, tomando los precios históricos diarios de la acción a 180 días, a partir de la fecha de emisión de contrato.

Supongamos que la vigencia de la opción se divide en dos etapas, que la acción paga un dividendo del 10 % *y que el árbol de precios de la acción* *se divide en tres ramas por nodo. Además se considerará un precio de ejercicio de 24 unidades.*

El siguiente cuadro, muestra un árbol aleatorio de los precios de la acción, simulado de acuerdo a la expresión (3.2.7).

t_0	t_1	t_2
		$S_2^{11} = 21.94$
	$S_1^1 = 22.99$	$S_2^{12} = 18.06$
		$S_2^{13} = 24.42$
		$S_2^{21} = 18.37$
$S = 23.7$	$S_1^2 = 18.37$	$S_2^{22} = 16.36$
		$S_2^{23} = 18.08$
		$S_2^{31} = 25.31$
	$S_1^3 = 31.68$	$S_2^{32} = 32.45$
		$S_2^{33} = 29.82$

Cuadro 3.11: Simulación de árbol aleatorio de precios para la acción Gruma SAB DE CV, con vigencia de un año.

De acuerdo a la definición del estimador bajo, en la frontera, el valor del estimador bajo es

$$\theta_2^{i_1 i_2} = f(S_2^{i_1 i_2}) = \max\{S_2^{i_1 i_2} - K, 0\},$$

para cada $i_j = 1, 2, 3,\ j = 1, 2.$

El siguiente cuadro muestra el valor del estimador bajo en la frontera.

t_0	t_1	t_2
		$\theta_2^{11} = 0$
	θ_1^1	$\theta_2^{12} = 0$
		$\theta_2^{13} = 0$
		$\theta_2^{21} = 0$
θ	θ_1^2	$\theta_2^{22} = 0$
		$\theta_2^{23} = 0$
		$\theta_2^{31} = 1.3104$
	θ_1^3	$\theta_2^{32} = 8.4524$
		$\theta_2^{33} = 5.828$

Cuadro 3.12: Árbol aleatorio del estimador bajo para una opción de compra americana sobre una acción de la empresa Gruma SAB DE CV.

Para ilustrar como se calcula el estimador bajo, se va a calcular únicamente el estimador bajo θ_1^3.

Definamos

$$Y_t^j(b) = \frac{1}{b-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{b} e^{-R_{t+1}^i} \theta_{t+1}^i. \tag{3.2.25}$$

Para cada $j = 1, 2, 3$ calculemos $Y_t^j(b)$.

$j=1$	$Y_2^1(3)=\frac{1}{2}e^{-r(t_3-t_2)}\left(\theta_2^{32}+\theta_2^{33}\right)=6.9873$
$j=2$	$Y_2^2(3)=\frac{1}{2}e^{-r(t_3-t_2)}\left(\theta_2^{31}+\theta_2^{33}\right)=3.4928$
$j=3$	$Y_2^3(3)=\frac{1}{2}e^{-r(t_3-t_2)}\left(\theta_2^{31}+\theta_2^{32}\right)=4.7769$

Cuadro 3.13: Valores de $Y_t^j(b)$ para $j=1,2,3$.

Ahora para cada $j=1,2,3$ calculemos η_1^{3j}, mediante (3.2.24).

	$h_1(S_1^3)=S_1^3-K$	$Y_2^j(3)$	η_1^{3j}
$j=1$	7.6885	6.9873	7.6885
$j=2$	7.6885	3.4928	7.6885
$j=3$	7.6885	4.7769	7.6885

Cuadro 3.14: Valores de η_1^{3j} para $j=1,2,3$.

De acuerdo a (3.2.23), el estimador bajo es

$$\theta_1^3=7{,}6885.$$

Note que en el Cuadro 3.14 se observa que en todos los estados j, siempre es mayor el valor por el pronto ejercicio que el valor de continuación, sin embargo, de haber existido algún estado j_0 para el cual el valor de continuación hubiese sido mayor que el valor por el pronto ejercicio, se habría tenido que

$$\eta_1^{3j_0}=e^{-r(t_3-t_2)}\theta_2^{3j_0}.$$

Propiedades del estimador bajo

El estimador bajo tiene la propiedad de ser sesgado y consistente, a continuación se presentan los resultados.

Teorema 3.2.5. *Supongamos que $P(h_t(S_t)\neq g_t(S_t))=1$ para todo t, entonces, se cumple el Teorema 3.2.2 para el estimador bajo.*

Demostración: La demostración se hará por inducción hacia atrás, tomemos $n=1$.

Sea $t=T$, entonces se cumple la convergencia de manera trivial.

Supongamos que $\|\theta_{t+1}(b)-f(S_{t+1})\|_{S_{t+1}}\to 0$, definamos $Y_t^j(b)$ como en (3.2.25), es decir,

$$Y_t^j(b) = \frac{1}{b-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}} e^{-R_{t+1}^i}\theta_{t+1}^i.$$

Por hipótesis se tiene que $g_t(S_t) \neq h_t(S_t)$, con probabilidad uno.

Se afirma lo siguiente:

(a) $\left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j(b) - g(S_t)\right\|_{S_t} \to 0$

(b) $\left\|Y_t^j(b) - g(S_t)\right\|_{S_t} \to 0$

(c) $\left\|1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j(b)\}} - 1_{\{h_t(S_t)>g_t(S_t)\}}\right\| \to 0$

La demostración de (a) es la misma que la demostración del Teorema 3.2.2 en el paso correspondiente, el mismo argumento aplica para (b), pues los estimadores en (a) y (b) difieren en la omisión de un término en $Y_t^j(b)$.

Para (c), supongamos que $h_t(S_t) < g_t(S_t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j(b)\}} - 1_{\{h_t(S_t)>g_t(S_t)\}}\right\| &= \left\|1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j(b)\}}\right\|_{S_t} \\
&= E\left[\left|1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j(b)\}}\right|^p \Big| S_t\right]^{1/p} \\
&= P\Big(h_t(S_t) \geq Y_t^j(b)\Big|S_t\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

De acuerdo a (b), $Y_t^j(b)$ converge a $g(S_t)$ en p-norma, entonces converge en probabilidad, es decir, para todo $\varepsilon > 0$

$$P\big(|Y_t^j(b) - g_t(S_t)| > \varepsilon\big) \to 0,$$

cuando $b \to \infty$.

Tomando $\varepsilon = g_t(S_t) - h_t(S_t) > 0$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
P\big(|Y_t^j(b) - g_t(S_t)| > \varepsilon\big) &= P\big(|Y_t^j(b) - g_t(S_t)| > g_t(S_t) - h_t(S_t)\big) \\
&= P\big(Y_t^j(b) - g_t(S_t) \geq g_t(S_t) - h_t(S_t)\big) \\
&\quad + P\big(Y_t^j(b) - g_t(S_t) \leq -g_t(S_t) + h_t(S_t)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\big(Y_t^j(b) - g_t(S_t) \geq g_t(S_t) - h_t(S_t)\big) \\
&\quad + P\big(Y_t^j(b) \leq h_t(S_t)\big).
\end{aligned}
$$

De tal forma que,

$$
P\big(Y_t^j(b) \leq h_t(S_t)\big) \to 0,
$$

cuando $b \to \infty$.

Por lo tanto, $\left(P\Big(h_t(S_t) \geq Y_t^j(b)\Big|S_t\Big)\right)^{1/p} \to 0$, cuando $b \to \infty$.

Para el caso en que $h_t(S_t) > g_t(S_t)$, se tomará $\varepsilon = h_t(S_t) - g_t(S_t)$ y se procederá de manera similar para obtener el resultado esperado.

De este modo, queda demostrado (c).

Ahora afirmamos que de (a) y (c) se sigue que

$$
\left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j(b)1_{\{h_t(S_t)<Y_t^j(b)\}} - g_t(S_t)1_{\{h_t(S_t)<g_t(S_t)\}}\right\|_{S_t} \to 0. \tag{3.2.26}
$$

La demostración de (3.2.26) se probará posteriormente.

Una consecuencia de (c) es la siguiente

$$
\left\|h_t(S_t)1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j(b)\}} - h_t(S_t)1_{\{h_t(S_t)>g_t(S_t)\}}\right\|_{S_t} \to 0. \tag{3.2.27}
$$

Ahora note que

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\theta_t(S_t) - f(S_t)\Big\|_{S_t} \\
&\quad = \left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \eta_t^j(b) - f(S_t)\right\|_{S_t} \\
&\quad = \left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \left(h_t(S_t)1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j(b)\}} + e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j(b)1_{\{h_t(S_t)<Y_t^j(b)\}}\right)\right. \\
&\qquad\quad \left. - f(S_t)\right\|_{S_t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \left(h_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) \geq Y_t^j(b)\}} + e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^j(b) 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j(b)\}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \max\{h_t(S_t), g_t(S_t)\} \right\|_{S_t} \\
&= \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \left(h_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) \geq Y_t^j(b)\}} + e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^j(b) 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j(b)\}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(h_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) > g_t(S_t)\}} + g_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) < g_t(S_t)\}} \right) \right\|_{S_t} \\
&\leq \left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^j(b) 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j(b)\}} - g_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) < g_t(S_t)\}} \right\|_{S_t} \\
&\quad + \left\| h_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) \geq Y_t^j\}} - h_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) > g_t(S_t)\}} \right\|_{S_t}.
\end{aligned}
\tag{3.2.28}
$$

