



**Benemérita Universidad Autónoma De Puebla**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**“MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

RUY ALBERTO LÓPEZ RÍOS

DIRECTOR DE TESIS

DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ

PUEBLA, PUE.

25 DE AGOSTO DEL 2014



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Probabilidad básica . . . . .	7
1.2. Variación de primer y segundo orden . . . . .	9
<b>2. Movimiento Browniano</b>	<b>13</b>
2.1. Procesos de Markov . . . . .	13
2.2. Caminata aleatoria . . . . .	13
2.3. Movimiento Browniano (MB) . . . . .	18
2.3.1. Propiedades del MB . . . . .	19
2.3.2. Primera variación y variación cuadrática del MB . . . . .	21
<b>3. Integrales Estocásticas</b>	<b>25</b>
3.1. Sumas de Itô y sumas de Stratonovich . . . . .	26
3.2. Integral estocástica de Itô . . . . .	30
3.3. Propiedades de la integral de Itô . . . . .	34
3.4. Fórmula de Itô . . . . .	36
3.5. Integral estocástica de Stratonovich . . . . .	39
<b>4. EDE's y Métodos de Aproximación Numérica</b>	<b>43</b>
4.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	43
4.2. Convergencia fuerte y convergencia débil . . . . .	44
4.3. Método de Euler-Maruyama . . . . .	45
4.4. Método de Euler-Heun . . . . .	51
4.5. Método de Milstein . . . . .	54
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>59</b>
5.1. Modelo Black-Scholes . . . . .	59
5.2. Modelo Lotka-Volterra . . . . .	64
5.3. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	67
5.4. Modelo Heston . . . . .	70
5.5. Puente Browniano . . . . .	71

<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>A. <math>\sigma</math>-álgebras</b>	<b>75</b>
<b>B. Esperanza condicional</b>	<b>77</b>
<b>C. Derivación de la fórmula de Black-Scholes</b>	<b>79</b>
<b>D. Abreviaturas y terminología</b>	<b>83</b>
<b>E. Referencias</b>	<b>85</b>

# Agradecimientos

A la memoria del Ing. Salvador Benítez Piñón †.

Agradezco infinitamente el apoyo de mis padres Dalila y Roberto y de mis hermanos Yenia y Pepín.

Gracias a Doña y a la señorita Yaritza, a Sandy y Cindy. A Israel, Martín y Miguel Ángel.

Sin duda este trabajo no fuese posible sin el apoyo del Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, gracias por su tiempo y paciencia.

De igual manera a quienes fungieron como sinodales, a la Dra. Hortensia Reyes Cervantes, al Dr. Fernando Velasco Luna y al Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara, por el tiempo dedicado en la revisión de esta tesis y por sus sugerencias.

A mi tutora académica Dra. María Araceli Juárez Ramírez.

A las autoridades que representan a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por el apoyo brindado en la realización de esta tesis.

*"Estar a favor de los derechos humanos,  
estar a favor de los derechos de la naturaleza,  
estar a favor de los derechos de los animales,  
es ser, en el siglo XXI, una persona civilizada."*

Carlos Monsiváis Aceves



# Introducción

En 1827 el escocés Robert Brown descubrió y estudió el movimiento sin razón aparente de partículas de polen que se desplazaban erráticamente sobre un medio fluido. Tal movimiento es conocido como movimiento browniano.

El primero en describir matemáticamente al movimiento browniano fue N. Thiele (1880) en un documento sobre mínimos cuadrados. Seguido independientemente de L. Bachelier (1900) en su tesis doctoral *Théorie de la spéculation* en la que presenta un análisis estocástico de acciones y opciones financieras. Sin embargo, el estudio independiente de A. Einstein (1905) en *On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat* mostró a los físicos una forma directa de confirmar la existencia de átomos y moléculas. Los resultados analíticos derivados por Einstein fueron más tarde verificados experimentalmente y extendidos por varios físicos y matemáticos.

El resultado de un proceso estocástico que describe el modelo de este tipo de movimiento se le atribuye a R. Wiener y es considerado *Proceso de Wiener* o comúnmente *Movimiento Browniano (MB)*, término que define tanto al movimiento físico de las partículas como al proceso matemático que las describe.

A mediados del siglo XX Kiyoshi Itô extiende los métodos del cálculo a procesos estocásticos tales como el *MB*, teoría llamada como cálculo de Itô que tiene importantes aplicaciones en Finanzas y en ecuaciones diferenciales estocásticas. Su concepto central es la integral estocástica de Itô, que es una generalización de la integral de Riemann-Stieltjes. Itô construyó una ecuación diferencial estocástica (EDE) de la forma

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$$

para modelar procesos markovianos, donde  $W_t$  representa un proceso de Wiener. En 1951, demuestra la ahora conocida *fórmula de Itô*

$$f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d[X, X]_t.$$

A Kiyoshi Itô se le conoce como el padre de la integración estocástica.

Tiempo después, el físico Ruslan Stratonovich construyó una integral alternativa a la de Itô, conocida como Integral de Stratonovich (o de Fisk-Stratonovich), integrales que son, en cierto sentido, fáciles de manipular. Su trabajo llega a manos de Kiyoshi Itô, y éste decide perfeccionar esta alternativa.

Es desde ese entonces donde se sientan las bases de la teoría del cálculo estocástico y el de las ecuaciones diferenciales estocásticas, presentes en las aplicaciones que involucran sistemas con el influjo de perturbaciones aleatorias: finanzas, dinámica poblacional, etc.

En el Capítulo I se incluyen preliminares requeridos de teoría de probabilidad e indicadores de variación de funciones.

En el Capítulo II se describe al  $MB$ , construyéndose la idea intuitiva a partir de un experimento sencillo de lanzamientos de monedas, pasando por una transformación escalada de este proceso y por último el estudio del comportamiento del límite de este proceso. Se presentan además propiedades básicas del  $MB$  que ayudan a construir la tabla de multiplicación de McKean.

En el Capítulo III se definen las integrales estocásticas de una función  $h(t)$  con respecto a un MB  $W(t)$  a partir de límites de sumas del tipo Itô y del tipo Stratonovich para integrar a  $h(t) = W(t)$  con respecto a  $W(t)$ . Se construye formalmente la integral estocástica de Itô y se derivan propiedades. También se define la integral estocástica de Stratonovich, útil herramienta alternativa de integración. Al final de este capítulo se establece la relación entre la integral de Itô y la de Stratonovich.

En el Capítulo IV se establece la forma general de una ecuación diferencial estocástica (EDE) y se construyen métodos numéricos para resolverlas. Se definen maneras de medir la convergencia de las soluciones obtenidas por estas aproximaciones con la solución exacta (si se tiene). Los métodos revisados son: el método Euler-Maruyama, el método Euler-Heun y el método Milstein.

En el Capítulo V se aplican los métodos anteriores a modelos con presencia de perturbación aleatoria, revisándose una aplicación principal, la estimación del costo de productos financieros, específicamente opciones.

Al final se dan las conclusiones del presente trabajo.

Durante todo el desarrollo de este trabajo se muestran cálculos y gráficos generados por programas de código propio. Se implementan algoritmos de métodos numéricos en el lenguaje de cálculo simbólico Mathematica versión 5.0.

Además de ser requisito de titulación, el objetivo del presente material es efectuar el análisis, exposición y aplicación de algunos métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, esperando que sirva como referencia para posibles lectores.

# Capítulo 1

## Preliminares

A continuación se presentan los conceptos elementales de probabilidad requeridos en este trabajo, así como la definición de algunos indicadores muestrales importantes de funciones.

### 1.1. Probabilidad básica

Un espacio de probabilidad consiste en una terna ordenada, usualmente denotada por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde  $\Omega$  es un conjunto arbitrario,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , y  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad definida sobre  $\mathcal{F}$ .

**Espacio muestral.** El conjunto  $\Omega$  es llamado espacio muestral, y agrupa todos los posibles resultados del experimento aleatorio en cuestión.

**$\sigma$ -álgebra.** Una clase o colección no vacía  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si es cerrada bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables, es decir, si para  $\mathcal{F}$  se cumplen las siguientes condiciones:

- 1.-  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
- 2.- Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ .
- 3.- Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

**Medida de probabilidad.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función  $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  que satisface:

- 1.-  $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$ .
- 2.- Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  son ajenos dos a dos, esto es,  $A_m \cap A_n = \emptyset$  para  $n \neq m$ ,

$$\text{entonces } \mathbb{P}\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\}.$$

**Definición 1.1.1** Se consideran las siguientes denominaciones:

- A la terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se le denomina **espacio de probabilidad**, donde  $\Omega$  es un conjunto arbitrario no vacío.
- A los elementos de  $\mathcal{F}$  se les llama **eventos** o **conjuntos medibles**.

**Definición 1.1.2** Sea  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ , la **mínima  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$**  es

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \}$$

**Definición 1.1.3** La  $\sigma$ -álgebra de Borel es la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene intervalos de  $\mathbb{R}$ .

$$B(\mathbb{R}) = \sigma\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\}$$

A los elementos de  $B(\mathbb{R})$  se les llama borelianos.

**Definición 1.1.4** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria real** (v.a.) es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cualquier conjunto boreliano  $B$ , se cumple que el conjunto  $X^{-1}B = \{X \in B\} = \{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$ .

**Definición 1.1.5** Sea  $X$  una v.a. sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , la **medida de distribución** de  $X$  es la medida de probabilidad  $\mu_X$  que asigna a cada subconjunto boreliano  $B$  de  $\mathbb{R}$  la masa  $\mu_X(B) = \mathbb{P}\{X \in B\}$ .

**Definición 1.1.6** Se puede describir la distribución de una variable aleatoria en términos de su **función de distribución acumulada** (fda)

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si se conoce la medida de distribución  $\mu_X$  entonces se conoce la fda  $F$  de  $X$  ya que  $F(x) = \mu_X(-\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, si se conoce la fda  $F$  de  $X$ , entonces se puede calcular  $\mu_X(x, y] = F(y) - F(x)$  para  $x < y$ .

**Definición 1.1.7** La **función de densidad  $f(x)$  de la v.a.  $X$**  se define para  $x \in \mathbb{R}$  como la función no negativa tal que

$$\mu_X[a, b] = \mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx, \quad -\infty < a \leq b < \infty.$$

**Definición 1.1.8** Sea  $X$  una v.a. sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , la **esperanza** (o valor esperado) de  $X$  se define como

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{\Omega} X(w)d\mathbb{P}(w).$$

la definición tiene sentido si  $\int |X(w)| d\mathbb{P}(w) < \infty$ , y en tal caso se dice que  $X$  es integrable o que tiene esperanza finita.

**Definición 1.1.9** La **varianza** de una v.a.  $X$ , denotada por  $\text{Var}\{X\}$ , se define como la siguiente esperanza, si ésta existe

$$\text{Var}\{X\} = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}\{X\})^2\}.$$

**Definición 1.1.10** Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias, la **covarianza** entre  $X$  y  $Y$  es:

$$\text{Cov}\{X, Y\} = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}\{X\})(Y - \mathbb{E}\{Y\})\}.$$

**Definición 1.1.11** Una v.a.  $X$  se distribuye de forma **Normal** con parámetros: media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  ( $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ ) si y sólo si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

por notación, escribimos  $X \sim \text{Nor}(\mu, \sigma^2)$ .

La función de distribución acumulada de la v.a  $X \sim \text{Nor}(\mu, \sigma^2)$  es:

$$F_X(x, \mu, \sigma^2) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Una transformación muy utilizada es  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ , este proceso es conocido como estandarización de la v.a.  $X$ . Se dice que  $Z$  se distribuye **Normal Estándar**, i.e.  $Z \sim \text{Nor}(0, 1)$ .

Otra transformación es la v.a.  $Y = \exp\{X\}$ . Se dice entonces que  $Y$  tiene distribución **Log-Normal**, i.e.  $Y \sim \text{Log-Nor}(\mu, \sigma^2)$ .

**Definición 1.1.12** Sea  $X$  una v.a.

El  **$k$ -ésimo momento** de  $X$  respecto al origen se define como  $\mathbb{E}\{X^k\}$ .

El  **$k$ -ésimo momento** de  $X$  respecto a la media se define como  $\mathbb{E}\{(X - \mu)^k\}$ .

La **función generadora de momentos** (f.g.m.) de  $X$  se define como  $\varphi_X(u) = \mathbb{E}\{e^{uX}\}$ .

**Definición 1.1.13** Un **proceso estocástico** sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es una familia de variables aleatorias  $(X_t)_{t \in T}$ , donde el conjunto de índices  $T$  puede ser cualquier conjunto no vacío. Si  $T = \mathbb{N}$ , un proceso estocástico es simplemente una sucesión de variables aleatorias  $X_n$  sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y los índices  $0, 1, \dots$  pueden representar tiempos sucesivos.

**Definición 1.1.14** Una **filtración** sobre  $T$  es una familia creciente  $\{\mathcal{F}_t \mid t \in T\}$  de  $\sigma$ -álgebras. Un proceso estocástico  $X_t$ , ( $t \in T$ ) es **adaptado** a  $\{\mathcal{F}_t \mid t \in T\}$  si para cada  $t$ , la v.a.  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

## 1.2. Variación de primer y segundo orden

Para recopilar algunas propiedades muestrales importantes entre funciones se definen a continuación la variación de primer y de segundo orden:

**Definición 1.2.1** Sea  $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$  una partición de  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ , siendo la norma de la partición  $\|\Pi_n\| = \max_{j=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j)$ .

Definimos la **variación de primer orden** (o primera variación) de una función  $f$  en  $[0, T]$  como

$$\mathbb{FV}_{[0, T]}(f) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|.$$

Supongamos que  $f$  es una función diferenciable. Entonces por el Teorema del Valor Medio, en cada subintervalo  $[t_j, t_{j+1}]$ , existe un punto  $t_j^*$  tal que

$$f(t_{j+1}) - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j).$$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)| (t_{j+1} - t_j),$$

y

$$\mathbb{FV}_{[0,T]}(f) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)| (t_{j+1} - t_j) = \int_0^T |f'(t)| dt.$$

La primera variación mide la cantidad total que aumenta o disminuye la trayectoria en cada intervalo  $[t_j, t_{j+1}]$ .

**Definición 1.2.2** Sea  $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$  una partición de  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ , con  $\|\Pi_n\| = \max_{j=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j)$ . La variación de segundo orden (o **variación cuadrática**) de una función  $f$  sobre un intervalo  $[0, T]$  es

$$\mathbb{QV}_{[0,T]}(f) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2.$$

Suponga que una función  $f$  tiene derivada continua. Entonces:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j)^2 \leq \|\Pi_n\| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j).$$

Por lo tanto, la variación cuadrática de  $f$  hasta el tiempo  $T$  es

$$\begin{aligned} \mathbb{QV}_{[0,T]}(f) &= \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 \leq \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \left( \|\Pi_n\| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \right) \\ &= \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \|\Pi_n\| \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \\ &= \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \|\Pi_n\| \int_0^T |f'(t_j)|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Para trayectorias, de igual manera se define la *variación cuadrática muestral* de  $f$  como

$$\mathbb{QV}_{[0,T]}(f) = [f, f]_{[0,T]} = \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2.$$

En ocasiones, a menos que se especifique un intervalo distinto a  $[0, T]$ , escribiremos

$[f, f]_{[0, T]} \equiv [f, f]_T$  entendiéndose como la variación cuadrática acumulada de  $f$  desde 0 hasta  $T$ .

Se define la **covariación cuadrática** de  $f$  y  $g$  sobre  $[0, T]$  como el siguiente límite

$$[f, g]_{[0, T]} = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))(g(t_{j+1}) - g(t_j))$$

cuando el límite es tomado sobre las particiones de  $[0, T]$  con  $\|\Pi_n\| = \max_{j=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j)$ .

**Notación:** Para favorecer a la lectura, se usará indistintamente  $W(t_j) \equiv W_{t_j}$ .



# Capítulo 2

## Movimiento Browniano

En este capítulo, se realiza un camino intuitivo para describir un proceso que será conocido como *Movimiento Browniano (MB)* definiendo primeramente un proceso sencillo de lanzamiento de monedas, después una transformación escalada de este proceso, y por último el análisis de la distribución límite de éste último. Se presentan además, propiedades básicas de este proceso.

### 2.1. Procesos de Markov

Considere un sistema con número de estados finito o infinito contable.  $\mathcal{S}$  denota este conjunto de estados. Podemos asumir que  $\mathcal{S}$  es un subconjunto de los enteros. El conjunto  $\mathcal{S}$  es llamado el *espacio de estados* del sistema. Dado el sistema observado en los momentos discretos de tiempo  $n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).  $X_n$  denotará el estado del sistema en el tiempo  $n$ .

Muchos sistemas tienen la propiedad de que, dado el estado actual, los estados anteriores a éste no influyen en los estados futuros. Esta propiedad es llamada la *propiedad de Markov*, y los sistemas que la poseen son llamadas *cadena de Markov*.

La propiedad de Markov está definida precisamente por el siguiente requisito:

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\} \quad (2.1)$$

para todo entero  $n \geq 0$  y cada  $x_0, \dots, x_{n+1}$  en  $\mathcal{S}$ .

Las probabilidades condicionales  $\mathbb{P}\{X_{n+1} = y | X_n = x\}$  son llamadas *probabilidades de transición en un paso* de la cadena. Si tales probabilidades condicionales son independientes de  $n$ , decimos que la cadena tiene probabilidades de transición *estacionarias*.

### 2.2. Caminata aleatoria

Antes de definir el movimiento browniano y desarrollar sus propiedades, iniciaremos construyendo una caminata aleatoria simétrica.

Pensemos en el experimento de lanzar repetidamente una moneda al aire (con probabilidad  $p$  de caer ‘águila’(A), y probabilidad  $q = 1 - p$  de caer ‘sol’(S), ambas iguales a  $\frac{1}{2}$ ). Denotamos los resultados sucesivos de los lanzamientos como  $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\dots$  ( $\omega_n$  es el resultado del  $n$ -ésimo lanzamiento).

Definamos lo siguiente:

$$X_j = \begin{cases} -1 & \text{si } \omega_j = A \\ 1 & \text{si } \omega_j = S \end{cases}$$

$$M_0 = 0, \quad M_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

El proceso  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) es una *caminata aleatoria simétrica*. Dependiendo del resultado de cada lanzamiento, se sube o baja una unidad (*tamaño de salto* igual a 1), con cada una de las dos posibilidades igualmente probables. (Véase Figura 1).

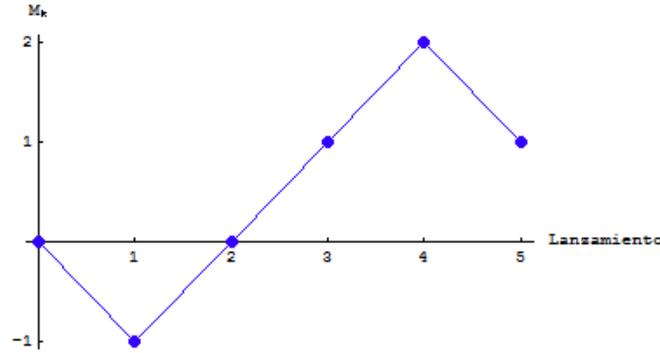


Figura 1. Una trayectoria de la caminata aleatoria simétrica simulando 5 lanzamientos de moneda,  $w=ASSSA$ .

Una caminata aleatoria tiene incrementos independientes si para enteros no negativos  $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_m$ , las variables aleatorias  $M_{k_1} - M_{k_0}, M_{k_2} - M_{k_1}, \dots, M_{k_m} - M_{k_{m-1}}$  son independientes.

Cada una de estas variables,  $M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}} X_j$  es llamada un *incremento de la caminata aleatoria*.

Como  $\mathbb{E}\{X_j\} = (1)(\frac{1}{2}) + (-1)(\frac{1}{2}) = 0$  y  $\mathbb{E}\{X_j^2\} = (1)^2(\frac{1}{2}) + (-1)^2(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $\text{Var}\{X_j\} = 1$ ,

$$\mathbb{E}\{M_{k_{i+1}} - M_{k_i}\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{j=k_i}^{k_{i+1}} X_j\right\} = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}} \mathbb{E}\{X_j\} = 0,$$

$$\text{Var}\{M_{k_{i+1}} - M_{k_i}\} = \text{Var}\left\{\sum_{j=k_i}^{k_{i+1}} X_j\right\} = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}} \text{Var}\{X_j\} = k_{i+1} - k_i.$$

Consideramos finalmente la variación cuadrática muestral de la caminata aleatoria simétrica sobre el tiempo  $t$ :

$$[M, M]_t = \sum_{j=1}^t (M_j - M_{j-1})^2 = \sum_{j=1}^t 1 = t.$$

Note que  $\text{Var}\{M_t\} = [M, M]_t$ .

Para seguir con el camino intuitivo para la definición del movimiento browniano, se define la *caminata aleatoria simétrica escalada*. Para un entero positivo  $n$  fijo,

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}, \quad nt \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

De hecho, obtendremos un movimiento browniano en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

La caminata aleatoria simétrica escalada también tiene incrementos independientes. Si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  son tales que cada  $nt_j$  es un entero, entonces  $W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0)$ ,  $W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)$ , ...,  $W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1})$  son independientes.

