Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Aproximación descontada del criterio promedio sensible al riesgo en cadenas de Markov

Tesis

presentada para obtener el título de
Doctorado en Ciencias Matemáticas

Presenta
Rubén Blancas Rivera

Directores de Tesis
Dr. Rolando Cavazos Cadena
Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla, Puebla. 2021

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La presente tesis está relacionada con cadenas de Markov que evolucionan en un espacio de estados finito. Se supone que cada vez que se visita un estado se incurre en un costo, el cual es pagado por un agente con coeficiente de sensibilidad al riesgo positivo y constante. El flujo de costos incurridos mientras el sistema evoluciona se usa para medir el desempeño general de la cadena, y se analizan dos criterios, a saber, el costo promedio sensible al riesgo y el costo total descontado sensible al riesgo. Para una matriz de transición general de la cadena de Markov, se busca una solución al siguiente problema:

- Obtener aproximaciones convergentes para el costo promedio sensible al riesgo en términos de la familia de funciones de valor descontado sensibles al riesgo.

En el contexto neutral al riesgo, correspondiente a un coeficiente de sensibilidad al riesgo nulo, la aproximación al criterio promedio a través del criterio descontado es un problema clásico con un solución conocida ([2], [17], [25], y [33]). Por otro lado, en el caso sensible al riesgo (con un coeficiente de sensibilidad al riesgo no nulo), la literatura sobre el problema anterior de aproximaciones descontadas es relativamente escasa. El primer resultado en esa dirección se obtuvo en [15] donde, para los procesos de decisión de Markov controlados que evolucionan en un espacio de estados de Borel y satisfacen una condición fuerte de ergodicidad geométrica, se obtuvo una solución siempre que el coeficiente de sensibilidad al riesgo sea lo suficientemente pequeño. Recientemente, en [9], se estudiaron las cadenas de costos de Markov no controladas en un espacio de estados finito y, agregando la restricción que la ley de transición es comunicante, se obtuvieron resultados de aproximación para parámetros de sensibilidad al riesgo arbitrarios (no

nulos); como ya se señaló, el análisis en este trabajo no impone ninguna restricción a la ley de transición del sistema y el coeficiente de sensibilidad al riesgo positivo es arbitrario.
En [20] se tiene el primer trabajo encontrado que realiza un análisis de los modelos de Markov a tiempo discreto usando el criterio promedio sensible al riesgo. En este trabajo, se estudiaron las cadenas de Markov con espacio de estados y acciones finitos y, bajo condiciones de comunicación adecuadas, se caracterizó el costo promedio en términos de una única ecuación de optimalidad. Para modelos controlados y no controlados, las extensiones de tal resultado sin restricciones a la ley de transición se dieron en [1] y [11], respectivamente. Los modelos controlados de Markov con espacio de estados finito o numerable con criterios sensibles al riesgo se han estudiado en ([8], [13], [29], [30]), mientras que los procesos de decisión de Markov en un espacio de estados general se analizan en [14], [15], [16] y [21]. Dos factores que despertaron el interés en el criterio promedio sensible al riesgo, son sus conexiones con los campos de las matemáticas financieras ([31], [6], [24]), y con la teoría de las grandes desviaciones (large deviations) ([4], [22]). Nociones de riesgo más generales son estudiadas en [7] y [28].
El principal resultado en este trabajo, que se establece en el Teorema 4.2, en términos generales se expresa de la siguiente manera: a medida que el factor de descuento aumenta a 1, una apropiada normalización de las funciones de valor descontado sensibles al riesgo convergen al costo promedio sensible al riesgo y, además, la convergencia es uniforme en los valores del parámetro de sensibilidad al riesgo perteneciente a un conjunto compacto del rayo positivo. Los detalles se darán más adelante, pero es conveniente adelantar que, debido a la presencia de estados transitorios (ya que la ley de transición puede ser no comunicante) la aproximación de las funciones de valor descontado a la función de costo promedio presentada en esta tesis, es diferente a la utilizada en trabajos anteriores ([9], [10] y [15]). Particularmente, en [9] se presenta una aproximación más simple que la propuesta en este trabajo, la cual se obtuvo suponiendo que la cadena de Markov es comunicante. Sin embargo, como se muestra en el Corolario 4.3, cuando se aplica a un estado recurrente, el resultado de aproximación del Teorema 4.2 se reduce a lo establecido en [9].

Este trabajo está estructurado en seis capítulos. El segundo, es un capítulo preliminar en el que se formula la teoría básica que se trabajará a lo largo de la tesis. Se presenta formalmente la definición de un modelo de Markov con costos asociados y se definen los criterios de descuento y promedio sensibles al riesgo, y se establecen algunas propiedades de los criterios. También se incluye el planteamiento del problema de aproximación al criterio promedio sensible al riesgo y los antecedentes que motivaron el estudio del problema. En el capítulo 3, presentamos la propuesta de aproximación al criterio promedio sensible al riesgo basada en [9] donde la condición de comunicación en la matriz de transición de la cadena de Markov es requerida. La aportación de este trabajo de tesis inicia en el capítulo 4, donde establecemos la propuesta de aproximación para una cadena de Markov con costos asociados sin restricción de comunicación usando el costo diferencial y el valor relativo (ver Definición 4.1) al criterio promedio a través de las funciones descontadas sensibles al riesgo presentadas en el Teorema 4.2 y el Corolario 4.3, y la estrategia que se utilizará para probar dicha propuesta. Usando resultados auxiliares presentados en secciones posteriores demostramos el Teorema 4.2 y el Corolario 4.3. Como resultados auxiliares para probar el Teorema 4.2 buscamos los límites para el costo diferencial y el valor relativo, y probar que el criterio promedio es acotado superiormente (ver los Teoremas 4.4 y 4.7, y el Lema 4.8). Además, mostramos que el criterio promedio puede ser caracterizado a través de una ecuación local de Poisson (ver el Teorema 4.13 y el Lema 4.14). En el capítulo 5, mediante un ejemplo mostramos que la aproximación al criterio promedio presentada en el capítulo 3 falla cuando se aplica a un estado transitorio, es decir, la condición de comunicación no se cumple, pero el cambio de aproximación a través del mayor costo diferencial establecida en el capítulo 4 funciona para el estado transitorio de la cadena de Markov con costos asociados del ejemplo. Finalmente, en el capítulo 6 presentamos las conclusiones del trabajo y problemas futuros.

Capítulo 2

Cadena de Markov con costos asociados

En este capítulo se describirá en forma sintetizada el modelo de Markov con costos asociados en el caso neutral y sensible al riesgo. Después presentaremos dos indicadores que medirán el flujo de costos del sistema: el índice descontado y promedio.

2.1. Modelo de Markov con costos asociados

Un modelo de Markov con costos asociados $\mathcal{C} := (\{X_t\}, C)$, consta de una cadena de Markov a tiempo discreto $\{X_t\}$ con espacio de estados S y su respectiva matriz de transición homogénea en el tiempo $[p_{xy}]_{x,y\in S}$. Por otro lado, $C : S \to \mathbb{R}$, es una función real llamada costo en un paso.
Podemos pensar un modelo de Markov con costos asociados a tiempo discreto como un sistema estocástico observado por un agente de manera periódica en los tiempos $t = 0, 1, 2, ...$ La dinámica que describe a este sistema estocástico funciona de la forma siguiente: si el sistema se encuentra en el estado $X_t = x \in S$, en el tiempo t, entonces ocurren dos cosas:

1. Se paga un costo $C(x)$; y

2. El sistema se traslada a un nuevo estado $X_{t+1} = y \in S$, mediante la probabilidad de transición

$$p_{xy} = P[X_{t+1} = y|X_t = x].$$

Una vez hecha esta transición, la dinámica anteriormente descrita se repite.
Para cada estado inicial $X_0 = x \in S$, una medida de probabilidad P_x es definida sobre el espacio $\Omega = S^\infty$ en forma canónica ([3]). Mientras que E_x denotará el correspondiente operador esperanza.
La siguiente definición será importante en nuestro trabajo de tesis para clasificar las cadenas de Markov de acuerdo a la comunicación en el espacio de estados.

