

**Benemérita Universidad Autónoma de
Puebla**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

**El Método Probabilístico aplicado al
estudio del número de k -dominación total**

Tesis

Presentada para obtener el grado de
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta

Saylí María Sigarreta Ricardo

Director de Tesis
Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla, Puebla. Noviembre 2022



BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

SAYLÍ MARÍA SIGARRETA RICARDO

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 14 de noviembre de 2022, con la tesis titulada:

El método probabilístico aplicado al estudio del número de k -dominación total

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 24 de noviembre de 2022

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

A mi PADRE

Agradecimientos

Principalmente a DIOS.

A mis PADRES Y HERMANA por su apoyo incondicional, paciencia y comprensión en cada etapa de mi formación académica.

A mi director de tesis, Dr. Hugo Adán Cruz Suárez por su tiempo y valiosa ayuda durante estos dos años de aprendizaje.

A mis sinodales, Dra. Hortensia Reyes Cervantes, Dr. Carlos Guillén Galván y Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez por sus atentas lecturas y sugerencias, que sin duda mejoraron en gran parte este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado para la realización de esta maestría.

AGRADECIMIENTOS

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	7
1. Una Cota Superior Probabilística para el Número de k-Dominación Total	11
1.1. Método Probabilístico	11
1.2. Teorema Principal	12
1.3. Análisis Comparativo Caso $k = 1$	18
1.4. Análisis Comparativo Caso $k = 2$	22
2. Aspecto Algorítmico	29
2.1. Algoritmos asociados	30
2.2. Estrategia Algorítmica Caso 1	32
2.3. Estrategia Algorítmica Caso 2	35
3. Conclusiones	39
Bibliografía	40

Introducción

En este trabajo consideraremos grafos simples $G = (V, E)$ con un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E . En lo subsecuente utilizaremos la siguiente notación, para un grafo G la vecindad $\{u \in V : uv \in E\}$ de un vértice $v \in V$, el grado $|\{u \in V : uv \in E\}|$ de un vértice $v \in V$, el grado mínimo y el grado máximo se denotarán por $N(v)$, $deg(v)$, δ y Δ , respectivamente. Luego, dado un número entero positivo k , un conjunto $S \subseteq V$ es un conjunto k -total dominante del grafo G , si cada vértice $v \in V$ tiene al menos k vecinos en S . En tal caso, es necesario tener $k \leq \delta$ y $|S| \geq k + 1$, además, notemos que si el grafo G no es conectado, no van a existir conjuntos que verifiquen la definición. Por último, el número de dominación k -total se define como $\gamma_{kt}(G) = \min\{|S| : S \text{ es un conjunto } k\text{-total dominante de } G\}$.

Para reafirmar el concepto en un ejemplo práctico, supongamos que las interacciones entre los empleados de cierta empresa se describen en la Figura 1 y tenemos la tarea de proponer los miembros que conformarán el comité laboral, si reflexionamos sobre las características deseables que nos permitan filtrar al conjunto de trabajadores, para seleccionar los elementos adecuados, sin duda alguna, se podría pensar en que cada empleado que no pertenezca a la junta conozca al menos a un miembro del comité, con esto se facilita la comunicación y se garantiza que todos los trabajadores se sientan representados con una parte de la comisión. Por otro lado, también se esperaría la misma situación a nivel consejo, así se evitaría la sensación de aislamiento, aumentando por consecuencia la cooperación. Basándonos en estos criterios, obtenemos que este problema se puede traducir a identificar los conjuntos totales dominantes del grafo en cuestión, es decir, los posibles comites son

los conjuntos totales dominantes del grafo.

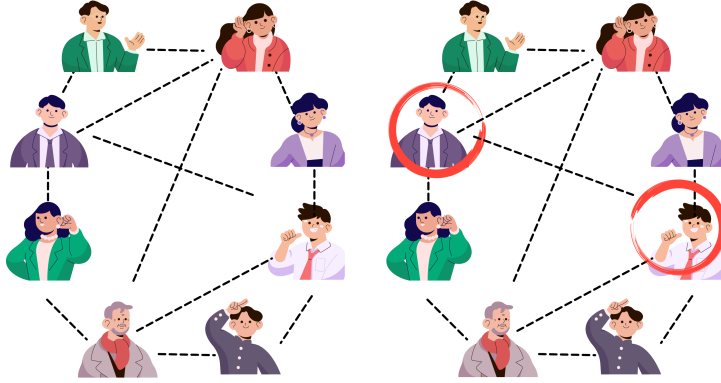


Figura 1: Una solución al problema de la elección del comité.

A manera de resumen, la dominación, un tema bien estudiado en la teoría de grafos, se definió por primera vez como un concepto teórico en 1958, en relación con varios problemas del tablero de ajedrez [5, 19]. Dos décadas más tarde Cockayne, Dawes y Hedetniemi [8] trabajaron la idea de dominar todos los vértices del grafo, en lugar de dominar simplemente los vértices fuera del conjunto y establecieron el concepto de conjunto total dominante. Luego, en años recientes, Henning y Kazemi [11] motivados por otras variaciones de la dominación, consideraron una generalización nombrada k -dominación total. Actualmente, el concepto de dominación y sus variaciones forman un área rica de la Teoría de Grafos, con diversos conceptos útiles y mucho interés práctico en campos como la Teoría de Redes Sociales, la Informática, la Ingeniería Eléctrica [17, 18] entre otros. Un resumen más completo de la dominación total en grafos se puede encontrar en [10].

A pesar de los cientos de trabajos publicados que cubren aspectos teóricos, algorítmicos y de aplicación sobre la dominación en grafos, se siguen identificando oportunidades de investigación, manteniéndose así, un interés creciente en el tema durante ya más de dos décadas. En particular, debido a que en los aspectos algorítmicos relacionados con el problema de determinar un conjunto k -total dominante mínimo de G , existen complejidades [20], muchos estudios se centran en proponer cotas superiores para $\gamma_{kt}(G)$ en térmi-

nos de diferentes parámetros del grafo, por ejemplo el orden, el grado máximo y el grado mínimo. Para un tratamiento completo sobre las cotas del número de k -dominación total de un grafo remitimos al lector a [13, Capítulo 2].

Por otro lado el método probabilístico es una poderosa herramienta para abordar muchos problemas de las Matemáticas Discretas y particularmente en la Teoría de Grafos se ha convertido en una técnica valiosa y ampliamente utilizada [2], que ha evolucionado de manera intensiva desde sus inicios en 1947, exhibiendo a Paul Erdős como su pionero, a partir de su trabajo [9]. Este método, a grandes rasgos funciona como sigue: al enfrentarnos a demostrar que existe una estructura con ciertas propiedades deseadas, se define un espacio probabilístico adecuado de las estructuras y luego se demuestra que un elemento elegido al azar en este espacio tiene las propiedades deseadas con una probabilidad positiva. El caso más elemental del método probabilístico es el método del primer momento, que busca obtener información de una variable aleatoria X en términos de su esperanza (o primer momento) $\mathbb{E}(X)$.

En base a lo planteado anteriormente en este trabajo se fusionaron estas dos importantes áreas de las Matemáticas para estudiar la Teoría de Dominación. Específicamente, se estableció una nueva cota superior probabilística para el número de k -dominación total de un grafo G . Además se exhibieron elementos teóricos y prácticos que demostraron una mejora sobre resultados existentes. Reafirmando que el método probabilístico representa una poderosa herramienta para abordar muchos problemas en la Teoría de Grafos.

Capítulo 1

Una Cota Superior Probabilística para el Número de k -Dominación Total

Este capítulo tiene la finalidad de establecer y analizar la nueva cota superior probabilística para el número de k -dominación total. En primera instancia se presentará el método del primer momento formalmente, para luego, dar paso al teorema principal, donde se expone la cota superior a tratar.

1.1. Método Probabilístico

Atendiendo al hecho de que trabajaremos sobre grafos de orden n un natural cualquiera, para definir el espacio de probabilidad adecuado consideremos una secuencia de n ensayos Bernoulli, que consta de n observaciones independientes, con la propiedad de que cada observación tiene sólo dos posibles resultados, llamados éxito (1) y fracaso (0). La probabilidad de éxito en un ensayo dado es p y la probabilidad de fracaso es $1 - p$. Si definimos

$$\Omega = \{\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) : \omega^{(i)} \in \{0, 1\} \text{ con } i = 1, \dots, n\},$$

$$A_i = \{\omega \in \Omega : \omega^{(i)} = 1\}, i \in \{1, \dots, n\}$$

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

y consideramos ω_* elemento de Ω con 1 en las primeras k posiciones y 0 en las $n - k$ restantes, obtenemos que

$$\{\omega_*\} = A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cdots \cap A_n^c$$

luego, como los ensayos son independientes y $\mathbb{P}(A_i) = p$ para todos los i , la probabilidad asignada es

$$\mathbb{P}(\{\omega_*\}) = \mathbb{P}(A_1) \cap \cdots \cap \mathbb{P}(A_k) \cap \mathbb{P}(A_{k+1}^c) \cdots \cap \mathbb{P}(A_n^c) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Por otro lado, tomando en cuenta que existen $\binom{n}{k}$, $\omega \in \Omega$ con exactamente k posiciones pobladas con un 1, podemos concluir que la probabilidad de que ocurran k éxitos es

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Además, por el Teorema Binomial $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$, por lo tanto Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$ (Conjunto Potencia de Ω) y la función de probabilidad antes definida consituyen un espacio de probabilidad adecuado sobre el cual estableceremos los resultados posteriores.