Si  $0 \leq s \leq t$  son tales que  $ns$  y  $nt$  son enteros, entonces

$$\mathbb{E}\{W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)\} = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt} - \frac{1}{\sqrt{n}}M_{ns}\right\} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\{M_{nt} - M_{ns}\} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)\} &= \text{Var}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt} - \frac{1}{\sqrt{n}}M_{ns}\right\} = \text{Var}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}(M_{nt} - M_{ns})\right\} \\ &= \frac{1}{n}\text{Var}\{M_{nt} - M_{ns}\} = \frac{1}{n}(nt - ns) = t - s. \end{aligned}$$

De igual manera, consideramos la variación cuadrática muestral de la caminata aleatoria simétrica escalada en un intervalo  $[0, t]$

$$\begin{aligned} [W^{(n)}, W^{(n)}]_t &= \sum_{j=1}^{nt} \left(W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)^2 = \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{n(\frac{j}{n})} - \frac{1}{\sqrt{n}}M_{n(\frac{j-1}{n})}\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}(M_j - M_{j-1})\right)^2 = \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n}X_j^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} X_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} 1 = t. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.2.1** La Figura 2 muestra la simulación de una trayectoria de una caminata aleatoria simétrica escalada  $W^{(100)}(t)$  en el intervalo  $[0, 5]$ . Ejecutándose 500 pasos (lanzamientos de moneda simulados), con un tamaño de paso (ahora escalado) de  $\frac{1}{100}$  y un tamaño de salto (también escalado) de  $\frac{1}{10}$ .

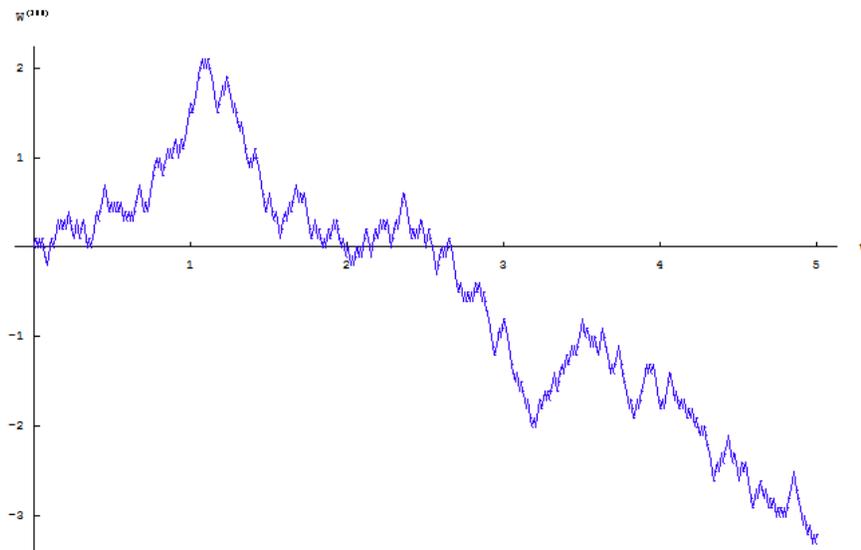


Figura 2. Caminata aleatoria simétrica escalada ( $n=100$ ,  $T=5$ )

### Distribución del límite de la caminata aleatoria escalada $W^{(n)}(t)$

Resumiendo lo construido hasta el momento, se ha definido en (2.2) al proceso  $M_0 = 0$ ,  $M_k = \sum_{j=1}^k X_j$  para  $k = 1, 2, \dots$  a partir de un sencillo experimento con lanzamiento de monedas; posteriormente, se define un nuevo proceso reduciendo el tamaño de paso y el tamaño del salto, derivados por la partición del intervalo  $[0, T]$  en  $nT$  divisiones y de la definición de  $W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}$  (caminata aleatoria simétrica escalada). De suma importancia será descubrir el comportamiento de la distribución de  $W^{(n)}(t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.2.2** Sea  $t \geq 0$ , la distribución de la caminata aleatoria simétrica escalada  $W^{(n)}(t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  evaluada en el tiempo  $t$  converge a una v.a.  $Y \sim \text{Nor}(0, t)$ .

**Demostración.** Para una v.a. con densidad normal con media 0 y varianza  $t$  su función generadora de momentos es

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \mathbb{E}\{e^{uy}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(uy - \frac{y^2}{2t})} dy \\ &= e^{-\frac{u^2 t}{2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por otro lado, si  $t$  es tal que  $nt \in \mathbb{N}$ , entonces la función generadora de momentos de  $W^{(n)}(t)$  es

$$\begin{aligned} \varphi_n(u) &= \mathbb{E}\{e^{uW^{(n)}(t)}\} = \mathbb{E}\{e^{\frac{u}{\sqrt{n}}M_{nt}}\} = \mathbb{E}\left\{\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}M_{nt}\right\}\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{nt}X_j\right\}\right\} = \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^{nt}\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j\right\}\right\} = \prod_{j=1}^{nt}\mathbb{E}\left\{\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j\right\}\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{nt}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right) = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{nt}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ahora, resta demostrar que  $\varphi_n(u) \rightarrow \varphi(u)$ , tomando logaritmos en (2.4) y (2.5), queda mostrar que

$$\log\{\varphi_n(u)\} = nt \log\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right) \text{ converja a } \log\{\varphi(u)\} = \frac{1}{2}u^2t,$$

para ello, se aplica el cambio de variable  $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\{\varphi_n(u)\} = t \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)}{x^2},$$

por la indeterminación aplicamos la regla de L'Hopital, calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x} \log\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right) = \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x,$$

para tener que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\{\varphi_n(u)\} = t \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)} = \frac{t}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{x},$$

presentándose un nuevo caso de indeterminación, y de nuevo se aplica la regla de L'Hopital, calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}\right) = \frac{u^2}{2}e^{ux} + \frac{u^2}{2}e^{-ux} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x} x = 1,$$

y tener finalmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\{\varphi_n(u)\} = \frac{t}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{u^2}{2}e^{ux} + \frac{u^2}{2}e^{-ux}\right) = \frac{1}{2}u^2t$$

como se deseaba. ■

## 2.3. Movimiento Browniano (MB)

A saber, muchas funciones tienen derivadas continuas por lo que su variación cuadrática es 0, como se vio en el Capítulo I. En la sección anterior se calculó la variación cuadrática muestral de la caminata aleatoria simétrica escalada, siendo ésta  $[W^{(n)}, W^{(n)}]_t = t$ . Interesa esta cantidad para tamaños de paso muy pequeños y evaluar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , obteniéndose  $t$ . Las trayectorias del MB son especiales ya que su variación cuadrática *no* es 0. Esto hace al cálculo estocástico diferente al cálculo ordinario y da origen al término “volatilidad” presente en algunos modelos estocásticos (Véase [17]).

Se obtiene un MB cuando  $n \rightarrow \infty$  en el límite de  $W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}$ ,  $nt \in \mathbb{N}$ . El MB hereda propiedades de la caminata aleatoria simétrica escalada. Esto conduce a la siguiente definición.

**Definición 2.3.1** *Un Movimiento Browniano (MB) escalar estándar es un proceso estocástico  $\{W_t : t \geq 0\}$  con las siguientes propiedades:*

- 1.- Los incrementos sobre intervalos disjuntos son independientes y estacionarios: si  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las v.a.'s  $W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  son independientes y tienen la misma distribución.
- 2.- Si  $s < t$ , el incremento  $W_t - W_s$  del proceso sobre el intervalo  $(s, t]$  es normalmente distribuido con media 0 y varianza  $t - s$ :  
De manera abreviada,  $W_t - W_s \sim \text{Nor}(0, t - s)$ , o bien,  $W_t - W_s \sim \sqrt{t - s}\text{Nor}(0, 1)$ .
- 3.- El proceso inicia c.s. en 0, es decir,  $\mathbb{P}\{w : W_0(w) \neq 0\} = 0$ .
- 4.- Las trayectorias de los procesos  $W_t$  son todas continuas c.s.

Para propósitos computacionales es usual considerar el MB discretizado. Se muestra a continuación una simulación del MB realizada en Mathematica 5, donde  $W_t$  estará especificada en valores discretos de  $t$  y denotada como  $W[t]$ .

Se hace la partición del intervalo  $[0, T]$  en  $N$  partes ( $N \in \mathbb{N}$ ) de tamaño de paso  $\delta t = \frac{T}{N}$ , distancia común entre los puntos de la partición, denotándose  $W_j = W[t_j] = W[j\delta t]$ .

De la definición de MB,  $W[0] = 0$  y  $W_{j+1} - W_j = dW_{j+1} \sim \sqrt{\delta t}\text{Nor}(0, 1)$ . Una ejecución de tal simulación se encuentra representada en la Figura 3.

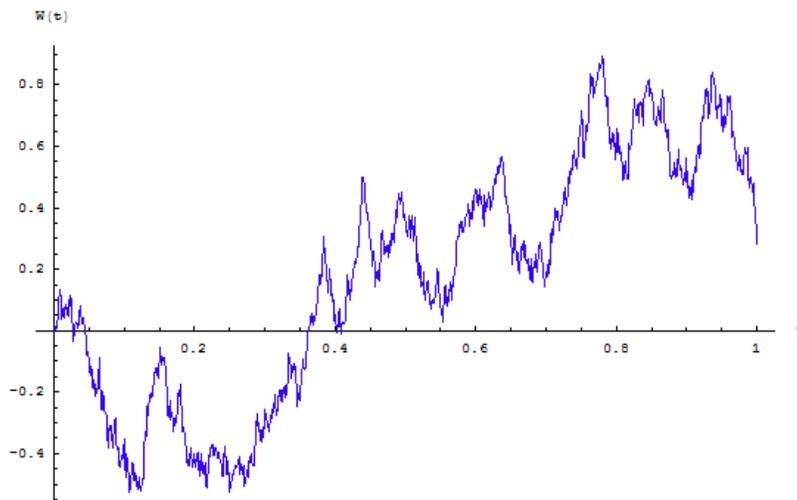


Figura 3. Movimiento Browniano simulado sobre el intervalo  $[0,1]$  ( $N=1000$ )

### 2.3.1. Propiedades del MB

**Proposición 2.3.2** *El MB  $\{W_t\}$  tiene las siguientes propiedades, para reales positivos  $s, t, t_0, \lambda$ :*

- 1)  $\{W_t\}$  es un proceso de Markov
- 2)  $\mathbb{E}\{W_t\} = 0$
- 3)  $\text{Var}\{W_t\} = \mathbb{E}\{W_t^2\} = t$
- 4)  $\text{Cov}\{W_t, W_s\} = \mathbb{E}\{W_t W_s\} = \min\{s, t\}$
- 5)  $\mathbb{E}\{(W_t - W_s)^2\} = |t - s|$
- 6)  $\mathbb{E}\{W_t^4\} = 3t^2$

**Demostración.** (1) Para demostrar que  $\{W_t\}$  cumple la propiedad de Markov, ocupando la característica de independendencia en los incrementos del MB tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{W_{t+s} \leq a \mid W_0 = w_0, W_1 = w_1, \dots, W_s = w_s\} \\
 &= \mathbb{P}\{W_{t+s} - W_s \leq a - w_s \mid W_0 = w_0, W_1 = w_1, \dots, W_s = w_s\} \\
 &= \frac{\mathbb{P}\{W_{t+s} - W_s \leq a - w_s, W_0 = w_0, W_1 = w_1, \dots, W_s = w_s\}}{\mathbb{P}\{W_0 = w_0, W_1 = w_1, \dots, W_s = w_s\}} \\
 &= \mathbb{P}\{W_{t+s} - W_s \leq a - w_s\} \\
 &= \mathbb{P}\{W_{t+s} \leq a \mid W_s = w_s\}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\{W_t\}$  es un proceso de Markov.

(2) Directamente del requisito 2) de la definición de MB.

(3) Directamente del requisito 2) de la definición de MB.

(4) Como  $\text{Cov}\{W_t, W_s\} = \mathbb{E}\{(W_t - \mathbb{E}\{W_t\})(W_s - \mathbb{E}\{W_s\})\} = \mathbb{E}\{W_t W_s\}$

Para demostrar que  $\mathbb{E}\{W_t W_s\} = \min\{s, t\}$ , suponer que  $s < t$ , entonces:

$$\mathbb{E}\{W_t W_s\} = \mathbb{E}\{W_s(W_t - W_s) + W_s^2\} = \mathbb{E}\{W_s(W_t - W_s)\} + \mathbb{E}\{W_s^2\} = \mathbb{E}\{W_s^2\} = s$$

Análogamente para  $t < s$ .

(5) Para verificar que  $\mathbb{E}\{(W_t - W_s)^2\} = |t - s|$ ,

$$\mathbb{E}\{(W_t - W_s)^2\} = \mathbb{E}\{W_t^2\} - 2\mathbb{E}\{W_t W_s\} + \mathbb{E}\{W_s^2\} = t - 2\min\{t, s\} + s = |t - s|$$

(6) Usando la función generadora de momentos de una v.a. normal  $W_t$ ,  $\varphi(u) = \exp\{\mu u + \frac{tu^2}{2}\}$ , con  $\mu = \mathbb{E}\{W_t\} = 0$  y  $t = \text{Var}\{W_t\}$ , se encuentra que:

$$\varphi^{(4)}(u) = (3t^2 + 6u^2t^3 + u^4t^4) \exp\{\frac{tu^2}{2}\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

evaluando en  $u = 0$ , se verifica que  $\mathbb{E}\{W_t^4\} = 3t^2$ . ■

**Ejemplo 2.3.3** (*Movimiento Browniano Geométrico*)

Considérese la función  $G(W_t) = e^{t+\frac{1}{2}W_t}$ , donde  $\{W_t\}$  es un MB. Se simulan 1000 trayectorias de  $G(W_t)$  sobre el intervalo  $[0, 1]$  dividida en 500 subintervalos. En el siguiente gráfico se muestran sólo 10 trayectorias de  $G(W_t)$ .

También se grafica la media muestral de  $G(W_t)$  para las 1000 trayectorias, curva representada en el gráfico en azul.

Además, como  $W_t \sim \text{Nor}(0, t)$ , su f.g.m. es  $\varphi_{W_t}(u) = \mathbb{E}\{e^{uw_t}\} = e^{\frac{1}{2}tu^2}$  se tiene que  $\mathbb{E}\{G(W_t)\} = \mathbb{E}\{e^{t+\frac{1}{2}W_t}\} = e^t \mathbb{E}\{e^{\frac{1}{2}W_t}\} = e^t e^{\frac{1}{2}t(\frac{1}{2})^2} = e^{\frac{9}{8}t}$ , curva representada en rojo.

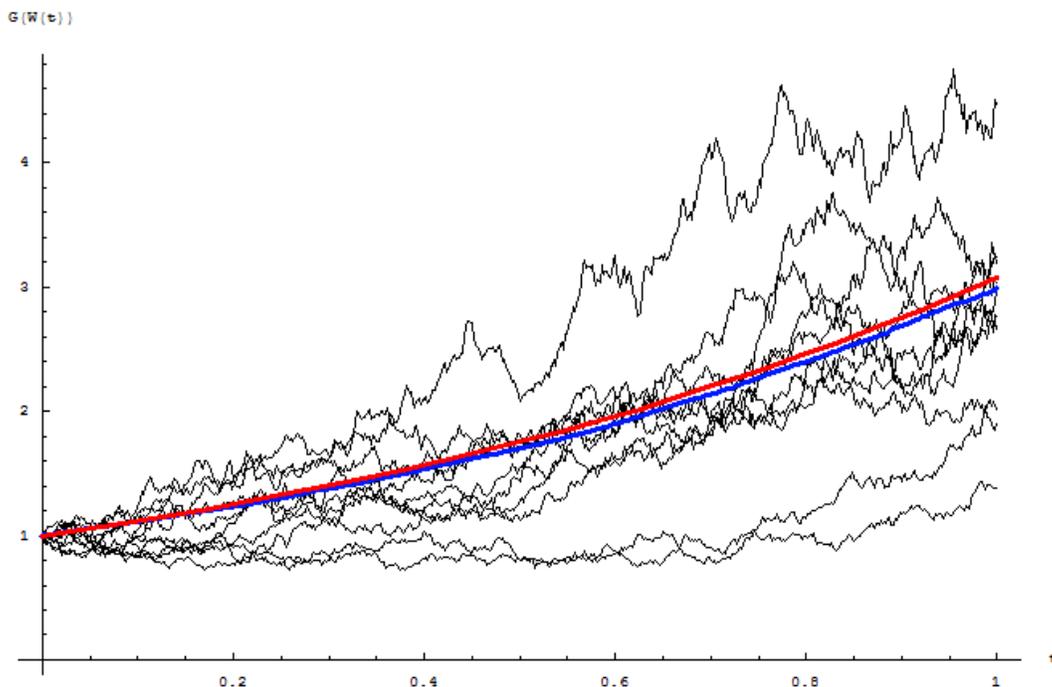


Figura 4. Simulación de trayectorias de  $G(W_t) = e^{t+\frac{1}{2}W_t}$  sobre el intervalo  $[0,1]$ , su media muestral y  $e^{\frac{9}{8}t}$

La importancia de la realización de este ejercicio es que  $G(W_t) = e^{t+\frac{1}{2}W_t}$  tiene la forma de la solución de una ecuación diferencial estocástica particular como se verá en la Sección 4.3.

### 2.3.2. Primera variación y variación cuadrática del MB

En este apartado se retoman algunos conceptos que brevemente se presentaron en el capítulo anterior. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el intervalo  $a \leq t \leq b$  y supongamos que  $\Pi_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$  es una partición de  $[a, b]$ , y con la norma de la partición definida como  $\|\Pi_n\| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i)$ .

Para toda  $p > 0$ , se expresa

$$V_p(f; a, b, \Pi_n) := \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^p,$$

definimos la  $p$ -ésima variación real de  $f$  en  $[a, b]$  como el  $\sup_{\Pi_n} V_p(f; a, b, \Pi_n)$ .

Nuestro objetivo es investigar el comportamiento del límite de  $V_p(W; a, b, \Pi_n)$  con  $\{W_t\}$  un MB, y es de especial interés considerar los casos cuando  $p = 1$  y cuando  $p = 2$  que dan origen a la primera variación y a la variación cuadrática del MB definidos anteriormente (Véase [17]).

**Teorema 2.3.4** *Sea  $\{W_t\}$  un MB definido en  $[a, b]$  y  $\Pi_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$  una partición del intervalo con  $\|\Pi_n\| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$*

$$\mathbb{QV}_{[a,b]}(W) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} V_2(W; a, b, \Pi_n) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = b - a,$$

se dice que el MB acumula variación cuadrática a razón uno por unidad de tiempo.

**Demostración.** Para iniciar, notar que  $\sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| = b - a$ , definamos entonces

$$Y_n := \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 - (b - a) = \sum_{i=0}^{n-1} (|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 - (t_{i+1} - t_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i,$$

donde  $X_i = |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 - (t_{i+1} - t_i)$  y note que

$$Y_n^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} X_i X_j = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j,$$

por independencia de los incrementos del movimiento browniano  $\mathbb{E}\{X_i X_j\} = 0$  ya que  $\mathbb{E}\{|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2\} = t_{i+1} - t_i$ , y

$$\mathbb{E}\{Y_n^2\} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\{X_i^2\},$$

y calculando cada sumando

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X_i^2\} &= \mathbb{E}\{(|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 - (t_{i+1} - t_i))^2\} \\ &= \mathbb{E}\{|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^4\} - 2(t_{i+1} - t_i)\mathbb{E}\{|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2\} + (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 3(t_{i+1} - t_i)^2 - 2(t_{i+1} - t_i)^2 + (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 2(t_{i+1} - t_i)^2, \end{aligned}$$

dado que el cuarto momento de una v.a  $Nor(0, t_{i+1} - t_i)$  es  $3(t_{i+1} - t_i)^2$ .

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\{Y_n^2\} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\{X_i^2\} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2 \|\Pi_n\| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 2(b-a) \|\Pi_n\| \rightarrow 0,$$

cuando  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ , por lo cual se concluye que  $Y_n \rightarrow 0$  en  $L^2$ ; esto es,  $V_2(W; a, b, \Pi_n) \rightarrow b - a$  en  $L^2$  cuando  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ . ■

**Corolario 2.3.5** Sea  $\{W_t\}$  un MB. Entonces  $[W, W]_T = [W, W]_{[0, T]} = T$ , para  $T \geq 0$ .

**Teorema 2.3.6** Sea  $\{W_t\}$  un MB definido en  $[a, b]$  y  $\Pi_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$  una partición del intervalo con  $\|\Pi_n\| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$

$$\mathbb{FV}_{[a, b]}(W) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} V_1(W; a, b, \Pi_n) = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty,$$

se dice que el MB tiene primera variación no acotada sobre todo el intervalo de tiempo.