Definición 2.1 *Sea $x \in S$, el conjunto de todos los estados que son accesibles desde x se define por*

$$\mathcal{A}(x) := \{y \in S \,|\, P_x[X_n = y] > 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que

$$x \in \mathcal{A}(x) \quad \text{y} \quad P_x[X_n \in \mathcal{A}(x)] = 1, \quad x \in S, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

A continuación se define el tiempo de retorno a un estado.

Definición 2.2 *Para cada $z \in S$, definamos*

$$T_z := \min\{n \geq 1 \,|\, X_n = z\}, \tag{2.2}$$

T_z es el primer tiempo de retorno al estado z.

El espacio de estados se clasifica en estados transitorios y recurrentes. Para poder resolver el problema principal de este trabajo de tesis, se inicia estudiando el comportamiento en estados recurrentes y luego se generaliza la solución en los estados transitorios.

Definición 2.3 *Sean $x, y \in S$.*

1. *Un estado x es **recurrente** si $P_x[T_x < \infty] = 1$, es decir, si la cadena de Markov inicia en x entonces retorna a x, con probabilidad 1.*

2. *Un estado x es **transitorio** si $P_x[T_x < \infty] < 1$, es decir, si la cadena de Markov inicia en x tiene probabilidad positiva, $1 - P_x[T_x < \infty]$ de nunca retornar a x.*

Algunas consecuencias de la definición anterior se presentan en los Teoremas 2.4 y 2.5 y sus demostraciones respectivas, pueden ser consultadas en [19]. Estos resultados serán usados en la Observación 2.7.

Teorema 2.4 *Sean x un estado recurrente y sea $y \in \mathcal{A}(x)$ entonces y es recurrente.*

Teorema 2.5 *Si S es un conjunto finito entonces existe al menos un estado recurrente en la cadena de Markov.*

Una de las características importantes que puede tener la matriz de transición del modelo de Markov con costos asociado es ser comunicante, como se describirá en la siguiente definición.

Definición 2.6 *Una cadena de Markov es comunicante o bien la matriz de transición $[p_{x,y}]_{x,y \in S}$ es comunicante si*

$$\mathcal{A}(x) = S, \quad x \in S.$$

Observación 2.7 (i) *Observe que la Definición 2.6 implica que $P_x[T_z < \infty] = 1$ para cada $x, z \in S$.*
(ii) *Si S es finito y la cadena de Markov es comunicante entonces por los Teoremas 2.4 y 2.5 cada estado en S es recurrente.*
(iii) *Sea $R \subset S$, con S finito. Si cada estado en R es recurrente se dice que R es una clase de recurrencia. Observe que R es no vacío por el Teorema 2.5.*

En este trabajo seguiremos la siguiente suposición que no mencionaremos en cada Teorema o Lema, pero se supone válida.

Suposición 2.8 *El espacio de estados S de la cadena de Markov con costos asociados es un conjunto finito.*

2.2. Modelo de Markov con sensibilidad al riesgo

Como mencionamos anteriormente, los modelos de Markov con costos asociados son observados por un agente. El agente puede ser neutral o sensible al riesgo. Para distinguir cada caso, se emplea una constante λ conocida como coeficiente de sensibilidad al riesgo. Si $\lambda = 0$ se trata del caso neutral al riesgo, si $\lambda \neq 0$ el modelo de Markov con costos asociados es sensible al riesgo.

2.3. Función de utilidad

El concepto de función de utilidad U nace en economía a partir de la necesidad de estudiar las preferencias de un consumidor a través de una función real. Gracias a los trabajos en [23] es posible representar preferencias bajo condiciones de incertidumbre. La función de utilidad que usaremos en este trabajo se define de la siguiente manera:

Definición 2.9 *Para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y para todo $w \in \mathbb{R}$ sea*

$$U_\lambda(w) := \begin{cases} sign(\lambda)e^{\lambda w}, & si\ \lambda \neq 0, \\ w, & si\ \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Donde $sign(\lambda) = 1$ si $\lambda > 0$ y $sign(\lambda) = -1$ si $\lambda < 0$. Note que $U_\lambda(\cdot)$ es una función estrictamente creciente para cualquier valor de λ. Cuando el agente pueda elegir entre dos costos aleatorios W_0 y W_1, preferirá pagar W_0 si $E[U_\lambda(W_1)] > E[U_\lambda(W_0)]$ mientras que el observador será indiferente entre ambos costos cuando $E[U_\lambda(W_1)] = E[U_\lambda(W_0)]$.
La certeza equivalente de un costo aleatorio W con respecto a U_λ, se define de la siguiente manera.

Definición 2.10 *Sea W una variable aleatoria y supongamos que el valor esperado, de $U_\lambda(W)$ está bien definido. La certeza equivalente $\mathcal{E}$ de W con respecto a U_λ está dada por*

$$\mathcal{E}[\lambda, W] := \begin{cases} \frac{1}{\lambda} ln(E[e^{\lambda W}]), & si\ \lambda \neq 0, \\ E[W], & si\ \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

En esta definición E denota la esperanza de manera genérica. A partir de (2.3) y (2.4) es posible verificar directamente que se cumple lo siguiente

$$U_\lambda(\mathcal{E}[\lambda, W]) = E[U_\lambda(W)],$$

por lo que el observador pagará la cantidad fija $\mathcal{E}[\lambda, W]$ para evitar pagar W. Usando (2.3),

$$\mathcal{E}[0, W] = E[W], \quad \text{y} \quad \mathcal{E}[\lambda, W] = \frac{1}{\lambda} ln\left(E\left[e^{\lambda W}\right]\right), \quad \lambda \neq 0. \tag{2.5}$$

Por la desigualdad de Jensen

$$\mathcal{E}[\lambda, W] \geq E[W] = \mathcal{E}[0, W],$$

si $\lambda > 0$. Mientras que

$$\mathcal{E}[\lambda, W] \leq \mathcal{E}[0, W],$$

cuando $\lambda < 0$. El observador del sistema se refiere como *neutral al riesgo* si $\lambda = 0$, es *adverso al riesgo* si $\lambda > 0$ y se dice *propenso al riesgo* si $\lambda < 0$.
El siguiente resultado se usará en capítulos posteriores, el cual refiere algunas propiedades funcionales de la certeza equivalente.

Proposición 2.11 *Supongamos que la variable aleatoria W satisface que $P[\,|W| \leq b] = 1$ para algún $b \geq 0$. En este caso las*

siguientes afirmaciones (i)–(iii) se cumplen.
(i) $|\mathcal{E}[\lambda, W]| \leq b$ *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
(ii) La función $\lambda \mapsto \lambda\mathcal{E}[\lambda, W]$ *es convexa en* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
(iii) $\lambda \mapsto \mathcal{E}[\lambda, W]$ *es continua en* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Demostración. Primeramente observe que (2.5) implica que

$$e^{\lambda\mathcal{E}[\lambda,W]} = E\left[e^{\lambda W}\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

este hecho será usado en la demostración.
i) Si $P[\,|W| \leq b] = 1$ entonces $|E[W]| \leq b$ y

$$e^{-|\lambda|b} \leq E\left[e^{\lambda W}\right] \leq e^{|\lambda|b},$$

así la afirmación se sigue de (2.5).
(ii) Sean $\lambda, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\rho \in (0, 1)$ tales que $\lambda = \rho\lambda_0 + (1-\rho)\lambda_1$. En este caso, la desigualdad de Hölder implica que

$$E\left[e^{\lambda W}\right] = E\left[e^{\rho\lambda_0 W} e^{(1-\rho)\lambda_1 W}\right] \leq E\left[e^{\lambda_0 W}\right]^{\rho} E\left[e^{\lambda_1 W}\right]^{(1-\rho)}.$$