Luego, por (3.2.26) y (3.2.27),

$$
\left\| \theta_t(S_t) - f(S_t) \right\|_{S_t} \to 0
$$

Regresemos a probar (3.2.26), usemos la siguiente notación,

- $u_j(b) = e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^j(b)$
- $v_j(b) = 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j\}}$
- $u = g_t(S_t)$
- $v = 1_{\{h_t(S_t) < g_t(S_t)\}}$

Se quiere demostrar que

$$
\left\| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} u_j(b) v_j(b) - uv \right\| \to 0.
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b)v_j(b) - uv\right\| \\
&\quad = \left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b)v_j(b) - \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b)v + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b)v - uv\right\| \\
&\quad \le \left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\big(u_j(b)v_j(b) - u_j(b)v\big)\right\| + \left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\big(u_j(b)v - uv\big)\right\| \\
&\quad = \left\|\frac{1}{b}\Big[(u_1(b)v_1(b) - u_1(b)v)\Big] + \ldots + \Big[u_b(b)v_b(b) - u_b(b)v\Big]\right\| \\
&\quad + \left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\Big(u_j(b)v - uv\Big)\right\| \\
&\quad \le \Big\|u_i(b)v_i(b) - u_i(b)v\Big\| + \left\|v\Big(\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b) - u\Big)\right\| \\
&\quad = \Big\|u_1(b)(v_1(b) - v)\Big\| + \Big\|v\Big\|\left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b) - u\right\| \\
&\quad = \Big\|u_1(b)\Big\|\Big\|v_1(b) - v\Big\| + \Big\|v\Big\|\left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b) - u\right\|.
\end{aligned}
$$

Por (c), $\Big\|v_1(b) - v\Big\| \to 0$, y por (a) $\left\|\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} u_j(b) - u\right\| \to 0$.

Por lo tanto, se cumple (3.2.26). $\square$

Teorema 3.2.6. *El sesgo del estimador bajo es negativo, es decir*

$$E[\theta_0(b)] \le f_0(S_0), \tag{3.2.29}$$

para todo b.

Demostración: Se probará nuevamente por inducción hacia atrás.

Por definición $\theta_T = f_T(S_T)$, por lo tanto $E(\theta_T|S_T) \le f_T(S_T)$ trivialmente.

La hipótesis inductiva (H.I.) es la siguiente:

$$E(\theta_{t+1}|S_{t+1}) \leq f_{t+1}(S_{t+1}).$$

Sea Y_t^j como en (3.2.25), entonces para cualquier $j = 1, \ldots, b$, se tiene que,

$$E(\theta_t|S_t) = E(\eta_t^j|S_t).$$

Puesto que Y_t^j es independiente condicionalmente de θ_{t+1}^j dado S_t, se tiene que,

$$\begin{aligned}
&E(\eta_t^j|S_t) \\
&\quad = E\Big[h_t(S_t)1_{\{h_t(S_t)\geq Y_t^j\}}\big|S_t\Big] + E\Big[e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j 1_{\{h_t(S_t)<Y_t^j\}}\big|S_t\Big] \\
&\quad = h_t(S_t)P\Big(h_t(S_t) \geq Y_t^j\big|S_t\Big) \\
&\qquad + E\Big[e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j\big|S_t\Big]P\Big(h_t(S_t) < Y_t^j\big|S_t\Big) \\
&\quad = h_t(S_t)p + E\Big[e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j\big|S_t\Big](1-p).
\end{aligned}$$

En este caso p y $1-p$ están denotando a $P\Big(h_t(S_t) \geq Y_t^j\big|S_t\Big)$ y $P\Big(h_t(S_t) < Y_t^j\big|S_t\Big)$, respectivamente.

Entonces,

$$\begin{aligned}
E(\theta_t|S_t) &= h_t(S_t)p + E\Big[e^{-R_{t+1}^j}E[\theta_{t+1}^j|S_{t+1}^j]\big|S_t\Big](1-p) \\
&= h_t(S_t)p + E\Big[e^{-R_{t+1}^j}f(S_{t+1}^j)\big|S_t\Big](1-p) \\
&= h_t(S_t)p + g_t(S_t)(1-p) \\
&\leq \max\{h_t, g_t\} = f_t(S_t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el teorema queda demostrado. □

Para terminar la sección, sea $\overline{\theta}_0(n, b)$, la media muestral de n repeticiones independientes de θ_0 calculado como ya se definió.

Sea $s_\theta(n, b)$ la desviación estándar de esta muestra.

Entonces,

$$\theta_0(n, b) \pm z_{\alpha/2}\frac{s_\theta(n, b)}{\sqrt{n}}, \tag{3.2.30}$$

es un intervalo de confianza al $(1-\alpha)\,\%$, asintóticamente válido cuando $n \to \infty$, para $E[\theta_0]$. Análogamente al caso del estimador alto.

$z_{\alpha/2}$ es el $1-\alpha/2$ cuantil de la distribución normal.

El límite inferior del intervalo de confianza para el estimador bajo, esta dado por:

$$\overline{\theta}_0(n,b) - z_{\alpha/2}\frac{s_\theta(n,b)}{\sqrt{n}}, \tag{3.2.31}$$

y

$$L_n(b) = z_{\alpha/2}\frac{s_\theta(n,b)}{\sqrt{n}}. \tag{3.2.32}$$

3.2.6. Valor de la opción

Tomando el límite inferior del intervalo de confianza para el estimador bajo y el límite superior del intervalo de confianza para el estimador alto, se forma el intervalo:

$$\left[\theta_0(n,b) - z_{\alpha/2}\frac{s_\theta(n,b)}{\sqrt{n}}, \Theta_0(n,b) + z_{\alpha/2}\frac{s_\Theta(n,b)}{\sqrt{n}}\right]. \tag{3.2.33}$$

El cual contendrá el valor verdadero de la opción $V_0(S_0)$.

Más aún, como $E[\Theta_0]$ y $E[\theta_0]$ se aproximan a $V_0(S_0)$ cuando $b \to \infty$, entonces podemos hacer el intervalo de confianza tan estrecho como se quiera haciendo crecer n y b.

Un último resultado, es el siguiente teorema, el cual nos dice que el valor del estimador alto es mayor que el del estimador bajo.

Teorema 3.2.7. *En cada realización del arreglo*

$$\{S_t^{i_1\cdots i_t} : t = 0,1,\ldots,T; i_j = 1,\ldots,b; j = 1,\ldots,t\},$$

el estimador bajo es menor o igual que el estimador alto, es decir:

$$\theta_t^{i_1\cdots i_t} \leq \Theta_t^{i_1\cdots i_t}, \tag{3.2.34}$$

para cada $i_1, i_2, \ldots, i_t$ *y cada* $t = 0,1,\ldots,T$.

Demostración: La prueba se hará por inducción hacia atrás.

En la fecha de vencimiento, se tiene que $\theta_T = \Theta_T = f_T(S_T)$, por lo tanto el teorema se cumple trivialmente.

Supongamos que,

$$\theta_{t+1}^j \leq \Theta_{t+1}^j,$$

para $j = 1, \ldots, b$, (H.I.).

Nuevamente tomemos Y_t^j como en (3.2.25).

Caso 1: Supongámos que para todo $j = 1, \ldots, b$, $Y_t^j \leq h_t(S_t)$, entonces,

$$\eta_t^j = h_t(S_t),$$

para cada $j = 1, \ldots, b$, luego,

$$\begin{aligned} \theta_t &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \eta_t^j \\ &= h_t(S_t) \leq \Theta_t \end{aligned}$$

Caso 2: Supongámos que al menos para un $j = 1, \ldots, b$, $Y_t^j \geq h_t(S_t)$, entonces,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \eta_t^j \\ &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \left(h_t(S_t) 1_{\{h_t(S_t) \geq Y_t^j\}} + e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^j 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j\}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} 1_{\{h_t(S_t) \geq Y_t^j\}} \right) h_t(S_t) \\ &+ \left(\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j\}} \right) \frac{\sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^j 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j\}}}{\sum_{j=1}^{b} 1_{\{h_t(S_t) < Y_t^j\}}} \end{aligned}$$

$$= \quad h_t(S_t)p \quad + \quad \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j 1_{\{h_t(S_t)<Y_t^j\}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{b} 1_{\{h_t(S_t)<Y_t^j\}}}(1 \quad - \quad p). \tag{3.2.35}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Y_t^1, \dots, Y_t^k$ son mayores o iguales que $h_t(S_t)$, y que $Y_t^{k+1}, \dots, Y_t^b$ son menores o iguales que $h_t(S_t)$.

Entonces, el cociente en (3.2.35), es igual a

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j,$$

entonces, para cualquier $i \leq k < j \leq b$, se tiene que $Y_t^i > Y_t^j$, luego,

$$e^{-R_{t+1}^j}\theta_{t+1}^j > e^{-R_{t+1}^i}\theta_{t+1}^i.$$

Por lo tanto,

$$\max\{e^{-R_{t+1}^1}\theta_{t+1}^1, \dots, e^{-R_{t+1}^k}\theta_{t+1}^k\} \leq \min\{e^{-R_{t+1}^{k+1}}\theta_{t+1}^1, \dots, e^{-R_{t+1}^b}\theta_{t+1}^k\}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e^{-R_{t+1}^i}\theta_{t+1}^i \leq \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} e^{-R_{t+1}^i}\theta_{t+1}^i,$$

de (3.2.35), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\eta_t^j &\leq h_t(S_t)p + (1-p)\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} e^{-R_{t+1}^i}\theta_{t+1}^i \\
&\leq h_t(S_t)p + (1-p)\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} e^{-R_{t+1}^i}\Theta_{t+1}^i \\
&\leq \max\left\{h_t(S_t), \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} e^{-R_{t+1}^i}\Theta_{t+1}^i\right\} \\
&= \Theta_t. \quad \square
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Implementación de algoritmos

En este capítulo se valuarán opciones de compra y venta americanas sobre una acción de la empresa Gruma SAB de CV, cuyos precios cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). En la sección 4.1 se supondrá el caso en que las acciones no reparten dividendos, para la valuación se usará el método binomial, al final de la sección se presenta el código utilizado para la valuación de esta opción. En la sección 4.2 se supondrá el caso en que las acciones reparten dividendos continuos, el método a utilizar será el del árbol aleatorio, finalmente se presentará el código utilizado para la valuación de este tipo de opciones.