**Demostración.** Suponer que  $W_t$  tiene variación acotada y que  $\sup V_1(W; a, b)$  denota la variación total de  $W_t$  en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces se sigue que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \sup_{\Pi_n} V_1(W; a, b, \Pi_n), \end{aligned}$$

como  $W_t$  es continua c.s. en  $[a, b]$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ , por lo tanto,

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| \rightarrow 0 \text{ cuando } \|\Pi_n\| \rightarrow 0,$$

y se concluye que  $\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \rightarrow 0$  c.s. lo cual es una contradicción. ■

**Proposición 2.3.7** Sea  $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$  una partición de un intervalo finito  $[0, T]$ , es decir,  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = T$  incorporando los cálculos referentes a la variación cuadrática del MB, se tiene que:

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 = T.$$

También, se puede calcular la covariación cuadrática de  $W_t$  con  $t$  y la variación cruzada

de  $t$  consigo misma (o variación cuadrática de  $t$ ), que son:

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j) = 0,$$

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 = 0.$$

**Demostración.** a) Como  $|(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j)| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|(t_{j+1} - t_j)$ , sumando sobre todos los  $j$  se tiene que

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(t_{j+1} - t_j) \right| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| T,$$

como  $W_t$  es continua,

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| = 0.$$

b) Similarmente, como  $\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k) \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = \|\Pi_n\| T$ , tomando el límite cuando  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$  se verifica lo anterior. ■

Se traducen los anteriores resultados como  $dW_t dW_t = dt$ ,  $dW_t dt = 0$ ,  $dt dt = 0$ , resultados fácilmente recordados mediante la conocida tabla de multiplicación de McKean:

$\times$	$dW_t$	$dt$
$dW_t$	$dt$	$0$
$dt$	$0$	$0$



# Capítulo 3

## Integrales Estocásticas

Las trayectorias muestrales del  $MB$  no son diferenciables y no tienen variación acotada, no pueden ser integradas sobre sí mismas que es su principal desventaja. De las nociones de la integral ordinaria e integral de Riemann-Stieltjes requerimos introducir integrales de la forma  $\int W_t dW_t$  considerando primeramente sumas respectivas a una partición y por supuesto límites.

En este capítulo se definirá la integral estocástica y las fórmulas de Itô, análogo estocástico a la regla de la cadena del cálculo ordinario. Se desarrollará además la integral de Stratonovich, herramienta alternativa muy utilizada para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Dada una función  $h(t)$  apropiada, la integral  $\int_0^T h_t dt$  puede ser aproximada por las sumas de Riemann

$$\sum_{j=0}^{n-1} h(t_j)(t_{j+1} - t_j), \quad (3.1)$$

con  $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$  una partición de un intervalo finito  $[0, T]$  donde  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = T$ . Además la integral puede estar definida tomando el límite de (3.1) cuando  $\|\Pi_n\| = \max_{j=1, \dots, n} (t_{j+1} - t_j) \rightarrow 0$ .

De manera similar, las sumas de la forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} h(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \quad (3.2)$$

podrían ser consideradas como aproximación de la integral  $\int_0^T h_t dW_t$ . De esto, se dice que se integra a  $h(t)$  con respecto al  $MB$   $\{W(t)\}$  de 0 a  $T$  (Véase [4]).

### 3.1. Sumas de Itô y sumas de Stratonovich

Consideremos entonces la suma de la forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} h(t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \quad (3.3)$$

que por analogía a (3.1) puede ser considerada como una aproximación de la integral estocástica  $\int_0^T h_t dW_t$ . Llamamos a las sumas definidas en (3.3) *sumas de Itô*.

Alternativamente a (3.3) se consideran sumas de la forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} h\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \quad (3.4)$$

que también puede ser considerada como una aproximación de la integral estocástica  $\int_0^T h_t dW_t$ . Llamamos a las sumas definidas en (3.4) *sumas de Stratonovich*.

Consideramos el caso especial cuando  $h(t) = W(t)$ , es decir, a partir de sumas del tipo (3.3) y (3.4) construimos una aproximación a la integral de  $W(t)$  con respecto a sí misma.

**Sumas de Itô.** Es posible evaluar exactamente las integrales estocásticas aproximadas mediante sumas de Itô utilizando la identidad  $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b-a)^2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \\ &= \frac{1}{2} (W_T^2 - W_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2. \end{aligned}$$

Así,  $\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} W_T^2 - \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2$ , de donde se tiene que:

$$\int_0^T W_t dW_t = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T. \quad (3.5)$$

De manera similar, si se evalúa el integrando en el extremo derecho de cada intervalo,  $\sum_{j=0}^{n-1} W_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$  y utilizando la identidad  $b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(b-a)^2$  se

obtiene que  $\int_0^T W_t dW_t = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} W_T^2 + \frac{1}{2} T$ . Lo anterior indica

que la integral estocástica es sensible al punto donde se evalúa. Las siguientes sumas son consideradas evaluadas en el punto medio de los extremos izquierdo y derecho de cada subintervalo teniendo algunas ventajas operacionales.

**Sumas de Stratonovich.** De igual manera, es posible evaluar exactamente las integrales estocásticas aproximadas mediante sumas de Stratonovich, con el inconveniente de que  $W_t$  debe ser evaluada en los puntos  $t = \frac{t_j+t_{j+1}}{2}$ , que se elimina descomponiendo a  $W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}$  como sigue:

$$W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} = \frac{W_{t_j} + W_{t_{j+1}}}{2} + \text{Nor}\left(0, \frac{t_{j+1} - t_j}{4}\right). \quad (3.6)$$

La obtención de los parámetros 0 y  $\frac{(t_{j+1}-t_j)}{4}$  se obtienen de las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} &= \frac{W_{t_j} + W_{t_{j+1}}}{2} + \text{Nor}(\mu, \sigma^2) \\ 2W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} &= W_{t_j} + W_{t_{j+1}} + 2\text{Nor}(\mu, \sigma^2) \\ 2W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - 2W_{t_j} &= W_{t_{j+1}} - W_{t_j} + 2\text{Nor}(\mu, \sigma^2) \\ 2(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j}) - (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) &= \text{Nor}(2\mu, 4\sigma^2). \end{aligned}$$

Se calcula la esperanza y la varianza de ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 2\mu &= \mathbb{E}\{2(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j}) - (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\} \\ &= 2\mathbb{E}\{W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j}\} - \mathbb{E}\{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\sigma^2 &= \text{Var}\{2(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j}) - (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\} \\ &= 4\text{Var}\{W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j}\} + \text{Var}\{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} - 4\text{Cov}\{W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j}, W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} \\ &= 4\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2} - t_j\right) + (t_{j+1} - t_j) - 4\mathbb{E}\{(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\} \\ &= 3(t_{j+1} - t_j) - 4\mathbb{E}\{(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} + W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j})\} \\ &= 3(t_{j+1} - t_j) - 4\mathbb{E}\{(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}})\} - 4\mathbb{E}\{(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j})^2\} \\ &= 3(t_{j+1} - t_j) - 4\mathbb{E}\{(W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} - W_{t_j})^2\} \\ &= 3(t_{j+1} - t_j) - 4\left(\frac{t_{j+1} - t_j}{2}\right) \\ &= t_{j+1} - t_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} = \frac{W_{t_j} + W_{t_{j+1}}}{2} + \text{Nor}(0, \frac{t_{j+1}-t_j}{4})$ .

De la igualdad (3.6) podemos encontrar una aproximación de la integral  $\int_0^T W_t dW_t$  en su versión Stratonovich, (denotada  $\int_0^T W_t \circ dW_t$ ), definiendo  $\Delta Z := Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j} \sim \text{Nor}(0, \frac{t_{j+1}-t_j}{4})$ ,

construyendo las sumas de Stratonovich y posteriormente usando límites.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{W_{t_j} + W_{t_{j+1}}}{2} + Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j} \right) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_j} + W_{t_{j+1}})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \\
&= \frac{1}{2} (W_T^2 - W_0^2) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta Z \Delta W \\
&= \frac{1}{2} W_T^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta Z \Delta W.
\end{aligned}$$

Así,  $\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} W_T^2 - \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta Z \Delta W$ , de donde se tiene que:

$$\int_0^T W_t \circ dW_t = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} W_T^2. \quad (3.7)$$

**Observación:** Algunos autores prefieren una definición casi equivalente para la integral de Stratonovich basada en la suma

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (h(t_j) + h(t_{j+1}))(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

ya que la v.a. residual en (3.6) tiene media 0 y varianza muy pequeña, (Véase [4]). Con esta nueva definición, los cálculos para la obtención de la integral estocástica en su versión Stratonovich es:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (W_{t_j} + W_{t_{j+1}})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2) = \frac{1}{2} (W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2) = \frac{1}{2} W_T^2,$$

tomando límites se llega de igual manera a que:

$$\int_0^T W_t \circ dW_t = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (W_{t_j} + W_{t_{j+1}})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2} W_T^2.$$

**Ejemplo 3.1.1** *Considérense los procesos  $X_1(t) = \int_0^T W_t dW_t$  y  $X_2(t) = \int_0^T W_t \circ dW_t$ , versiones Itô y Stratonovich respectivamente. Para calcular aproximaciones de dichas integrales se realizan sumas sobre la partición del intervalo  $[0, 10]$  con  $n = 2^{10}$  divisiones, siendo  $\|\Pi_n\| = \delta t = 10/2^{10}$ . La Figura 5 muestra sólo una trayectoria de tales procesos para la misma muestra browniana, y se analizan los errores correspondientes.*

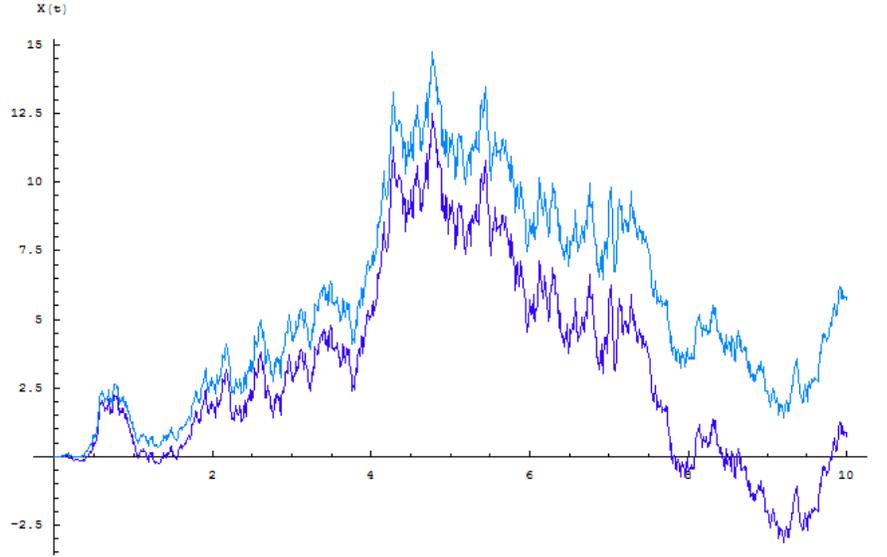


Figura 5. Trayectoria del proceso  $\int_0^T W_t dW_t$  (azul marino) y del proceso  $\int_0^T W_t \circ dW_t$  (azul claro)

#### Versión Itô

$$\int_0^T W_t dW_t \approx \sum_{j=0}^{2^{10}-1} W_{t_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = 0.736404$$

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T = 0.761485$$

$$Error_{Itô} = 0.025081.$$

#### Versión Stratonovich

$$\int_0^T W_t \circ dW_t \approx \sum_{j=0}^{2^{10}-1} W_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = 5.68586$$

$$\int_0^T W_t \circ dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 = 5.761485$$

$$Error_{Stratonovich} = 0.07563.$$

Nótense la diferencia y similitud entre las trayectorias de ambos procesos, tal diferencia se eliminará agregando un *término de corrección* que relacionará las versiones de Itô y de Stratonovich para integrandos en general y que se deducirá al final de este capítulo.

## 3.2. Integral estocástica de Itô

Ahora, haremos una mezcla entre un movimiento browniano  $\{W_t\}$  y una filtración  $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$  satisfaciendo las condiciones siguientes:

- a) Para cada  $t$ ,  $W_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.
- b) Para algún  $s \leq t$ , la v.a.  $W_t - W_s$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_s$ .

**Notación 3.2.1** *Por convención, usamos  $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$  para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos  $f(t, w)$ ,  $a \leq t \leq b, w \in \Omega$ , satisfaciendo las siguientes condiciones:*

- a)  $f(t, w)$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,
- b)  $\int_a^b \mathbb{E}\{|f(t)|^2\} dt < \infty$ .

Definiremos a continuación formalmente la integral estocástica

$$\int_a^b f(t) dW_t \quad (3.8)$$

para  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$  en tres pasos (Véase [8]):

- *Paso 1.* Se define la integral estocástica para un proceso estocástico escalonado en  $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .
- *Paso 2.* Se prueba un lema de aproximación mediante una sucesión  $\{f_n(t)\}$  de funciones escalonadas aproximándose a una función  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .
- *Paso 3.* Se define la integral estocástica para un proceso estocástico general.

**PASO 1**  $f$  es un proceso estocástico escalonado en  $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .

Suponga que  $f$  es un proceso estocástico escalonado dado por

$$f(t, w) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(w) \mathcal{I}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \quad (3.9)$$

donde  $\xi_i$  es  $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible y  $\mathbb{E}\{\xi_i^2\} < \infty$ . En este caso definimos

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (3.10)$$

Se puede ver que  $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$  y procesos estocásticos  $f$  y  $g$ . Además tenemos el siguiente lema:

**Lema 3.2.2** *Sea  $I(f)$  como en (3.10),*

$$\mathbb{E}\{I(f)\} = 0 \quad (3.11.a)$$

$$\mathbb{E}\{|I(f)|^2\} = \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t)|^2\} dt. \quad (3.11.b)$$

**Demostración.** Para cada  $0 \leq i \leq n-1$  en la ecuación (3.10),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\xi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\xi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \mid \mathcal{F}_{t_i}\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\xi_i \mathbb{E}\{W(t_{i+1}) - W(t_i) \mid \mathcal{F}_{t_i}\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\xi_i \mathbb{E}\{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

De aquí que  $\mathbb{E}\{I(f)\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right\} = 0$ .

Por otra parte

$$|I(f)|^2 = \sum_{i,j=0}^{n-1} \xi_i \xi_j (W(t_{i+1}) - W(t_i)) (W(t_{j+1}) - W(t_j)). \tag{3.13}$$

Por un lado, note que si  $i \neq j$ , digamos  $i < j$ ,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\xi_i \xi_j (W(t_{i+1}) - W(t_i)) (W(t_{j+1}) - W(t_j))\} \\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\xi_i \xi_j (W(t_{i+1}) - W(t_i)) (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \mid \mathcal{F}_{t_j}\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\xi_i \xi_j (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \mathbb{E}\{W(t_{j+1}) - W(t_j) \mid \mathcal{F}_{t_j}\}\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

y  $\mathbb{E}\{W(t_{j+1}) - W(t_j) \mid \mathcal{F}_{t_j}\} = \mathbb{E}\{W(t_{j+1}) - W(t_j)\} = 0$ , como se vio anteriormente.

Por otro lado, para  $i = j$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\xi_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\xi_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\xi_i^2 \mathbb{E}\{(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\}\} \\
&= \mathbb{E}\{\xi_i^2 (t_{i+1} - t_i)\} \\
&= (t_{i+1} - t_i) \mathbb{E}\{\xi_i^2\}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Se sigue de las ecuaciones (3.14) y (3.15) que  $\mathbb{E}\{|I(f)|^2\} = \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t)|^2\} dt$ . ■

## PASO 2 Un lema de aproximación.

Necesitamos probar un lema de aproximación para poder definir la integral estocástica  $\int_a^b f(t) dW_t$  para un proceso estocástico general  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .

**Lema 3.2.3** *Supongamos  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .*

*Entonces existe una sucesión  $\{f_n(t) : n \geq 1\}$  de procesos estocásticos escalonados en  $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0. \tag{3.16}$$

**Demostración.** Dividiremos la prueba en casos especiales y el caso general.

**Caso 1)** Cuando  $\mathbb{E}\{f(t)f(s)\}$  es una función continua de  $(t, s) \in [a, b]^2$ . En este caso, sea  $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$  una partición de  $[a, b]$  y definimos un proceso estocástico  $f_n(t, w)$  como

$$f_n(t, w) = f(t_i, w), \quad t_i < t \leq t_{i+1} \quad (3.17)$$

Entonces  $\{f_n(t, w)\}$  es una sucesión de procesos estocásticos escalonados adaptados. Por la continuidad de  $\mathbb{E}\{f(t)f(s)\}$  sobre  $[a, b]^2$ , tenemos

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E}\{|f(t) - f(s)|^2\} = 0, \quad (3.18)$$

que implica que para cada  $t \in [a, b]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{|f(t) - f_n(t)|^2\} = 0. \quad (3.19)$$

Además, usando la desigualdad  $|\alpha - \beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$  obtenemos

$$|f(t) - f_n(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2). \quad (3.20)$$

Por lo tanto, para todo  $a \leq t \leq b$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|f(t) - f_n(t)|^2\} &\leq 2(\mathbb{E}\{|f(t)|^2\} + \mathbb{E}\{|f_n(t)|^2\}) \\ &\leq 4 \sup_{a \leq s \leq b} \mathbb{E}\{|f(s)|^2\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por consiguiente, de las ecuaciones (3.19) y (3.21), podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (Véase [15]) para concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0. \quad (3.22)$$

que es lo que se quería demostrar en (3.16).

**Caso 2)** Cuando  $f$  es acotada.

Definimos un proceso estocástico  $g_n$  por

$$g_n(t, w) = \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f\left(t - \frac{\tau}{n}, w\right) d\tau. \quad (3.23)$$

Note que  $g_n$  es adaptado a  $\mathcal{F}_t$  y  $\int_a^b \mathbb{E}\{|g_n(t)|^2\} dt < \infty$ .

(a) Para cada  $n$ ,  $\mathbb{E}\{g_n(t)g_n(s)\}$  es una función continua de  $(t, s)$ .

Para probar esto, ponemos  $u = t - \frac{\tau}{n}$  para reescribir  $g_n(t, w)$  como

$$g_n(t, w) = \int_a^t e^{-n(t-u)} n f(u, w) du \quad (3.24)$$

que puede ser usado para verificar que

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E}\{g_n(t) - g_n(s)\} = 0. \quad (3.25)$$

(b)  $\int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - g_n(t)|^2\} dt \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Para probarlo note que:

$$f(t) - g_n(t) = \int_0^\infty e^{-\tau} \left( f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right) d\tau, \quad (3.26)$$

donde  $f(t) = 0$  para  $t < a$ .

Como  $e^{-\tau}$  es una función de densidad sobre  $[0, \infty)$ , podemos aplicar la desigualdad de Schwarz para obtener

$$|f(t) - g_n(t)|^2 \leq \int_0^\infty e^{-\tau} \left| f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right|^2 d\tau. \quad (3.27)$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - g_n(t)|^2\} dt &\leq \int_a^b \int_0^\infty e^{-\tau} \mathbb{E} \left\{ \left| f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right|^2 \right\} d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\tau} \left( \int_a^b \mathbb{E} \left\{ \left| f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right|^2 \right\} dt \right) d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-\tau} \mathbb{E} \left\{ \int_a^b \left| f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right|^2 dt \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como  $f$  se asume acotada, tenemos

$$\int_a^b \left| f(t, \cdot) - f\left(t - \frac{\tau}{n}, \cdot\right) \right|^2 dt \rightarrow 0, \quad \text{c.s.} \quad (3.29)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces (b) se sigue de las ecuaciones (3.28) y (3.29).

Ahora, por (a) podemos aplicar el Caso 1) a  $g_n$  para cada  $n$  y así obtener un proceso estocástico escalonado adaptado  $f_n(t, w)$  tal que

$$\int_a^b \mathbb{E}\{|g_n(t) - f_n(t)|^2\} dt \leq \frac{1}{n}. \quad (3.30)$$

Por (b) y la ecuación (3.30) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0, \quad (3.31)$$

que completa la prueba del segundo caso.

**Caso 3)** El caso general para  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .

Sea  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ . Para cada  $n$ , definimos

$$g_n(t, w) = \begin{cases} f(t, w) & \text{si } |f(t, w)| \leq n, \\ 0 & \text{si } |f(t, w)| > n. \end{cases}$$

Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (Véase [15]),

$$\int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - g_n(t)|^2\} dt \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

Ahora, para cada  $n$ , aplicamos el Caso 2) sobre  $g_n$  para tener un proceso estocástico escalonado adaptado  $f_n(t, w)$  tal que

$$\int_a^b \mathbb{E}\{g_n(t) - f_n(t)^2\}dt \leq \frac{1}{n}. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.16) se sigue de las ecuaciones (3.32) y (3.33), y queda probado el lema. ■

**PASO 3 Integral estocástica**  $\int_a^b f(t)dW_t$ , para  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ .

Usamos lo probado en los Pasos 1 y 2 para definir la integral estocástica

$$\int_a^b f(t)dW_t, \quad f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega). \quad (3.34)$$

Aplicando el Lema 3.2.3 del Paso 2, para obtener una sucesión  $\{f_n(t, w) : n \geq 1\}$  de procesos estocásticos escalonados adaptados tal que se satisfaga la ecuación (3.16). Para cada  $n$ ,  $I(f_n)$  está definida por el Paso 1. Por el Lema 3.2.2 del Paso 1 tenemos

$$\mathbb{E}\{|I(f_n) - I(f_m)|^2\} = \int_a^b \mathbb{E}\{|f_n(t) - f_m(t)|^2\}dt \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

Entonces la sucesión  $\{I(f_n)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . Definimos

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (3.36)$$

Así,  $I(f)$  queda bien definida.