Con estos puntos claros para X , una variable aleatoria sobre el espacio de probabilidad construido anteriormente, el Método del Primer Momento [2] establece que $X \leq \mathbb{E}(X)$ con probabilidad positiva y $\mathbb{E}(X) \leq X$ con probabilidad positiva. Enfocándonos en la primera desigualdad, este método probabilístico asegura que existe $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) \leq \mathbb{E}(X)$. Verifiquemos tal aseveración por contradicción, si suponemos que $\mathbb{E}(X) < X(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, podemos concluir tomando a $f(x)$ como la función de densidad asociada a la variable aleatoria X que $\mu := \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx > \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot f(x) dx = \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mu \cdot 1 = \mu$, lo cual representa una contradicción, completando la prueba.

1.2. Teorema Principal

Teorema 1.2.1. *Para un número entero positivo fijo k , si $G = (V, E)$ es un grafo conectado de orden n , grado mínimo $\delta \geq k$ y $p \in (0, 1)$, entonces*

$$\gamma_{kt}(G) \leq np + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v \in V} (k-i) \binom{\deg(v)}{i} p^i (1-p)^{\deg(v)-i}. \quad (1.1)$$

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

Demostración. Sea $p \in (0, 1)$, formamos un conjunto A eligiendo cada vértice v de G independientemente al azar con $\mathbb{P}(v \in A) = p$. Denotamos $C_{1,i} = \{v \in V : v \in A \text{ y } |N(v) \cap A| = i\}$ con $i = 0, 1, \dots, k-1$ y para cada $v \in C_{1,i}$ se eligen $u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)} \in N(v) \cap A^c$, y con esta regla se define un nuevo conjunto $S_{1,i} = \{u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)} : v \in C_{1,i}\} \subseteq A^c$. Luego, para $i = 0, 1, \dots, k-1$ se introduce $C_{2,i} = \{v \in V : v \notin A \text{ y } |N(v) \cap A| = i\}$ y de la misma manera se propone el conjunto $S_{2,i} = \{u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)} : v \in C_{2,i}\} \subseteq A^c$. Es obvio que el conjunto $D = A \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})$ es un conjunto k -total dominante del grafo G . Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} |D| &= |A \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})| \\ &= |A| + |(\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})| \end{aligned}$$

ya que $A \cap ((\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})) = \emptyset$. La linealidad de la esperanza establece que

$$\mathbb{E}(|D|) = \mathbb{E}(|A|) + \mathbb{E}(|(\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})|).$$

Es posible demostrar que $|A|$ es una variable aleatoria $Bin(n, p)$, por lo tanto $\mathbb{E}(|D|) = np + \mathbb{E}(|(\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})|)$. Además se verifica que

$$\begin{aligned} |(\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})| &\leq |\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}| + |\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} |S_{1,i}| + \sum_{i=0}^{k-1} |S_{2,i}| \end{aligned}$$

y por construcción $|S_{1,i}| \leq (k-i)|C_{1,i}|$ y $|S_{2,i}| \leq (k-i)|C_{2,i}|$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$, en consecuencia

$$\mathbb{E}(|D|) \leq np + \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\mathbb{E}(|C_{1,i}|) + \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\mathbb{E}(|C_{2,i}|). \quad (1.2)$$

Para encontrar $\mathbb{E}(|C_{1,i}|)$ con $i = 0, 1, \dots, k-1$ escribimos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y descomponemos $|C_{1,i}| = \sum_{j=1}^n I_{1,i}^j$ donde $I_{1,i}^j$ es la variable aleatoria indicadora del evento $\{v_j \in C_{1,i}\}$, así $\mathbb{E}(|C_{1,i}|) =$

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

$\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(I_{1,i}^j)$. Por otro lado $\mathbb{P}(I_{1,i}^j) = \mathbb{P}(\{v_j \in A\} \cap \{|N(v_j) \cap A| = i\})$ por independencia $\mathbb{P}(I_{1,i}^j) = p\mathbb{P}(|N(v_j) \cap A| = i)$. Observe que $|N(v_j) \cap A|$ es una variable aleatoria $Bin(deg(v_j), p)$, entonces $\mathbb{P}(I_{1,i}^j) = p \binom{deg(v_j)}{i} p^i (1-p)^{deg(v_j)-i}$ y

$$\mathbb{E}(|C_{1,i}|) = \sum_{v \in V} p \binom{deg(v)}{i} p^i (1-p)^{deg(v)-i}. \quad (1.3)$$

Además, de forma similar se puede obtener que

$$\mathbb{E}(|C_{2,i}|) = \sum_{v \in V} (1-p) \binom{deg(v)}{i} p^i (1-p)^{deg(v)-i}. \quad (1.4)$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.3) y (1.4) en (1.2), resulta que

$$\mathbb{E}(|D|) \leq np + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v \in V} (k-i) \binom{deg(v)}{i} p^i (1-p)^{deg(v)-i}.$$

Finalmente, por el método del primer momento [2]

$$\gamma_{kt}(G) \leq np + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v \in V} (k-i) \binom{deg(v)}{i} p^i (1-p)^{deg(v)-i}. \quad (1.5)$$

Esto completa la demostración del Teorema 1.2.1. □

Consideremos un grafo conectado $G = (V, E)$ de orden n , grado mínimo $\delta \geq k$ y grado máximo Δ , para $w \in [0, 1]$ denotemos

$$P_G(w) = n - nw + \sum_{j=\delta}^{\Delta} a_j \left(kw^j + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{j}{i} (1-w)^i w^{j-i} \right),$$

donde $a_j = |\{v \in V : deg(v) = j\}|$ con $j \in \{\delta, \delta+1, \dots, \Delta\}$. Luego sustituyendo $w = 1-p$ en la cota superior obtenida en el Teorema 1.2.1, se sigue que $\gamma_{kt}(G) \leq P_G(w)$ para todo $w \in [0, 1]$.

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

Debido a que $P_G(w)$ es una función continua en $[0, 1]$, haciendo uso del Teorema del Valor Máximo y Mínimo [4], sabemos que $P_G(w)$ alcanza un mínimo en $[0, 1]$. En consecuencia, $P_G(w^*)$ es la mejor cota superior posible para $\gamma_{kt}(G)$, donde w^* es un mínimo del polinomio $P_G(w)$ con $w \in [0, 1]$. Además, para $k = 1$, debido a que $P_G(0) = P_G(1) = n$ y $\frac{d^2 P_G}{dw^2} > 0$ para $w \in (0, 1)$, aplicando el Teorema de Rolle y utilizando el hecho de que $P_G(w)$ es estrictamente convexa en $(0, 1)$, podemos afirmar que $P_G(w)$ debe tener un único mínimo en $(0, 1)$. Por otro lado, si $k \geq 2$, se garantiza que $w = 1$ no es un mínimo porque $P_G(1) = kn > n = P_G(0)$, por esta razón los mínimos se encuentran en el intervalo $[0, 1)$.

Observación 1.2.2. *La cota superior $P_G(w^*)$ dada en el Teorema 1.2.1 se alcanza, véase, por ejemplo, los grafos ilustrados en las Figuras 1.1 y 1.2 para los casos $k = 1$ y $k = 2$ respectivamente. En la descripción de estas imágenes se muestra la función $P_G(w)$ particular de los grafos expuestos y el valor de $P_G(w^*)$. Es importante mencionar, que en las bibliografías citadas se presentan la demostraciones de los valores de los parámetros, apoyo fundamental para verificar la igualdad buscada.*

Como paso posterior demostraremos el siguiente resultado importante, que representa una propiedad decisiva en futuras observaciones.