Se tomará como precio actual de las acciones el precio de cierre del día 01 de septiembre de 2011, para el cálculo de la volatilidad histórica se tomarán los precios históricos de los 90 y 180 días previos a la misma fecha. Estos datos fueron descargados del sitio de internet http://mx.finance.yahoo.com/.

La tasa de interés libre de riesgo, corresponde a la tasa de rendimiento de los CETES 91 y 175 días en la semana del 30 de agosto de 2011 al 05 de septiembre de 2011, esta información fue tomada del sitio de internet del Banco de México, http://www.banxico.org.mx/.

La vigencia de los contratos se tomará a un año, seis y tres meses.

4.1. Modelo Binomial

En esta sección se valúan opciones americanas de venta sobre una acción de una empresa mexicana que no paga dividendos, así como su contraparte europea, se presenta la implementación de los algoritmos computacionales con los que se valuan tales opciones, y uno más para la valuación de opciones de compra europeas y americanas, sobre acciones que no pagan dividendos.

4.1.1. Valuación de opciones americanas sin dividendos

Ejemplo 4.1.1. *Los siguientes datos corresponden a los utilizados en la valuación de una opción americana de venta sobre acciones de la empresa Gruma SAB de CV, la cual no reparte dividendos.*

- S =*23.5 (Divisa en México)*
- $T = 1$ *(1 año)*
- r =*0.043 (4.3 %, CETES 175)*
- σ =*0.3553 (basado en una muestra de los datos históricos de los precios diarios al cierre de los más recientes 180 días.)*
- K : *El precio de liquidación se fue variando, tomando valores por debajo y por encima del precio actual del subyacente.*
- M : *El número de etapas en que se divide la vigencia se fue incrementando.*
- A_v*: Precio de la opción americana de venta al inicio del contrato.*
- E_v*: Precio de la opción europea de venta al inicio del contrato.*

M	50	100	250	500	1000
K	A_v	A_v	A_v	A_v	A_v
22	2.1566	2.1425	2.1464	2.1432	2.1434
23	2.6228	2.6231	2.6211	2.6194	2.6179
23.5	2.8657	2.8702	2.8728	2.8737	2.8741
24	3.1518	3.1497	3.1466	3.1447	3.1433
25	3.7307	3.7177	3.7207	3.7173	3.7182

Cuadro 4.1: Valores de la opción americana de venta sobre una acción sin dividendos de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de un año.

M	50	100	250	500	1000
K	E_v	E_v	E_v	E_v	E_v
22	2.0863	2.0709	2.0773	2.0737	2.0740
23	2.5330	2.5333	2.5312	2.5293	2.5276
23.5	2.7564	2.7646	2.7694	2.7711	2.7719
24	3.0335	3.0338	3.0318	3.0299	3.0282
25	3.5876	3.5724	3.5764	3.5726	3.5740

Cuadro 4.2: Valores de la opción europea de venta sobre una acción sin dividendos de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de un año.

$T = 1$		
K	M	Primer nodo óptimo
22 - 25	50	(10,0) - (8,0)
22 - 25	100	(15,0) - (11,0)
22 - 25	250	(24,0) - (22,0)
22 - 25	500	(34,0) - (26,0)

Cuadro 4.3: Primer nodo en el que sería óptimo el ejercicio anticipado para la opción americana de venta de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de un año.

Ejemplo 4.1.2. *Los siguientes datos corresponden a los utilizados en la valuación de una opción americana de venta sobre acciones de la empresa Gruma SAB de CV, la cual no reparte dividendos.*

- S *=23.5 (Divisa en México)*
- $T = 1/2$ *(6 meses)*
- r *=0.043 (4.3 %, CETES 175)*
- σ *=0.2512 (basado en una muestra de los datos históricos de los precios diarios al cierre de los más recientes 180 días.)*
- K *: El precio de liquidación se fue variando, tomando valores por debajo y por encima del precio actual del subyacente.*
- M *: El número de etapas en que se divide la vigencia se fue incrementando.*
- A_v*: Precio de la opción americana de venta al inicio del contrato.*
- E_v*: Precio de la opción europea de venta al inicio del contrato.*

M	50	100	250	500	1000
K	A_v	A_v	A_v	A_v	A_v
22	0.8240	0.8203	0.8192	0.8196	0.8196
23	1.2239	1.2204	1.2161	1.2172	1.2165
23.5	1.4483	1.4505	1.4518	1.4523	1.4525
24	1.7220	1.7177	1.7136	1.7147	1.7141
25	2.3150	2.3124	2.3112	2.3104	2.3109

Cuadro 4.4: Valores de la opción americana de venta sobre una acción sin dividendos de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de seis meses.

M	50	100	250	500	1000
K	A_v	A_v	A_v	A_v	A_v
22	0.8027	0.7980	0.7973	0.7981	0.7981
23	1.1882	1.1843	1.1797	1.1814	1.1806
23.5	1.3992	1.4033	1.4058	1.4066	1.4070
24	1.6650	1.6612	1.6565	1.6580	1.6574
25	2.2276	2.2268	2.2256	2.2247	2.2253

Cuadro 4.5: Valores de la opción europea de venta sobre una acción sin dividendos de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de seis meses.

$T = 1/2$		
K	M	Primer nodo óptimo
22 - 25	50	(12,0) - (7,0)
22 - 25	100	(17,0) - (10,0)
22 - 25	250	(27,0) - (16,0)
22 - 25	500	(39,0) - (23,0)

Cuadro 4.6: Primer nodo en el que sería óptimo el ejercicio anticipado para la opción americana de venta de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de seis meses.

Ejemplo 4.1.3. *Los siguientes datos corresponden a los utilizados en la valuación de una opción americana de venta sobre acciones de la empresa Gruma SAB de CV, la cual no reparte dividendos.*

- S *=23.5 (Divisa en México)*

- $T = 1/4$ *(3 meses)*
- r *=0.043 (4.3 %, CETES 91)*
- σ *=0.2119 (basado en una muestra de los datos históricos de los precios diarios al cierre de los más recientes 90 días.)*
- K : *El precio de liquidación se fue variando, tomando valores por debajo y por encima del precio actual del subyacente.*
- M : *El número de etapas en que se divide la vigencia se fue incrementando.*
- A_v: *Precio de la opción americana de venta al inicio del contrato.*
- E_v: *Precio de la opción europea de venta al inicio del contrato.*

M	50	100	250	500	1000
K	A_v	A_v	A_v	A_v	A_v
22	0.3349	0.3339	0.3342	0.3342	0.3344
23	0.6669	0.6618	0.6642	0.6635	0.6633
23.5	0.8850	0.8864	0.8873	0.8876	0.8877
24	1.1573	1.1528	1.1551	1.1544	1.1542
25	1.8066	1.8069	1.8081	1.8078	1.8076

Cuadro 4.7: Valores de la opción americana de venta sobre una acción sin dividendos de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de tres meses.

M	50	100	250	500	1000
K	E_v	E_v	E_v	E_v	E_v
22	0.3290	0.3279	0.3281	0.3282	0.3285
23	0.6521	0.6470	0.6500	0.6494	0.6492
23.5	0.8621	0.8646	0.8661	0.8666	0.8668
24	1.1277	1.1221	1.1254	1.1247	1.1245
25	1.7484	1.7503	1.7522	1.7519	1.7516

Cuadro 4.8: Valores de la opción europea de venta sobre una acción sin dividendos de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de tres meses.

$T = 1/4$		
K	M	Primer nodo óptimo
22 - 25	50	(14,0) - (6,0)
22 - 25	100	(20,0) - (9,0)
22 - 25	250	(33,0) - (14,0)
22 - 25	500	(47,0) - (20,0)

Cuadro 4.9: Primer nodo en el que sería óptimo el ejercicio anticipado para la opción americana de venta de la empresa Gruma SAB de CV con vigencia de tres meses.

Comentarios

En esta sección se comentará sobre el comportamiento del precio de las opciones y del ejercicio óptimo en los Cuadros 4.1 - 4.9.

Se mencionó antes que, debido a que las opciones americanas tienen mayores oportunidades de ejercicio que las europeas, éstas últimas deben valer menos, esto se puede observar en los Cuadros 4.2, 4.5 y 4.8, los cuales muestran los valores de las contrapartes europeas de cada opción americana de venta, siempre en cada caso, los valores de la opción europea son menores que su contraparte americana.

Por otra parte, puesto que la volatilidad es una variable fundamental en la valuación de las opciones, al aumentar o disminuir ésta, afecta directamente el valor de las opciones. La variable volatilidad, indica la rapidez con que los precios del subyacente varían, por lo que, a mayor volatilidad el valor de la opción será mas alto, como puede verse en los Cuadros 4.1, 4.4 y 4.7.