**Definición 3.2.4** El límite  $I(f)$  definido en la ecuación (3.36) es llamada la **Integral de Itô de  $f$**  y es denotada por  $\int_a^b f(t)dW(t)$ .

### 3.3. Propiedades de la integral de Itô

La integral de Itô  $I(f)$  está definida para  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ , y el mapeo  $I$  es lineal, i.e. para  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ ,

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g) \quad (3.37)$$

Claramente el Lema 3.2.3 es válido para  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ , y se precisa en el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1** Suponga que  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ . Entonces la integral de Itô  $I(f) = \int_a^b f(t)dW(t)$  es una v.a. satisfaciendo que

$$\mathbb{E}\{I(f)\} = 0 \quad (3.38)$$

$$\mathbb{E}\{|I(f)|^2\} = \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t)|^2\}dt. \quad (3.39)$$

Por el inciso (3.39) del teorema anterior, se dice que la integral  $I : L_{ad}^2([a, b] \times \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  posee la propiedad de *isometría de Itô*.

**Corolario 3.3.2** *Para cualesquiera  $f, g \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ , se satisface la igualdad*

$$\mathbb{E} \left\{ \int_a^b f(t) dW_t \int_a^b g(t) dW_t \right\} = \int_a^b \mathbb{E}\{f(t)g(t)\} dt. \quad (3.40)$$

**Demostración.** *Por linealidad, se observa que  $(I(f+g))^2 = I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2$ , aplicando esperanza y la propiedad de isometría de Itô se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(I(f) + I(g))^2\} &= \int_a^b \mathbb{E}\{(f(t) + g(t))^2\} dt \\ \mathbb{E}\{I(f)^2\} + 2\mathbb{E}\{I(f)I(g)\} + \mathbb{E}\{I(g)^2\} &= \int_a^b (\mathbb{E}\{f(t)^2\} + 2\mathbb{E}\{f(t)g(t)\} + \mathbb{E}\{g(t)^2\}) dt \\ I(f)^2 + 2\mathbb{E}\{I(f)I(g)\} + I(g)^2 &= f(t)^2 + 2 \int_a^b \mathbb{E}\{f(t)g(t)\} dt + g(t)^2 \end{aligned}$$

$$\text{de donde se obtiene que } \mathbb{E}\{I(f)I(g)\} = \int_a^b \mathbb{E}\{f(t)g(t)\} dt$$

que es a lo que se pretendía llegar. ■

Sea  $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ . Para una partición  $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  del intervalo  $[a, b]$ , definimos las sumas de Riemann de  $f$  con respecto a  $W_t$  por

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (3.41)$$

Es natural preguntarse si la sucesión de sumas de Riemann converge a la integral de Itô  $\int_a^b f(t)dW(t)$ . Asumimos que  $\mathbb{E}\{f(t)f(s)\}$  es una función continua de  $t$  y  $s$ . Se define el proceso estocástico  $f_n$  como se hizo anteriormente

$$f_n(t, w) = f(t_i, w), \quad t_i < t \leq t_{i+1},$$

Como se mostró en el Caso 1 del Lema 3.2.3 tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0.$$

Así que, por la ecuación (3.36)

$$\int_a^b f(t)dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Pero por la ecuación (3.10),  $I(f_n)$  está dada por

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \sum_{i=1}^n f_n(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \end{aligned}$$

que es exactamente la suma de Riemann de la ecuación (3.41). Entonces hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.3** *Suponga que  $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$  y suponga que  $\mathbb{E}\{f(t)f(s)\}$  es una función continua de  $t$  y  $s$ . Entonces*

$$\int_a^b f(t)dW_t = \lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

donde  $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  y  $\|\Pi_n\| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i)$ .

### 3.4. Fórmula de Itô

En el cálculo ordinario, una regla básica de derivación es la regla de la cadena utilizada para obtener la derivada de  $f(g(t))$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, entonces  $f(g(t))$  es diferenciable y su derivada es:

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = f'(g(t))g'(t),$$

en términos del Teorema Fundamental del Cálculo esto equivale a

$$f(g(t)) - f(g(a)) = \int_a^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

El cálculo de Itô trata con funciones aleatorias, es decir, procesos estocásticos y la fórmula anterior no funciona. Si  $W(t)$  es un MB, la igualdad  $\frac{d}{dt}(f(W(t))) = f'(W(t))W'(t)$  no tiene sentido ya que las trayectorias de  $W(t)$  no son diferenciables.

Consideremos entonces una partición  $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$  de  $[a, t]$ . Tenemos que:

$$f(W(t)) - f(W(a)) = \sum_{i=0}^{n-1} \{f(W_{t_{i+1}}) - f(W_{t_i})\}. \quad (3.42)$$

Sea  $f$  dos veces diferenciables y  $f''$  continua, por la expansión de Taylor se tiene que:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0 + \lambda(x - x_0))(x - x_0)^2,$$

donde  $0 < \lambda < 1$ . Aplicándose a la ecuación (3.42) queda

$$f(W_t) - f(W_a) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(W_{t_i} + \lambda_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2,$$

donde  $0 < \lambda_i < 1$  y  $W_t = W(t)$  como se ha venido manejando.

Para el primer sumando se tiene que

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f'(W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \rightarrow \int_a^t f'(W_s)dW_s,$$

y para el segundo sumando

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f''(W_{t_i} + \lambda(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \rightarrow \int_a^t f''(W_s) ds,$$

lo anterior se traduce en el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.1** *Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2$ . Entonces*

$$f(W_t) - f(W_a) = \int_a^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_a^t f''(W_s) ds, \quad (3.43)$$

donde la primer integral es una integral de Itô, y la segunda es una integral de Riemann.

**Ejemplo 3.4.2** *Sea  $f(x) = e^x$ . Aplicando la fórmula de Itô (3.43)*

$$e^{W_t} - e^{W_a} = \int_a^t e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2} \int_a^t e^{W_s} ds,$$

podemos reescribir

$$\int_a^t e^{W_s} dW_s = e^{W_t} - e^{W_a} - \frac{1}{2} \int_a^t e^{W_s} ds.$$

### Fórmula de Itô ligeramente generalizada

Si  $f(t, x)$  es una función de  $t$  y  $x$ , y  $x = W_t$ . Se presenta una generalización de la fórmula de Itô para el proceso  $f(t, W_t)$  enunciado en el siguiente teorema:

**Teorema 3.4.3** *Sea  $f(t, x)$  una función continua con derivadas parciales  $f_t$ ,  $f_x$  y  $f_{xx}$  continuas. Entonces*

$$f(t, W_t) - f(a, W_a) = \int_a^t f_x(s, W_s) dW_s + \int_a^t \left( f_t(s, W_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, W_s) \right) ds. \quad (3.44)$$

**Ejemplo 3.4.4** *Sea  $f(t, x) = tx^2$ . Se tiene que  $f_t = x^2$ ,  $f_x = 2tx$  y  $f_{xx} = 2t$ , aplicando la fórmula de Itô (3.44) se tiene que*

$$tW_t^2 - 0W_0^2 = \int_0^t W_s^2 ds + 2 \int_0^t sW_s dW_s + \int_0^t s ds,$$

podemos reescribir

$$\int_0^t sW_s dW_s = \frac{t}{2} W_t^2 - \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2} \int_0^t W_s^2 ds.$$

### Fórmula de Itô en la forma general.

Por conveniencia, utilizamos  $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$  y  $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$  para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos  $f(t) \{\mathcal{F}_t\}$ —adaptados tales que  $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$  y  $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ , respectivamente.

**Definición 3.4.5** *Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s, \quad 0 \leq t \leq b,$$

donde  $X_0$  es  $\mathcal{F}_0$ -medible,  $a(s) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$  y  $b(s) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ .

Una forma más simple de reescribir la forma del proceso de Itô es mediante la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t.$$

El siguiente teorema da la forma general de la fórmula de Itô:

**Teorema 3.4.6** *Sea  $X_t$  un proceso de Itô dado por*

$$X_t = X_0 + \int_a^t a(s)ds + \int_a^t b(s)dW_s, \quad a \leq t \leq b$$

Suponga que  $\theta(t, x)$  es una función continua con derivadas parciales  $\theta_t$ ,  $\theta_x$  y  $\theta_{xx}$  continuas. Entonces  $\theta(t, X_t)$  es también un proceso de Itô y

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) - \theta(a, X_a) &= \int_a^t \theta_x(s, X_s)b(s)dW_s \\ &+ \int_a^t \left( \theta_t(s, X_s) + \theta_x(s, X_s)a(s) + \frac{1}{2}\theta_{xx}(s, X_s)b(s)^2 \right) ds. \end{aligned} \tag{3.45}$$

### 3.5. Integral estocástica de Stratonovich

Las integrales estocásticas en aplicaciones son frecuentemente tomadas en el sentido Stratonovich. Este cálculo es diseñado de tal manera que sus reglas básicas tales como la regla de la cadena e integración por partes son las mismas existentes en el cálculo ordinario. Aunque las reglas de manipulación son las mismas, sus cálculos son muy diferentes. Una definición directa de la integral estocástica de Stratonovich de algún proceso  $\{Y_t\}$  como integrando, denotada por  $\int_0^T Y_t \circ dX_t$ , se obtiene tomando el límite de las sumas de Stratonovich, (Véase [5], [2]):

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (Y_{t_j} + Y_{t_{j+1}}) (X_{t_{j+1}} - X_{t_j}),$$

cuando  $\|\Pi_n\| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j) \rightarrow 0$  con  $\Pi_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$  una partición de un intervalo finito  $[0, T]$  donde  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = T$ . Una definición alternativa de la integral estocástica de Stratonovich es dada usando la integral estocástica de Itô.

**Definición 3.5.1** Sean  $X$  y  $Y$  procesos adaptados continuos tales que la integral estocástica de Itô  $\int_0^T Y_t dX_t$  esté definida. La integral de Stratonovich está definida por

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} [Y, X]_t.$$

La forma diferencial de Stratonovich está definida por

$$Y_t \circ dX_t = Y_t dX_t + \frac{1}{2} d[Y, X]_t.$$

A continuación, se enuncian algunas propiedades de la integral de Stratonovich análogas al cálculo ordinario, que ayudarán a encontrar la fórmula de corrección del coeficiente de tendencia, útil para trasladar de una integral estocástica de Itô a una de Stratonovich y viceversa. Servirá para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE'S), de la forma  $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ , donde  $a(t, X_t)$  y  $b(t, X_t)$  se conocen como *coeficiente de tendencia* y *coeficiente de difusión* respectivamente y de la cual se tratará extensivamente en el siguiente capítulo.

#### Integración por partes: Regla del producto de Stratonovich

**Teorema 3.5.2** Dados los términos definidos anteriormente, se tiene que:

$$\begin{aligned} X(t)Y(t) - X(0)Y(0) &= \int_0^t X_s \circ dY_s + \int_0^t Y_s \circ dX_s \\ d(X_t Y_t) &= X(t) \circ dY_t + Y(t) \circ dX_t \end{aligned}$$

**Demostración.** Aplicando directamente la regla del producto estocástico,

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= X(t) dY_t + Y(t) dX_t + d[X, Y]_t \\ &= X(t) dY_t + \frac{1}{2} d[X, Y]_t + Y(t) dX_t + \frac{1}{2} d[X, Y]_t \\ &= X(t) \circ dY_t + Y(t) \circ dX_t, \end{aligned}$$

resultado que se deseaba encontrar. ■

### Cambio de variables: Regla de la cadena de Stratonovich

**Teorema 3.5.3** *Sea  $X$  continua y  $f$  tres veces continuamente diferenciable, entonces*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s, \\ df(X_t) &= f'(X_t) \circ dX_t. \end{aligned}$$

**Demostración.** Por la definición de integral estocástica, es

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t df(X_s).$$

Queda verificar entonces que  $df(X_t) = f'(X_t) \circ dX_t$ .

Por un lado se tiene que, aplicando la fórmula de Itô:

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d[X, X]_t.$$

Por el otro, utilizando la definición diferencial de la integral estocástica de Stratonovich:

$$f'(X_t) \circ dX_t = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} d[f'(X), X]_t.$$

Por lo que únicamente queda demostrar que  $f''(X_t) d[X, X]_t = d[f'(X), X]_t$ .

Para esto, sea  $Y_t = f'(X_t)$ , aplicamos la fórmula de Itô a ésta

$$dY_t = df'(X_t) = f''(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f'''(X_t) d[X, X]_t.$$

El resultado anterior servirá para calcular

$$\begin{aligned} d[f'(X), X]_t &= d[Y, X]_t = dY_t dX_t = \left( f''(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f'''(X_t) d[X, X]_t \right) dX_t \\ &= f''(X_t) dX_t dX_t + \frac{1}{2} f'''(X_t) d[X, X]_t dX_t \\ &= f''(X_t) d[X, X]_t, \end{aligned}$$

que era lo que se necesitaba. ■

**Conversión de EDE's Stratonovich a EDE's Itô**

**Teorema 3.5.4** *Suponga que  $X_t$  satisface la siguiente EDE en la versión Stratonovich*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t,$$

*con  $b(t, X_t)$  dos veces continuamente diferenciables. Entonces  $X_t$  satisface la EDE de Itô*

$$dX_t = \left( a(t, X_t) + \frac{1}{2}b(t, X_t)b'(t, X_t) \right) dt + b(t, X_t)dW_t.$$

*Así, el coeficiente de tendencia de Itô es  $a(X_t) + \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)$  y el coeficiente de difusión de Itô es el mismo  $b(t, X_t)$ .*

**Demostración.** Por la definición de la integral de Stratonovich,  $X_t$  satisface

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t + \frac{1}{2}d[b(X_t), W]_t.$$

Dado que  $[b(X_t), W]_t$  es un proceso de variación finita, se sigue que  $X_t$  resuelve una EDE de difusión con el mismo coeficiente de difusión  $b(X_t)$ . Calculando formalmente, tenemos

$$d[b(X_t), W]_t = db(X_t)dW_t.$$

Aplicando la fórmula de Itô

$$db(X_t) = b'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}b''(X_t)d[X, X]_t,$$

se sigue de la definición de la integral de Stratonovich que

$$d[X, W]_t = dX_t dW_t = b(X_t)dt.$$

Por lo tanto:

$$d[b(X_t), W]_t = db(X_t)dW_t = b'(X_t)dX_t dW_t = b'(X_t)b(X_t)dt.$$

El resultado se sigue de inmediato sustituyendo. ■

Resumiendo, se tiene

**Conversión Stratonovich a Itô**

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t \\ dX_t &= \left( a(t, X_t) + \frac{1}{2}b(t, X_t)b'(t, X_t) \right) dt + b(t, X_t)dW_t. \end{aligned}$$

Siguiendo un desarrollo análogo al anterior, también se tiene

**Conversión Itô a Stratonovich**

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \\ dX_t &= \left( a(t, X_t) - \frac{1}{2}b(t, X_t)b'(t, X_t) \right) dt + b(t, X_t) \circ dW_t. \end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y Métodos de Aproximación Numérica

Uno de los problemas más importantes en la ciencia y en la industria (ingeniería, administración, finanzas, ciencias sociales) es el análisis del comportamiento de una cantidad subyacente en sistemas gobernados por entes estocásticos. El término cantidad subyacente describe aquel objeto cuyo valor se conoce en la actualidad pero está sujeta a cambios en el futuro. Algunos ejemplos comunes son, el número de células cancerígenas, precios de acciones de compañías, precios de minerales, petróleo, etc. Dichos sistemas suelen ser representados mediante ecuaciones diferenciales, que bajo el influjo de perturbación aleatoria como volatilidad del sistema, resultan ser ecuaciones diferenciales estocásticas.

Debido a la imposibilidad de encontrar soluciones explícitas a ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, los métodos deterministas se extienden al caso estocástico. En este capítulo se revisan tres métodos de aproximación de soluciones.

### 4.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) escalar es una ecuación de la forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad (4.1)$$

definida para valores de  $t$  en un intervalo  $[0, T]$ , donde  $a$  y  $b$  son funciones escalares con condición inicial la v.a  $X_0$ . La incógnita en esta ecuación es el proceso  $X_t$ . Los coeficientes  $a(t, X_t)$  y  $b(t, X_t)$  se conocen como *coeficiente de tendencia* y *coeficiente de difusión* respectivamente, éste último acompañado por un proceso de Wiener.

Es usual reescribir (4.1) en forma integral como:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.2)$$

La primera integral de (4.2) es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. La solución  $X_t$  es una variable aleatoria para cada  $t$ .

A los procesos de la forma (4.2) se le llaman *procesos de Itô*, y así como en el caso determinista, para que tengan solución, los coeficientes deben cumplir algunas condiciones.

**Teorema 4.1.1** (*Existencia y unicidad*) Si los coeficientes  $a(t, x)$  y  $b(t, x)$  de la ecuación (4.1) satisfacen la condición de Lipschitz en  $x$ ,

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2$$

y la condición de crecimiento en  $x$ ,

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

para alguna constante  $K > 0$ , entonces existe un proceso estocástico  $X_t$  solución de (4.1) que es adaptado, continuo y con  $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\{X_t^2\} < \infty$ , y única en el sentido de indistinguibilidad. (Véase [7], [12]).

## 4.2. Convergencia fuerte y convergencia débil

La solución obtenida por los métodos de aproximación que se enunciarán posteriormente y la solución exacta (cuando se tiene una solución cerrada) son más cercanas cuando  $\Delta t$  se hace muy pequeño. Teniendo en cuenta que  $X_n$  (método numérico) y  $X(t)$  (solución cerrada) son v.a's necesitamos precisar la noción de convergencia y poder decidir cómo medir esta diferencia.

Existen dos maneras de medir la precisión. La primera es la convergencia fuerte, para problemas que involucran simulación directa, donde es importante que las trayectorias de la solución numérica sean cercanas a la solución exacta. La segunda es la convergencia débil donde sólo es de interés la solución en ciertos momentos (Véase [10]).

**Definición 4.2.1** Se dice que un método tiene **orden fuerte de convergencia** igual a  $\gamma$  si existe una constante  $C$  tal que

$$\mathbb{E}\{|X_n - X(t)|\} \leq C\Delta t^\gamma,$$

para cualquier elección  $t = n\Delta t \in [0, T]$  y  $\Delta t$  lo suficientemente pequeño.

En nuestras pruebas numéricas, nos centraremos en el error en el punto final  $t = T$ . Donde definimos el error en el punto final en el sentido fuerte como

$$e_{\Delta t}^{\text{fuerte}} := \mathbb{E}\{|X_L - X(T)|\}, \quad \text{donde } L\Delta t = T. \quad (4.3)$$

**Definición 4.2.2** Se dice que un método tiene **orden débil de convergencia** igual a  $\gamma$  si existe una constante  $C$  para toda función  $p$  tal que

$$|\mathbb{E}\{p(X_n)\} - \mathbb{E}\{p(X(t))\}| \leq C\Delta t^\gamma,$$

para cualquier elección  $t = n\Delta t \in [0, T]$  y  $\Delta t$  lo suficientemente pequeño.

Nos centraremos en el caso donde  $p$  es la función identidad. Donde definimos el error en el punto final  $t = T$  en el sentido débil como

$$e_{\Delta t}^{\text{débil}} := |\mathbb{E}\{X_L\} - \mathbb{E}\{X(T)\}|, \quad \text{donde } L\Delta t = T. \quad (4.4)$$

Como interpretación de las definiciones anteriores, decimos que si un método numérico es convergente con orden  $\gamma$  y el tamaño de paso  $\Delta t$  es hecho  $k$  veces más pequeño, entonces el error de aproximación decrece por un factor  $k^\gamma$ . Por ejemplo, si  $\gamma = 1$  y deseamos reducir el error 100 veces, debemos hacer el tamaño de paso 100 veces más pequeño. Si  $\gamma = 1/2$  y deseamos reducir el error 100 veces, debemos hacer el tamaño de paso  $(100)^2 = 10000$  veces más pequeño.

Se exponen entonces métodos numéricos para resolver (4.1) para estimar la solución  $X_t$  y compararla con la solución exacta mediante estos indicadores.