Teorema 1.2.3. *Sea $k \geq 1$ un número entero positivo. Para cualquier grafo conectado G con n vértices, grado mínimo $\delta \geq k$ y grado máximo Δ , entonces $P_G(w) \leq h_\delta(w)n$ para todo $w \in [0, 1]$, donde*

$$h_\delta(w) = 1 - w + kw^\delta + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{\delta}{i} (1-w)^i w^{\delta-i}.$$

Demostración. Para $r \geq \delta$ definamos la siguiente sucesión de funciones en $[0, 1]$

$$f_r(w) = kw^r + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{r}{i} (1-w)^i w^{r-i}.$$

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

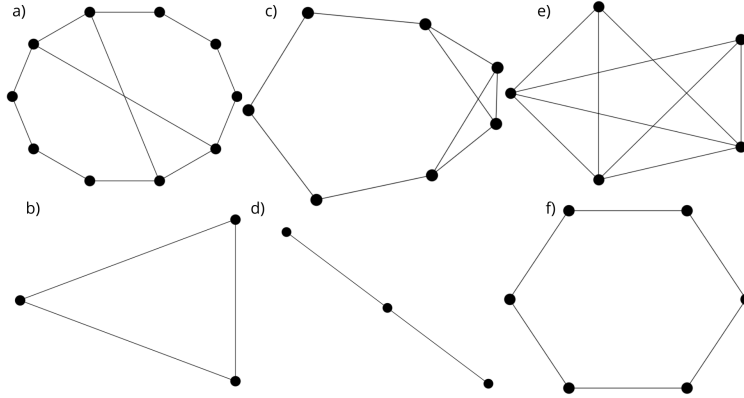


Figura 1.1: Algunos ejemplos de grafos donde la cota se alcanza: a) $P_G(w) = 10 - 10w + 6w^2 + 4w^3$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_t(G) = 6$ (ver [7]) b) $P_G(w) = 3 - 3w + 3w^2$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_t(G) = 2$ (ver [7]) c) $P_G(w) = 7 - 7w + 3w^2 + 4w^3$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_t(G) = 4$ (ver [7]) d) $P_G(w) = 3 - w + w^2$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_t(G) = 2$ e) $P_G(w) = 5 - 13w + 24w^2 - 14w^3 + 3w^4$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_t(G) = 2$ f) $P_G(w) = 6 - 6w + 6w^2$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_t(G) = 4$.

Afirmamos que $\{f_r\}_{r \geq \delta}$ es decreciente, es decir, $\blacktriangle_r := f_r(w) - f_{r+1}(w) \geq 0$, para demostrar este hecho notemos que usando $\binom{r+1}{i} = \binom{r}{i} + \binom{r}{i-1}$, se concluye que:

$$\blacktriangle_r = kw^r(1-w) + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{r}{i} (1-w)^{i+1} w^{r-i} - \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{r}{i-1} (1-w)^i w^{r+1-i}.$$

Luego substituyendo:

$$\sum_{i=1}^{k-2} (k-i) \binom{r}{i} (1-w)^{i+1} w^{r-i} + \binom{r}{k-1} (1-w)^k w^{r-(k-1)}$$

por $\sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{r}{i} (1-w)^{i+1} w^{r-i}$ y $\sum_{i=1}^{k-2} (k-(i+1)) \binom{r}{i} (1-w)^{i+1} w^{r-i} +$

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

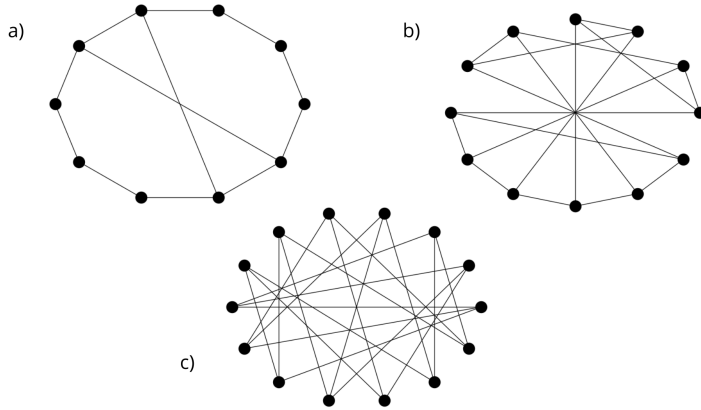


Figura 1.2: Algunos ejemplos de grafos en los que se alcanza la cota : a) $P_G(w) = 10 + 2w + 12w^2 - 4w^3$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_{2t}(G) = 10$ b) $P_G(w) = 12 - 12w + 36w^2 - 12w^3$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_{2t}(G) = 10$ (ver [12]) c) El grafo Headwood $P_G(w) = 14 - 14w + 42w^2 - 14w^3$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = \gamma_{2t}(G) = 12$ (ver [12]).

$(k-1)(1-w)w^r$ por $\sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{r}{i-1} (1-w)^i w^{r+1-i}$, se obtiene que \blacktriangle_r es igual a:

$$w^r(1-w) + \binom{r}{k-1} (1-w)^k w^{r-(k-1)} + \sum_{i=1}^{k-2} \binom{r}{i} (1-w)^{i+1} w^{r-i} \geq 0.$$

Finalmente, para conseguir el propósito principal sólo es necesario considerar que $\sum_{j=\delta}^{\Delta} a_j = n$, $P_G(w) = n - nw + \sum_{j=\delta}^{\Delta} a_j f_j(w)$ y $h_\delta(w) = 1 - w + f_\delta(w)$. \square

En orden de continuar con la exploración sobre la cota propuesta, en las secciones subsecuentes se abordará un análisis de contraste, tomando como punto de referencia las cotas superiores existentes en la literatura.

1.3. Análisis Comparativo Caso $k = 1$

Para presentar los resultados principales, sólo tenemos que mencionar que en 2021, Henning y Yeo motivados por una conjetura de Thomassé y Yeo [21], demostraron el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. [14] *Si G es un grafo conectado de orden n con $\delta \geq 6$, entonces $\gamma_t(G) \leq \frac{5138}{14145}n$.*

En lo que resta de esta sección, nos centraremos en comparar la nueva cota superior para el caso $k = 1$ con el resultado anterior atribuido a Henning y Yeo [14].

Teorema 1.3.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo conectado de orden n , grado mínimo $\delta = 6, 7$ y grado máximo $\Delta \geq 8$, entonces $\gamma_t(G) \leq P_G(w^*) \leq \frac{5138}{14145}n$ si y sólo si $P_G(w) - \frac{5138}{14145}n$ tiene una raíz positiva.*

Demostración. Supongamos que $P_G(w) - \frac{5138}{14145}n$ tiene una raíz positiva, utilizando la regla de los signos de Descartes $P_G(w) - \frac{5138}{14145}n$ debe tener dos raíces positivas r_1 y r_2 , aún más $r_1, r_2 \in (0, 1)$ porque

$$P_G(1) - \frac{5138}{14145}n = P_G(0) - \frac{5138}{14145}n = n - \frac{5138}{14145}n > 0$$

y $P_G(w) - \frac{5138}{14145}n$ es convexa en $[0, \infty)$, ya que $P_G(w)$ es convexa en $[0, \infty)$. En consecuencia, $P_G(r_1) = P_G(r_2) = \frac{5138}{14145}n$ y se infiere que el segmento de recta entre $(r_1, \frac{5138}{14145}n)$ y $(r_2, \frac{5138}{14145}n)$ no se encuentra por debajo de $P_G(w)$ entre estos dos puntos. Recíprocamente, suponiendo que $P_G(w^*) - \frac{5138}{14145}n \leq 0$, el caso en que $P_G(w^*) - \frac{5138}{14145}n = 0$ es claro, por otro lado, teniendo en cuenta que $P_G(0) - \frac{5138}{14145}n > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano [3] podemos concluir que $P_G(w) - \frac{5138}{14145}n$ tiene una raíz positiva. \square

Observación 1.3.3. 1. *Para efectos numéricos, es importante precisar que el problema de garantizar la existencia de una raíz positiva del polinomio $P_G(w) - \frac{5138}{14145}n$, mencionado en el Teorema 1.3.2, se puede restringir a valores de w en el intervalo $(1 - \frac{5138}{14145}, 1)$.*

2. *Obsérvese que existen algunos grafos que satisfacen el Teorema 1.3.2, por lo que el límite superior $\frac{5138}{14145}n$ se mejora, véase por ejemplo los grafos reportados en la Figura 1.3.*

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

3. También estamos interesados en la relación entre $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ y $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor$, observemos que en la mayoría de los ejemplos mostrados en la Figura 1.3 la desigualdad estricta $\lfloor P_G(w^*) \rfloor < \lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor$ es válida, además a medida que n es mayor esta diferencia aumenta.

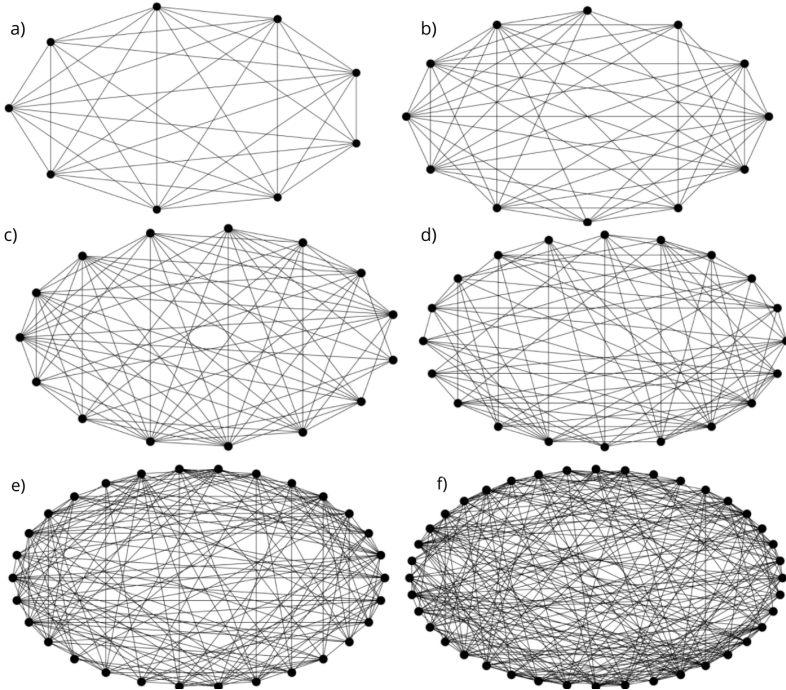


Figura 1.3: Grafos que verifican el Teorema 1.3.2: a) $n = 9$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor = 3$ b) $n = 12$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor = 4$ c) $n = 15$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = 4$, $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor = 5$ d) $n = 20$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = 6$, $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor = 7$ e) $n = 30$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = 8$, $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor = 10$ f) $n = 40$, $\lfloor P_G(w^*) \rfloor = 10$, $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor = 14$.