Otro punto importante, es el siguiente, el método binomial para opciones europeas, converge al valor ofrecido por la fórmula de Black-Scholes cuando el número de etapas tiende a infinito, esto fue demostrado por Cox-Rox-Rubistein en [14]. Para el caso de opciones americanas, esta convergencia fue demostrada más recientemente por Amin y Khana en [1], de aquí que, tanto en los Cuadros 4.1, 4.4 y 4.7, como en los Cuadros 4.2, 4.5 y 4.8 se observa que mientras aumenta el número de etapas el precio de la opción varía en realidad muy poco.

De acuerdo a los Cuadros 4.1, 4.4, 4.7 y sus respectivas contrapartes Europeas, puede verse que un mayor valor para el precio de ejercicio supone un mayor valor para las opciones de venta, para el caso de opciones de compra, no sucede lo mismo, pues cuanto menor sea el precio de ejercicio, el precio de la opción será mayor (véase [30]).

Finalmente, analizemos el ejercicio óptimo en los Cuadros 4.3 - 4.9.

En cada cuadro se muestra cual es el primer nodo para el cual sería óptimo el ejercicio anticipado, tomando como precio de ejercicio valores menores y mayores que el precio actual de la acción y dividiendo la vigencia cada vez, en un número mayor de etapas.

Por ejemplo, en el Cuadro 4.3, si se toma como precio de ejercicio $K = 22$ y $M = 50$, entonces el primer nodo en el cual sería óptimo el ejercicio sería el (9,0). Por otra parte, si se toma como precio de ejercicio $K = 25$ y $M = 50$ entonces el primer nodo en el cual es óptimo el ejercicio sería el (7,0), sin embargo, para valores K, entre 22 y 25 y $M = 50$, el nodo en el que el pronto ejercicio es óptimo es el (10,0).

El algoritmo implementado en Mathematica 6 con el que se calcularon los Cuadros 4.3, 4.6 y 4.9, proporciona todos los nodos en los cuales sería óptimo el ejercicio anticipado, de tal forma que en cada caso se puede saber cuales son todas las posibles póliticas óptimas.

A manera de ejemplo, a continuación daremos una posible política óptima para la opción del Ejemplo 4.1.1.

(9,0) B	(10,0) S	(11,1) B	(12,1) B	(13,1) S
(14,2) B	(15,3) S	(16,4) B	(17,4) S	(18,5) B
(19,5) B	(20,5) S	(21,6) S	(22,7) B	(23,7) S
(24,8) S	(25,9) B	(26,9) B	(27,9) B	(28,9) S
(29,10) B	(30,10) S	(31,11) S	(32,12) B	(33,11) S
(34,12) S	(35,13) S	(36,14) B	(37,14) B	(38,14) S
(39,15) B	(40,15) S	(41,16) S	(42,17) B	(43,17) B
(44,17) S	(45,18) S	(46,19) S	(47,20) B	(48,20) S
(49,21)				

Cuadro 4.10: Posible política óptima para la opción sobre una acción de la empresa Gruma SAB DE CV con $T = 1$, $K = 24$ y $M = 50$.

Las letras S y B indican si el precio de la acción sube o baja respectivamente en la siguiente etapa, sin embargo, la verdadera política óptima dependerá del comportamiento real del precio de la acción.

En la siguiente sección se muestran los códigos de los algoritmos utilizados en la construcción de los Cuadros 4.1 - 4.9. En [31] y [32] se presentan otras implementaciones de este método, éstas fueron realizadas en Excel y MATLAB respectivamente, así como las implementaciones de otros métodos para valuar opciones americanas.

4.1.2. Código en Mathematica 6 para opciones de venta americanas sin dividendos

El siguiente código calcula la prima de una opción americana de venta, sobre una acción que no paga dividendos. Se utilizó para calcular los Cuadros 4.1, 4.4 y 4.7.

```
(* CÓDIGO EN MATHEMATICA 6 PARA CALCULAR EL VALOR
DE UNA OPCIÓN AMERICANA DE VENTA SOBRE UNA ACCIÓN
QUE NO PAGA DIVIDENDOS CON EL MODELO BINOMIAL. LOS
PARÁMETROS SON: EL PRECIO ACTUAL DE LA ACCIÓN, EL
PRECIO DE LIQUIDACIÓN, LA VIGENCIA DE LA OPCIÓN,
 EL INTERÉS LIBRE DE RIESGO, EL NÚMERO DE ETAPAS
EN QUE SE DIVIDE LA VIGENCIA Y LA VOLATILIDAD
SUBYACENTE *)

(* INPUT *)

S = 23.5; (* Precio actual del subyacente *)
Ej = 25; (* Precio de liquidación *)
T = 1/4; (* Vigencia de la opción *)
r = 0.043; (* Interés Libre de riesgo *)
M = 50; (* Número de etapas *)
\[Sigma] = 0.21194; (* Volatilidad *)

(* INICIO DEL ALGORITMO *)

\[CapitalDelta]t = T/M;
u = Exp[\[Sigma] Sqrt[\[CapitalDelta]t]];
d = 1/u;
R = Exp[r*\[CapitalDelta]t];
p = (R - d)/(u - d);

(*Calcula los valores del precio subyacente S(n,j)
en cada nodo (n,j) para n=1,2,... y j=0,1,...,M*)

For[i = M + 1, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   precio[i][n] = S*u^(n - 1)*d^(i - n)]];

(*Calcula los valores de m(n,j)=Max[k-S(n,j),0]
para n=1,2,... y j=0,1,...,M*)
```

```
For[i = M + 1, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   m[i][n] = Max[Ej - precio[i][n], 0]]];

(*Calcula los valores de la opción en la frontera,
es decir, en n=M, denotado por c(M,j)=Max[S(M,j)-K,0]
para j=0,1,...,M*)

For[n = 1, n <= M + 1, n++, W[M + 1][n] = m[M + 1][n];
 c[M + 1][n] = W[M + 1][n]]

(*Calcula la fórmula de inducción hacia atras
W(n,j)=(p*W(n+1,j+1)+(1-p)*W(n+1,j))/R, y los valores
de la opción para 0<=n<=M,
c(n,j)= Max[m(n,j),W(n,j)], para j=0,1,...,n*)

For[i = M, i >= 1, i--,
 For[n = 1, n <= i, n++,
   W[i][n] = (p*c[i + 1][n + 1]+(1 - p)*c[i + 1][n])/R;
   c[i][n] = Max[W[i][n], m[i][n]]]];

(*Imprime el valor de la opción*)

Print ["Put(", 0, ",", 0, ")=", c[1][1]];

(* FINAL DE ALGORITMO *)
```

4.1.3. Código en Mathematica 6 para opciones de venta europeas sin dividendos

El siguiente código calcula la prima de una opción europea de venta, sobre una acción que no paga dividendos. Se utilizó para calcular los Cuadros 4.2, 4.5 y 4.8.

```
(* CÓDIGO EN MATHEMATICA 6 PARA CALCULAR EL VALOR
DE UNA OPCIÓN EUROPEA DE VENTA SOBRE UNA ACCIÓN
QUE NO PAGA DIVIDENDOS CON EL MODELO BINOMIAL. LOS
PARÁMETROS SON: EL PRECIO ACTUAL DE LA ACCIÓN, EL
PRECIO DE LIQUIDACIÓN, LA VIGENCIA DE LA OPCIÓN,
 EL INTERÉS LIBRE DE RIESGO, EL NÚMERO DE ETAPAS
EN QUE SE DIVIDE LA VIGENCIA Y LA VOLATILIDAD
SUBYACENTE *)
```

```
(* INPUT *)

S = 24.2; (* Precio Actual del bien subyacente *)
K = 26; (* Precio de liquidación *)
T = 1/4; (* Vigencia de la opción *)
r = 0.043; (* Interés libre de riesgo *)
M = 1000; (* Número de etapas *)
\[Sigma] = 0.1764; (* Volatilidad *)

(* INICIO DE ALGORITMO *)

\[CapitalDelta]t = T/M;
u = Exp[\[Sigma] Sqrt[\[CapitalDelta]t]];
d = 1/u;
R = Exp[r*\[CapitalDelta]t];
p = (R - d)/(u - d);

(*Calcula los valores de S(n,j)
para n=M y j=0,1,...,M*)

For[n = 1, n <= M + 1, n++,
 W[n] = S*d^(M + 1 - n)*u^(n - 1)]

(*Calcula los valores de V(n,j) en la frontera,
es decir, para n=M y j=0,1,...,M*)

For[n = 1, n <= M + 1, n++,
 W[n] = Max[K - W[n], 0]]

(*Calcula los valores de V(n,j) para
n=1,...,M-1 y j=0,1,...,n*)

For[i = M, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   W[n] = (p*W[n + 1] + (1 - p)*W[n])/R]];

(* Imprime la prima de la opción *)

Print ["Prima =", W[1]];

(* FIN DE ALGORITMO *)
```