Usando (2.6), se tiene que

$$e^{\lambda\mathcal{E}[\lambda,W]} \leq e^{\rho\lambda_0\mathcal{E}[\lambda_0,W]} e^{(1-\rho)\lambda_1\mathcal{E}[\lambda_1,W]},$$

y entonces $\lambda\mathcal{E}[\lambda, W] \leq \rho\lambda_0\mathcal{E}[\lambda_0, W] + (1-\rho)\lambda_1\mathcal{E}[\lambda_1, W]$, estableciendo la convexidad de $\lambda \mapsto \lambda\mathcal{E}[\lambda, W]$.
(iii) Dado que una función convexa definida en un intervalo abierto es continua, la parte (ii) implica que $\lambda \mapsto \lambda\mathcal{E}[\lambda, W]$ es continua en $\mathbb{R}$, y entonces $\mathcal{E}[\cdot, W]$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Para concluir, recuerde que la función generadora de momentos $M(\lambda) := E\left[e^{\lambda W}\right]$ es continua y satisface que $M'(\lambda) = E\left[We^{\lambda W}\right] \to E[W]$ cuando $\lambda \to 0$. Combinando estos hechos con (2.5), y usando la regla de L'Hopital se sigue que $\mathcal{E}[\lambda, W]$ es también continua en $\lambda = 0$. ∎

2.4. Criterios de rendimiento

Después de definir el modelo de Markov con costos asociados y de presentar la definición de función de utilidad y certeza equivalente, es necesario definir un indicador que mida el flujo de costos. Definiremos dos criterios de rendimiento: el criterio promedio y el criterio descontado.

2.4.1. Criterio promedio

Sea $X_0 = x \in S$ el estado inicial. Dado $n \in \mathbb{N}$, el costo total (aleatorio) incurrido antes del tiempo n es $\sum_{k=0}^{n-1} C(X_k)$, y la certeza equivalente correspondiente es

$$J_n(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\log\left(E_x\left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C(X_k)}\right]\right), & \text{si } \lambda \neq 0, \\ E_x\left[\sum_{k=0}^{n-1} C(X_k)\right], & \text{si } \lambda = 0; \end{cases} \tag{2.7}$$

véase (2.5).
Por lo tanto, el observador está dispuesto a pagar $J_n(\lambda, x)$ para evitar pagar el costo aleatorio asociado a la visita de los primeros n estados $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, que representa un promedio de $J_n(\lambda, x)/n$ por visita. El límite superior de estos promedios es el costo promedio (a largo plazo) $\lambda-$ sensible en el estado $x \in S$:

$$J(\lambda, x) := \text{lim sup}_{n\to\infty} \frac{1}{n} J_n(\lambda, x). \tag{2.8}$$

De esta manera, (2.8) se define como el criterio promedio λ-sensible. El siguiente resultado caracteriza al criterio promedio a través de una ecuación de Poisson.

Lema 2.12 *Supongamos que se cumple la siguiente condición de comunicación:*

$$\mathcal{A}(x) = S, \quad x \in S. \tag{2.9}$$

En este contexto, para cada $\lambda > 0$ las afirmaciones (i)–(ii) son válidas.
(i) Existen $g(\lambda) \in \mathbb{R}$ y $h(\lambda, \cdot) : S \to \mathbb{R}$, los cuales satisfacen la siguiente ecuación de Poisson:

$$e^{\lambda g(\lambda) + \lambda h(\lambda, x)} = e^{\lambda C(x)} \sum_{y \in S} p_{x\,y} e^{\lambda h(\lambda, y)}, \quad x \in S, \tag{2.10}$$

y en este caso

$$g(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda n} \log\left(E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)}\right]\right) = J(\lambda, x), \quad x \in S.$$

(ii) Si $\tilde{g} \in \mathbb{R}$ y $\tilde{h} : S \to \mathbb{R}$ son tales que la ecuación (2.10) es válida cuando el par $(g(\lambda), h(\lambda, \cdot))$ es reemplazado por $(\tilde{g}, \tilde{h}(\cdot))$, entonces $\tilde{g} = g(\lambda)$ y $\tilde{h}(\cdot) - h(\lambda, \cdot)$ son constantes.

Este Lema fue probado en [20], donde el Teorema clásico de Perron-Frobenious fue usado para demostrar que $e^{\lambda g(\lambda)}$ es el valor propio más grande la matriz $[e^{\lambda C(x)} p_{x,y}]_{x,y \in S}$. Por otro lado, si la condición de comunicación (2.9) falla, entonces $J(\lambda, \cdot)$ no es contante en general, y es caracterizado a través de un sistema de ecuaciones (locales) de Poisson similar a (2.10) (ver [1] y [11]).

2.4.2. Criterio descontado

Sea $\alpha \in (0,1)$ un factor de descuento, de modo que el costo $C(X_t)$ que se incurrirá en el tiempo t vale $\alpha^t C(X_t)$ en el tiempo 0. El valor en el tiempo 0 de los costos asociados con la evolución del sistema es $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_t)$ y dado que el estado inicial es $X_0 = x$, la certeza equivalente λ correspondiente está dada por

$$V(\lambda, \alpha, x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \log \left(E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_k)} \right] \right), & \text{si } \lambda \neq 0, \\ E_x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_k) \right], & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Por lo tanto, (2.11) se define como el criterio descontado o función de valor descontado λ-sensible.
El siguiente resultado caracteriza a (2.11) a través de ecuaciones de Poisson.

Lema 2.13 *Para cada $\alpha \in (0,1)$, las siguientes ecuaciones de Poisson se satisfacen mediante la familia $\{V(\lambda, \alpha, \cdot)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de funciones de valor descontado:*

$$V(0, \alpha, x) = C(x) + \alpha \sum_{y \in S} p_{x,y} V(0, \alpha, y), \quad x \in S,$$

y

$$e^{\lambda V(\lambda, \alpha, x)} = e^{\lambda C(x)} \sum_{y \in S} p_{x,y} e^{\lambda \alpha V(\lambda \alpha, \alpha, y)}, \quad x \in S, \quad \lambda \neq 0. \quad (2.12)$$

Una prueba de este resultado puede ser vista en [17], para el caso neutral al riesgo ($\lambda = 0$), mientras que para el caso sensible al riesgo (2.12) se ha establecido en [15].
El siguiente resultado es una consecuencia de (2.11) y la Suposición 2.8 y servirá más adelante para demostrar resultados posteriores.

Lema 2.14 *Para cada $\lambda > 0$, $\alpha \in (0,1)$,*

$$||V(\lambda, \alpha, \cdot)|| \leq ||C||/(1-\alpha).$$

El objetivo principal de este trabajo es aproximar el criterio promedio λ-sensible (2.8) a través de las funciones descontadas λ-sensibles (2.11). Además buscamos establecer una ecuación local de Poisson (2.10) sin la restricción de comunicación en el modelo de Markov con costos asociados. En la siguiente sección, mostramos antecedentes del problema de aproximación.

2.5. Problema de aproximación

En esta sección se presenta el problema de aproximación al criterio promedio λ-sensible definido en (2.8) a través de las funciones

del valor descontado λ-sensibles (2.11). Además, presentaremos los antecedentes del problema de aproximación y la motivación de este trabajo.
Para establecer el problema de aproximación de manera general, supondremos que contamos con un modelo de Markov con costos asociados y recordemos la notación presentada en el capítulo anterior. El criterio promedio es denotado por $J(\lambda, \cdot)$ y la función descontada por $V(\lambda, \alpha, \cdot)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. De esta manera, con la notación previamente mostrada, el problema de aproximación es:

Problema. Aproximar el criterio de costo promedio λ-sensible $J(\lambda, \cdot)$ en términos de la familia $\{V(\lambda, \alpha, \cdot)\}$ de funciones de costos descontados λ-sensibles al riesgo.

2.5.1. Antecedentes

En este apartado se dará un resumen de los antecedentes sobre la aproximación del criterio promedio λ-sensible vía el criterio descontado λ-sensible.