En el Teorema 1.3.2 exploramos los grafos con grado mínimo 6 o 7, por lo que sólo queda tratar con grafos de grado mínimo al menos 8.

Corolario 1.3.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo conectado de orden n y grado mínimo $\delta \geq 2$, entonces

$$\gamma_t(G) \leq n(1 + \delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} - \delta^{\frac{1}{1-\delta}}).$$

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

Demostración. Observe que

$$(1 - p)^{\deg(v)} \leq (1 - p)^\delta, \quad (1.6)$$

para todo $v \in V$, debido a que $\delta \leq \deg(v)$, $v \in V$. Luego sumando sobre $v \in V$ en la desigualdad (1.6), se obtiene que

$$np + \sum_{v \in V} (1 - p)^{\deg(v)} \leq n(p + (1 - p)^\delta). \quad (1.7)$$

La expresión $n(p + (1 - p)^\delta)$ con $p \in (0, 1)$ es minimizada por $p = 1 - \delta^{\frac{1}{1-\delta}}$, y sustituyéndola en la desigualdad (1.7), la prueba está completa. \square

Teorema 1.3.5. *Para todo $\epsilon \in (0, 1)$ existe un número natural $\delta_\epsilon \geq 2$ tal que si $G = (V, E)$ es un grafo conectado de orden n y grado mínimo $\delta \geq \delta_\epsilon$, entonces $\gamma_t(G) \leq n\epsilon$.*

Demostración. Definamos la sucesión $b_1 := 1$ y $b_k := 1 + k^{\frac{k}{1-k}} - k^{\frac{1}{1-k}}$ con $k \geq 2$, esta sucesión es estrictamente decreciente y positiva, por lo tanto $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + k^{\frac{k}{1-k}} - k^{\frac{1}{1-k}} = \inf\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Por propiedades del ínfimo, dado $\epsilon \in (0, 1)$ existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $b_{k^*} < \epsilon$, afirmamos $k^* > 1$ ya que en caso contrario $b_{k^*} = 1$ y esto contradice la desigualdad $\epsilon < 1$. Ahora, debido a que $\delta \geq \delta_\epsilon = \min\{k \in \mathbb{N} : b_k < \epsilon\}$ por hipótesis, se deduce que $\gamma_t(G) \leq n(1 + \delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} - \delta^{\frac{1}{1-\delta}}) = nb_\delta \leq nb_{\delta_\epsilon} < n\epsilon$, donde se aplicó el Colorario 1.3.4 en la primera desigualdad. \square

Observación 1.3.6. *Por construcción se puede calcular δ_ϵ de la siguiente manera, dado $m \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in (0, 1)$, entonces $\delta_\epsilon = m$ si y sólo si $b_m < \epsilon \leq b_{m-1}$.*

Finalmente aplicando el Teorema 1.3.5 con $\epsilon = \frac{5138}{14145}$, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.3.7. *Sea $G = (V, E)$ un grafo conectado de orden n y grado mínimo $\delta \geq 8$, entonces $\gamma_t(G) \leq P_G(w^*) \leq \frac{5138}{14145}n$.*

En otras palabras, el Corolario 1.3.7 asegura que $P_G(w^*)$ proporciona una mejor cota superior que la dada en el Teorema 1.3.1, cuando el grado mínimo es al menos 8.

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

Para concluir, la Figura 1.4 presenta las interacciones entre $\lfloor n(1 + \delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} - \delta^{\frac{1}{1-\delta}}) \rfloor$ (color rojo) y $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor$ (color naranja), para valores fijos de δ (estos valores se indican en la leyenda) mientras el orden del gráfico n se mueve en su dominio.

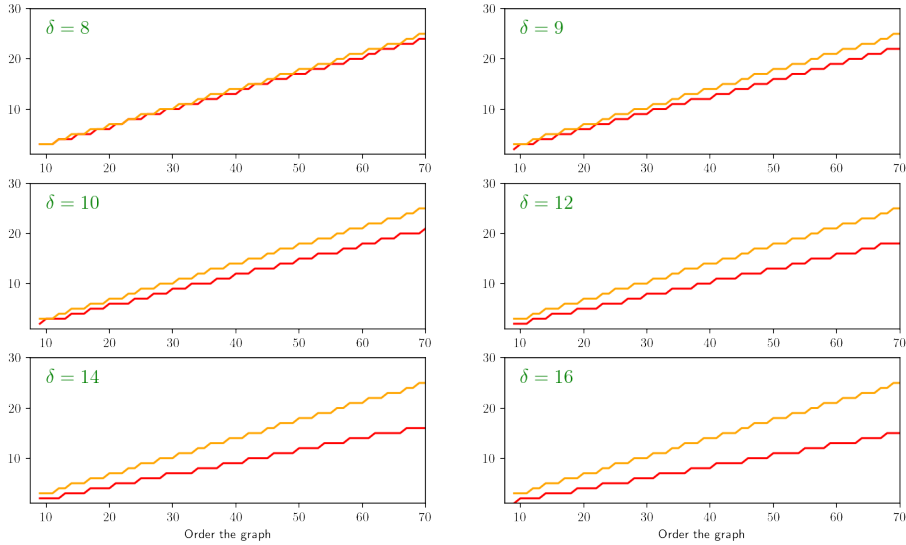


Figura 1.4: Comparación $\lfloor n(1 + \delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} - \delta^{\frac{1}{1-\delta}}) \rfloor$ (color rojo) vs $\lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor$ (color naranja).

Observación 1.3.8. *Teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\lfloor P_G(w^*) \rfloor \leq \lfloor n(1 + \delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} - \delta^{\frac{1}{1-\delta}}) \rfloor$, este comportamiento presentado en la Figura 1.4 lleva a la conclusión de que la desigualdad $\lfloor P_G(w^*) \rfloor < \lfloor \frac{5138}{14145}n \rfloor$ es válida en la mayoría de los casos, como ocurrió antes en la Observación 1.3.3 numeral 3.*

1.4. Análisis Comparativo Caso $k = 2$

Para exponer el resto del capítulo, es necesario citar algunos trabajos relacionados. En 2019 Alipour y Jafari [1] empleando el Teorema de Turán demostraron los siguientes resultados.

Teorema 1.4.1. *Si G es un grafo con grado mínimo $\delta \geq k+1+d$ para $0 \leq d \leq k-1$ entonces*

$$\gamma_{kt}(G) \leq \frac{2d + (k-d)(k-d+1)}{2d + (k-d)(k-d+1) + 1}n.$$

Teorema 1.4.2. *Si G es un grafo con n vértices y grado mínimo $\delta \geq 3$ tal que al menos la mitad de los vértices tienen grado al menos 4, entonces $\gamma_{2t}(G) \leq \frac{5}{6}n$.*

Además, aplicando el Lema Local de Lovász [1], pudieron mejorar el Teorema 1.4.1 para $k = 2$ en algunos casos especiales. En la Tabla 1.1 [1] para valores dados de δ y Δ se expone la correspondiente cota superior para el número de dominación 2-total. Este número ha sido estudiado por diferentes autores utilizando distintos nombres, por ejemplo, el número de dominación total doble.

δ	Δ	Cota Superior
7	7	$\frac{3}{4}n$
7	8	$\frac{3}{4}n$
9	9	$\frac{2}{3}n$
9	10	$\frac{2}{3}n$
9	11	$\frac{2}{3}n$
14	14	$\frac{1}{2}n$

Tabla 1.1: Cotas superiores para el número de dominación total doble para algunos valores de δ y Δ .

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

Centrándonos sólo en $k \geq 2$, estamos ahora en condiciones de iniciar un proceso de comparación entre la cota superior $P_G(w^*)$ y los resultados mencionados, considerando grafos con $P_G(w^*) \neq n$.