### 4.3. Método de Euler-Maruyama

El método Euler-Maruyama (EM) es uno de los métodos computacionales más simples para la aproximación de EDE's, es el análogo al método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias. Desarrollamos brevemente este método para pasar al caso aleatorio pensando en el problema general de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x); \quad \text{cuando } t = t_0, \quad x = x_0,$$

la sucesión de aproximaciones sucesivas puede ser expresada en términos de las siguientes relaciones de recurrencia

#### Método de Euler

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + h \\ x_{j+1} &= x_j + ha(t_j, x_j). \end{aligned}$$

Pensemos ahora en un problema alterado por una perturbación aleatoria, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t, x) + \text{ruido aleatorio} \\ \frac{dx}{dt} &= a(t, x) + b(t, x)\varepsilon(t), \end{aligned}$$

escrito formalmente como

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x) + b(t, x)\frac{dW_t}{dt},$$

multiplicando por  $dt$  se tiene

$$dx = a(t, x)dt + b(t, x)dW_t,$$

que tiene la forma (4.1).

Escrita ésta última en forma integral de 0 a  $T$

$$X_T - X_0 = \int_0^T a(s, X_s)ds + \int_0^T b(s, X_s)dW_s.$$

Podemos emplear métodos numéricos para obtener las aproximaciones

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} a(s, X_s)ds \approx a(\tau_n, X_n)\Delta t \quad \text{y} \quad \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} b(s, X_s)dW_s \approx b(\tau_n, X_n)\Delta W_{j+1}.$$

Para construir la solución aproximada de una EDE de la forma (4.1) sobre el intervalo  $[0, T]$ , primero se discretiza el intervalo en  $L$  partes ( $L \in \mathbb{N}$ ). Sea  $\Delta t = T/L$  el tamaño del intervalo de paso y  $\tau_j = j\Delta t$ ,  $j = 0, \dots, L$ . Nuestra aproximación numérica  $X_{\tau_j}$  será denotada por  $X_j$ . El método de Euler-Maruyama aplicado a una EDE del tipo (4.1) queda establecido mediante la siguiente fórmula de recursión, (Véase[4]):

$$X_{j+1} = X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, L-1.$$

En este trabajo, se calculan las trayectorias brownianas discretizadas y se utilizan para generar los incrementos  $\Delta W_{j+1} = W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)$  necesarios en la fórmula recursiva anterior. Por conveniencia, siempre elegimos el intervalo de paso  $\Delta t = \tau_{j+1} - \tau_j$  para el método numérico como el entero  $R \geq 1$  múltiplo del incremento  $\delta t$  para la trayectoria que genere la muestra browniana, es decir,  $\Delta t = R\delta t$ . Esto asegura que el conjunto de puntos  $\{t_j\}$  en cada trayectoria browniana discretizada contenga los puntos  $\{\tau_j\}$  en cada solución calculada del método Euler-Maruyama. El método requiere de los incrementos  $W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)$  que están dados por

$$W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j) = W((j+1)R\delta t) - W(jR\delta t) = \sum_{k=jR+1}^{jR+R} dW_k. \quad (4.5)$$

Podemos entonces describir finalmente el método de Euler-Maruyama como

#### Método de Euler-Maruyama (4.6)

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ \Delta t &= R\delta t = R(t_{j+1} - t_j) = \tau_{j+1} - \tau_j \\ X_{j+1} &= X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\{W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)\}, \quad j = 0, 1, \dots, L-1. \end{aligned}$$

El método citado anteriormente es del tipo explícito de un paso, por expresarse cada valor  $X_{j+1}$  en términos de un único valor, el anterior,  $X_j$ .

Apliquemos el método Euler-Maruyama a la EDE lineal autónoma siguiente, cuya solución es conocida como el *Movimiento Browniano Geométrico (MBG) o Exponencial*.

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (4.7)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes reales; además,  $a(X) = \mu X$  y  $b(X) = \sigma X$  en (4.2). Esta EDE es de amplio uso en finanzas, como modelo de valuación de activos en mercados financieros sujetos a volatilidad. Se puede demostrar que la solución exacta de (4.7) es

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad (4.8)$$

para ello, compárense los coeficientes de  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$  con los de la fórmula de Itô  $dX_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dt$  obteniéndose las igualdades

$$\begin{aligned} \mu f(t, x) &= f_t(t, x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, x) \\ \sigma f(t, x) &= f_x(t, x), \end{aligned}$$

de la segunda ecuación se obtiene que  $f(t, x) = \exp\{(\sigma x + g(t))\}$  para alguna función  $g(t)$ . Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene  $g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  cuya solución es  $g(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ . Por lo tanto la solución de (4.7) es (4.8).

Se verifica también que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X_t\} &= \mathbb{E}\left\{X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}\right\} \\ &= x_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \mathbb{E}\{\exp\{\sigma W_t\}\} \\ &= x_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}t\sigma^2\right\} \\ &= x_0 \exp\{\mu t\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}\{X_t\} &= \text{Var}\left\{X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}\right\} \\ &= x_0^2 \exp\left\{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \text{Var}\{\exp\{\sigma W_t\}\} \\ &= x_0^2 \exp\left\{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} (\mathbb{E}\{\exp\{2\sigma W_t\}\} - (\mathbb{E}\{\exp\{\sigma W_t\}\})^2) \\ &= x_0^2 \exp\left\{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \left(\exp\left\{\frac{1}{2}t(2\sigma)^2\right\} - \exp\left\{2\left(\frac{1}{2}t\sigma^2\right)\right\}\right) \\ &= x_0^2 \exp\{2\mu t\}(\exp\{\sigma^2 t\} - 1).\end{aligned}$$

Si aplicamos el método Euler-Maruyama a  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ ,  $X_0 = x_0$ , las ecuaciones (4.6) toman la forma:

$$\begin{aligned}X_0 &= x_0 \\ X_{j+1} &= X_j + \mu X_j \Delta t + \sigma X_j \{W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)\}, \quad j = 0, 1, \dots, L-1.\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.3.1** Consideramos (4.7) con  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 1$  y  $X_0 = 1$  para encontrar una solución exacta de la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$  y una aproximación particular. Calculamos una trayectoria browniana discretizada sobre  $[0, 1]$  con  $n = 1000$ , siendo  $\delta t = \frac{1}{1000} = 0.001$ . Para fines visuales, aplicamos EM con  $R = 8$ , usando un intervalo de paso  $\Delta t = R\delta t = 0.008$  graficada en rosa.

Se calcula la solución exacta (4.8):  $X_t = \exp\{\frac{3}{2}t + W_t\}$  graficada en color azul.

De igual manera, como referencia, se grafica  $\mathbb{E}\{X_t\} = \exp\{2t\}$ .

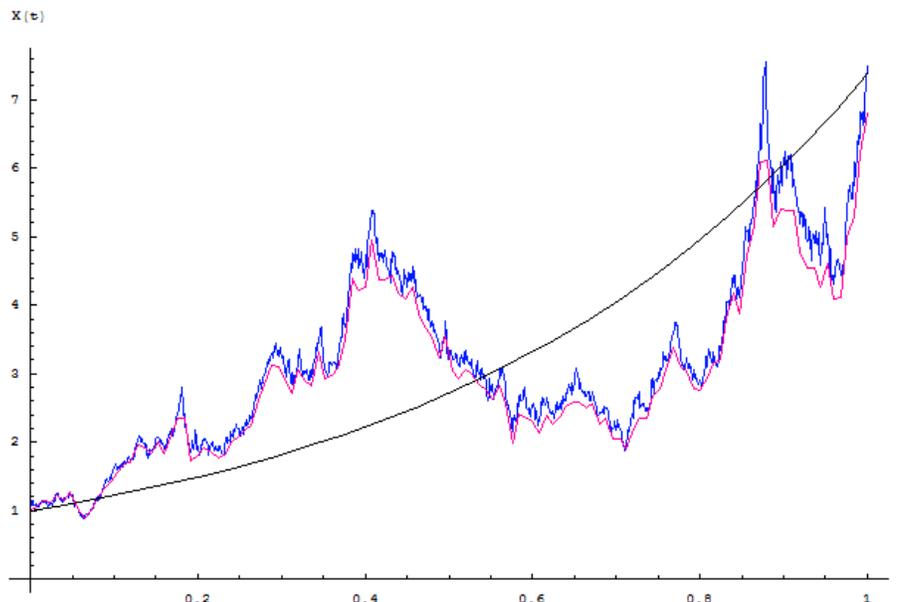


Figura 6. Solución EM (rosa) vs Solución exacta (azul) vs  $\text{Exp}\{2t\}$

Ahora, la intención es generar  $m$  muestras brownianas para analizar las medias de las  $m$  trayectorias simuladas y compararse sus errores con respecto a su solución exacta. Lo anterior se repite para distintos tamaños de paso  $\Delta t$ .

**Ejemplo 4.3.2** Consideramos nuevamente la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$ .

Construimos  $m = 1000$  trayectorias brownianas discretizadas sobre  $[0, 1]$  con  $\delta t = 2^{-9}$  de la solución exacta  $X_t = \exp\{\frac{3}{2}t + W_t\}$  graficadas en color azul.

Para cada una de ellas, aplicamos el método de Euler-Maruyama usando cinco diferentes intervalos de paso  $\Delta t = R\delta t$ , con  $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ .

En ambos casos se registra el valor  $X$  que toma la trayectoria en el punto final  $T = 1$ .

En la Figura 7 se muestran únicamente las primeras 4 trayectorias de las 1000 generadas. Para cada una se grafica su solución exacta (azul) y un juego de aproximaciones (rosa) para 5 distintos  $\Delta t = R\delta t$ . Notándose que a menor  $\Delta t$  la aproximación mejora.

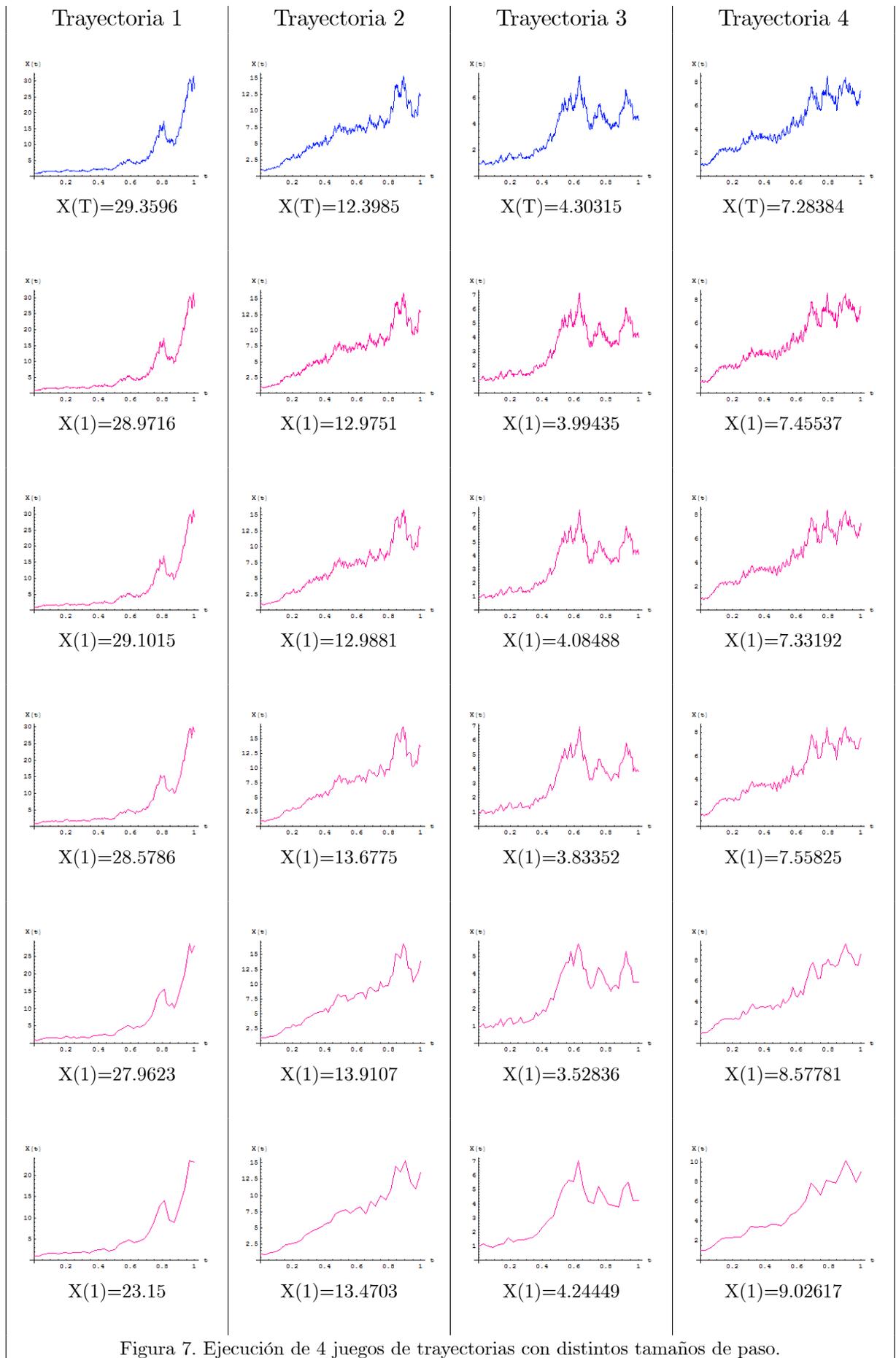


Figura 7. Ejecución de 4 juegos de trayectorias con distintos tamaños de paso.

Se presenta un bosquejo tabular de cada  $X(T)$  obtenidos tanto por solución exacta como por el método de Euler-Maruyama, con  $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ .

Calculándose también los promedios muestrales necesarios para  $m = 1000$  trayectorias.

Trayectoria	$X(T)$	$\Delta t = 1\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 2\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 4\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 8\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 16\delta t$ $X_1$
1	29.3596	28.9716	29.1015	28.5786	27.9623	23.150
2	12.3985	12.9751	12.9881	13.6775	13.9107	13.4703
3	4.30315	3.99435	4.08488	3.83352	3.52836	4.24449
4	7.28384	7.45537	7.33192	7.55825	8.57781	9.02617
5	7.55322	7.5928	7.4941	7.54184	7.14715	7.30523
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{E}\{X_{t=1}\} \approx$	7.2637	7.21684	7.17643	7.04259	6.9180	6.73926
	$e_{\Delta t}^{\text{débil}} :=$	<b>0.046863</b>	<b>0.087265</b>	<b>0.221106</b>	<b>0.345699</b>	<b>0.524438</b>
	$e_{\Delta t}^{\text{fuerte}} :=$	<b>0.187213</b>	<b>0.277741</b>	<b>0.455435</b>	<b>0.628695</b>	<b>0.922067</b>

Se grafica error versus tiempo por comodidad en la escala *loglog* para el método Euler-Maruyama, observándose el orden de convergencia  $\gamma \approx 0.5$ . Si requerimos disminuir el error a la mitad, debemos hacer el tamaño de paso cuatro veces menor. Si requerimos disminuir el error 10 veces, debemos hacer el tamaño de paso 100 veces menor.

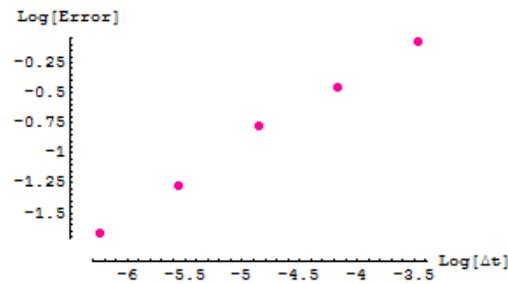


Figura 8. Visualización del orden de convergencia en Euler-Maruyama

## 4.4. Método de Euler-Heun

El método de Euler-Heun se deriva de una variación del método de Euler-Maruyama, como se verificará, tiene un orden de convergencia fuerte  $\gamma = 1$ . Y además, las soluciones que se generen mediante este método corresponderán a EDE's en el sentido Stratonovich; pero que pueden trasladarse de una versión a otra modificando el coeficiente de tendencia según las conversiones vistas en la Sección 3.5.

Así, se describe entonces el método de Euler-Heun (Véase [16], [6]), se aplica un promedio ponderado en los coeficientes  $a(t, X)$  y  $b(t, X)$  en la relación recursiva  $X_{j+1} = X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, L - 1$  para obtener

$$X_{j+1} = X_j + \left\{ \frac{a(\tau_j, X_j) + a(\tau_{j+1}, X_{j+1})}{2} \right\} \Delta t + \left\{ \frac{b(\tau_j, X_j) + b(\tau_{j+1}, X_{j+1})}{2} \right\} \Delta W_{j+1},$$

la anterior fórmula es del tipo implícito, y la solución numérica tiene un elevado costo computacional, para ello se reemplaza el valor  $X_{j+1}$  en el lado derecho de la ecuación por el valor obtenido con el método EM, es decir  $X_{j+1} = X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}$ ,

$$\begin{aligned} a(\tau_{j+1}, X_{j+1}) &= a(\tau_{j+1}, X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}) \\ b(\tau_{j+1}, X_{j+1}) &= b(\tau_{j+1}, X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}) \end{aligned}$$

resumiendo, se tiene el:

### Método de Euler-Heun (4.9)

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_{j+1} &= X_j + \frac{\Delta t}{2} \{a(\tau_j, X_j) + a(\tau_{j+1}, X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1})\} \\ &\quad + \frac{\Delta W_{j+1}}{2} \{b(\tau_j, X_j) + b(\tau_{j+1}, X_j + a(\tau_j, X_j)\Delta t + b(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1})\}, \end{aligned}$$

donde  $\Delta t = \tau_{j+1} - \tau_j$ ,  $\Delta W_{j+1} = W_{j+1} - W_j$  y  $j = 0, 1, \dots, L - 1$ . Tal solución que genera el método Euler-Heun converge a la solución de la EDE en su versión Stratonovich por la naturaleza del método al considerar el promedio en las evaluaciones en el extremo izquierdo y derecho en cada subintervalo de los coeficientes de tendencia y de difusión.

**Ejemplo 4.4.1** Consideramos la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$ ,  $X_0 = 1$ , para encontrar una solución exacta y una aproximación particular. Al aplicarse el método Euler-Heun su solución no convergería a la versión Itô, sino que a la de Stratonovich, es decir, resolveríamos  $dX_t = 2X_t dt + X_t \circ dW_t$ .

Construimos una trayectoria browniana discretizada sobre el intervalo  $[0, 1]$  con  $n = 2^9$ , siendo  $\delta t = 2^{-9}$ . Para fines visuales, aplicamos el método Euler-Heun con  $R = 8$ , usando un intervalo de paso  $\Delta t = R\delta t = 0.015625$  graficada en morado.

Se calcula la solución exacta (4.8):  $X_t = \exp\{2t + W_t\}$  graficada en color azul.

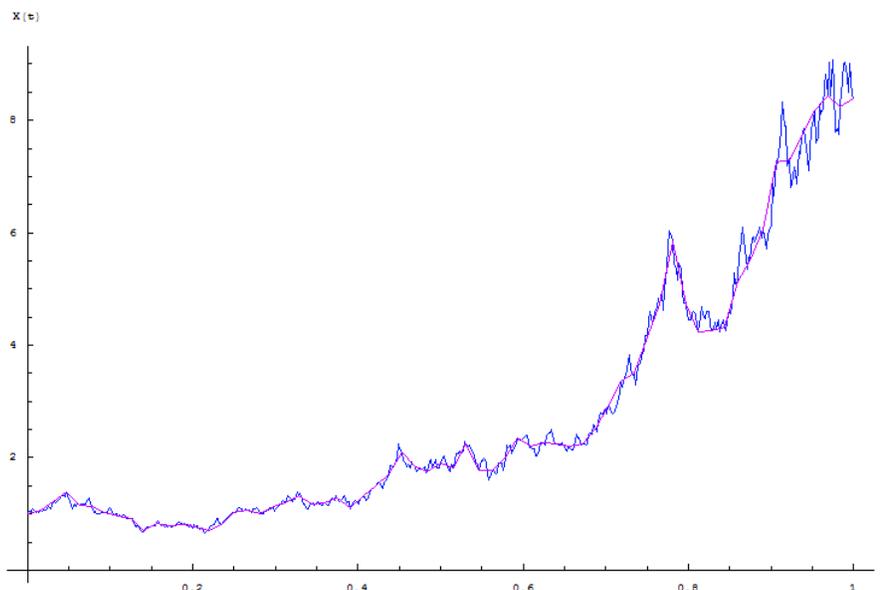


Figura 9. Solución EH (morado) vs Solución exacta (azul)

Para poder equiparar resultados de convergencias en las soluciones de Euler-Heun con Euler-Maruyama para la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$  considerada anteriormente, transformaremos ésta por la fórmula de conversión de Itô a Stratonovich dada en el capítulo anterior.

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \\ dX_t &= \left( a(t, X_t) - \frac{1}{2}b(t, X_t)b'(t, X_t) \right) dt + b(t, X_t) \circ dW_t. \end{aligned}$$

De tal forma que las soluciones de la nueva EDE versión Stratonovich a resolver por el método de Euler-Heun podrán ser comparadas con las soluciones de la EDE versión Itô obtenida mediante el método de Euler-Maruyama.