En el caso neutral al riesgo ($\lambda = 0$), la aproximación del criterio promedio a través del criterio descontado es un problema clásico con la siguiente solución:
De las ecuaciones (2.8) y (2.11), se define el criterio descontado y promedio neutral al riesgo como:

$$V(0, \alpha, x) = E_x \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_t) \right],$$

y

$$J(0, x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} E_x \left[\sum_{t=0}^{\infty} C(X_t) \right],$$

respectivamente, donde $x \in S$ y $\alpha \in (0, 1)$ son arbitrarios.

Inicialmente, para poder lograr una propuesta de aproximación, se considera la siguiente suposición.

Suposición 2.15 $\|V(0, \alpha, \cdot) - V_\alpha(0, \alpha, z)\| < \infty$ *para algún estado fijo* $z \in S$.

Teorema 2.16 *Si la Suposición 2.15 se cumple entonces*

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} (1 - \alpha) V(0, \alpha, x) = J(0, x), \quad x \in S. \tag{2.13}$$

La prueba del Teorema 2.16 se puede encontrar en [2] o [26]. Además la Suposición 2.15 se cumple cuando el modelo de Markov con costos asociados tiene una matriz de transición comunicante [32].
Sin la restricción de comunicación, el Teorema 2.16 también es válido (ver Teorema 9.1.4 en [25]).
Para el caso sensible al riesgo ($\lambda \neq 0$) la aproximación presentada en el Teorema 2.16, no es viable. Como prueba de la afirmación anterior, se tiene el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 2.17 *Considere el espacio de estados $S = \mathbb{N}$ y la función de costo asociado*

$$C(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq 0, \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}.$$

y

$$p_{xy} = \begin{cases} 1, & si\ x = y - 1, \\ \frac{e^{-1}}{x!}, & si\ x \in \mathbb{N}, y = 0. \end{cases}.$$

Lema 2.18 *Para el caso sensible al riesgo $\lambda \neq 0$, el modelo de Markov con costo asociado definido en el Contraejemplo 2.17, cumple que*

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} (1 - \alpha) V(\lambda, \alpha, x) = \lambda^{-1} \int_0^{\lambda} J(\lambda, s) ds := g(\lambda), \tag{2.14}$$

y

$$g(\lambda) < J(\lambda, x),$$

para cada $x \in S$.

La prueba del Lema 2.18 se puede consultar en el Ejemplo 9.1 en [10].

Por lo tanto, se requiere una forma alternativa de aproximar el criterio promedio a través del criterio descontado.
En los procesos de decisión de Markov con espacio de estados de Borel, el problema de esta tesis se estudió en [15],1 bajo condiciones de ergodicidad adecuadas, se obtuvo una solución al problema con el requisito de que el coeficiente de sensibilidad al riesgo sea lo suficientemente pequeño.
En resumen, para un modelo de Markov con costos asociados con un coeficiente de sensibilidad al riesgo general no se encontraron resultados de aproximación al criterio promedio a través del criterio descontado. Además, como se observó en el Contraejemplo 2.17 que la propuesta de aproximación tiene que ser diferente a la usada en el caso neutral al riesgo ($\lambda = 0$).

En los siguientes capítulos mostraremos una solución al problema de aproximación. La primera está basada en [9], donde con la condición de comunicación (2.9) se presenta una propuesta de aproximación en el Teorema 3.3. Después, en el capítulo 5 presentamos la aportación de este trabajo de tesis, donde, sin restricciones de comunicación en la cadena de Markov se muestra una aproximación a través de la función de mayor costo diferencial en el Teorema 4.2 con un coeficiente de sensibilidad al riesgo positivo. Finalmente, mostramos un ejemplo donde la aproximación del Teorema 3.3 falla cuando la cadena de Markov tiene un estado transitorio pero la propuesta de aproximación con la función de mayor costo diferencial es válida para dicho estado.

Capítulo 3

Aproximación descontada al criterio promedio: caso comunicante

Este capítulo está basado en el artículo [9], su desarrollo utiliza la notación dada en el capítulo 2.
Para resolver el problema de aproximación presentado en el capítulo anterior, específicamente en la Sección 2.5, se requiere la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea $z \in S$ fijo. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$ y $x \in S$, definamos*

$$\begin{aligned} g(\lambda, \alpha, x) &:= V(\lambda, \alpha, x) - \alpha V(\lambda\alpha, \alpha, x), \\ h(\lambda, \alpha, x) &:= V(\lambda, \alpha, x) - V(\lambda, \alpha, z). \end{aligned}$$

Observe que $g(0, \alpha, x) = (1-\alpha)V(0, \alpha, x)$ y $h(0, \alpha, x) = V(0, \alpha, x) - V(0, \alpha, z)$.
El siguiente teorema extiende la convergencia (2.13) al caso sensible al riesgo. Para estos se requiere la siguiente suposición sobre el modelo.

Suposición 3.2 *El modelo de Markov con costos asociados tiene una matriz de transición comunicante (ver Definición 2.6).*

Teorema 3.3 *Considere que la Suposición 3.2 es válida y sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in S$, entonces*

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} g(\lambda, \alpha, x) = g^*(\lambda), \quad y \quad \lim_{\alpha \nearrow 1} h(\lambda, \alpha, x) = h^*(\lambda, x), \tag{3.1}$$

donde $(g^*(\lambda), h^*(\lambda, \cdot))$ es la solución de la ecuación de Poisson descrita en el Lema 2.12.

Esencialmente, este resultado se obtiene mostrando que la primera convergencia en (3.1) es uniforme para λ en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Para poder demostrar el Teorema 3.3 son necesarios los resultados auxiliares presentados en la siguiente sección.

3.1. Resultados auxiliares

Esta sección contiene los resultados técnicos que se utilizarán para demostrar el Teorema 3.3.

Teorema 3.4 *Sea $\lambda \neq 0$ arbitrario pero fijo. Supongamos que la sucesión $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ satisface que*

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 1 \quad y \quad \tilde{g}(\lambda, x) := \lim_{n \to \infty} g(\lambda, \alpha_n, x), \tag{3.2}$$

donde el segundo límite existe para cada $x \in S$. En este caso, $\tilde{g}(\lambda, \cdot)$ es constante, digamos

$$\tilde{g}(\lambda, x) = \tilde{g}^*(\lambda), \quad x \in S,$$

y

$$\lim_{n \to \infty} g(\lambda \alpha_n, \alpha_n, x) = \tilde{g}^*(\lambda), \quad x \in S.$$

La demostración de este teorema es bastante técnica, y las partes esenciales de la prueba se presentan en los Lemas 3.5–3.7.
Para empezar, tenga en cuenta que (2.11) implica que

$$\lambda V(\lambda, \alpha, x) = \log \left(E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_k)} \right] \right), \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \alpha \in (0, 1), \ x \in S. \tag{3.3}$$

Lema 3.5 *Para cada $\alpha \in (0, 1)$ y $x \in S$, las siguientes afirmaciones (i)–(iv) se cumplen:*
(i) $|\lambda V(\lambda, \alpha, x) - \lambda_1 V(\lambda_1, \alpha, x)| \leq |\lambda - \lambda_1| \, \|C\|/(1 - \alpha)$ para cada $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R}$;
(ii) $|g(\lambda, \alpha, x)| \leq \|C\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(iii) $g(\cdot, \alpha, x)$ es creciente;
(iv) $\lambda g(\lambda \alpha, \alpha, x) \leq \lambda g(\lambda, \alpha, x)$ para cada $\lambda \neq 0$.

Demostración. Ver Lema 4.1 en [9]. ■

El siguiente resultado se basa en gran medida en la Suposición 2.6.