4.1.4. Código en Mathematica 6 para opciones de compra europeas sin dividendos

El siguiente código calcula la prima de una opción europea de compra sobre una acción que no paga dividendos.

```
(* CÓDIGO EN MATHEMATICA 6 PARA CALCULAR EL VALOR
DE UNA OPCIÓN EUROPEA DE COMPRA SOBRE UNA ACCIÓN
QUE NO PAGA DIVIDENDOS CON EL MODELO BINOMIAL. LOS
PARÁMETROS SON: EL PRECIO ACTUAL DE LA ACCIÓN, EL
PRECIO DE LIQUIDACIÓN, LA VIGENCIA DE LA OPCIÓN,
 EL INTERÉS LIBRE DE RIESGO, EL NÚMERO DE ETAPAS
EN QUE SE DIVIDE LA VIGENCIA Y LA VOLATILIDAD
SUBYACENTE *)

(*INPUT *)

S = 11.13; (* Precio Actual del bien subyacente *)
K = 11.14; (* Precio de liquidación *)
T = 1/6;  (* Vigencia de la opción *)
r = 0.07;  (* Tasa de interés libre de riesgo *)
M = 100; (* Etapas *)
\[Sigma] = 0.07; (* Volatilidad histórica *)

(* INICIO DE ALGORITMO *)

\[CapitalDelta]t = T/M;
u = Exp[\[Sigma] Sqrt[\[CapitalDelta]t]];
d = 1/u;
R = Exp[r*\[CapitalDelta]t];
p = (R - d)/(u - d);

(* Calcula los valores de S(n,j) para
n=M y j=0,1,...,M *)

For[n = 1, n <= M + 1, n++,
 W[n] = S*d^(M + 1 - n)*u^(n - 1)]

(*Calcula los valores de V(n,j) en la frontera,
es decir, en n=M y j=0,1,...,n*)

For[n = 1, n <= M + 1, n++,
 W[n] = Max[W[n] - K, 0]]

(*Calcula los valores de V(n,j), para
n=1,...,M-1 y j=0,1,...,n*)
```

```
For[i = M, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   W[n] = (p*W[n + 1] + (1 - p)*W[n])/R]];

(* Imprime la prima de la opción *)
Print ["Prima =", W[1]];

(* FIN DE ALGORITMO *)
```

4.1.5. Código en Mathematica 6 para opciones de venta americanas sin dividendos con ejercicio óptimo

El siguiente código calcula el ejercicio óptimo y la prima de una opción americana de venta sobre una acción que no paga dividendos. Se utilizó para calcular los Cuadros 4.3, 4.6 y 4.9.

```
(* CÓDIGO EN MATHEMATICA 6 PARA CALCULAR EL VALOR
DE UNA OPCIÓN AMERICANA SOBRE UNA ACCIÓN QUE NO
PAGA DIVIDENDOS CON EL MODELO BINOMIAL. CALCULA
TAMBIÉN LOS POSIBLES NODOS EN DONDE ES ÓPTIMO EL
EJERCICIO ANTICIPADO. LOS PARÁMETROS SON:
EL PRECIO ACTUAL DE LA ACCIÓN, EL PRECIO DE
LIQUIDACIÓN, LA VIGENCIA DE LA OPCIÓN, EL INTERÉS
LIBRE DE RIESGO, EL NÚMERO DE ETAPAS EN QUE SE
DIVIDE LA VIGENCIA Y LA VOLATILIDAD SUBYACENTE *)

(* INPUT *)

S = 23.5; (* Precio actual del subyacente *)
Ej = 25; (* Precio de liquidación *)
T = 1/4; (* Vigencia de la opción *)
r = 0.043; (* Interés Libre de riesgo *)
M = 50; (* Número de etapas *)
\[Sigma] = 0.21194; (* Volatilidad *)

(* INICIO DEL ALGORITMO *)

\[CapitalDelta]t = T/M;
u = Exp[\[Sigma] Sqrt[\[CapitalDelta]t]];
d = 1/u;
R = Exp[r*\[CapitalDelta]t];
p = (R - d)/(u - d);

(*Calcula los valores del precio subyacente S(n,j)
```

```
en cada nodo (n,j) para n=1,2,... y j=0,1,...,M*)

For[i = M + 1, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   precio[i][n] = S*u^(n - 1)*d^(i - n)]];

(*Calcula los valores de m(n,j)=Max[k-S(n,j),0]
para n=1,2,... y j=0,1,...,M*)

For[i = M + 1, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   m[i][n] = Max[Ej - precio[i][n], 0]]];

(*Calcula los valores de la opción en la frontera,
 es decir, en n=M, denotado por c(M,j)=Max[S(M,j)-K,0]
para j=0,1,...,M*)

For[n = 1, n <= M + 1, n++, W[M + 1][n] = m[M + 1][n];
 c[M + 1][n] = W[M + 1][n]]

(*Calcula la fórmula de inducción hacia atras
W(n,j)=(p*W(n+1,j+1)+(1-p)*W(n+1,j))/R, y los valores
de la opción para 0<=n<=M,
c(n,j)= Max[m(n,j),W(n,j)], para j=0,1,...,n*)

For[i = M, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   W[i][n] = (p*c[i + 1][n + 1]+(1 - p)*c[i + 1][n])/R;
   c[i][n] = Max[W[i][n], m[i][n]]]];

(*Calula e imprime los valores de los posibles
valores óptimos en los nodos (M-1,j) para
j=0,1,...,M-1*)

For[i = M, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   If[W[i][n] < m[i][n] && m[i][n] > 0,
    opt[i][n] = c[i][n];
    ganancia[i][n] = Ej - precio[i][n] - c[1][1],
    opt[i][n] = -1;
    ganancia[i][n] = -1]]];

For[i = M, i >= 1, i--,
  For[n = 1, n <= i, n++,
   If[opt[i][n] != -1 ,
    Print["posible optimo(", i - 1, ",", n - 1, ")=",
```

```
     opt[i][n] ]]]];

(*Imprime el valor de la opción*)

Print ["Put(", 0, ",", 0, ")=", c[1][1]];

(* FINAL DE ALGORITMO *)
```

4.2. Modelo del árbol aleatorio

4.2.1. Valuación de opciones americanas con dividendos

Ejemplo 4.2.1. *Supongamos una opción americana de compra sobre una acción de la empresa Gruma SAB de CV., emitida el día 01 de septiembre de 2011, el precio de cierre de la acción ese día fue de 23.5, el contrato se tomará con vigencia de un año.*

La tasa de interés libre de riesgo correspondiente a los CETES 175 en la semana del 30 de agosto de 2011 al 05 de septiembre de 2011 es igual al 4.3 %, mientras que la estimación de la volatilidad subyacente basada en una muestra de los datos históricos de los precios diarios al cierre de los más recientes 180 días es igual al 35.53 %.

Se supondrá que la acción paga dividendos continuos con una tasa del 10 % y que la opción tiene solo cuatro posibles oportunidades de ejercicio, en los tiempos 0, $T/3$, $2T/3$ *y* T. *El precio de liquidación será variable, tomando valores por debajo y por encima del precio actual del subyacente.*

El siguiente cuadro muestra todos los parámetros.

Parámetro	Valor
S	23.5
T	1
r	0.043
σ	0.3553
δ	0.1

Cuadro 4.11: Parámetros de la opción americana de compra sobre una acción que paga dividendos continuos de la empresa GRUMA SAB DE CV.

Se utilizará la siguiente notación.

- *EB: Valor del estimador bajo.*
- *EA: Valor del estimador alto.*
- *V_{AA}: Valor de la opción mediante el método del árbol aleatorio.*
- *V_{BD}: Valor de la opción mediante el método binomial con dividendos.*
- *M: Etapas en que se dividirá la vigencia (parámetro del método binomial).*
- *b: Número de ramas del árbol (parámetro del método del árbol aleatorio).*
- *n: Número de repticiones (parámetro del método del árbol aleatorio).*

	Árbol	aleatorio		V_{BD}
K	$b = 50$	$n = 100$	V_{AA}	$M = 100$
	EB	EA		
22	3.2124	3.3190	3.2657	4.4864
23	2.7863	2.8781	2.8322	3.9915
23.5	2.5345	2.6145	2.5745	3.7440
24	2.4470	2.5235	2.4852	3.5347
25	2.0558	2.1196	2.0877	3.1159

Cuadro 4.12: Valores de una opción americana de compra sobre una acción de la empresa Gruma SAB DE CV con dividendos

Comentarios

En el Cuadro 4.12, se compara el precio de la opción americana de compra correspondiente a los parámetros del Ejemplo 4.2.1 con el método binomial para valuar opciones de compra americanas sobre acciones que pagan dividendos continuos.

El método del árbol aleatorio funciona para valuar este tipo de opciones cuando el número de oportunidades de ejercicio es pequeño, por tal motivo se supone que existen únicamente 4 posibles fechas de ejercicio para la opción.

En el Cuadro 4.12, la primer columna muestra los diferentes precios de ejercicio que se tomaron, por debajo y por encima del precio actual de la acción.

En la segunda y tercer columna puede observarse el valor del estimador bajo y alto respectivamente, del método del árbol aleatorio, note que estos estimadores cumplen con el Teorema 3.2.7, pues siempre el valor del estimador bajo es menor que el del estimador alto.

En la cuarta columna se presenta el valor estimado de la opción mediante el método del árbol aleatorio, descrito anteriormente, en la columna cinco a manera de comparación se muestran los precios de la opción calculados por el método binomial con dividendos continuos.

El valor de la opción americana calculado mediante el método binomial sobrevalora el precio real de la opción americana de compra en comparación con el valor obtenido mediante el método del árbol aleatorio. La razón de este hecho es similar a la razón de porque el estimador alto tiene sesgo alto, explicada anteriormente en la Subsección 3.2.4 del Capítulo 3.