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{3}{2}X_t dt + X_t \circ dW_t \quad (\text{Stratonovich, Euler-Heun}) \\ dX_t &= 2X_t dt + X_t dW_t \quad (\text{Itô, Euler-Maruyama}). \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.4.2** Consideramos nuevamente la EDE  $dX_t = \frac{3}{2}X_t dt + X_t \circ dW_t$ .

Construimos  $m = 1000$  trayectorias brownianas discretizadas sobre  $[0, 1]$  con  $\delta t = 2^{-9}$  de la solución exacta  $X_t = \exp\{\frac{3}{2}t + W_t\}$ .

Para cada una de ellas, aplicamos el método de Euler-Maruyama usando cinco diferentes intervalos de paso  $\Delta t = R\delta t$ , con  $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ .

En ambos casos se registra el valor  $X$  que toma la trayectoria en el punto final  $T = 1$ .

Se presenta un bosquejo tabular de cada  $X(T)$  obtenidos tanto por solución exacta como por el método de Euler-Heun, con  $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ .

Calculándose también los promedios muestrales necesarios para  $m = 1000$  trayectorias.

Tabla 2. Aproximaciones Euler-Heun						
Trayectoria	$X(T)$	$\Delta t = 1\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 2\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 4\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 8\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 16\delta t$ $X_1$
1	2.64116	2.64348	2.64909	2.65151	2.64785	2.59971
2	4.60142	4.59774	4.59761	4.60773	4.5668	4.54255
3	3.07298	3.07582	3.07209	3.07151	3.04579	3.0523
4	6.97083	6.97893	6.9775	6.9302	6.88675	6.80057
5	8.01897	8.00458	7.98955	7.93852	7.89991	7.72673
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{E}\{X_{t=1}\} \approx$	7.63425	7.61972	7.60598	7.57778	7.52030	7.36518
	$e_{\Delta t}^{débil} :=$	<b>0.014530</b>	<b>0.028268</b>	<b>0.056463</b>	<b>0.113949</b>	<b>0.269068</b>
	$e_{\Delta t}^{fuerte} :=$	<b>0.015280</b>	<b>0.029761</b>	<b>0.059429</b>	<b>0.120818</b>	<b>0.273915</b>

Se grafica error versus tiempo por comodidad en la escala *loglog* para el método Euler-Heun, observándose el orden de convergencia  $\gamma = 1$ . Si requerimos disminuir el error a la mitad, debemos reducir el tamaño de paso a la mitad.

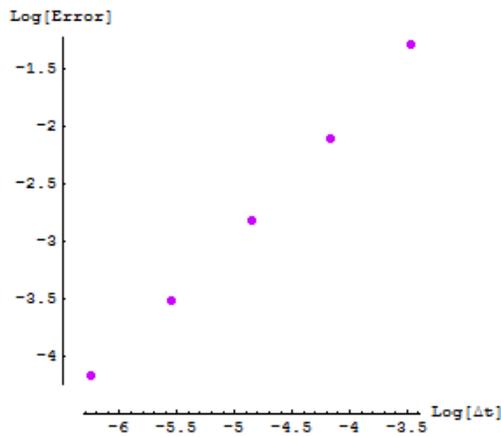


Figura 10. Visualización del orden de convergencia en Euler-Heun

## 4.5. Método de Milstein

Para construir un método numérico para la solución de EDE's con orden de convergencia fuerte igual a 1, podría resultar de la aplicación de la expansión de Taylor estocástica agregándose un nuevo término al método Euler-Maruyama.

Consideramos de nueva cuenta, la EDE  $dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$ , con condición inicial  $X_0 = x_0$  con  $\tau_j, \tau_{j+1}$  puntos consecutivos de nuestra discretización.

La fórmula de Itô dice que para una función  $\theta$  dos veces diferenciable podemos escribir

$$\theta(X_s) = \theta(X_{t_j}) + \int_{t_j}^s \left( \theta'(X_u)a(X_u) + \frac{1}{2}\theta''(X_u)b(X_u)^2 \right) du + \int_{t_j}^s \theta'(X_u)b(X_u)dW_u.$$

Y podemos aplicar la fórmula de Itô a las expresiones  $a(X_s)$  y  $b(X_s)$  que son los coeficientes de la EDE, y así obtenemos, (Véase [9], [13]):

$$\begin{aligned} X_{t_{j+1}} &= X_{t_j} \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left( a(X_{t_j}) + \int_{t_j}^s \left( a'(X_u)a(X_u) + \frac{1}{2}a''(X_u)b(X_u)^2 \right) du + \int_{t_j}^s a'(X_u)b(X_u)dW_u \right) ds \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left( b(X_{t_j}) + \int_{t_j}^s \left( b'(X_u)a(X_u) + \frac{1}{2}b''(X_u)b(X_u)^2 \right) du + \int_{t_j}^s b'(X_u)b(X_u)dW_u \right) dW_s \end{aligned}$$

y si deseamos obtener un método de orden de convergencia fuerte igual a 1 podemos ignorar las integrales dobles que son del tipo  $dW_s ds$  y  $ds ds$ .

Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} X_{t_{j+1}} &\approx X_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(X_{t_j}) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left( b(X_{t_j}) + \int_{t_j}^s b'(X_u)b(X_u)dW_u \right) dW_s \\ &\approx X_{t_j} + a(X_{t_j})\Delta t + b(X_{t_j})\Delta W_{j+1} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s b'(X_u)b(X_u)dW_u dW_s, \end{aligned}$$

los primeros tres sumandos son bien conocidos del método Euler-Maruyama. El cuarto sumando podemos aproximarlos por

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s b'(X_u)b(X_u)dW_u dW_s \approx b'(X_{t_j})b(X_{t_j}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s dW_u dW_s$$

la integral del lado derecho se sabe que es

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^s dW_u dW_s = \frac{1}{2}((\Delta W_{j+1})^2 - \Delta t)$$

sustituyendo en nuestra aproximación previa obtenemos finalmente el método de Milstein

$$\text{Método de Milstein} \tag{4.10}$$

$$X_0 = x_0$$

$$X_{j+1} = X_j + a(X_j)\Delta t + b(X_j)\Delta W_{j+1} + \frac{1}{2}b'(X_j)b(X_j)((\Delta W_{j+1})^2 - \Delta t).$$

**Ejemplo 4.5.1** Consideramos nuevamente la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$ , y  $X_0 = 1$  para construir su solución exacta y una aproximación particulares para una misma muestra browniana. Calculamos una trayectoria browniana discretizada sobre  $[0, 1]$  con  $n = 1000$ , siendo  $\delta t = \frac{1}{1000} = 0.001$ . Para fines visuales, aplicamos el método Milstein con  $R = 8$ , usando un intervalo de paso  $\Delta t = R\delta t = 0.008$  graficada en naranja. Se calcula la solución exacta (4.8):  $X_t = \exp\{\frac{3}{2}t + W_t\}$  graficada en color azul.

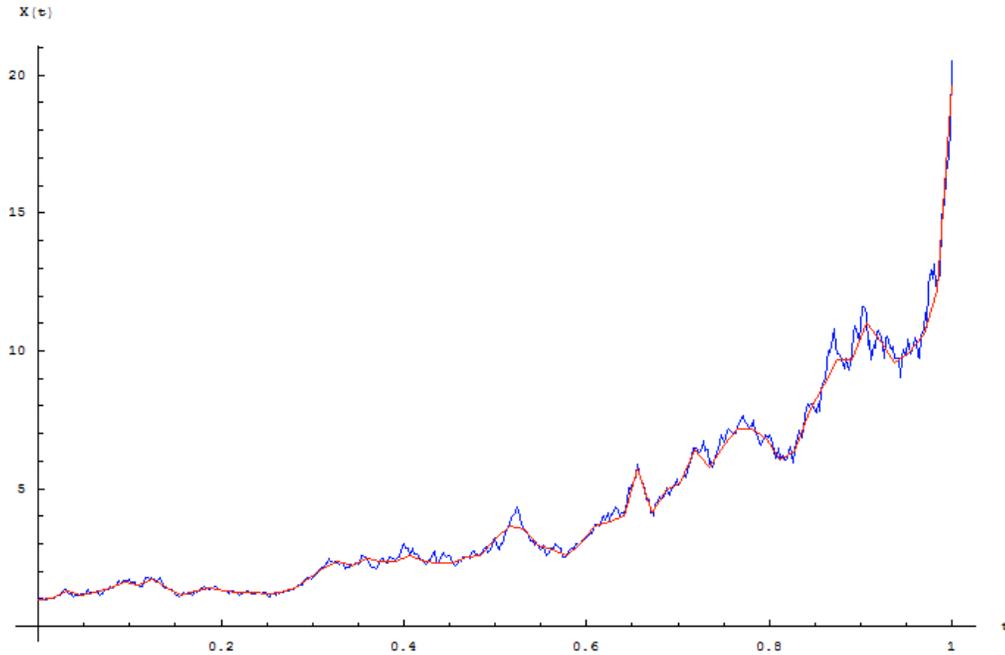
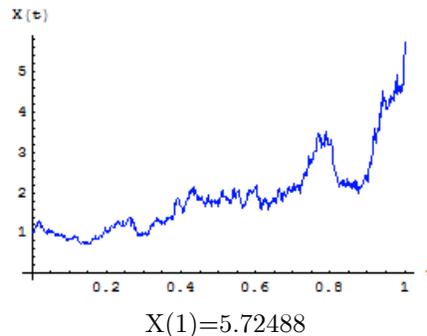


Figura 11. Solución Milstein (naranja) vs Solución exacta (azul)

**Ejemplo 4.5.2** Consideramos nuevamente la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$ . Construimos  $m = 1000$  trayectorias brownianas discretizadas sobre  $[0, 1]$  con  $\delta t = 2^{-9}$  para la solución exacta  $X_t = \exp\{\frac{3}{2}t + W_t\}$ . Para cada una de ellas, aplicamos el método Milstein usando cinco diferentes intervalos de paso  $\Delta t = R\delta t$ , con  $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ . En ambos casos se registra el valor  $X$  que toma la trayectoria en el punto final  $T = 1$ .

Se muestra únicamente un juego de trayectorias: la solución exacta (azul) y 5 aproximaciones mediante el método de Milstein (naranja),



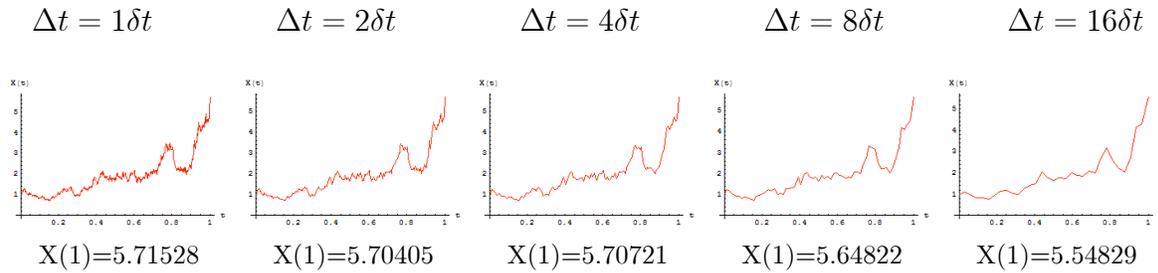


Figura 12. Aproximaciones Milstein con 5 diferentes tamaños de paso

Se presenta un bosquejo tabular de cada  $X(T)$  obtenidos tanto por solución exacta como por el método Milstein, con  $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ .

Calculándose también los promedios muestrales necesarios para  $m = 1000$  trayectorias.

Trayectoria	$X(T)$	$\Delta t = 1\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 2\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 4\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 8\delta t$ $X_1$	$\Delta t = 16\delta t$ $X_1$
1	5.72488	5.71528	5.70405	5.70721	5.64822	5.54829
2	1.10453	1.10928	1.11239	1.12063	1.14559	1.19399
3	8.23772	8.22021	8.19912	8.17759	8.13174	7.97220
4	3.14590	3.14558	3.15567	3.17636	3.18302	3.25423
5	9.25965	9.23001	9.19110	9.11270	9.0315	8.76943
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{E}\{X_{t=1}\} \approx$	7.30087	7.27278	7.24507	7.19037	7.08539	6.85377
	$e_{\Delta t}^{debil} :=$	<b>0.0280948</b>	<b>0.0558052</b>	<b>0.110505</b>	<b>0.215486</b>	<b>0.447099</b>
	$e_{\Delta t}^{fuerte} :=$	<b>0.0333559</b>	<b>0.0665387</b>	<b>0.131375</b>	<b>0.256509</b>	<b>0.509795</b>

Se grafica error versus tiempo por comodidad en la escala *loglog* para el método Milstein, observándose el orden de convergencia  $\gamma = 1$ . Si requerimos disminuir el error a la mitad, debemos reducir el tamaño de paso a la mitad.

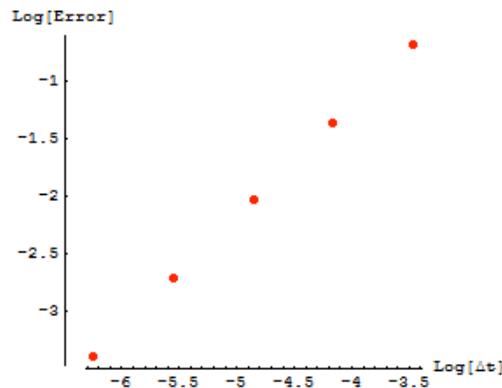


Figura 13. Visualización del orden de convergencia en Milstein

**Ejercicio 4.5.3** Ejecutar una trayectoria para la EDE  $dX_t = 2X_t dt + X_t dW_t$  con condición inicial  $X_0 = 1$  y comparar los resultados de la solución exacta en  $T = 1$  con las aproximaciones obtenidas mediante los métodos Euler-Maruyama, Euler-Heun y Milstein sobre el intervalo  $[0, 1]$ .

Las aproximaciones para la EDE anterior se realizan para el intervalo  $[0, 1]$  con  $n = 2^{10}$  para seis distintos intervalos de paso  $\Delta t = R\delta t$ , siendo  $\delta t = \frac{T}{n} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$ .

La solución exacta resulta ser  $\mathbf{X}(1) = \mathbf{13.3975}$ .

$R$	$\Delta t = R\delta t$	EM	EH	Milstein
1	$\frac{1}{1024}$	13.0726	13.3850	13.3693
2	$\frac{1}{512}$	12.7478	13.3782	13.3487
4	$\frac{1}{256}$	13.3664	13.3504	13.2836
8	$\frac{1}{128}$	12.5812	13.3380	13.2206
16	$\frac{1}{64}$	12.8015	13.1512	12.9032
32	$\frac{1}{32}$	11.9546	12.8272	12.3931

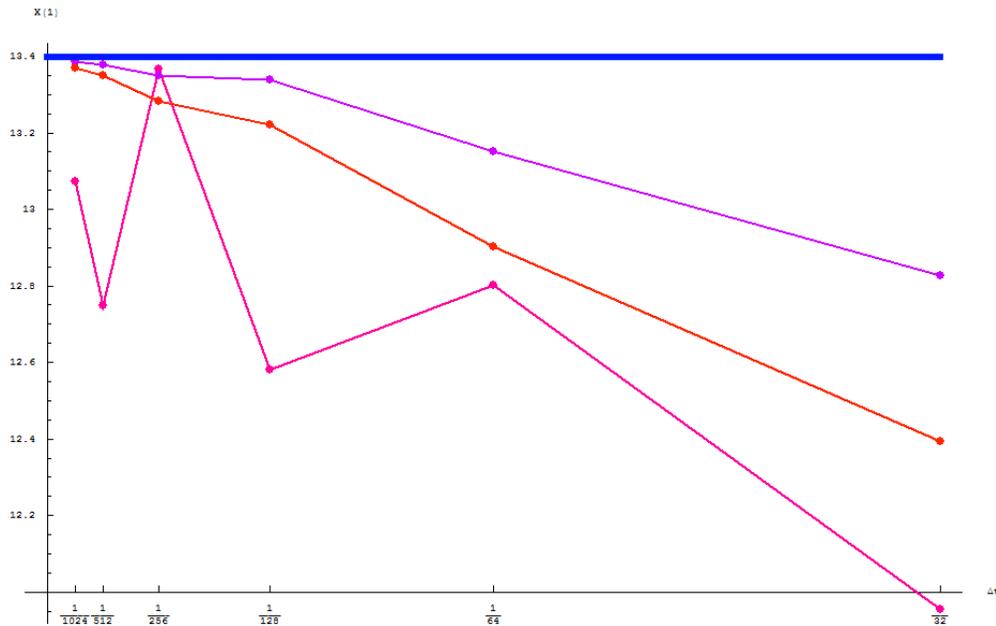


Figura 14. Solución en T=1. Comparación del comportamiento de las aproximaciones por los métodos de Euler-Maruyama (rosa), Euler-Heun (morado) y Milstein (naranja)

Puede leerse de la Tabla 4 y la Figura 14 que el método de Euler-Heun y el método de Milstein aproximan mejor a la solución exacta. Mientras que el método Euler-Maruyama tiene un error considerable ya que tiene un orden de convergencia menor, además, las aproximaciones de las soluciones resultan ser poco estables.



# Capítulo 5

## Aplicaciones

### 5.1. Modelo Black-Scholes

Hasta el momento se han simulado trayectorias del tipo  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ , uno de los más importantes problemas en Finanzas es estimar el costo de opciones financieras para un activo subyacente. Los precios de los activos están regidos por el modelo anterior.

En forma de EDE la evolución del precio de las acciones es:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5.1)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  representan la tendencia y la difusión del sistema, y  $\{W_t\}$  es un MB.

Podemos usar un conjunto muestral de datos que represente la evolución del precio de las acciones, estimando los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  y la rentabilidad de los precios.

Como ejemplo, se toma el historial que presentaron las acciones de *America Movil SAB de CV (NYSE:AMX)* en un período de 45 días (02/Ene/14 - 07/Mar/14).

Tabla 5. Historial de precios de acciones IBM

Día	S <sub>i</sub>	R <sub>i</sub>	Día	S <sub>i</sub>	R <sub>i</sub>	Día	S <sub>i</sub>	R <sub>i</sub>
1	22.65	-	16	21.18	-0.0187096	31	21.25	0.00708385
2	22.65	0	17	21.16	-0.000944733	32	20.88	-0.0175651
3	22.56	-0.00398143	18	21.28	0.00565506	33	20.45	-0.0208089
4	22.48	-0.0035524	19	21.05	-0.0108671	34	20.12	-0.0162685
5	21.95	-0.0238589	20	21.43	0.0178912	35	20.15	0.00148994
6	21.77	-0.00823426	21	21.26	-0.00796444	36	19.84	-0.0155042
7	22.03	0.0118723	22	20.57	-0.0329937	37	19.76	-0.00404041
8	21.79	-0.010954	23	21.11	0.0259132	38	19.50	-0.0132452
9	22.00	0.0095913	24	20.69	-0.0200964	39	19.86	0.0182932
10	22.18	0.00814853	25	21.07	0.0181997	40	19.37	-0.0249822
11	21.92	-0.0117915	26	21.32	0.0117954	41	19.48	0.00566282
12	21.76	-0.00732604	27	20.97	-0.0165528	42	19.19	-0.014999
13	21.64	-0.00552997	28	21.49	0.0244949	43	19.17	-0.00104275
14	21.93	0.0133121	28	21.19	-0.0140583	44	19.35	0.00934586
15	21.58	-0.0160886	30	21.10	-0.00425633	45	19.59	0.0123268

Se estima la tendencia  $\mu$  y la volatilidad  $\sigma$  de  $R$  (la rentabilidad de los precios) usando estimadores insesgados que son su media muestral y su desviación estándar. En tiempo discreto, la rentabilidad de las acciones en cada intervalo es

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}},$$

$i \geq 1$  y en tiempo continuo la rentabilidad en el tiempo  $t$  es

$$R_t = \frac{dS_t}{S_t}.$$

Encontramos entonces que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{R\} &= \mu = -0.00322535 \\ \text{Var}\{R\} &= \sigma^2 = 0.00020048 \\ \sigma &= 0.0141591 \\ S_0 &= 22.65 \\ T &= 45. \end{aligned}$$

Se utiliza el método de Euler-Maruyama, para resolver la EDE

$$dS_t = -0.00322535S_t dt + 0.0141591S_t dW_t$$

con solución exacta

$$S(t) = 22.65e^{\{-0.0033256t + 0.0141591W_t\}}$$

Para generar las trayectorias simuladas para obtener las aproximaciones de la EDE (5.1) por el método Euler-Maruyama se toma en consideración la siguiente ecuación recursiva:

$$\begin{aligned} S_0 &= 22.65 \\ \Delta t &= \tau_{j+1} - \tau_j = 1\delta t = t_{j+1} - t_j \\ S_{j+1} &= S_j - 0.00322535S_j\Delta t + 0.0141591S_j\{W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)\}, \quad j = 0, 1, \dots, L - 1. \end{aligned}$$

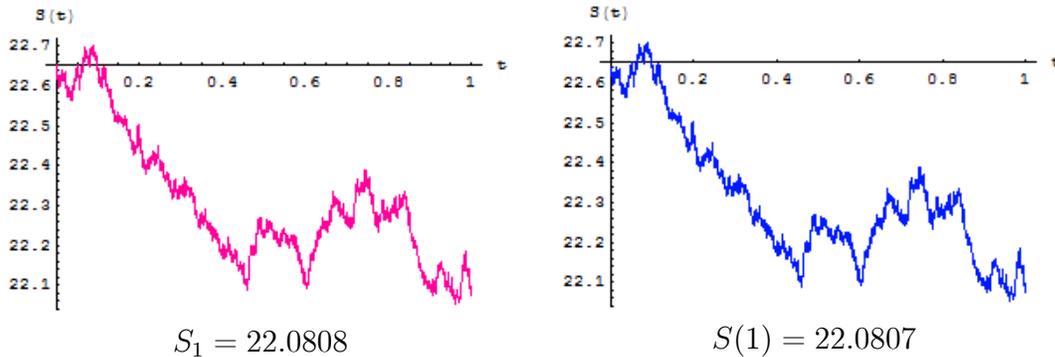


Figura 15. Una trayectoria de precios de un activo (Solución aproximada y solución exacta)

Una **opción financiera** es un instrumento derivado establecido en un contrato que da a su comprador el derecho, mas no la obligación, de comprar bienes o vender valores (*activos subyacentes*: acciones, bonos, índices bursátiles) a un precio determinado (*strike* o *precio de ejercicio*  $K$ ) hasta una fecha concreta (*fecha de vencimiento*).