Teorema 1.4.3. *Dado $k \geq 1$ un entero positivo. Para cualquier grafo conectado G con n vértices, grado mínimo $\delta = k + 1$ y grado máximo $\Delta \geq k + 2$. Entonces $\gamma_{kt}(G) \leq P_G(w^*) \leq \epsilon_0^k$ si y sólo si $P_G(w) - \epsilon_0^k$ tiene una raíz en $(0, 1)$, donde $\epsilon_0^k = \frac{5}{6}n$ si $k = 2$ y de lo contrario $\epsilon_0^k = \frac{k(k+1)}{k(k+1)+1}n$.*

Demostración. Supongamos que existe $w_r \in (0, 1)$ tal que $P_G(w_r) = \epsilon_0^k$, en consecuencia $P_G(w^*) \leq P_G(w_r) = \epsilon_0^k$. Recíprocamente, suponiendo que $P_G(w^*) - \epsilon_0^k \leq 0$, el caso en que $P_G(w^*) - \epsilon_0^k = 0$ es claro, en otras cuestiones, teniendo en cuenta que $P_G(0) - \epsilon_0^k > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano [3] podemos concluir que $P_G(w) - \epsilon_0^k$ tiene una raíz en $(0, 1)$. \square

Para efectos numéricos, es importante precisar que el problema de garantizar la existencia de una raíz en $(0, 1)$ del polinomio $P_G(w) - \epsilon_0^k$, mencionado en el Teorema 1.4.3 puede restringirse a valores de w en el intervalo $(1 - \frac{\epsilon_0^k}{n}, 1)$.

Las siguientes observaciones están dedicadas a establecer algunos puntos considerables sobre el estudio comparativo analítico.

Observación 1.4.4. 1. *Obsérvese que existen algunos grafos que satisfacen el Teorema 1.4.3, destacando que para el caso $k = 2$ estos grafos verifican $a_3 \leq \frac{n}{2}$. Por lo tanto, los límites superiores establecidos en el Teorema 1.4.1 y el Teorema 1.4.2 se mejoran, ver por ejemplo los grafos reportados en la Figura 1.5.*

2. *También estamos interesados en la relación entre $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ y $\lfloor \epsilon_0^k \rfloor$, obsérvese que en la mayoría de los ejemplos mostrados en la Figura 1.5 la desigualdad estricta $\lfloor P_G(w^*) \rfloor < \lfloor \epsilon_0^k \rfloor$ se confirma. Además, a medida que n se hace más grande esta diferencia aumenta.*

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

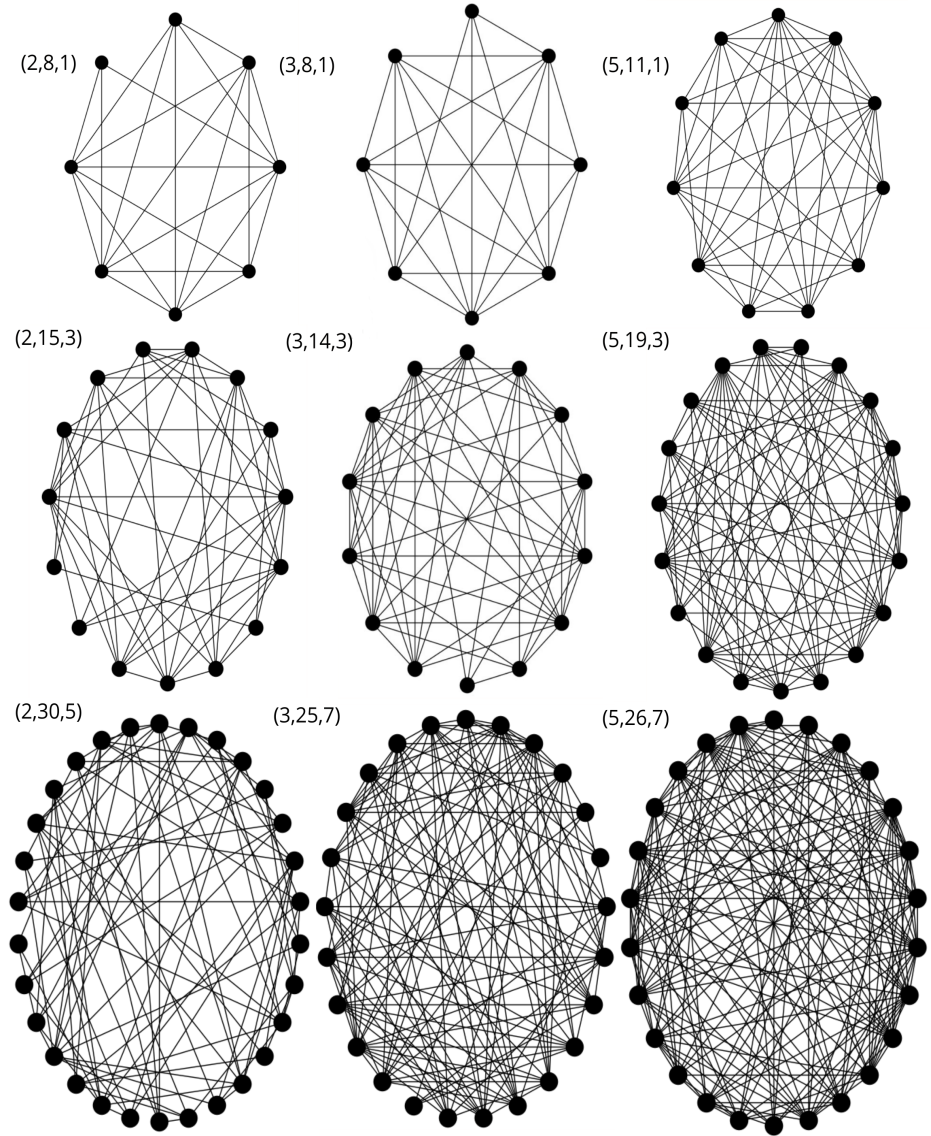


Figura 1.5: La información de interés asociada a cada grafo se expone en una terna con la estructura $(k, |V|, [P_G(w^*)] - [\epsilon_0^k])$.

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

En lo sucesivo, por comodidad, el límite superior

$$\frac{2d + (k - d)(k - d + 1)}{2d + (k - d)(k - d + 1) + 1}n$$

al que se refiere el Teorema 1.4.1 será denotado como ϵ_d^k para $1 \leq d \leq k - 1$.

Para continuar con el proceso de comparación, nótese que en el Teorema 1.4.3 se exploró el Teorema 1.4.1 en el caso $d = 0$, por lo que sólo queda tratar con $1 \leq d \leq k - 1$. En este sentido, para un entero positivo fijo k , teniendo en cuenta el Teorema 1.2.3, una condición suficiente para garantizar una mejora en la cota ϵ_d^k es verificar que

$$h_{k+1+d}(\tilde{w}) \leq \frac{\epsilon_d^k}{n}$$

para todos los $1 \leq d \leq k - 1$, donde \tilde{w} es un mínimo del polinomio $h_{k+1+d}(w)$ con $w \in [0, 1)$. Esta comprobación se demostró numéricamente para todo $2 \leq k \leq 100$ y $1 \leq d \leq k - 1$. A manera de ejemplo observe algunos casos específicos presentados en la Tabla 1.2. En otras palabras, todo lo que se ha dicho anteriormente demuestra una mejora en el Teorema 1.4.1 para todo $2 \leq k \leq 100$ y $1 \leq d \leq k - 1$. Además, el comportamiento observado para $2 \leq k \leq 100$ conjetura una mejora en el Teorema 1.4.1 para todo $k \geq 101$ y $1 \leq d \leq k - 1$.

Luego, considerando que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ es menor o igual que $\lfloor h_{k+1+d}(\tilde{w})n \rfloor$, los datos anteriores conducen a la conclusión de que la desigualdad estricta $\lfloor P_G(w^*) \rfloor < \lfloor \epsilon_d^k \rfloor$ es válida en la mayoría de los casos, como ocurrió antes en la Observación 1.4.4 numeral 2.

Por último, pero no por ello menos relevante, para completar el análisis de la cota propuesta, es importante compararla con las cotas superiores indicadas en la Tabla 1.1, ya que constituyen una mejora del Teorema 1.4.1 para $k = 2$ en algunos casos especiales. Aplicando de nuevo el Teorema 1.2.3, es posible asegurar que $P_G(w^*)$ proporciona una cota superior mejor que las correspondientes cota superiores para el número de dominación total dadas en la Tabla 1.1. Este hecho se muestra en detalle en la Tabla 1.3.