Lema 3.6 *Para cada $M > 0$, existe una constante K_M tal que*

$$|\lambda V(\lambda, \alpha, x) - \lambda V(\lambda, \alpha, y)| \leq K_M, \quad |\lambda| \leq M, \quad x, y \in S, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{3.4}$$

Demostración. Sean $x, y \in S$ y $\alpha \in (0,1)$ arbitrarios y por la Suposición 2.6, existe un entero positivo $N_{x,y}$ tal que $P_x[X_{N_{x,y}} = y] > 0$. Usando (3.3) observe para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)} &= E_x\left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_k)}\right] \\ &= E_x\left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{N_{x,y}-1} \alpha^k C(X_k)} e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_{k+N_{x,y}})}\right] \\ &\geq e^{-N_{x,y}|\lambda|\,\|C\|} E_x\left[e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_{k+N_{x,y}})}\right] \qquad (3.5) \\ &\geq e^{-N_{x,y}|\lambda|\,\|C\|} E_x\left[I[X_{N_{x,y}} = y] e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_{k+N_{x,y}})}\right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la propiedad de Markov y (2.11) se obtiene que

$$\begin{aligned} &E_x\left[I[X_{N_{x,y}} = y] e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_{k+N_{x,y}})} \,\Big|\, X_k, k \leq N_{x,y}\right] \\ &\qquad = I[X_{N_{x,y}} = y] E_y\left[e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_k)}\right] \\ &\qquad = I[X_{N_{x,y}} = y] e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} V(\lambda \alpha^{N_{x,y}}, \alpha, y)}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} &E_x\left[I[X_{N_{x,y}} = y] e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_{k+N_{x,y}})}\right] \\ &= P_x[X_{N_{x,y}} = y] e^{\lambda \alpha^{N_{x,y}} V(\lambda \alpha^{N_{x,y}}, \alpha, y)}. \end{aligned}$$

Combinando esta igualdad con (3.5), se sigue que

$$e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)} \geq P_x[X_{N_{x,y}} = y] e^{-N_{x,y}|\lambda|\,\|C\| + \lambda \alpha^{N_{x,y}} V(\lambda \alpha^{N_{x,y}}, \alpha, y)},$$

y entonces

$$\begin{aligned} &\lambda V(\lambda, \alpha, x) - \lambda \alpha^{N_{x,y}} V(\lambda \alpha^{N_{x,y}}, \alpha, y) \\ &\qquad \geq -N_{x,y}|\lambda|\,\|C\| + \log(P_x[X_{N_{x,y}} = y]). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora, observe que

$$
\begin{aligned}
&V(\lambda,\alpha,y)-\alpha^{N_{x,y}}V(\lambda\alpha^{N_{x,y}},\alpha,y)\\
&=\sum_{k=1}^{N_{x,y}}\alpha^{k-1}\left[V(\lambda\alpha^{k-1},\alpha,y)-\alpha V(\lambda\alpha^{k},\alpha,y)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{N_{x,y}}\alpha^{k-1}g_\alpha(\lambda\alpha^{k-1},y).
\end{aligned}
$$

Dado que $\alpha\in(0,1)$, esta última relación y el Lema 3.5(ii) juntos nos conducen a

$$|V(\lambda,\alpha,y)-\alpha^{N_{x,y}}V(\lambda\alpha^{N_{x,y}},\alpha,y)|\le N_{x,y}\|C\|,$$

una desigualdad que a través de (3.6) implica que

$$
\begin{aligned}
&\lambda V(\lambda,\alpha,x)-\lambda V(\lambda,\alpha,y)\\
&\qquad\ge -N_{x,y}(|\lambda|+1)\|C\|+\log(P_x[X_{N_{x,y}}=y]),\quad x,y\in S.
\end{aligned}
$$

Ahora, para cada $M>0$ definamos

$$K_M:=\max\{N_{x,y}(M+1)\|C\|-\log(P_x[X_{N_{x,y}}=y])\,|\,x,y\in S\},$$

y observe que $K_M<\infty$, ya que $P[X_{N_{x,y}}=y]>0$ para cada $x,y\in S$ y el espacio de estados es finito. Con esta notación, y las dos últimas relaciones se tiene que $\lambda V(\lambda,\alpha,x)-\lambda V(\lambda,\alpha,y)\ge -K_M$ para cada $x,y,\in S$, $\lambda\in[-M,M]$, y (3.4) se sigue intercambiando los roles de x y y. ■

El paso antes de la prueba del Teorema 3.4 relaciona las funciones $g(\lambda,\alpha,\cdot)$ and $g(\lambda\alpha,\alpha,\cdot)$ mediante una matriz estocástica.

Lema 3.7 *Sea $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ arbitrario pero fijo. Para cada $\alpha\in(0,1)$, se define la matriz estocástica $[Q^{\lambda,\alpha}_{x,y}]_{x,y\in S}$ por*

$$Q^{\lambda,\alpha}_{x,y}:=\frac{p_{x,y}e^{\lambda\alpha^2V(\lambda\alpha^2,\alpha,y)}}{\sum_{w\in S}p_{x,w}e^{\lambda\alpha^2V(\lambda\alpha^2,\alpha,w)}},\quad x,y\in S. \tag{3.7}$$

Con esta notación, las siguientes afirmaciones (i) y (ii) se cumplen:
(i) Para cada $\alpha\in(0,1)$,

$$e^{\lambda g_\alpha(\lambda,x)}=e^{\lambda(1-\alpha)C(x)}\sum_{y\in S}Q^{\lambda,\alpha}_{x,y}e^{\lambda\alpha g_\alpha(\lambda\alpha,y)},\quad x\in S. \tag{3.8}$$

(ii) Para cada $x,y\in S$ y $\alpha\in(0,1)$

$$Q^{\lambda,\alpha}_{x,y}\ge p_{x,y}e^{-2K_{|\lambda|}},$$

donde la constante $K_{|\lambda|}$ es como en el Lema 3.6.

Demostración. Dada $\alpha \in (0,1)$ y $x \in S$, por (2.12) se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)} &= e^{\lambda C(x)} \sum_{y\in S} p_{x,y} e^{\lambda\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,y)}, \\ e^{\lambda\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,x)} &= e^{\lambda\alpha C(x)} \sum_{w\in S} p_{x,w} e^{\lambda\alpha^2 V(\lambda\alpha^2,\alpha,w)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &e^{\lambda[V(\lambda,\alpha,x)-\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,x)]} \\ &\quad= e^{\lambda(1-\alpha)C(x)} \frac{\sum_{y\in S} p_{x,y} e^{\lambda\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,y)}}{\sum_{w\in S} p_{x,w} e^{\lambda\alpha^2 V(\lambda\alpha^2,\alpha,w)}} \\ &\quad= e^{\lambda(1-\alpha)C(x)} \frac{\sum_{y\in S} p_{x,y} e^{\lambda\alpha^2 V(\lambda\alpha^2,\alpha,y)} e^{\lambda\alpha[V(\lambda\alpha,\alpha,y)-\alpha V(\lambda\alpha^2,\alpha,y)]}}{\sum_{w\in S} p_{x,w} e^{\lambda\alpha^2 V(\lambda\alpha^2,\alpha,w)}}, \end{aligned}$$

y (3.8) se sigue a través de la Definición 3.1 y (3.7).
(ii) Sea $w^* \in S$ fijo, y observe que (3.7) implica que

$$Q_{x,y}^{\lambda,\alpha} = \frac{p_{x,y} e^{\lambda\alpha^2[V(\lambda\alpha^2,\alpha,y)-V(\lambda\alpha^2,\alpha,w^*)]}}{\sum_{w\in S} p_{x,w} e^{\lambda\alpha^2[V(\lambda\alpha^2,\alpha,w)-V(\lambda\alpha^2,\alpha,w^*)]}}, \quad x,y \in S.$$

Usando la desigualdad $|\lambda|\alpha^2|V(\lambda\alpha^2,\alpha,\cdot) - V(\lambda\alpha^2,\alpha,w^*)| \le K_{|\lambda|}$ establecida en el Lema 3.6, se deduce, para cada $x, y \in S$,

$$e^{\lambda\alpha^2[V(\lambda\alpha^2,\alpha,y)-V(\lambda\alpha^2,\alpha,w^*)]} \ge e^{-K_{|\lambda|}},$$

y

$$\sum_{w\in S} p_{x,w} e^{\lambda\alpha^2[V(\lambda\alpha^2,\alpha,w)-V(\lambda\alpha^2,\alpha,w^*)]} \le e^{K_{|\lambda|}},$$

y la conclusión se sigue combinando estas tres últimas relaciones.
■

Después de los anteriores preliminares, el Teorema 3.4 se puede demostrar de la siguiente manera.