Existen dos tipos de opciones: *call* (opción de compra) y *put* (opción de venta).

Según el momento en que se llegue a ejecutar la compra o venta del activo subyacente las opciones se clasifican en: *Europea* (la opción sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento previamente establecido) o *Americana* (la opción se puede ejercer hasta antes de la fecha de vencimiento previamente establecido). Hay que considerar que existen muchos tipos más de opciones financieras (Véase [10]).

Por simplicidad, se describen generales de opciones Europeas, tipo call y tipo put:

**Opción Call Europea.** Opción de comprar un activo sólo en la fecha de vencimiento. El comprador obtendría un beneficio de

$$(S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T - K > 0 \\ 0 & \text{si } S_T \leq K. \end{cases}$$

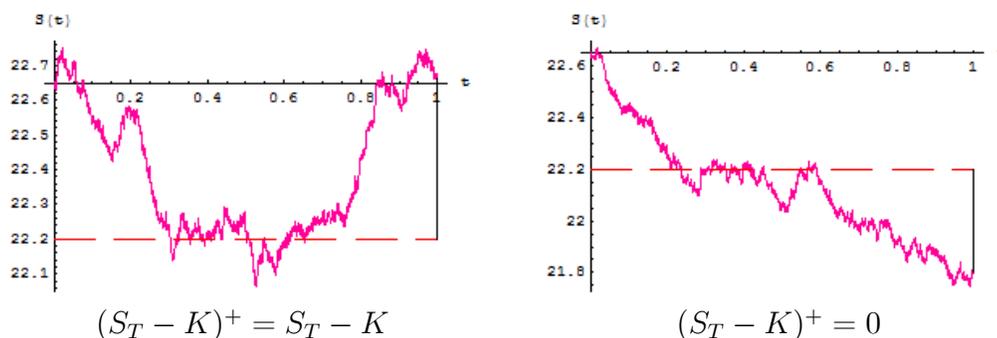


Figura 16. Casos de precios de activos para opción call

**Opción Put Europea.** Opción de vender un activo sólo en la fecha de vencimiento. El vendedor obtendría el beneficio

$$(K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T & \text{si } K - S_T > 0 \\ 0 & \text{si } K \leq S_T. \end{cases}$$

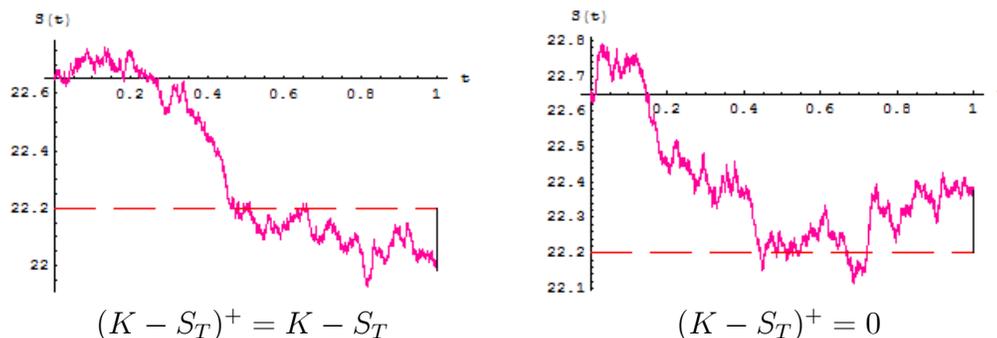


Figura 17. Casos de precios de activos para opción put

En una opción hay dos participantes: el tenedor (el que compra o vende) y el que suscribe. Éste último está obligado a cumplir el contrato independientemente de lo que convenga a sus intereses. Este contrato aparenta ser desventajoso para quien suscribe, por ello, el tenedor debe pagarle una cierta cantidad de dinero que le permita cubrirse contra futuras pérdidas debidas al cambio del precio del subyacente durante el período del contrato. Como se desconoce el precio del activo en el tiempo  $T$ , se simulan trayectorias que siguen la dinámica de precios del activo subyacente y se consideran los beneficios  $(S_T - K)^+$  (o  $(K - S_T)^+$ ) para estimar un promedio con el método de Monte Carlo y multiplicar éste por un factor de descuento.

Una ejecución de 1000 trayectorias arroja los resultados presentados en la Tabla 6 que son utilizados para estimar el costo de una opción call Europea para las acciones de *America Movil SAB de CV*.

Datos:  $S_0 = 22.65$ ,  $T = 1$ ,  $\mu = -0.00322535$ ,  $\sigma = 0.0141591$ ,  $K = 22.20$ .

Tabla 6. Cálculos para obtención del valor de la opción Call Europea			
Trayectoria	$S_T$	$S_T - K$	$(S_T - K)^+$
1	22.3358	0.1358	0.1358
2	22.4068	0.2068	0.2068
3	22.1823	-0.0177	0
4	23.5371	1.3371	1.3371
5	22.5887	0.3887	0.3887
6	22.5217	0.3217	0.3217
7	22.9318	0.7318	0.7318
8	22.2162	0.0162	0.0162
9	22.4218	0.2218	0.2218
10	22.1164	-0.0836	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\frac{1}{1000} \sum_{m=1}^{1000} (S_T - K)^+$	0.39798

donde el precio de la opción call al tiempo  $T$  viene dado por

$$C = e^{-\mu T} \mathbb{E}\{(S_T - K)^+\}$$

siendo

$$C = e^{-(-0.0032254)(1)}(0.39798) = \mathbf{0.3992}.$$

**Fórmula de Black-Scholes.**

Una herramienta útil para valorar opciones es mediante la fórmula de *Black-Scholes* (Véase Apéndice), para calcular el precio de una *opción call*:

$$C(t) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

y con un desarrollo análogo, la fórmula de Black-Scholes que calcula el precio de una *opción put* queda descrita como:

$$P(t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1),$$

donde en ambos casos es

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\text{Log}\left\{\frac{S_0}{K}\right\} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_1 &= \frac{\text{Log}\left\{\frac{S_0}{K}\right\} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ \text{y } \Phi(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

**Observación:** En caso de una opción Europea, tómesese  $t = 0$ . Al aplicarlo a nuestro ejemplo, la valuación de una opción call Europea arroja  $C = \mathbf{0.3965}$ , resultado que es comparado con el obtenido mediante simulaciones.

## 5.2. Modelo Lotka-Volterra

Las EDE's son frecuentemente utilizadas en dinámica de poblaciones. Por ejemplo, como variación al conocido modelo de crecimiento poblacional

$$\frac{dN}{dt} = aN,$$

con condición inicial  $N(0) = n_0$ , donde  $a$  es una constante y  $N(t)$  el tamaño de población en el tiempo  $t$ . Adicionando algún cambio en las condiciones ambientales de carácter aleatorio, resulta el modelo expresado por la ecuación diferencial estocástica

$$dN = aNdt + bNdW.$$

En esta sección se considera el modelo clásico multiespecie presa-depredador. Siendo  $R(t)$  y  $F(t)$  la población de la presa y del depredador respectivamente en el tiempo  $t$ , el modelo Lotka-Volterra plantea el modelo para dos especies que siguen la dinámica:

$$\frac{dR}{dt} = R(a_1 - a_2F) \quad (5.2)$$

$$\frac{dF}{dt} = F(b_2R - b_1), \quad (5.3)$$

donde  $a_1$  es la razón de nacimiento de presas en ausencia de depredadores,  $b_1$  es la tasa neta de muerte natural de depredadores, y  $a_2$  y  $b_2$  son parámetros que controlan la interacción entre presas y depredadores.

La razón de cambio de las presas  $R'(t)$  es proporcional en cada momento al número de ellas  $a_1R(t)$ , menos la probabilidad de contacto entre presa-depredador  $a_2R(t)F(t)$ . Es decir  $\frac{dR}{dt} = a_1R - a_2RF$ .

La razón de cambio de los depredadores  $F'(t)$  disminuye proporcionalmente en cada momento al número de ellos  $-b_1F(t)$ , y aumenta proporcionalmente con la posibilidad de contacto entre presa-depredador  $b_2R(t)F(t)$ . Es decir  $\frac{dF}{dt} = -b_1F + b_2RF$ .

En presencia de factores aleatorios que afecten la dinámica de la población, el sistema (5.2) y (5.3) queda reescrito como, (Véase [1]):

$$dR = R(a_1 - a_2F)dt + \sqrt{(a_1 + a_2F)R}dW_1 \quad (5.4)$$

$$dF = F(b_2R - b_1)dt + \sqrt{(b_2R + b_1)F}dW_2, \quad (5.5)$$

las constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  se basan en observaciones empíricas y dependen de las especies en estudio.

Para reproducir los generales del modelo anterior, se lleva a la práctica en un ejemplo.

La compañía Hudson Bay registró cuidadosamente las capturas de las poblaciones de conejos (presas) y lince (depredadores) de un bosque al norte de Canadá entre los años 1900 y 1920 y una representación muestral (en miles) se tabula a continuación, apreciándose un comportamiento oscilatorio en cada población.

Tabla 7. Registro de poblaciones de conejos y linces

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1919	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1920	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1921	—	—

**Estimación de los parámetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  y  $b_2$ .**

Para el caso de ausencia de aleatoriedad, se tiene que

$$(\ln R(t))' = \frac{R'(t)}{R(t)} = a_1 - a_2 F(t),$$

por lo que

$$F(t) = \frac{1}{a_2}(a_1 - (\ln R(t))').$$

El valor promedio de  $F(t)$  sobre el intervalo  $[0, T]$  se define como

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

si sustituimos queda

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{a_2} \int_0^T (a_1 - (\ln R(t))') dt = \frac{a_1}{a_2},$$

razonando de manera similar, se tiene que

$$\frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{b_2} \int_0^T (b_1 + (\ln F(t))') dt = \frac{b_1}{b_2}.$$

Para poder aplicar este resultado en los datos de la tabla anterior debemos tomar en cuenta los valores medios

$$\bar{R}(t) = \frac{b_1}{b_2}, \quad \bar{F}(t) = \frac{a_1}{a_2},$$

eligiendo los datos entre dos valores máximos (o mínimos), para conejos y linces respectivamente:

$$\bar{R}(t) = \frac{77.4 + 36.3 + 20.6 + 18.1 + 21.4 + 22 + 25.4 + 27.1 + 40.3 + 57}{10} = 34.56 = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\bar{F}(t) = \frac{59.4 + 41.7 + 19 + 13 + 8.3 + 9.1 + 7.4 + 8 + 12.3 + 19.5 + 45.7}{11} = 22.13 = \frac{a_1}{a_2}$$

Se requiere aún de más información: cuando la población de lince sea muy baja es de esperar que la población de conejos crezca de manera exponencial, a partir de esta hipótesis calcularemos  $a_1$  (la razón de nacimiento de presas en ausencia de depredadores). En la Tabla 7, observamos una población baja de lince y al mismo tiempo un crecimiento rápido de conejos en 1910. Para estos años es  $R(1910) = 27.1$  y  $R(1911) = 40.3$ , sustituyendo en la fórmula de crecimiento exponencial  $R(t+1) = R(t)e^{a_1}$  se obtiene:

$$40.3 = 27.1e^{a_1} \implies a_1 = \ln\left\{\frac{40.3}{27.1}\right\} = 0.397.$$

Análogamente, cuando la población de conejos es muy baja es de esperar una disminución en la población de lince. En la Tabla 7, observamos una población baja de conejos y al mismo tiempo un decrecimiento rápido de lince en 1905. Para estos años es  $F(1905) = 41.7$  y  $F(1906) = 19$ , sustituyendo en la fórmula de decrecimiento exponencial  $F(t) = F(t+1)e^{-b_1}$  se obtiene:

$$19 = 41.7e^{-b_1} \implies b_1 = -\ln\left\{\frac{19}{41.7}\right\} = 0.786.$$

Sólo queda presentar los datos anteriores en el modelo recursivo. Se aplica el método Euler-Maruyama y se presenta una trayectoria que ejemplifique al modelo presa-depredador.

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= R_i(0.397 - 0.018F_i)\Delta t + \sqrt{(0.397 + 0.018F_i)R_i}(W_1(i+1) - W_1(i)) \\ F_{i+1} &= F_i(0.023R_i - 0.786)\Delta t + \sqrt{(0.023R_i + 0.786)F_i}(W_2(i+1) - W_2(i)), \end{aligned}$$

se usa las condiciones iniciales  $R_0 = 30$ ,  $F_0 = 4$ , y un intervalo fijo  $\Delta t = \frac{20}{10000} = 0.002$

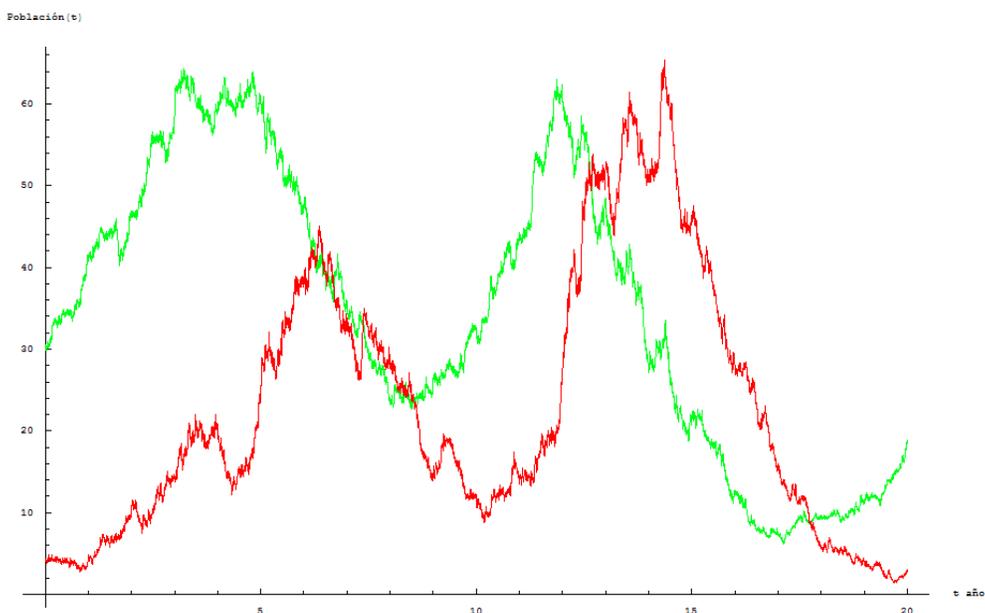


Figura 18. Población de conejos (verde) y de lince (rojo)

### 5.3. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Consideramos ahora la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dW_t \quad (5.6)$$

conocida como la *ecuación de Langevin* escrita en su forma diferencial.

Langevin estudió este tipo de EDE's para analizar la velocidad de partículas brownianas en presencia de fricción tiempo antes de construirse la teoría general de ecuaciones diferenciales estocásticas. Modelos generales de este tipo se aplican en análisis de series de tiempo (Véase [14]).

Para encontrar la solución explícita de la ecuación (5.6) hacemos  $f(t, x) = xe^{\mu t}$  y se aplica la fórmula de Itô (3.44) con

$$f_t(t, x) = \mu x e^{\mu t}; \quad f_x(t, x) = e^{\mu t}; \quad f_{xx}(t, x) = 0;$$

para obtener

$$df(t, x) = \mu x e^{\mu t} dt + e^{\mu t} dX_t$$

pero  $dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dW_t$ , sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} df(t, x) &= \mu x e^{\mu t} dt + e^{\mu t} (-\mu X_t dt + \sigma dW_t) \\ df(t, x) &= \sigma e^{\mu t} dW_t \end{aligned}$$

integrando de 0 a  $t$ :

$$\begin{aligned} X e^{\mu s} \Big|_{s=0}^{s=t} &= \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s \\ X_t e^{\mu t} - X_0 e^{\mu(0)} &= \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s \\ X_t e^{\mu t} &= X_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s \\ X_t &= X_0 e^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Se calcula la esperanza y la varianza del proceso  $X_t$  (5.7) conocido como proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* fijándonos primeramente en la siguiente suma para una partición  $\Pi_n$  de  $[0, t]$  con  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} e^{\mu t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \approx \int_0^t e^{\mu s} dW_s, \\ \mathbb{E}\{S_n\} &= \mathbb{E}\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} e^{\mu t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\{e^{\mu t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}\{S_n\} &= \text{Var}\left\{\sum_{i=0}^{n-1} e^{\mu t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}\{e^{\mu t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} e^{2\mu t_i}(t_{i+1} - t_i),
\end{aligned}$$

ésta última es una suma de Riemann que aproxima a la integral:

$$\int_0^t e^{2\mu s} ds = \frac{1}{2\mu} \int_0^{2\mu t} e^u du = \frac{1}{2\mu} e^u \Big|_{u=0}^{u=2\mu t} = \frac{1}{2\mu} (e^{2\mu t} - 1).$$

Por los cálculos anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X_t\} &= \mathbb{E}\left\{X_0 e^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s\right\} \\
&= X_0 e^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t} \mathbb{E}\left\{\int_0^t e^{\mu s} dW_s\right\} \\
&= X_0 e^{-\mu t}, \\
\text{Var}\{X_t\} &= \text{Var}\left\{X_0 e^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} dW_s\right\} \\
&= \sigma^2 e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{2\mu} (e^{2\mu t} - 1)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\mu} (1 - e^{-2\mu t}).
\end{aligned}$$

Para examinar el comportamiento de cierta partícula browniana afectada por una constante de fricción  $\mu = 1$ , con velocidad inicial  $X_0 = 3$  y con coeficiente de difusión  $\sigma = 1$ . La EDE a resolver sería entonces

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dW_t,$$

empleándose el método Euler-Heun, la conversión Itô-Stratonovich indicaría resolver la EDE

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma \circ dW_t.$$

Nótese que para este tipo de EDE, los coeficientes de tendencia y difusión no se alteran al pasarse de una versión a otra.

Se grafica una trayectoria y su respectiva solución exacta, con  $n = 2^9$ ,  $T = 4$ ,  $\delta t = \frac{T}{n} = \frac{1}{128}$  y  $\Delta t = 2\delta t = \frac{1}{64}$ , mediante la fórmula recursiva (4.9) que describe al método de Euler-Heun con  $a(\tau_j, X_j) = -\mu X_j$  y  $b(\tau_j, X_j) = \sigma$ :

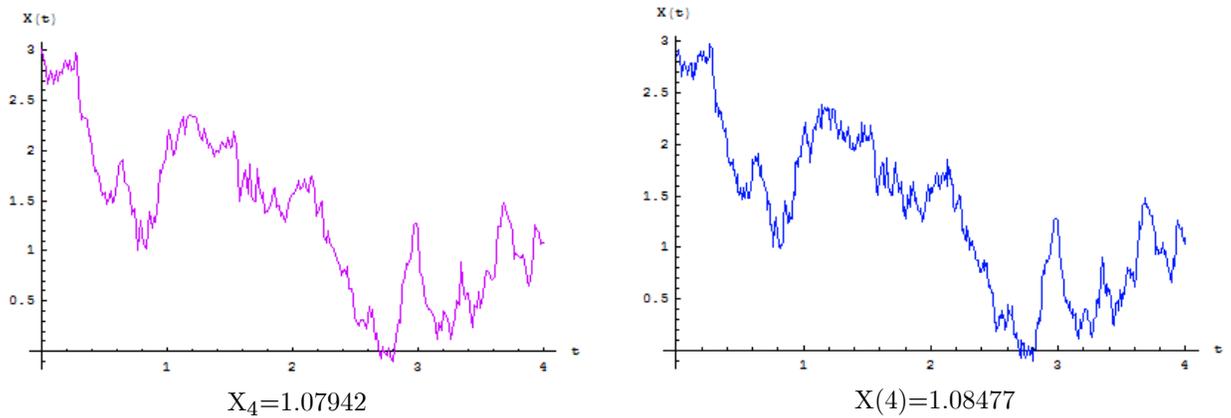


Figura 19. Proceso Ornstein-Uhlenbeck

De la simulación de una trayectoria mediante el método se puede observar que la partícula browniana, partiendo de una velocidad inicial  $X_0 = 3$ , disminuyó en el intervalo  $[0, 4]$  hasta  $X_4 = 1.07942$  debido a las fuerzas de fricción.