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

k	d	$h_{k+1+d}(\tilde{w})$	$\frac{\epsilon_d^k}{n}$	k	d	$h_{k+1+d}(\tilde{w})$	$\frac{\epsilon_d^k}{n}$	k	d	$h_{k+1+d}(\tilde{w})$	$\frac{\epsilon_d^k}{n}$
2	1	0.78	0.80	20	11	0.80	0.98	60	40	0.71	0.99
3	1	0.86	0.88	20	12	0.78	0.98	60	48	0.68	0.99
3	2	0.78	0.85	20	16	0.72	0.97	60	59	0.65	0.99
4	1	0.90	0.93	20	18	0.69	0.97	70	1	0.99	0.99
4	2	0.83	0.90	20	19	0.67	0.97	70	3	0.99	0.99
4	3	0.77	0.88	30	2	0.98	0.99	70	9	0.95	0.99
5	1	0.92	0.95	30	4	0.95	0.99	70	10	0.94	0.99
5	2	0.86	0.94	30	8	0.90	0.99	70	13	0.92	0.99
5	3	0.81	0.92	30	9	0.88	0.99	70	16	0.90	0.99
5	4	0.75	0.90	30	11	0.85	0.99	70	18	0.88	0.99
6	1	0.94	0.96	30	15	0.80	0.99	70	21	0.86	0.99
6	2	0.89	0.96	30	18	0.76	0.99	70	23	0.85	0.99
6	3	0.83	0.94	30	20	0.74	0.99	70	24	0.84	0.99
6	4	0.79	0.93	30	24	0.70	0.98	70	28	0.81	0.99
6	5	0.74	0.92	30	26	0.68	0.98	70	37	0.76	0.99
7	1	0.95	0.97	30	28	0.66	0.98	70	43	0.68	0.99
7	2	0.90	0.97	30	29	0.65	0.98	70	58	0.57	0.99
7	3	0.86	0.96	40	2	0.98	0.99	80	2	0.99	0.99
7	4	0.81	0.95	40	4	0.97	0.99	80	4	0.98	0.99
7	5	0.77	0.94	40	5	0.95	0.99	80	8	0.96	0.99
7	6	0.74	0.93	40	10	0.90	0.99	80	13	0.93	0.99
8	1	0.96	0.98	40	14	0.85	0.99	80	18	0.89	0.99
8	2	0.92	0.97	40	20	0.79	0.99	80	20	0.88	0.99
8	3	0.87	0.97	40	23	0.76	0.99	80	32	0.81	0.99
8	4	0.83	0.96	40	26	0.74	0.99	80	44	0.75	0.99
8	5	0.80	0.95	40	28	0.72	0.99	80	49	0.74	0.99
8	6	0.76	0.94	40	32	0.69	0.99	80	57	0.73	0.99
8	7	0.73	0.94	40	35	0.66	0.99	80	62	0.72	0.99
9	1	0.96	0.98	40	38	0.64	0.99	80	69	0.71	0.99
9	2	0.93	0.98	50	4	0.97	0.99	80	74	0.69	0.99
9	3	0.89	0.97	50	6	0.96	0.99	90	3	0.99	0.99
9	4	0.85	0.97	50	9	0.93	0.99	90	20	0.89	0.99
9	5	0.81	0.96	50	12	0.90	0.99	90	25	0.86	0.99
9	6	0.78	0.96	50	16	0.86	0.99	90	37	0.80	0.99
9	7	0.75	0.95	50	18	0.84	0.99	90	47	0.77	0.99
9	8	0.72	0.94	50	23	0.80	0.99	90	52	0.76	0.99
10	1	0.97	0.98	50	28	0.76	0.99	90	61	0.75	0.99
10	2	0.93	0.98	50	35	0.71	0.99	90	64	0.74	0.99
10	3	0.90	0.98	50	40	0.68	0.99	90	74	0.72	0.99
10	4	0.86	0.98	50	43	0.66	0.99	90	76	0.71	0.99
10	5	0.83	0.97	50	49	0.60	0.99	100	2	0.99	0.99
10	6	0.80	0.96	60	3	0.98	0.99	100	14	0.94	0.99
10	7	0.77	0.96	60	7	0.95	0.99	100	27	0.87	0.99
10	8	0.74	0.95	60	9	0.94	0.99	100	31	0.85	0.99
10	9	0.72	0.95	60	11	0.92	0.99	100	33	0.84	0.99
20	1	0.98	0.99	60	12	0.91	0.99	100	35	0.83	0.99
20	3	0.95	0.99	60	14	0.90	0.99	100	59	0.77	0.99
20	5	0.91	0.99	60	19	0.86	0.99	100	62	0.76	0.99
20	6	0.89	0.99	60	27	0.80	0.99	100	77	0.74	0.99
20	7	0.87	0.99	60	33	0.76	0.99	100	91	0.71	0.99
20	8	0.85	0.99	60	34	0.75	0.99	100	95	0.70	0.99

Tabla 1.2: Comparación entre $h_{k+1+d}(\tilde{w})$ y $\frac{\epsilon_d^k}{n}$ para algunos valores de k .

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA
PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

δ	Δ	$h_\delta(\tilde{w})$
7	7	0.56 n
9	9	0.48 n
14	14	0.35 n

Tabla 1.3: Cota superior para el número de dominación total doble obtenida como corolario del Teorema 1.2.1 para ciertos valores de δ y Δ .

Además, el perfil gráfico de las interacciones entre las partes enteras inferiores asociadas a las terceras columnas de cada tabla (respetando los colores preestablecidos) se presentan en la Figura 1.6, que sugiere que $\lfloor \epsilon_d^k \rfloor$ es siempre mayor que $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ para cualquier n , reafirmando los comentarios anteriores sobre la relación de orden existente entre estos enteros.

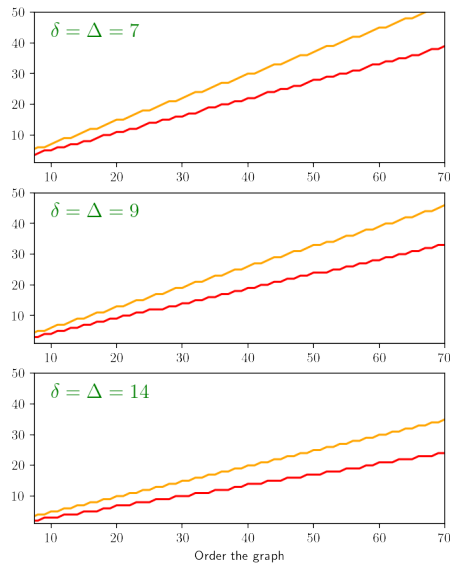


Figura 1.6: Comparación entre Tabla 1.1 (color rojo) y Tabla 1.3 (color naranja).

CAPÍTULO 1. UNA COTA SUPERIOR PROBABILÍSTICA PARA EL NÚMERO DE K -DOMINACIÓN TOTAL

Con el análisis comparativo completo y tomando en cuenta los resultados positivos, estamos en condiciones de examinar el aspecto algoritmo presente en las secciones previas. Esta nueva tarea, desarrollada a detalle en el siguiente capítulo, constituye, sin lugar a duda, una fase de vital utilidad para lograr una exploración adecuada.

Capítulo 2

Aspecto Algorítmico

A lo largo de los años hemos sido testigo del valor agregado y del alcance presente en las investigaciones que cuentan con un enfoque a máquinas. Actualmente, los matemáticos modernos, reafirman la ventaja que presupone contar con la programación como una herramienta activa a la hora de obtener conclusiones, en este sentido, para conseguir un mejor análisis en cada proyecto científico, es recomendable establecer la meta de agregar un aspecto algoritmo a los resultados teóricos.

Tomando en cuenta estos hechos y en busca de enriquecer los apartados previos, en este capítulo se emplearán los resultados establecidos en los capítulos anteriores para diseñar una estrategia algorítmica; la cual tiene la finalidad de mejorar la cota superior $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ establecida en el Teorema 1.2.1 o conjeturar el alcance a la misma, es decir, $\gamma_{kt}(G) = \lfloor P_G(w^*) \rfloor$. En este contexto es importante mencionar que en párrafos precedentes se exhibieron ejemplos de grafos que comprueban tal igualdad, ver Figuras 1.1 y 1.2

2.1. Algoritmos asociados

A manera de recordatorio, para un natural fijo k y un grafo conectado G de orden n con grado mínimo $\delta \geq k$, el Teorema 1.2.1 establece a la siguiente función con dominio $(0, 1)$

$$f(p) = np + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{v \in V} (k-i) \binom{\deg(v)}{i} p^i (1-p)^{\deg(v)-i},$$

como una cota superior del parámetro $\gamma_{kt}(G)$. Posteriormente como resultado del cambio de variable $w = 1 - p$ se obtuvo la siguiente función con dominio $[0, 1]$

$$P_G(w) = n - nw + \sum_{j=\delta}^{\Delta} a_j (kw^j + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) \binom{j}{i} (1-w)^i w^{j-i}),$$

donde $a_j = |\{v \in V : \deg(v) = j\}|$ con $j \in \{\delta, \delta + 1, \dots, \Delta\}$. Debido a su construcción, con esta función también se comprobó que $\gamma_{kt}(G) \leq P_G(w)$ para todo $w \in [0, 1]$. Por último se fijó $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ como la mejor cota superior posible para $\gamma_{kt}(G)$, donde w^* es un mínimo del polinomio $P_G(w)$ con $w \in [0, 1)$.

Con este recuento finalizado, iniciemos por notar que de manera directa se puede inducir mediante el método utilizado en el Teorema 1.2.1 un algoritmo al que llamaremos Algoritmo k -TD con complejidad $O(kn^2)$. Este algoritmo como bien lo marca su pseudocódigo (Ver Algoritmo 1) al recibir la entrada establecida genera un conjunto D de vértices del grafo, que verifica la definición de conjunto k -total dominante del grafo G , en consecuencia $\gamma_{kt}(G) \leq |D|$, es decir, al fijar un k en los naturales, un grafo G con las características necesarias y un $w \in (0, 1)$, la corrida del Algoritmo k -TD que es equivalente a una realización de la variable aleatoria $|D|$, produce una cota superior del parámetro en cuestión.