Demostración del Teorema 3.4 Sea $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ tal que (3.2) se cumple. Primero, se mostrará que $\{g(\lambda\alpha_n,\alpha_n,\cdot)\}$ converge a $\tilde{g}(\lambda,\cdot)$ cuando n tiende a ∞. Para lograr este objetivo es suficiente mostrar que cualquier punto límite de $\{g(\lambda\alpha_n,\alpha_n,\cdot)\}$ coincide con $\tilde{g}(\lambda,\cdot)$, ya que $\|g(\lambda\alpha_n,\alpha_n,\cdot)\| \le \|C\|$, por el Lema 3.5(ii). Con esto en mente, sea $\tilde{g}^{(1)}(\lambda,\cdot) : S \to \mathbb{R}$ un punto límite arbitrario de $\{g(\lambda\alpha_n,\alpha_n,\cdot)\}$ y seleccione una subsucesión $\{\beta_k\}$ de $\{\alpha_n\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} g(\lambda\beta_k,\beta_k,x) = \tilde{g}^{(1)}(\lambda,x), \quad x \in S. \tag{3.9}$$

Tomando una subsucesión adicional, si es necesario, se puede suponer que los componentes de la matriz estocástica Q^{λ,β_n} en (3.7) convergen:

$$Q^{\lambda}_{x,y} := \lim_{k\to\infty} Q^{\lambda,\beta_k}_{x,y}, \quad x, y \in S, \tag{3.10}$$

donde, dado que S es finito, la matriz límite Q^{λ} es estocástica. Además, el Lema 3.7(ii) y la relación anterior dan como resultado que $Q^{\lambda}_{x,y} \geq e^{-2K_{|\lambda|}} p_{x,y}$ para cada $x, y \in S$, así la Suposición 2.6 implica que Q^{λ} es una matriz comunicante, y luego tienen una distribución invariante $\rho(\cdot)$ la cual es positiva en cada estado, es decir,

$$\rho(y) > 0 \quad \text{and} \quad \rho(y) = \sum_{x\in S} \rho(x) Q^{\lambda}_{x,y}, \quad y \in S. \tag{3.11}$$

Luego, por (3.8), para cada entero positivo k,

$$e^{\lambda g(\lambda,\beta_k,x)} = e^{\lambda(1-\beta_k)C(x)} \sum_{y\in S} Q^{\lambda,\beta_k}_{x,y} e^{\lambda\beta_k g(\lambda\beta_k,\beta_k,y)}, \quad x \in S,$$

mientras que el Lema 3.5(iv) implica que

$$\lambda g(\lambda, \beta_k, \cdot) \geq \lambda g(\lambda\beta_k, \beta_k, \cdot).$$

Dado que $\{\beta_k\}$ es una subsucesión de $\{\alpha_n\}$, tomando el límite en ambos lados de estas relaciones, a través de (3.2), (3.9) y (3.10) se sigue que

$$e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,x)} = \sum_{y\in S} Q^{\lambda}_{x,y} e^{\lambda\tilde{g}^{(1)}(\lambda,y)}, \quad x \in S, \tag{3.12}$$

y

$$\lambda\tilde{g}(\lambda, \cdot) \geq \lambda\tilde{g}^{(1)}(\lambda, \cdot). \tag{3.13}$$

Combinando (3.11) y (3.12) se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{x\in S} \rho(x) e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,x)} &= \sum_{x\in S} \rho(x) \sum_{y\in S} Q^{\lambda}_{x,y} e^{\lambda\tilde{g}^{(1)}(\lambda,y)} \\ &= \sum_{y\in S}\sum_{x\in S} \rho(x) Q^{\lambda}_{x,y} e^{\lambda\tilde{g}^{(1)}(\lambda,y)} \\ &= \sum_{y\in S} \rho(y) e^{\lambda\tilde{g}^{(1)}(\lambda,y)}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\sum_{x\in S} \rho(x)[e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,x)} - e^{\lambda\tilde{g}^{(1)}(\lambda,x)}] = 0.$$

Recordando que $\rho(\cdot) > 0$ y λ no es nulo, esta última relación y (3.13) juntas implican que $\tilde{g}(\lambda, \cdot) = \tilde{g}^{(1)}(\lambda, \cdot)$. Como ya se mencionó, esto demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} g(\lambda\alpha_n, \alpha_n, x) = \tilde{g}(\lambda, x) = \lim_{n\to\infty} g(\lambda, \alpha_n, x), \quad x \in S.$$

Para concluir, observe que (3.12) implica que, para cada estado x,

$$e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,x)} = \sum_{y\in S} Q^{\lambda}_{x,y} e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,y)},$$

y entonces

$$e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,x)} = \sum_{y\in S} (Q^{\lambda})^n_{x,y} e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,y)},$$

donde $(Q^{\lambda})^n$ es el n-ésimo producto de la matriz de Q^{λ} consigo mismo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,x)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in S} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} (Q^{\lambda})^k_{x,y}}{n}\right] e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,y)} \\ &= \sum_{x\in S} \rho(y) e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,y)}, \end{aligned}$$

por el teorema ergódico. Por lo tanto, sí

$$\tilde{g}^*(\lambda) := \lambda^{-1} \log \left(\sum_{y\in S} \rho(y) e^{\lambda\tilde{g}(\lambda,y)} \right),$$

se sigue que $\tilde{g}(\lambda, \cdot) = \tilde{g}^*(\lambda)$, completando la prueba. ■

3.2. Prueba del teorema de aproximación

En esta sección se establecerá la demostración del Teorema 3.3. Sea $z \in S$ el estado fijo enunciado en el Lema 2.12, y observe que (2.12) implica que, para cada $\lambda \neq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ y $x \in S$, se tiene que

$$\begin{aligned} &e^{\lambda[V(\lambda,\alpha,x)-V(\lambda,\alpha,z)]+\lambda[V(\lambda,\alpha,z)-\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,z)]} \\ &\qquad = e^{\lambda C(x)} \sum_{y\in S} p_{x,y} e^{\lambda\alpha[V(\lambda\alpha,\alpha,y)-V(\lambda\alpha,\alpha,z)]}, \end{aligned}$$

una igualdad que, usando la notación en la Definición 3.1 es equivalente a

$$e^{\lambda h_\alpha(\lambda,x)+\lambda g_\alpha(\lambda,z)} = e^{\lambda C(x)} \sum_{y\in S} p_{x,y} e^{\lambda\alpha h_\alpha(\lambda\alpha,y)}, \tag{3.14}$$

$x \in S$, $\alpha \in (0,1)$ y $\lambda > 0$.