En la siguiente sección se presenta el código en MATLAB utilizado para calcular los valores de la opción mediante el método del árbol aleatorio, en el Cuadro 4.12.

4.2.2. Código en MATLAB R2010a para opciones de compra americanas con dividendos

En esta sección se presenta el código en MATLAB R2010a utlizado para calcular la columna cuatro en el Cuadro 4.12, se requirió hacer varias funciones en MATLAB, los códigos de estas también serán presentadas en esta sección.

Función valuacion.m

```
function [ ] = valuacion(  )

% Función valuacion.m : calcula el precio de una
% opción americana de venta con dividendos mediante
% el método del árbol aleatorio, también calcula el
% valor del estimador alto y bajo y las cotas
% derechas e izquierda del intervalo de confianza.

% PARÁMETROS DE ENTRADA

S=input('Introduzca el precio actual del subyacente');
k=input('Introduzca el precio de ejercicio');
T=input('Introduzca el tiempo de vigencia');
r=input('Introduzca la tasa de interès libre de riesgo');
```

```
vol=input('Introduzca la volatilidad');
m=input('Introduzca el nùmero de etapas');
d=m+1;
b=input('Introduzca el nùmero de ramas');
n=input('Introduzca el nùmero de repeticiones');
delta=input('Introduzca la tasa del dividendo');

% Calcula e imprime los estimadores bajo y alto,
% para esto utiliza la función estimador_promediado.m

estimador=zeros(1,2);
estimador =
estimador_promediado(S,k,T,r,vol,m,d,b,n,delta);
estimador_bajo = estimador(1,1);
estimador_alto = estimador(1,2);

estimador_bajo
estimador_alto

% Calcula e imprime la prima de la opción

x = [S-k,0];
y = max(x);
z = [y, estimador_bajo];
s = max(z);
prima =( 0.5 * s) + (0.5 * estimador_alto)

end
```

Función estimador_promediado.m

```
function[nodo_promediado] = estimador_promediado(
precio_actual,precio_ejer,vigencia,interes,
volatilidad, etapas, instantes, ramas, repeticiones,
dividendo)

% Funcion estimador_promediado: calcula el promedio
% de los estimadores alto y bajo para n repeticiones,
% utiliza la función estimador_bajo_alto.m

estimador=zeros(2,repeticiones);
estimadores=zeros(1,2);

for i=1:repeticiones
    estimadores = estimador_bajo_alto(precio_actual,
```

```
    precio_ejer, vigencia, interes, volatilidad,
    etapas, instantes, ramas, dividendo );
    estimador(1,i)=estimadores(1,1);
    estimador(2,i)=estimadores(1,2);
end

nodo_promediado=zeros(1,2);
nodo_promediado(1,1)=sum(estimador(1,:))/repeticiones;
nodo_promediado(1,2)=sum(estimador(2,:))/repeticiones;

% Calcula e imprime las cotas derech e izquierda
% del intervalo de confianza.

x = [ precio_actual - precio_ejer, 0 ];
y = max ( x );
z = [ y, nodo_promediado( 1, 1)
      - (norminv(0.95,0,1) * ( std( estimador(1,:) )
      / sqrt(repeticiones))) ];
cota_izquierda = max( z )
cota_derecha = nodo_promediado( 1, 2)
              + (norminv(0.95,0,1)
              * ( std( estimador(2,:) )
               / sqrt(repeticiones)))

end
```

Función estimador_bajo_alto.m

```
function [ nodo_estimado ] = estimador_bajo_alto
(precio_actual, precio_ejer, vigencia, interes,
volatilidad, etapas, instantes, ramas, dividendo)

% Calcula el estimador alto y bajo para un árbol,
% utiliza las funciones: instante_tiempo.m,
% variable_de_estado.m, nodo_terminal.m,
% nodo_bajo_intermedio.m, y
% nodo_alto_intermedio.m.

w=zeros(1,instantes);
v=zeros(ramas,instantes);
v2=zeros(ramas,instantes);

%Inicialización de parámetros
v(1,1) = precio_actual;
```

```
v2(1,1)=precio_actual;
w(1) = 1;

t=instante_tiempo( etapas, instantes, vigencia );

for j=2:instantes
    z=randn(1,1);
    v(1,j)
    = variable_de_estado(v(1,j-1), t(j)-t(j-1),
    interes, volatilidad, dividendo,z);
    v2(1,j)
    = variable_de_estado(v2(1,j-1), t(j)-t(j-1),
    interes, volatilidad, dividendo,z);
    w(j) = 1;
end

% Proceso del árbol aleatorio

j=instantes;
while (j>0)
  if ( j==instantes && w(j) < ramas ) %Caso 1:
  Calcula la variable de estado y sus respectivos
  nodos en la etapa final.

      v( w(j), j )
      = nodo_terminal( v(w(j),j), precio_ejer );
      v2( w(j), j )
      = nodo_terminal( v2(w(j),j), precio_ejer );

      z=randn(1,1);
      v( w(j)+1, j )
      = variable_de_estado( v(w(j-1), j-1),
      t(j)-t(j-1), interes, volatilidad,
      dividendo, z );
      v2( w(j)+1, j )
      = variable_de_estado( v2(w(j-1), j-1),
      t(j)-t(j-1), interes, volatilidad,
      dividendo, z );

      w( j ) = w( j ) + 1;

  elseif ( j==instantes && w(j) == ramas ) %Caso 2:
  Calcula el ùltimo nodo terminal

       v( w(j), j ) = nodo_terminal(v(w(j),j),
       precio_ejer);
```

```
     v2( w(j), j ) = nodo_terminal(v2(w(j),j),
     precio_ejer);
     w(j) = 0;
     j = j-1;

elseif ( j < instantes && w(j) < ramas )%Caso 3:
Calcula nodos intermedios y variables de estado

     v( w(j), j )
     = nodo_bajo_intermedio(v( w(j), j ), ramas,
     v(:,j+1), precio_ejer, interes, t(j+1)-t(j));
     v2( w(j), j )
     = nodo_alto_intermedio( v2( w(j), j ), v2(:,j+1),
     precio_ejer, ramas, interes, t(j+1)-t(j) );

     if ( j > 1 )

         z=randn(1,1);
         v( w(j)+1, j )
         = variable_de_estado(v(w(j-1), j-1),
         t(j)-t(j-1), interes, volatilidad,
         dividendo, z );

         v2( w(j)+1, j )
         = variable_de_estado( v2(w(j-1), j-1),
         t(j)-t(j-1), interes, volatilidad,
         dividendo, z );

         w(j) = w(j)+1;

         for i=j+1:instantes
             z=randn(1,1);
             v(1,i)=variable_de_estado( v(w(i-1),
             i-1), t(i)-t(i-1), interes,
             volatilidad, dividendo, z );
             v2(1,i)=variable_de_estado( v2(w(i-1),
             i-1), t(i)-t(i-1), interes,
             volatilidad, dividendo, z );

             w(i)=1;
         end
         j=instantes;
     else
         j=0;
     end
```

```
  elseif ( j < instantes && w(j) == ramas )%Caso 4:
  Calcula el nodo intermedio
      v(w(j),j)
      = nodo_bajo_intermedio( v( w(j), j ), ramas,
      v(:,j+1), precio_ejer,interes, t(j+1)-t(j) );
      v2(w(j),j) = nodo_alto_intermedio( v2( w(j), j ),
      v2(:,j+1), precio_ejer, ramas, interes,
      t(j+1)-t(j));


      w(j)=0;
      j=j-1;

  end %fin if

end %fin while

nodo_estimado=zeros(1,2);
nodo_estimado(1,1)=v(1,1);
nodo_estimado(1,2)=v2(1,1);

end
```

Función instante_tiempo.m

```
function [ t ] = instante_tiempo( etapas,
instantes, vigencia )

% Función instante_tiempo: calcula los instantes
% de tiempo en la vigencia de la opción.

t = zeros( 1, instantes );

for i = 2 : instantes
    t(i) =( (i-1)* vigencia ) / etapas;
end

end
```

Función variable_de_estado.m

```
function [precio_suby] = variable_de_estado(
```

```
precio_anterior, intervalo_tiempo, interes, sigma,
dividendo, numero_aleatorio )

% Función variable_de_estado: calcula la variable
de estado (precio subyacente).

precio_suby = precio_anterior * exp( (
( interes-dividendo-(sigma^2)/2 )
* intervalo_tiempo ) + (sigma *
sqrt(intervalo_tiempo) * numero_aleatorio) );

end
```

Función nodo_terminal.m

```
function [ estimador_terminal ] = nodo_terminal(
precio_actual, precio_ejer )

% Función nodo_terminal: calcula el estimador alto
y bajo terminal, casos 1 y 2.

z = [ precio_actual - precio_ejer, 0 ];

estimador_terminal = max(z);

end
```

Función nodo_bajo_intermedio.m

```
function [ estimador_bajo ] = nodo_bajo_intermedio
( precio, ramas, eta, precio_ejer, interes,
instante_de_tiempo_descuento )

% Calcula el estimador bajo intermedio, casos 3 y 4,
% utiliza la función descuento.m.

x = [ precio-precio_ejer, 0 ];
y = max(x);

for i = 1:ramas

    suma = 0;
```

```
    for j = 1:ramas
        if i ~= j

                suma = suma + ( eta(j)
                * descuento( interes,
                instante_de_tiempo_descuento ));

        end
    end

    if ( suma / (ramas-1) ) <= y % Nota: es menor
    o igual
        eta(i) = y;
    else
        eta(i)=eta(i)*descuento(interes,
        instante_de_tiempo_descuento);
    end
end

estimador_bajo = sum(eta) / ramas;

end
```

Función descuento.m

```
function [ descuento3] = descuento( interes,
instante_de_tiempo_descuento )

% Función descuento.m : calcula el factor
de descuento en cada etapa.

descuento3 = exp((-interes)
             * instante_de_tiempo_descuento);

end
```

Función nodo_alto_intermedio.m

```
function [ estimador_alto ] = nodo_alto_intermedio(
preciosuby, eta, precio_ejer, ramas, interes,
instante_de_tiempo_descuento )
```

```
% Calcula el estimador alto intermedio, casos 3 y 4.

x = [ preciosuby - precio_ejer, 0 ];
y = max(x);

suma = 0;
    for j = 1:ramas

                suma = suma + ( eta(j)
                * descuento( interes,
                instante_de_tiempo_descuento));
    end


w = [ y, (1 / ramas) * suma ];

estimador_alto = max( w );

end
```

Conclusiones

En la presente tesis se estudió el problema de valuación de opciones americanas desde un enfoque de programación dinámica, se analizaron, implementaron y compararon dos métodos para calcular el valor de una opción americana que se basan en la ecuación recursiva de programación dinámica, deducida en el Capítulo 2.