Algorithm 1 Algoritmo k -TD

Input: $w \in (0, 1)$, k un entero positivo, G un grafo conectado con grado mínimo $\delta \geq k$ y orden n .

Output: Un conjunto D k -total dominante (k -TD) de G

$D = \emptyset$

$A = \emptyset$

for $i = 0$ **to** $k - 1$ **do**

$C_{1,i} = \emptyset$

$C_{2,i} = \emptyset$

$S_{1,i} = \emptyset$

$S_{2,i} = \emptyset$

end for

for $v \in V$ **do**

if $Bernoulli(w) = 1$ **then**

$A = A \cup \{v\}$

end if

end for

for $i = 0$ **to** $k - 1$ **do**

for $v \in V$ **do**

if $v \in A$ **and** $deg_A(v) = i$ **then**

$C_{1,i} = C_{1,i} \cup \{v\}$

end if

if $v \notin A$ **and** $deg_A(v) = i$ **then**

$C_{2,i} = C_{2,i} \cup \{v\}$

end if

end for

end for

for $i = 0$ **to** $k - 1$ **do**

for $v \in C_{1,i}$ **do**

 Seleccionar $u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)} \in N(v)$

$S_{1,i} = S_{1,i} \cup \{u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)}\}$

end for

for $v \in C_{2,i}$ **do**

 Seleccionar $u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)} \in N(v)$

$S_{2,i} = S_{2,i} \cup \{u_{(v,1)}, \dots, u_{(v,k-i)}\}$

end for

end for

$D = A \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{1,i}) \cup (\cup_{i=0}^{k-1} S_{2,i})$

Por otro lado el Método del Primer Momento garantiza la existencia de una realización de la variable aleatoria $|D|$ tal que $|D| \leq \mathbb{E}(|D|)$ $\mathbb{P} - c.s.$ Además, toda realización de esta variable aleatoria cumple que $\mathbb{E}(|D|) \leq P_G(w)$ para todo $w \in [0, 1)$. Luego definiendo $W^* = \operatorname{argmin}\{P_G(w) : w \in [0, 1)\}$, podemos afirmar que $\mathbb{E}(|D|) \leq P_G(w^*)$ para w^* un elemento cualquiera de W^* .

Finalmente se concluye que, existe una realización de la variable aleatoria $|D|$ para la que se cumple que $\gamma_{kt}(G) \leq |D| \leq \lfloor P_G(w^*) \rfloor$, lo que representa una posibilidad para alcanzar la meta propuesta. En otras palabras, al elegir un tamaño de muestra m adecuado de la variable aleatoria $|D|$, podremos examinar la existencia de esos posibles casos de mejora, o sea donde $|D| < \lfloor P_G(w^*) \rfloor$ y además podremos estudiar la validez del escenario $\gamma_{kt}(G) = \lfloor P_G(w^*) \rfloor$. Por todo lo anterior, establezcamos a este algoritmo como la base en el planteamiento de la estrategia. Fijando k en los naturales y G un grafo con las cualidades apropiadas, realicemos el estudio vía los siguientes casos.

2.2. Estrategia Algorítmica Caso 1

Caso 1: $0 \notin W^*$

Tomando w^* un elemento cualquiera del conjunto W^* , observemos que es cierto que $\lfloor P_G(w^*) \rfloor \leq P_G(w^*) < P_G(w)$ para todo $w \in W^{*c}$, en particular $\lfloor P_G(w^*) \rfloor \leq P_G(w^*) < P_G(0) = n$, es decir, la mejor cota superior para el número de k -dominación total es $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$ que no es el caso trivial. Así, para los datos fijos $k \in \mathbb{N}$ y G (un grafo conectado con $\delta \geq k$) que verifiquen el Caso 1 se sigue la estrategia representada en el siguiente algoritmo con complejidad $O(mkn^2)$ al que llamaremos Algoritmo Caso 1.

Como mencionamos antes, debemos estudiar una muestra que sea significativa y que nos represente lo más fielmente posible a la variable aleatoria en cuestión. Contemplando que $\mathbb{E}(|D|) \leq P_G(w^*)$, en la elección de un valor adecuado de m se empleó una técnica de muestreo asociada a la media [22] que considera:

$$m = \left\lceil \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S}{E} \right)^2 \right\rceil, \quad (2.1)$$

donde

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = Valor estándar que corresponde al nivel de confianza.

S = Sexta parte del rango de la variable aleatoria (Regla del Pulgar [22]).

E = Error de magnitud permisible.

Eligiendo un error de magnitud 0,05 ($\alpha = 0,05$), un nivel de confianza del 95% ($Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$) y tomando en cuenta que $k + 1 \leq |D| \leq n$, al sustituir en (2.1) obtenemos la propuesta del parámetro m como:

$$m = \lceil 6,53 \cdot (n - (k + 1)) \rceil.$$

Algorithm 2 Algoritmo Caso 1

Input: Una terna (w^*, k, G) que verifique el Caso 1

Output: $Cota_{MinD}$ cota superior del parámetro $\gamma_{kt}(G)$

$CarD = \emptyset$

$Cota_{MinD} = \lfloor P_G(w^*) \rfloor$

for $i = 1$ **to** m **do**

$|D| =$ Algoritmo k -TD(w^*, k, G)

if $|D| < \lfloor P_G(w^*) \rfloor$ **then**

 Se agrega $|D|$ como elemento de $CarD$

end if

end for

if $CarD \neq \emptyset$ **then**

$Cota_{MinD} = \text{Mín}(CarD)$

end if

Vale la pena mencionar que para $k = 1$ se afirmó la unicidad de w^* en $(0, 1)$, esto nos indicaría que para $k = 1$ siempre trabajaríamos en el Caso 1. Luego, respecto a garantizar el buen

desempeño del Algoritmo Caso 1 con base en los objetivos planteados, primero notemos que si el resultado del Algoritmo Caso 1 es $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$, se establecería la conjetura $\gamma_{kt}(G) = \lfloor P_G(w^*) \rfloor$, faltando obviamente el desarrollo de la demostración o negación formal.

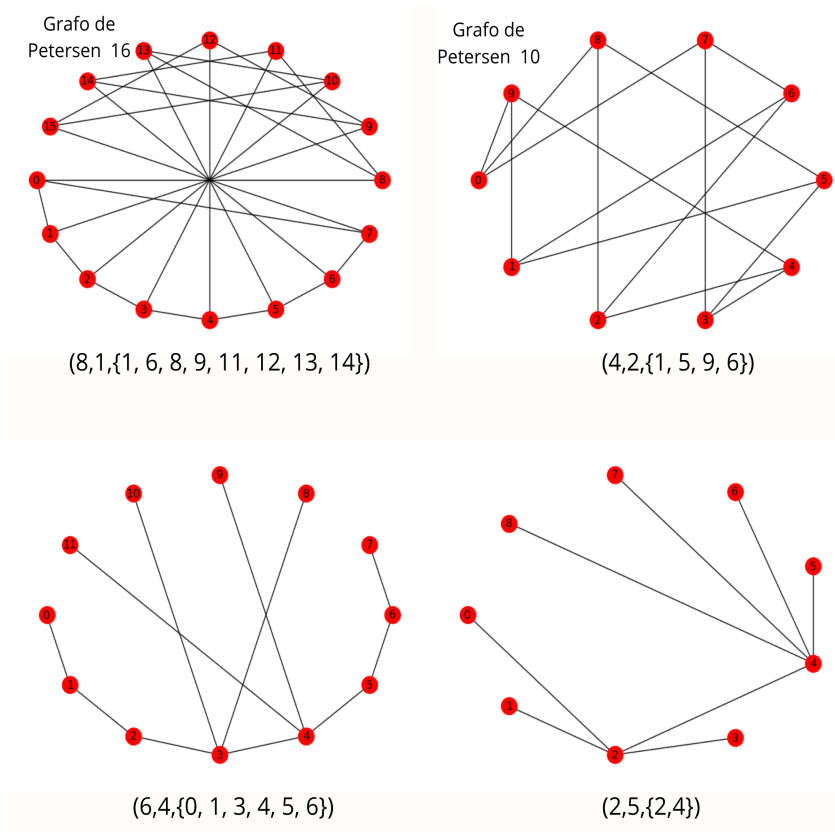


Figura 2.1: La información de interés asociada a cada grafo se expone en una terna con la estructura $(\gamma_{kt}(G), \lfloor P_G(w^*) \rfloor - Cota_{MinD}, SetMin)$.

Por otro lado en la Figura 2.1 se exponen a detalle 4 ejemplos prácticos para $k = 1$. En estos grafos se obtienen mejoras con diferencia 1, 2, 4 y 5, además en todos se corrobora la igualdad $Cota_{MinD} = \gamma_{kt}(G)$, es decir, se logra establecer como la nueva cota superior al verdadero valor del parámetro, reduciendo así, en

un caso realista en donde no se conoce el valor real del parámetro, las posibilidades de análisis. Por último como valor agregado, vía la implementación de la estrategia, podemos disponer de un conjunto k -total dominante $SetMin$ con cardinalidad $Cota_{MinD}$ para cada grafo, que en estos casos particulares son conjuntos mínimos totales dominantes.