Demostración del Teorema 3.3 Como ya se ha observado, el caso neutral al riesgo $\lambda = 0$ es bien conocido, y su prueba puede verse, por ejemplo en [17] y [25]. Por lo tanto, en el resto se supone que $\lambda > 0$. Para empezar, recuerde que $\|g(\lambda, \alpha, \cdot)\| \leq \|C\|$, por el Lema 3.5(ii), mientras que $\|h(\lambda, \alpha, \cdot)\| \leq K_{|\lambda|}$ por el Lema 3.6 y la Definición 3.1. Por lo tanto, para establecer (3.1) es suficiente demostrar que, si $(\tilde{g}(\lambda), \tilde{h}(\lambda, \cdot))$ es un punto límite arbitrario de la familia $\{(g(\lambda, \alpha, \cdot), h(\lambda, \alpha, \cdot))\}_{\alpha \in (0,1)}$ cuando α crece a 1, entonces

$$\tilde{g}(\lambda, \cdot) = g^*(\lambda), \quad \text{and} \quad \tilde{h}(\lambda, \cdot) = h^*(\lambda, \cdot). \tag{3.15}$$

Para lograr este objetivo primero observe que

$$\tilde{h}(\lambda, z) = 0, \tag{3.16}$$

ya que, por la Definición 3.1, $h(\lambda, \alpha, z) = 0$ para cada $\alpha \in (0,1)$. Ahora, sean $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, y

$$\lim_{n\to\infty} g(\lambda, \alpha_n, x) = \tilde{g}(\lambda, x), \qquad \lim_{n\to\infty} h(\lambda, \alpha_n, x) = \tilde{h}(\lambda, x), \quad x \in S. \tag{3.17}$$

En este contexto, el Teorema 3.4 implica que $\tilde{g}(\lambda, \cdot)$ es constante, digamos $\tilde{g}^*(\lambda)$, y

$$\tilde{g}(\lambda, x) = \tilde{g}^*(\lambda) = \lim_{n\to\infty} g(\lambda\alpha_n, \alpha_n, x), \quad x \in S. \tag{3.18}$$

Luego, usando la Definición 3.1, observe que

$$\begin{aligned}
&h(\lambda, \alpha_n, x) - \alpha_n h(\lambda\alpha_n, \alpha_n, x) \\
&\quad = [V(\lambda, \alpha_n, x) - V(\lambda, \alpha_n, z)] - \alpha_n[V(\lambda\alpha_n, \alpha_n, x) - V(\lambda\alpha_n, \alpha_n, z)] \\
&\quad = [V(\lambda, \alpha_n, x) - \alpha_n V(\lambda\alpha_n, \alpha_n, x)] - [V(\lambda, \alpha_n, z) - \alpha_n V(\lambda\alpha_n, \alpha_n, z)] \\
&\quad = g(\lambda, \alpha_n, x) - g(\lambda, \alpha_n, z).
\end{aligned}$$

Combinando esta relación con las dos anteriores, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n h(\lambda\alpha_n, \alpha_n, x) = \tilde{h}(\lambda, x). \tag{3.19}$$

Ahora, reemplace α por α_n en (3.14) para obtener

$$e^{\lambda h(\lambda, \alpha_n, x) + \lambda g(\lambda, \alpha_n, z)} = e^{\lambda C(x)} \sum_{y \in S} p_{x,y} e^{\lambda\alpha_n h(\lambda\alpha_n, \alpha_n, y)}, \quad x \in S.$$

Tomando el límite cuando n tiende a ∞ en ambos lados de esta igualdad, a través de (3.17)–(3.19) se sigue que

$$e^{\lambda\tilde{h}(\lambda, x) + \lambda\tilde{g}^*(\lambda)} = e^{\lambda C(x)} \sum_{y \in S} p_{x,y} e^{\lambda\tilde{h}(\lambda, y)}, \quad x \in S.$$

De esta manera, los Lemas 2.12(ii) y (3.16) implican la relación (3.15), completando la prueba.

En este capítulo estudiamos el problema de aproximación del criterio promedio sensible al riesgo a través de una normalización de las funciones descontadas sensibles al riesgo establecida en el Teorema 3.3. La condición de comunicación en la cadena de Markov fue importante para demostrar el teorema antes mencionado. Más adelante, en el capítulo 5 presentamos un ejemplo donde esta normalización falla cuando se aplica a un estado transitorio y se requiere otra normalización llamada en el capítulo 4 mayor costo diferencial.

Capítulo 4

Aproximación descontada al criterio promedio: caso no comunicante

Este capítulo está basado en el artículo [5] y es la aportación principal de este trabajo de tesis. El desarrollo de este capítulo utiliza la notación dada en el capítulo 2. En la Sección 2.5, presentamos el problema de aproximación al criterio promedio sensible al riesgo a través de las funciones descontadas sensibles al riesgo. Además, en los antecedentes del problema, no se encontraron resultados sin la restricción de comunicación al modelo de Markov con costos asociados.

4.1. Propuesta de aproximación

Considere un modelo de Markov con costo asociado definido en el Capítulo 2. Recuerde que $V(\lambda, \alpha, \cdot)$ denota la función descontada λ-sensible y $J(\lambda, \cdot)$ al criterio promedio λ-sensible. Vamos a establecer la siguiente definición para poder presentar la propuesta de aproximación de este trabajo.

Definición 4.1 *Para cualesquiera $x, y \in S$, $\alpha \in (0,1)$ y $\lambda > 0$, se define el costo diferencial $g(\lambda, \alpha, x)$ y el valor relativo $h(\lambda, \alpha, x, y)$ de la siguiente manera::*

$$g(\lambda, \alpha, x) := V(\lambda, \alpha, x) - \alpha V(\alpha\lambda, \alpha, x), \tag{4.1}$$

$$h(\lambda, \alpha, x, y) := V(\lambda, \alpha, x) - V(\lambda, \alpha, y), \tag{4.2}$$

respectivamente, mientras que

$$\tilde{g}(\lambda,\alpha,x) := \max_{w\in\mathcal{A}(x)} g(\lambda,\alpha,w), \tag{4.3}$$

es el mayor costo diferencial desde x.

Utilizando la definición anterior, el principal resultado de este trabajo establece lo siguiente: a medida que α crece a 1, el criterio promedio $J(\lambda,\cdot)$ es el límite de la función del mayor costo diferencial desde x, $\tilde{g}(\lambda,\alpha,\cdot)$. Además, la convergencia es uniforme en conjuntos compactos del rayo positivo.

Teorema 4.2 *Para cada conjunto compacto $K\subset(0,\infty)$ y $x\in S$,*

$$\sup_{\lambda\in K}|\tilde{g}(\lambda,\alpha,x)-J(\lambda,x)|\to 0 \text{ cuando } \alpha\nearrow 1. \tag{4.4}$$

Este teorema generaliza la conclusión principal del Teorema 3.3, donde asumen que la matriz de transición es comunicante y con el cambio de $g(\lambda,\alpha,x)$ en lugar de $\tilde{g}(\lambda,\alpha,x)$ en (4.4), la afirmación de la convergencia en el Teorema 4.2 es válida.
De esta manera, si la matriz de transición es comunicante (todos los estados son recurrentes) entonces como consecuencia del Teorema 4.2 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3 *Si el estado $x\in S$ es recurrente, entonces para cada conjunto compacto $K\subset(0,\infty)$ y $\lambda>0$,*

$$\sup_{\lambda\in K}|g(\lambda,\alpha,x)-J(\lambda,x)|\to 0 \text{ cuando } \alpha\nearrow 1. \tag{4.5}$$

La estrategia técnica para demostrar el Teorema 4.2 y el Corolario 4.3 consiste en probar lo siguiente:

- Si $\{(\alpha_n,\lambda_n)\}\subset(0,1)\times(0,\infty)$ es una sucesión convergente a $(1,\lambda^*)$ con $\lambda^*>0$, entonces existe una subsucesión (con la misma notación $\{(\alpha_n,\lambda_n)\}$) tal que la sucesión $\{g(\lambda_n,\alpha_n,x)\}$ y $\{h(\lambda_n,\alpha_n,x,y)\}$ son convergentes para cada $x,y\in S$, y

  $$\lim_{n\to\infty}\tilde{g}(\lambda_n,\alpha_n,x)=J(\lambda^*,x),$$

  un hecho que lleva a (4.4) a través de un argumento simple, mientras que el Corolario 4.3 será probado demostrando que, si x es un estado recurrente, entonces $\tilde{g}(\lambda_n,\alpha_n,x)$ y $g(\lambda_n,\alpha_n,x)$ tienen el mismo límite cuando n tiende a ∞.

Para lograr el objetivo anterior se requieren los siguientes resultados preliminares:

1. La función de valor relativo $h(\lambda, \alpha, x, y)$ es acotada inferiormente bajo la condición que $y \in \mathcal{A}(x)$. Este resultado se puede ver en el Teorema 4.4.