El primer método es el binomial, el cual es muy conocido y bastante utilizado, funciona tanto para opciones americanas sobre acciones que pagan dividendos, como para las que no pagan dividendos. La ventaja de este método radica en que su implementación es bastante sencilla, sin embargo, para opciones sobre múltiples activos subyacentes presenta un gran costo computacional.

El método binomial, se utilizó de manera ilustrativa para resolver el problema de valuación de opciones usando programación dinámica, esto mediante la ecuación recursiva particular para el problema de valuación de opciones americanas.

El segundo método también utiliza programación dinámica y mejora el valor de la opción comparado con el método binomial, pues, para una opción sobre un bien subyacente, el método binomial tiende a sobrevalorar la opción, esto debido a la forma en que se calcula la estrategia óptima de ejercicio.

Se trata del método del árbol aleatorio, desarrollado por Broadie y Glasserman en [12], para solucionar el problema de sobrevaloración de la opción, este método usa conjuntamente simulación Monte Carlo y programación dinámica.

La idea del método consiste en calcular dos estimadores para el valor de la opción, el primero, encuentra la estrategia óptima de manera similar a como se encuentra con el método binomial, por consiguiente, el valor esperado de este estimador es mayor que el valor real de la opción, y lo llaman estimador alto. Para el segundo estimador se hace una pequeña pero significativa modificación, pues se calcula usando también la ecuación recursiva de programación dinámica, sin embargo, el valor esperado de este estimador es menor que el valor real de la opción, por esta razón es llamado estimador bajo.

Finalmente, usando ambos estimadores se obtiene un intervalo de confianza para el precio real de la opción, el cual tiene la propiedad de que puede hacerce tan estrecho como se quiera aumentando los parámetros de entrada, que son en este caso, el número de ramas por nodo y el número de repeticiones del proceso.

Una ventaja más del método del árbol aleatorio es que resulta bastante útil cuando se tienen opciones sobre más de dos activos subyacentes, pues utiliza la metodología de Monte Carlo, para la cual se sabe que su tasa de convergencia no depende del número de variables de estado, contrariamente a los métodos de rejillas como es el caso del binomial. Además, al utilizar programación dinámica para hallar la estrategia óptima de ejercicio mediante los estimadores alto y bajo, garantiza una buena aproximación al valor real de la opción.

El trabajo de tesis puede ser extendido en varias direcciones, mencionaremos algunas a continuación.

- Implementación del algoritmo del método del árbol aleatorio estudiado para el caso multidimensional (véase [12]).
- Estudio y posible implementación para el caso en el que el número de ramas por nodo no es constante, en el método del árbol aleatorio, o bien, estudio de variaciones del estimador bajo, por ejemplo, usando una cantidad de ramas por nodo para determinar la decisión de ejercicio y la cantidad restante para evaluar la ganancia resultante (véase [12]).

Apéndice A

Estimación de la volatilidad histórica

La volatilidad del bien subyacente representa la capacidad que posee el bien subyacente para variar dentro de un cierto periodo. Estadisticamente es la dispersión del movimiento en el precio subyacente (véase [13]).

Para cualquier variable aleatoria, el nivel de dispersión de los posibles valores que puede tomar dicha variable, se puede medir por medio de la varianza o de la desviación estándar para el precio del bien subyacente en el cual esta basado una opción, esta dispersión de los posibles precios está dada por la volatilidad subyacente, por lo que la podemos asociar con la desviación estándar de las variaciones de los precios del bien subyacente.

Los diferentes estudios empíricos que se han realizado sobre subyacentes, han reflejado que aunque las variaciones diarias de diferentes subyacentes no se comportan de manera exacta como una normal, su distribución se aproxima mucho a las características de una distribición de este tipo.

La hipótesis que se utiliza en el modelo de Black-Scholes sobre las variaciones de los precios del bien subyacente es que, estas variaciones se comportan de acuerdo a una distribución lognormal, es decir, que el logaritmo de estos rendimientos siguen una distribución normal, una consecuencia de este supuesto que es bastante conveniente, es la de poder estimar la volatilidad de los activos subyacentes en términos logarítmicos.

Una aproximación que funciona bien, es la volatilidad histórica, esto es, la volatilidad del subyacente calculada mediante datos históricos de los precios del subyacente, este cálculo se puede hacer usando los precios de cierre del bien subyacente.

El precio de las acciones se observa comúnmente en itervalos fijos de tiempo (días, semanas, meses), en este caso se observarán diariamiente durante los 90 a 180 días más recientes.

Sean

n: número de observaciones.

S_i: precio de cierre del subyacente en la fecha i $(i = 0, 1, ..., n)$.

P_r: precio relativo.

El precio relativo se calcula de la siguiente forma:

$$P_r = \frac{S_i}{S_{i-1}}, \tag{A.0.1}$$

mientras que el rendimiento diario, es el logaritmo del precio relativo, es decir:

$$y_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right). \tag{A.0.2}$$

La media muestral de la variable aleatoria Y es:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{A.0.3}$$

es decir,

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right). \tag{A.0.4}$$

La estimación insesgada de la varianza muestral de la variable aleatoria Y viene dada por:

$$\widehat{\sigma_y}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2, \tag{A.0.5}$$

sustituyendo (A.0.3) en (A.0.5) obtenemos:

$$\widehat{\sigma_y}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \mu\right)^2, \tag{A.0.6}$$

por lo que, la estimación de la volatilidad histórica es:

$$\widehat{\sigma_y} = \sqrt{\widehat{\sigma_y}^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \mu\right)^2}. \tag{A.0.7}$$

Esta ecuación nos da la volatilidad diaria del precio subyacente, entonces, la volatilidad subyacente durante cualquier periodo t es:

$$\sigma = \widehat{\sigma_y}\sqrt{t}. \tag{A.0.8}$$

Apéndice B

Sucesiones predecibles y martingalas

Consideremos un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, con $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}$ y para toda $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$, equipada con una filtración $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$.

Definición B.0.1. Una sucesión $\{X_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ de variables aleatorias es adaptada a la filtración, si para todo $t = 0, 1, \ldots, T$, X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.

Definición B.0.2. Una sucesión adaptada de variables aletaorias $\{X_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ es una martingala a tiempo discreto con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$, si

$$\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{B.0.1}$$

Definición B.0.3. Una sucesión adaptada $\{Z_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ de variables aleatorias es predecible si, para toda $t = 1, \ldots, T$, Z_t es $\mathcal{F}_{t-1}$-medible.

Proposición B.0.2. *Sea $\{M_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ una martingala y $\{Z_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ una sucesión predecible, con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$. Sea $\Delta M_t = M_t - M_{t-1}$, entonces, la suceción $\{X_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ definida de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} X_0 &= Z_0 M_0 \\ X_t &= Z_0 M_0 + Z_1 \Delta M_1 + \cdots + Z_t \Delta M_t, \;\; t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$.

Demostración: Note que $\{X_t\}$ es una sucesión adaptada, además, para todo $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
E[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] & \\
&= E[Z_{t+1}(M_{t+1} - M_t)|\mathcal{F}_t] \\
&= Z_{t+1}E[(M_{t+1} - M_t)|\mathcal{F}_t] \\
&= Z_{t+1}\Big(E[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] - E[M_t|\mathcal{F}_t]\Big) \\
&= Z_{t+1}(M_t - M_t) \\
&= 0. \qquad \text{(B.0.2)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(X_t|\mathcal{F}_t) = X_t.$$

Por lo tanto, $\{X_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ es una martingala. ■

Proposición B.0.3. *Una sucesión adaptada de variables aleatorias $\{M_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ es una martingala si y sólo si para cualquier sucesión predecible $\{Z_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$, se tiene que:*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} Z_t \Delta M_t\right) = 0.$$

Demostración: Primero supongamos que $\{M_t\}$ es una martingala, entonces, la sucesión $\{X_t\}$ definida de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= 0 \\
X_t &= \sum_{t=1}^{T} Z_t \Delta M_t, \;\; t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

para cualquier proceso predecible $\{Z_t\}$, es también una martingala de acuerdo a (B.0.2).

Por lo tanto $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) = 0$.