2.3. Estrategia Algorítmica Caso 2

Caso 2: $0 \in W^*$

Para diseñar el método a seguir en este caso, consideremos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. [6] *Para G un grafo conectado de orden n y mínimo grado δ , tenemos que $\gamma_{kt}(G) = n$ si y sólo si $\delta = k$ y A es un conjunto total dominante, donde $A = \{v \in V : deg(v) = \delta\}$.*

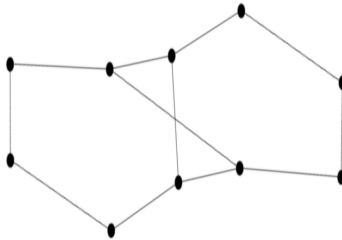


Figura 2.2: Ejemplo de grafo no δ -regular donde $\gamma_{2t}(G) = n$.

Es evidente que como consecuencia del Teorema 2.3.1 tendremos $\gamma_{\delta t}(G) = n$ en todo grafo G δ -regular de orden n . Sin embargo, existen otros grafos no regulares que satisfacen la misma propiedad, para un ejemplo particular observe la Figura 2.2. Con la equivalencia establecida en el Teorema 2.3.1 clara e identificando los cambios existentes en referencia al Caso 1, se propone una nueva estrategia, implementada en el siguiente algoritmo al que llamaremos Algoritmo Caso 2.

Algorithm 3 Algoritmo Caso 2

Input: Una terna (w^*, k, G) que verifique el Caso 2

Output: $Cota_{MinD}$ o el valor exacto del parámetro $\gamma_{kt}(G)$

$CarD = \emptyset$

$A = \{v \in V : deg(v) = \delta\}$

if $\delta = k$ and $A = \{v \in V : deg(v) = \delta\}$ es un conjunto total dominante **then**

$\gamma_{kt}(G) = n$

else

for $j = 1$ to 9 **do**

$|D| = n$

while $|D| \geq n$ **do**

$|D| =$ Algoritmo k -TD($j * 0, 1, k, G,$)

end while

Se agrega $|D|$ como elemento de $CarD$

end for

$Cota_{MinD} = Min(CarD)$

end if

Para reafirmar lo anterior, analicemos un ejemplo sencillo asociado al grafo de la Figura 2.3, que verifica evidentemente los supuestos del Caso 2.

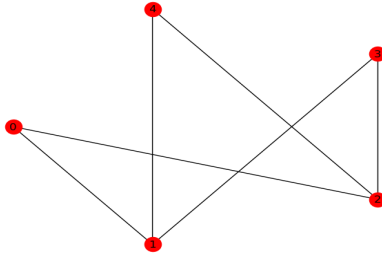


Figura 2.3: Ejemplo de un grafo conectado que verifica el Caso 2.

Al aplicar la estrategia anterior obtenemos $Cota_{MinD} = 4 < 5 = n$ y $SetMin = \{0, 1, 2, 3\}$, por lo tanto podemos concluir que $k + 1 = 3 \leq \gamma_{kt}(G) \leq 4$. Por último podemos afirmar que $\gamma_{kt}(G) = 4$, ya que si suponemos que existe S un conjunto de vértices del grafo de cardinalidad 3 que verifique ser 2-total do-

minante, obtenemos que el grafo contiene un ciclo de longitud 3 y esto es una contradicción. Verificando en este caso la igualdad $Cota_{MinD} = \gamma_{kt}(G)$, observando un comportamiento análogo a los 4 ejemplos mostrados en Caso 1.

Con estas dos estrategias diseñadas e implementadas se completa el objetivo del capítulo. Las mejoras presentes en los ejemplos prácticos expuestos, evidencian la grandeza del trabajo simultáneo. Confirmando una vez más, la importancia de desarrollar habilidades algorítmicas en busca de instrumentos matemáticos modernos que potencialicen el pensamiento lógico.

Capítulo 3

Conclusiones

El trabajo en conjunto entre la Teoría de Grafos y la Teoría de Probabilidad ha sido aplicado con éxito en la solución de problemas, tanto teóricos como prácticos, en campos como la Economía, Informática, Redes complejas, entre otros [15, 16]. Especialmente, en este trabajo se emplea en la dominación total en grafos, en concreto, se establece una nueva cota superior para el parámetro de dominación total con el uso de técnicas probabilísticas. En un inicio, se presentan el Método del Primer Momento y el concepto de conjunto k -total dominante, proporcionando así, los cimientos necesarios para el desarrollo subsecuente de la tesis. Posteriormente se determina una nueva cota superior del parámetro $\gamma_{kt}(G)$, denotada por $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$. En este contexto, se asevera la propiedad de alcance de la cota, mostrando múltiples ejemplos prácticos. Con la finalidad de analizar a detalle las ventajas proporcionadas vía $\lfloor P_G(w^*) \rfloor$, se realiza un estudio comparativo frente a cotas existentes en la literatura, obteniendo resultados favorables. Por último para enriquecer la exploración, vía el método utilizado en la demostración de la cota superior, se diseñan e implementan estrategias algorítmicas que consolidan las posibilidades de mejoras presentes en dicha cota.

En consecuencia, los resultados de la presente tesis proporcionan herramientas complementarias en el problema de establecer el valor concreto del parámetro de k -dominación total. Además, tomando en cuenta los múltiples conceptos existentes en la Teoría de la Dominación actualmente, establece una línea fértil de inves-

tigación futura.

Adicionalmente, este trabajo permite reafirmar la grandeza presente en la combinación de conocimientos. La relevancia de fomentar los proyectos colaborativos y multidisciplinarios, en busca del desarrollo de la ciencia. Sin lugar a duda, a lo largo de esta tesis, se pone de manifiesto la importancia de fusionar diversas habilidades matemáticas para aportar valor agregado a un proyecto de investigación.

Bibliografía

- [1] ALIPOUR, S., AND JAFARI, A. Upper Bounds for the Domination Numbers of Graphs Using Turán’s Theorem and Lovász Local Lemma. *Graphs and Combinatorics* 35, 5 (2019), 1153–1160.
- [2] ALON, N., AND SPENCER, J. *The Probabilistic Method*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, (2004).
- [3] APOSTOL, T. M. *Calculus, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. Blaisdell Publishing Company, (1967).
- [4] BARTLE, R. G. *The Elements of Real Analysis*. Wiley, (1991).
- [5] BERGE, C. Graphs and hypergraphs. *North-Holland* (1973).
- [6] BERMUDO, S., HERNÁNDEZ-GÓMEZ, J. C., AND SIGARRETA, J. M. On the total k -domination in graphs. *Discussiones Mathematicae: Graph Theory* 38, 1 (2018).
- [7] BRIGHAM, R., CARRINGTON, J., AND VITRAY, R. Connected graphs with maximum total domination number. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 34 (2000).
- [8] COCKAYNE, E. J., DAWES, R. M., AND HEDETNIEMI, S. T. Total domination in graphs. *Networks* 10, 3 (1980), 211–219.
- [9] ERDÖS, P. Some remarks on the theory of graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 53, 4 (1947), 292–294.

-
- [10] HENNING, M. A. A survey of selected recent results on total domination in graphs. 32–63.
- [11] HENNING, M. A., AND KAZEMI, A. P. k -tuple total domination in graphs. *Discrete Applied Mathematics* 158, 9 (2010), 1006–1011.
- [12] HENNING, M. A., AND YEO, A. Strong Transversals in Hypergraphs and Double Total Domination in Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 24, 4 (2010), 1336–1355.
- [13] HENNING, M. A., AND YEO, A. *Total Domination in Graphs*. Springer New York, (2013).
- [14] HENNING, M. A., AND YEO, A. A new upper bound on the total domination number in graphs with minimum degree six. 1–7.
- [15] JOORABLOO, N., JALILI, M., AND REN, Y. A probabilistic graph-based method to solve precision-diversity dilemma in recommender systems. *Expert Systems with Applications* 184 (2021), 115485.
- [16] LIU, W., LIU, X., AND QIAO, W. Probabilistic graph-based valuation model for measuring the relative patent value in a valuation scenario. *Pattern Recognition Letters* 138 (2020), 204–210.
- [17] MA, Y., CAI, Q., AND YAO, S. Integer linear programming models for the weighted total domination problem. 146–150.
- [18] MALARVIZHI, J., AND DIVYA, G. Domination and edge domination in single valued neutrosophic graph. 721–732.
- [19] ORE, O. Theory of graphs, volume 38 of amer. In *Soc. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., Providence, RI* (1962).
- [20] PRADHAN, D. Algorithmic aspects of k -tuple total domination in graphs. *Information Processing Letters* 112, 21 (2012), 816–822.
- [21] THOMASSÉ, S., AND YEO, A. Total domination of graphs and small transversals of hypergraphs. 473–487.

BIBLIOGRAFÍA

- [22] ZIKMUND, W. G., BABIN, B. J., STAINES, G. M., AND QUIÑONES, A. D. Investigación de mercados.