Una ejecución de 500 trayectorias arroja las siguientes medias de  $X_4$  para distintos valores  $\Delta t$ , ( $R = 1, 2, 4, 8$  y  $16$ ).

Tabla 8. Proceso Ornstein-Uhlenbeck en $T=4$ con distintos $\Delta t$	
$\frac{1}{500} \sum_{m=1}^{500} X(4) =$	<b>0.0534047</b>
$\Delta t$	$\frac{1}{500} \sum_{m=1}^{500} X_L$
$1\delta t$	0.0534127
$2\delta t$	0.0534221
$4\delta t$	0.0528233
$8\delta t$	0.0530442
$16\delta t$	0.0550780

## 5.4. Modelo Heston

Un modelo importante en Finanzas es  $dX_t = a(b - X_t)dt + c\sqrt{X_t}dW_t$ , procesos de tal forma generalmente no tienen una solución explícita por lo cual es conveniente utilizar métodos numéricos.

Esta EDE sirve para modelar la volatilidad, y es frecuentemente utilizado en combinación con la EDE para el precio de activos, este sistema se conoce como

### Modelo Heston (5.8)

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \\ dV_t &= a(b - V_t) dt + c\sqrt{V_t} dW_t^2, \end{aligned}$$

(Véase [11]) donde  $S_t$  es el precio del activo,  $\mu$  el coeficiente de tendencia,  $V_t$  es la volatilidad del activo,  $\{W_t^1\}$  y  $\{W_t^2\}$  son dos MB que podrían estar correlacionados,  $c$  es llamada la volatilidad de la volatilidad,  $a$  es la tasa de reversión de la media y  $b$  es la varianza a largo plazo.

Ejecutamos una simulación para obtener una estimación del posible precio de un activo en  $T = 5$  años con  $\Delta t = 5/1000$ ,  $S_0 = 1.0$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $V_0 = 0.1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 0.2$ , y los MB  $\{W_t^1\}$  y  $\{W_t^2\}$  no están correlacionados, y de igual manera, se estima el valor de una opción call con precio de ejercicio  $K = 1.25$ .

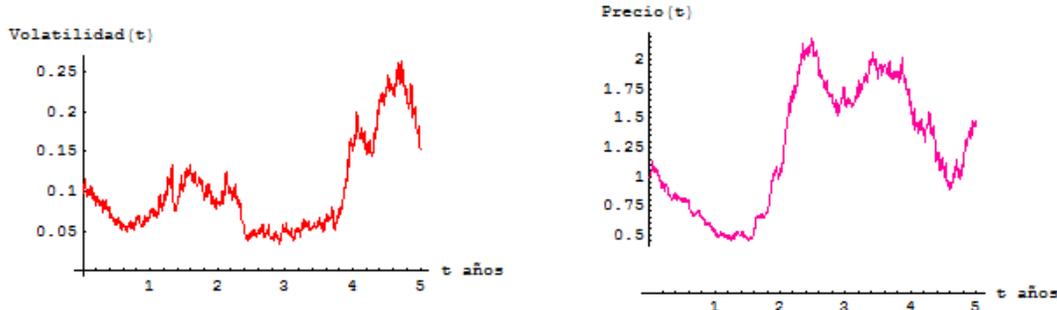


Figura 20. Simulación de trayectorias de la volatilidad y precio de un activo

Se realizan un total de 1000 pares de ejecuciones de trayectorias como las anteriores, para obtener los valores  $S_T$  requeridos para el cálculo de la opción call, obteniéndose:

$$C = e^{-\mu T} \mathbb{E}\{(S_T - K)^+\} = 0.231564,$$

donde además,  $\mathbb{E}\{S_T\} = 1.02471$ .

## 5.5. Puente Browniano

Considere ahora la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dW_t, \quad (5.9)$$

para  $t \in [0, 1)$  con  $X_0 = 0$ .

Esta ecuación puede resolverse proponiendo una solución de la forma

$$X_t = a(t) \left\{ X_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right\},$$

en donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables. Derivando ésta última se obtiene:

$$\begin{aligned} dX_t &= a'(t) \left\{ X_0 + \int_0^t b(s) dW_s \right\} dt + a(t)b(t)dW_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t)dW_t. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes con (5.9) se tiene que  $\frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{1}{1-t}$  y  $a(t)b(t) = 1$ . Si  $a(0) = 1$  se obtiene que  $a(t) = 1 - t$  y  $b(t) = \frac{1}{1-t}$ . Por lo tanto, para  $t \in [0, 1)$ ,

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s. \quad (5.10)$$

Este proceso cumple con las condiciones  $X_0 = 0$  y  $X_1 = 0$  y por ello se llama *puente browniano* en  $[0, 1]$ . Además, las trayectorias se anulan cuando  $t \rightarrow 1$ .

Al resolver (5.9) mediante el método de Euler-Heun y una aproximación de (5.10) se muestran en la Figura 21:

1) Usando el esquema de Euler-Heun, para la EDE trasladada de Itô a Stratonovich

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + 1 \circ dW_t$$

donde  $f(t, x) = -\frac{X_t}{1-t}$  y  $g(t, x) = 1$ .

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + \frac{\Delta t}{2} \{ f(\tau_j, X_j) + f(\tau_{j+1}, X_j + f(\tau_j, X_j)\Delta t + g(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}) \} \\ &\quad + \frac{\Delta W_{j+1}}{2} \{ g(\tau_j, X_j) + g(\tau_{j+1}, X_j + f(\tau_j, X_j)\Delta t + g(\tau_j, X_j)\Delta W_{j+1}) \} \end{aligned}$$

$$X_{j+1} = X_j + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -\frac{X_j}{1-t_j} - \frac{X_j - \frac{X_j}{1-t_j}\Delta t + \Delta W_{j+1}}{1-t_{j+1}} \right\} + \Delta W_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-1$$

2) Usando aproximaciones de (5.10)

$$X_{j+1} \approx (1 - t_j) \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{1}{1 - t_i} \Delta W_{i+1} \right\}, \quad j = 0, \dots, n - 1$$

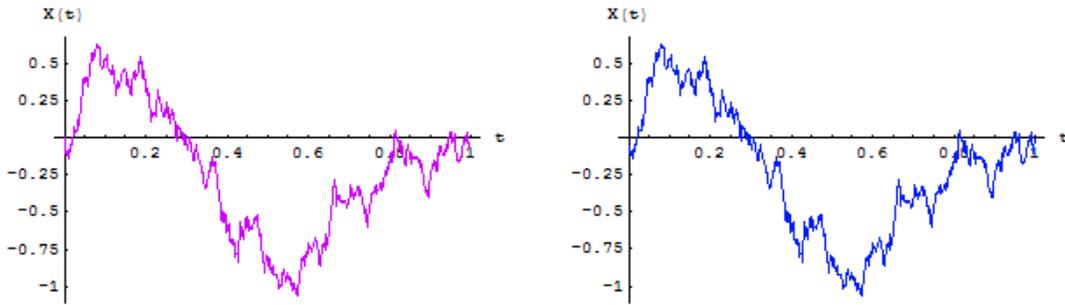


Figura 21. Puente Browniano

El puente browniano sobre  $[0, 1]$  también puede representarse equivalentemente como  $X_t = W_t - tW_1$  o como  $X_t = W_{1-t} - (1 - t)W_1$ .

# Conclusiones

Primeramente, en este trabajo de tesis se presentó la teoría de probabilidad requerida para capítulos posteriores.

El movimiento browniano es aquél que experimentan partículas sobre un medio fluido que se desplazan aleatoriamente, su modelado matemático como proceso se extiende a otras aplicaciones, por ejemplo, en finanzas, ingeniería, dinámica de poblaciones, etc. En el Capítulo II se construyó un camino intuitivo para definir al Movimiento Browniano como proceso, y se analizaron algunas propiedades de él, entre ellos dos medidas importantes, su primera variación y su variación cuadrática.

En el Capítulo III se presentan algunos tipos de sumas que aproximan a integrales estocásticas, estas sumas son sensibles al punto donde se evalúan. Posteriormente se construye la integral de Itô y se desarrollan propiedades de ella. De igual manera, se define la integral de Stratonovich, alternativa muy útil para el cálculo de integrales estocásticas, y se establecen propiedades de ella. Se exponen las fórmulas de conversión de la integral de Itô a la integral de Stratonovich y viceversa.

Se revisan tres métodos importantes para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas: el método de Euler-Maruyama, el método de Euler-Heun y el método de Milstein.

Una importante actividad fue la creación de código propio de los algoritmos correspondientes a tales métodos, que generan todos los cálculos y gráficos presentados en esta tesis. Tales programas fueron escritos en el lenguaje de cálculo simbólico Mathematica Versión 5.0, y en el Capítulo V se adaptan a aplicaciones prácticas.

Al final se aplican los algoritmos de los métodos vistos para la estimación del costo de una opción call Europea y de una variación de tal método: el modelo Heston. Además, se estudia el modelo Lotka-Volterra para el análisis de la dinámica poblacional de dos especies en interacción (presa-depredador). También, se ejecutan algoritmos para estudiar el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck, presente en muchos fenómenos físicos, y el Puente Browniano (Véase [1]).

A futuro se planea dar revisión a métodos con orden de convergencia mayor a los expuestos, y la extensión de los algoritmos a aplicaciones donde intervengan más de dos procesos brownianos. Además, se piensa analizar lo que respecta a la estabilidad de las soluciones, tanto en el sentido media cuadrática como el asintótico.



# Apéndice A

## $\sigma$ -álgebras

**Proposición A.0.1** *La intersección de  $\sigma$ -álgebras es también una  $\sigma$ -álgebra.*

**Demostración.** *Sea  $T \neq \emptyset$  un conjunto arbitrario. Suponga que para cada  $t$  en  $T$  se tiene una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  de subconjuntos de  $\Omega$ . Sea  $\mathcal{F} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ . Siguiendo los mismos pasos que en la demostración anterior es fácil probar que  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra. Observe que como  $T$  es un conjunto arbitrario, la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  es efectivamente una intersección arbitraria de  $\sigma$ -álgebras. ■*

Las proposiciones demostradas anteriormente garantizan que tenga sentido la siguiente definición:

**Definición A.0.2** *Sea  $\mathcal{C}$  una colección no vacía de subconjuntos de  $\Omega$ . La  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ , denotada por  $\sigma(\mathcal{C})$ , es la colección*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \}.$$

**Proposición A.0.3** *Sean  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  dos colecciones de subconjuntos de  $\Omega$  tales que  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ . Entonces  $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$ .*

**Demostración.** *Claramente  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$ . Entonces  $\sigma(\mathcal{C}_2)$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a la colección  $\mathcal{C}_1$ . Por lo tanto  $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$ . ■*

**Proposición A.0.4** *Si  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra, entonces  $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ .*

**Demostración.** *Sabemos que  $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ . Por otro lado como  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{F}$ , entonces  $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ . Esto demuestra la igualdad. ■*

Considere ahora los espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Si  $X$  es una función de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$ , entonces se denota por  $\sigma(X)$  a la mínima  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de respecto de la cual  $X$  es variable aleatoria.

**Definición A.0.5**  $\sigma(X) = \{X^{-1}B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ .



# Apéndice B

## Esperanza condicional

**Definición B.0.6** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, y sea  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  una  $\sigma$ -álgebra. Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una v.a en  $\mathcal{F}$  definimos la esperanza condicional de  $X$  dado  $\mathcal{A}$  la cual denotamos por  $\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\}$ , como la función  $Z$  que satisface lo siguiente:

1.-  $Z$  es una v.a. con respecto a  $\mathcal{A}$ .

2.-  $\mathbb{E}\{Z \mathcal{I}_A\} = \mathbb{E}\{X \mathcal{I}_A\}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , o bien,  $\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\} \mathcal{I}_A\} = \mathbb{E}\{X \mathcal{I}_A\}$ .

La existencia de la esperanza condicional la garantiza el Teorema de Radon-Nykodin (Véase [15]). La esperanza condicional es única c.s.

### Propiedades de la esperanza condicional.

1.  $\mathbb{E}\{aX + bY \mid \mathcal{A}\} = a\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\} + b\mathbb{E}\{Y \mid \mathcal{A}\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2.  $\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\}\} = \mathbb{E}\{X\}$ .
3.  $\mathbb{E}\{X Y \mid \mathcal{A}\} = X \mathbb{E}\{Y \mid \mathcal{A}\}$ , si  $X$  es  $\mathcal{A}$ -medible.
4.  $\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\} \mid \mathcal{B}\} = \mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\}$ , si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ .
5. Si  $X \geq 0$ , entonces  $\mathbb{E}\{X \mid \mathcal{A}\} \geq 0$ .

Detalles se pueden encontrar en [3].



# Apéndice C

## Derivación de la fórmula de Black-Scholes

**Opción call Europea.** Los precios de los activos siguen la EDE

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

cuya solución exacta es

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\},$$

donde  $W_t \sim \text{Nor}(0, t) = \sqrt{t} \text{Nor}(0, 1) = \sqrt{t} Z$ , es decir  $\frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim \text{Nor}(0, 1)$ .

El precio de una opción call Europea es:

$$C(0) = e^{-\mu T} \mathbb{E}\{(S_T - K)^+\},$$

donde  $T$  es la fecha de vencimiento del contrato,  $S_T$  el precio del activo en esa fecha,  $K$  es el precio de ejercicio.

Calculamos primeramente  $\mathbb{E}\{(S_T - K)^+\}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(S_T - K)^+\} &= \mathbb{E} \left\{ \left( S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)T + \sigma \sqrt{T} \frac{W_T}{\sqrt{T}}\}} - K \right)^+ \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left( S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)T + \sigma \sqrt{T} z\}} - K \right)^+ \right\} \\ &= \mathbb{E} \{g(z)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)T + \sigma \sqrt{T} z\}} - K \right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz, \end{aligned}$$

la integral anterior no se anula si  $S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z} - K \geq 0$ , o sea cuando:

$$\begin{aligned}
S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z} &\geq K \\
e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z} &\geq \frac{K}{S_0} \\
(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z &\geq \text{Log}\left\{\frac{K}{S_0}\right\} \\
\sigma\sqrt{T}z &\geq \text{Log}\left\{\frac{K}{S_0}\right\} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T \\
z &\geq \frac{\text{Log}\left\{\frac{K}{S_0}\right\} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
z &\geq \frac{-\text{Log}\left\{\frac{S_0}{K}\right\} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
z &\geq -\left(\frac{\text{Log}\left\{\frac{S_0}{K}\right\} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \equiv -d_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{(S_T - K)^+\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z} - K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} \left(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z} - K\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} \left(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}z}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{-d_2}^{\infty} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} \left(S_0 e^{\{\mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}z - \frac{1}{2}z^2\}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz - \int_{-d_2}^{\infty} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= S_0 e^{\mu T} \int_{-d_2}^{\infty} \left(e^{\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}z - \frac{1}{2}z^2\}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz - K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= S_0 e^{\mu T} \int_{-d_2}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}\{\sigma^2 T - 2\sigma\sqrt{T}z + z^2\}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz - K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= S_0 e^{\mu T} \int_{-d_2}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}\{z - \sigma\sqrt{t}\}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz - K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.
\end{aligned}$$

Haciendo  $v = z - \sigma\sqrt{t}$ ,  $dv = dz$ .

Cuando  $z = -d_2$ ,  $v = -d_2 - \sigma\sqrt{t} = -(d_2 + \sigma\sqrt{t}) \equiv -d_1$

$$\begin{aligned}
&= S_0 e^{\mu T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv - \int_{-\infty}^{-d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \right\} - K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= S_0 e^{\mu T} \{1 - \Phi(-d_1)\} - K \{1 - \Phi(-d_2)\} \\
&= S_0 e^{\mu T} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio de la opción call Europea es:

$$\begin{aligned}
 C(0) &= e^{-\mu T} \mathbb{E}\{(S_T - K)^+\} \\
 &= e^{-\mu T} \{S_0 e^{\mu T} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)\} \\
 &= S_0 \Phi(d_1) - K e^{-\mu T} \Phi(d_2),
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\text{Log}\{\frac{S_0}{K}\} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
 d_1 &= d_2 + \sigma\sqrt{t} = \frac{\text{Log}\{\frac{S_0}{K}\} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.
 \end{aligned}$$



# Apéndice D

## Abreviaturas y terminología

$v.a., (v.a.'s)$	Variable(s) aleatoria(s)
$iid$	independientes e idénticamente distribuidas (v.a.'s)
$c.s.$	Casi seguramente
$f.g.m.$	Función generadora de momentos
$MB$	Movimiento browniano (proceso), proceso de Wiener
$MBG$	Movimiento browniano geométrico
$p.e.$	Proceso estocástico

$\mathbb{E}\{f(X)\}$	Valor esperado (esperanza) de la v.a. $f(X)$
$\text{Var}\{f(X)\}$	Varianza de la v.a. $f(X)$
$\text{Cov}\{f(X), g(X)\}$	Covarianza entre las v.a.'s $f(X)$ y $g(X)$
$X \sim \text{Nor}(\mu, \sigma^2)$	v.a. $X$ con distribución normal y parámetros $\mu$ y $\sigma^2$
$\text{FV}_T(W)$	Variación de primer orden de la función $W$ sobre el tiempo $T$
$\text{QV}_T(W)$	Variación cuadrática de la función $W$ sobre el tiempo $T$
$[W, W]_{[0, T]}, [W, W]_T$	Variación cuadrática muestral de la función $W$ sobre el tiempo $T$
$[f, g]_{[0, T]}$	Covariación cuadrática entre $f$ y $g$ sobre el tiempo $T$
$\varphi_W(m)$	Función generadora de momentos de la v.a. $W$
$\varphi_W^{(i)}(m)$	$i$ – ésimo momento de la v.a. $W$
$\mathcal{I}_A(t)$	Función indicadora $\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A \\ 0 & \text{si } t \notin A \end{cases}$
$L^p(\Omega)$	V.a.'s $p$ – integrables
$L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$	Espacio de p.e.'s $f(t, w)$ $\{\mathcal{F}_t\}$ – adaptados t.q. $\int_a^b \mathbb{E}\{ f(t) ^2\} dt < \infty$
$\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$	Espacio de p.e.'s $f(t)$ $\{\mathcal{F}_t\}$ – adaptados t.q. $\int_a^b  f(t)  dt < \infty$
$\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$	Espacio de p.e.'s $f(t)$ $\{\mathcal{F}_t\}$ – adaptados t.q. $\int_a^b  f(t) ^2 dt < \infty$



# Apéndice E

## Referencias

- [1] Allen, E. *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer. USA. (2007).
- [2] Burrage, K. et al. *Numerical methods for strong solutions of stochastic differential Equations: an overview*. Australia. (2004).
- [3] Gut, A. *Probability: A graduate course*. Springer. USA. (2005).
- [4] Higham, D. *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*. SIAM Review Vol. 43, No. 3, pp. 525–546. UK. (2001).
- [5] Klebaner, F. *Introduction to stochastic calculus*. 2a. ed. Imperial College Press. Australia. (2005).
- [6] Kloeden, P., Pearson, R. *The numerical solution of stochastic differential equations*. Journal Australia Mathematics Society No. 20. Australia. (1977).
- [7] Kloeden, P., Platen, E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. 3a. ed. Springer. Germany. (1999).
- [8] Kuo, Hui-Hsiung. *Introduction to stochastic integration*. Springer. USA. (2006).
- [9] Mao, Xuerong. *Stochastic differential equations and applications*. 2a. ed. Woodhead Publishing. UK. (2011).
- [10] Mikosch, T. *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World Scientific. Singapur. (1998).
- [11] Mikhailov, S. *Heston's stochastic volatility model implementation, calibration and some extensions*. Fraunhofer Institute for Industrial Mathematics. Wilmott Magazine. Germany. (2008).
- [12] Øksendal, B. *Stochastic differential equations An introduction with applications* 6a. ed. Springer-Verlag. (2003).
- [13] Platen, E. *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance*. Springer. Australia. (2010).
- [14] Rincón, L. A. *Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas*. UNAM. México. (2006).
- [15] Royden, H. *Real analysis*. 2a. ed. Macmillan, USA. (1968)
- [16] Sauer, T. *Numerical solution of stochastic differential equations in finance*. Handbook of Computational Finance, pp. 525–550 Springer. Germany. (2012).
- [17] Shreve, S. *Stochastic calculus for finance II Continuous-time models*. Springer. USA. (2004).