Ahora veamos la necesidad, note que si $j \in \{1, \ldots, T\}$, podemos asociar la sucesión $\{Z_t\}$ definida por:

$$
\begin{aligned}
Z_n &= 0 \quad n \neq j+1 \\
Z_{j+1} &= \mathbf{1}_A,
\end{aligned}
$$

para cualquier conjunto A $\mathcal{F}_j$-medible.

Note que $\{Z_t\}$ es predecible y $\mathbb{E}\Big(\sum_{t=1}^{T} Z_t \Delta M_t\Big) = 0$ se convierte en:

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A(M_{j+1} - M_j)) = 0.$$

Luego, $\mathbb{E}(M_{j+1}|\mathcal{F}_j) = M_j$. Por lo tanto $\{M_t\}$ es una martingala. ■

Apéndice C

Separación de conjuntos convexos

Definición C.0.4. Se dice que un conjunto K de $\mathbb{R}^n$ es convexo si, dados dos puntos cualesquiera en K, el segmento que los une, está totalmente contenido en K, es decir, si la combinación convexa $(1-\lambda)x+\lambda y \in K$, para $x, y \in K$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definición C.0.5. Un cono convexo es un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ que es convexo, no vacío y tal que si, $x \in A$, entonces, $\lambda x \in A$, para todo $\lambda \geq 0$.

El siguiente teorema es conocido como Teorema de Separación de Conjuntos Convexos, el cual es usado en el Capítulo 1.

Teorema C.0.4. *Sea C un conjunto convexo cerrado, el cual no contiene el origen, entonces, existe, un funcional lineal real ξ, definido en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$, tal que, para todo $x \in C$,*

$$\xi(x) \geq \alpha.$$

En particular, el hiperplano $\xi(x) = 0$ no intersecta a C.

Demostración: Sea λ un número real no negativo, tal que la bola cerrada $B(\lambda)$ con centro en el origen y radio λ intersecta a C.

Sea x_0 el punto, donde la función $x \to \|x\|$ alcanza su mínimo en el conjunto compacto $C \cap B(\lambda)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclideana. Se sigue que, para todo $x \in C$,

$$\|x\| \geq \|x_0\|.$$

El vector x_0 no es más que la proyección al origen en el conjunto convexo C. Si consideramos $x \in C$, entonces, para todo $t \in [0, 1]$, $x_0 + t(x - x_0) \in C$, pues C es convexo. Luego,

$$\|x_0 + t(x - x_0)\|^2 \geq \|x_0\|^2,$$

viendo esta norma como un producto punto y realizando su desarrollo, tendremos que

$$x_0 \cdot x \geq \|x\|^2 \geq 0,$$

para cualquier $x \in C$. Lo que completa la demostración ■

Teorema C.0.5. *Considere un conjunto K compacto y convexo, y un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$. Si V y K son disjuntos, entonces, existe un funcional lineal ξ definido en $\mathbb{R}^n$, el cual satisface lo siguiente:*

1. *Para todo $x \in K$, $\xi(x) > 0$.*
2. *Para todo $x \in V$, $\xi(x) = 0$.*

Por lo tanto, el subespacio V esta incluido en un hiperplano que no intersecta a K.

Demostración: Considere el conjunto

$$C = K - V = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (y, z) \in K \times V,\ x = y - z\}.$$

El conjunto C es convexo y cerrado, pues V es cerrado y K es compacto, además no contiene al origen, entonces, por el Teorema C.0.4, se puede encontrar un funcional lineal ξ definido en $\mathbb{R}^n$, y $\alpha > 0$, tal que, para todo $x \in C$:

$$\xi(x) \geq \alpha.$$

Entonces, para todo $y \in K$ y $z \in V$,

$$\xi(y) - \xi(z) \geq \alpha. \tag{C.0.1}$$

Fijando y, y aplicando (C.0.1) a λz, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \xi(y) - \xi(\lambda z) \geq \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \xi(y) - \lambda \xi(z) \geq \alpha \\ &\Longleftrightarrow \quad \xi(z) = 0, \quad \forall z \in V \\ &\Longrightarrow \quad \xi(y) \geq \alpha, \quad \forall y \in K \end{aligned}$$

Finalizando así la demostración del Teorema. ■

Bibliografía

[1] Amin, K.I. and A. Khanna, *Convergence of American option values from discrete-to continuos-time financial models*, Mathematical Finance Vol. 4, 289-304, 1994.

[2] Bacheliere Louis, *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1900.

[3] Barone-Adesi G., Whaley R.E., *Efficient analytic approximation of American option values*, Journal of Finance, Vol. 42, 301-320, 1987.

[4] Bäuerle N., Rieder U., *Markov decision processes with applications to finance*, Springer, ISBN: 978-36-42-18-32-32, 2011.

[5] Bellman Richard, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, ISBN: 0-486-42809-5, 1957.

[6] Bellman Richard, Stanley Lee E. , *Functional equations in dynamic programming*, Aequationes Mathematicae, Vol. 17, 1-18, 1978.

[7] Bjerksund P., Stensland G. , *Closed form approximations of american options*, Scandinavian Journal of Management, Vol. 20, 761-764, 1993.

[8] Bjerksund P., Stensland G. , *Closed form valuation of american options*, Working Paper, NHH, 2002.

[9] F. Black and M. Scholes. , *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, 637-59, 1973.

[10] Boyle, P. P., Evine, J., and Gibbs, S., *Numerical evaluation of multivariate contingent claims.*, Review of Financial Studies, Vol. 2, 241-250, 1989.

[11] Brennan M., Schwartz E. , *Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, 461-474, 1978.

[12] Broadie M. and Glasserman, *Pricing American-style securities using simulation*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol.21, 1323-1352, 1997.

[13] Climent Hernández J.A. , *Valuación de opciones*, Vinculos Matemáticos, UNAM, No.38, 2005.

[14] Cox C.J., Ross S.A., Rubinstein M. , *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, 229-263, 1979.

[15] Díaz Tinoco J., Hernandez Trillo F. , *Futuros y opciones financieras : una introducción*, Limusa, Tercera edición, ISBN: 968-18-6038-1, 2003.

[16] Férnandez P. , *Opciones, Futuros e instrumentos derivados*, Deusto, Cuarta edición, ISBN: 978-84-234-1434-5, 1996.

[17] Follmer H. y Schied A. *Stochastic finance: an introduction in discrete time*, Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter & Co., Vol 27, ISBN: 978-3-11-021804-6, 2004.

[18] Font Belaire M.B. , *Programacion Matemática para la Economia y la Empresa*, Universitat de València, ISBN: 978-84-370-7612-6, 2006.

[19] Geske, R. , *The valuation of compound options*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, 63-81, 1979.

[20] Geske R., Johnson H. E. *The american put valued analytically*, Journal of Finance, 1984.

[21] Girsanov I.V., *On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures*, Journal of Theory of Probability and its Applications, Vol. 5, 285-301, 1962.

[22] Glasserman P. , *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, ISBN: 0-387-00451-3, 2004.

[23] Gut A., *Stopped random walks: limit theorems and applications*, Springer, ISBN: 978-0-387-87834-8, 1998.

[24] Hérnandez Lerma O., *Discrete-time markov control processes : basic optimality criteria*, Springer, Vol. 30, ISBN: 0-387-94579-2, 1996.

[25] Higham D.J. , *Nine ways to implement the binomial method for option valuation in MATLAB*, SIAM Review , Vol. 44, 661-677, 2002.

[26] Hull Joh , *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall, Sexta edición, ISBN: 0-13-149908-4, 2006.

[27] Johnson, H. E. , *An analytic approximation of the american put price*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 18, 141-148, 1983.

[28] Katz, E., *Options Essential Concepts and Trading Strategies*, The Options Institute, CBOE, ISBN: 0-07-134169-2, 1990.

[29] Lamberton D., Lapeyre B., *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman and Hall, ISBN: 0-412-71800-6, 1996.

[30] Lamothe Férnandez Prosper , *Opciones financieras y productos estructurados*, McGraw-Hill, ISBN: 84-481-3926-7, 1993.

[31] Lamothe Férnandez Prosper, *Online Learning Centre*, http://www.mhe.es/universidad/finanzas/lamothe /informacion.html.

[32] MathWorks, *MATLAB and Simulink for Technical Computing*, http://www.mathworks.com/help/toolbox/finderiv /optstockbybjs.html

[33] Merton R. C., *Theory of rational option pricing.* Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, 141–183, 1973.

[34] Powell Firth N. *High Dimensional American Options*, Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, University of Oxford, 2005.

[35] Privault Nicolas, *Notes on Stochastic Finance*, http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/MA5182/notes.pdf, 2008.

[36] Rodríguez Uría M.V., Alonso García S.M., Pérez Gladish B.M. , *Optimización dinámica: teoría del control óptimo*, Universidad de Oviedo, ISBN: 84-7468-995-3, 1997.

[37] Salazar Gonzalés J.J. , *Programación matemática*, Díaz de Santos, Primera edición, ISBN: 84-7978-504-7, 2001.

[38] van der Hoek John, Elliott R.J. , *Binomial Models in Finance*, Springer, ISBN: 10 0-387-25898-1, 2006.

[39] Venegas Martínez F., *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, GENGAGE Learning, Segunda edición, ISBN:978-970-830-008-7, 2008.

[40] Whaley, R. E. , *On the valuation of American call options on stocks with known dividends* , Journal of Financial Economics, Vol. 9, 207-211, 1981.