2. Para cada $\alpha \in (0,1)$, el índice de costo promedio $J(\lambda, \cdot)$ es acotado superiormente por la función del mayor costo diferencial $\tilde{g}(\lambda, \alpha, \cdot)$. Este resultado se puede encontrar en el Teorema 4.7. De esta forma el límite de $\tilde{g}(\lambda, \alpha, \cdot)$ cuando $\alpha \nearrow 1$ es mayor o igual que $J(\lambda, \cdot)$.

3. Crear una partición del espacio de estados a partir del límite de la sucesión de funciones de valor relativo, $\{h(\lambda_n, \alpha_n, \cdot, \cdot)\}$.

4. Dado un conjunto $\mathcal{H}$ en la partición del espacio de estados, una ecuación de Poisson similar a (2.10) se establece en $\mathcal{H}$, donde los límites de las sucesiones $\{g(\lambda_n, \alpha_n, \cdot)\}$ y $\{g(\alpha_n\lambda_n, \alpha_n, \cdot)\}$ están relacionados mediante una matriz estocástica en ese conjunto. Dicho resultado se demuestra en el Lema 4.14.

5. Con condiciones apropiadas, se tiene que la siguiente igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(\lambda_n, \alpha_n, X_t) = \lim_{n\to\infty} g(\lambda_n, \alpha_n, X_t),$$

   se cumple casi seguro mientras el sistema permanece en $\mathcal{H}$. En el Lema 4.15 se encuentra este resultado.

6. Para cada $x \in S$, se tiene la siguiente desigualdad $g(\lambda, \alpha, x) \geq g(\alpha\lambda, \alpha, x)$. Este resultado se puede encontrar en el Teorema 4.13. Cuya prueba se basa en la convexidad de la función $\lambda \mapsto \lambda V(\lambda, \alpha, x)$ (mismo argumento que se usa en [9]) y agregando las conclusiones de los Lemas 4.14 y 4.15.

Estos resultados auxiliares son demostrados en las Secciones 4.2 y 4.3. La demostración del Teorema 4.2 y el Corolario 4.3 se pueden consultar en la Sección 4.4.

4.2. Propiedades del costo diferencial y el valor relativo

En esta sección revisaremos los resultados auxiliares básicos que se utilizan para demostrar el Teorema 4.2. Los principales objetivos en este capítulo son:

(i) Establecer los límites para el costo diferencial $g(\lambda, \alpha, \cdot)$ y el valor relativo $h(\lambda, \alpha, \cdot, \cdot)$ establecido en el Lema 4.5(iii) y el Teorema 4.4, respectivamente.

(ii) Probar que el índice promedio $J(\lambda, \cdot)$ es acotado superiormente para cada $\alpha \in (0,1)$, por el mayor costo diferencial $\tilde{g}(\lambda, \alpha, \cdot)$; ver Teorema 4.7 (iii).

4.2.1. Límites para el costo diferencial y valor relativo

Teorema 4.4 *Para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $x, y \in S$,*

$$y \in \mathcal{A}(x) \implies \inf_{\lambda \geq \varepsilon,\ \alpha \in (0,1)} h(\lambda, \alpha, x, y) > -\infty.$$

La verificación de este resultado se basa en el límite de la función de costo diferencial $g(\lambda, \alpha, \cdot)$ enunciado en la tercera parte del siguiente lema.

Lema 4.5 *Para cualesquiera $\alpha \in (0,1)$ y $x \in S$, las afirmaciones (i)–(iv) siguientes son válidas:*
(i) $\lambda \mapsto \lambda V(\lambda, \alpha, x)$ es convexa sobre $\lambda \in (0, \infty)$.
(ii) $g(\cdot, \alpha, x)$ es continua y $g(\lambda, \alpha, x) \geq g(\alpha\lambda, \alpha, x)$ para cada $\lambda > 0$.
(iii) $|\lambda_1 V(\lambda_1, \alpha, x) - \lambda V(\lambda, \alpha, x)| \leq \|C\| |\lambda - \lambda_1| / (1 - \alpha)$ para cada $\lambda, \lambda_1 > 0$, y entonces

$$|g(\lambda, \alpha, x)| \leq \|C\|. \tag{4.6}$$

(iv) $|\lambda J(\lambda, x) - \lambda_1 J(\lambda_1, x)| \leq |\lambda - \lambda_1| \|C\|$, $\lambda, \lambda_1 > 0$.

Demostración.
(i) Para $\alpha \in (0,1)$ y $n = 1, 2, ...$, sea

$$W_\alpha := \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_t).$$

Aplicando la Proposición 2.11 *(ii)* a la variable aleatoria W_α, esta parte se sigue de inmediato.
(ii) Dado que una función convexa definida en un intervalo abierto $D \subset \mathbb{R}$ es continua en D, la parte (i) implica que $\lambda \mapsto \lambda V(\lambda, \alpha, x)$ es una función continua en $(0, \infty)$, y en consecuencia la continuidad de $V(\cdot, \alpha, x)$ es demostrada. Usando la definición de costo diferencial (4.1) se tiene la continuidad de $g(\cdot, \alpha, x)$.
Ahora, sea $\lambda > 0$ arbitrario y observe que los puntos extremos del intervalo $[\alpha^2\lambda, \alpha\lambda]$ son menores que los puntos extremos correspondientes de $[\alpha\lambda, \lambda]$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{g(\lambda, \alpha, x)}{1 - \alpha} &= \frac{\lambda V(\lambda, \alpha, x) - \alpha\lambda V(\alpha\lambda, \alpha, x)}{\lambda - \alpha\lambda} \\ &\geq \frac{\alpha\lambda V(\alpha\lambda, \alpha, x) - \alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda, \alpha, x)}{\alpha\lambda - \alpha^2\lambda} = \frac{g(\alpha\lambda, \alpha, x)}{1 - \alpha},\end{aligned}$$

donde las igualdades se deben a la Definición 4.1, y la desigualdad se debe al inciso (i). Dado que $\alpha \in (0,1)$, la relación anterior produce que $g(\lambda, \alpha, x) \geq g(\alpha\lambda, \alpha, x)$.
(iii) Sean $\lambda, \lambda_1 > 0$ arbitrarios, considere y observe que $|W_\alpha| \leq \|C\|/(1-\alpha)$, ya que el espacio de estados es finito y por tanto la función de costo asociado es acotada. De esta manera, se sigue la siguiente relación

$$\lambda W_\alpha = \lambda_1 W_\alpha + (\lambda - \lambda_1) W_\alpha \leq \lambda_1 W_\alpha + |\lambda - \lambda_1| \|C\|/(1-\alpha).$$

Así, (2.11) implica que

$$\begin{aligned} e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)} &= E_x[e^{\lambda W_\alpha}] \\ &\leq E_x[e^{\lambda_1 W_\alpha}] e^{|\lambda-\lambda_1|\|C\|/(1-\alpha)} \\ &= e^{\lambda_1 V(\lambda_1,\alpha,x) + |\lambda-\lambda_1|\|C\|/(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda V(\lambda, \alpha, x) - \lambda_1 V(\lambda_1, \alpha, x) \leq |\lambda - \lambda_1| \|C\|/(1-\alpha),$$

por lo tanto, intercambiando los roles de λ y λ_1 resulta que

$$|\lambda V(\lambda, \alpha, x) - \lambda_1 V(\lambda_1, \alpha, x)| \leq \|C\| |\lambda - \lambda_1|/(1-\alpha).$$

Finalmente, si $\lambda_1 = \alpha\lambda$ en esta última desigualdad se obtiene (4.6).
(iv) Para cada entero positivo n observe que

$$|\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)| \leq n\|C\|,$$

y entonces (2.7) implica que, para cada $\lambda, \lambda_1 > 0$,

$$\begin{aligned} e^{\lambda J_n(\lambda,x)} &= E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)}\right] \\ &= E_x\left[e^{\lambda_1 \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)} e^{(\lambda-\lambda_1)\sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)}\right] \\ &\leq E_x\left[e^{\lambda_1 \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)}\right] e^{n\|C\|\,|\lambda-\lambda_1|} \\ &= e^{\lambda_1 J(\lambda_1,x)} e^{n\|C\|\,|\lambda-\lambda_1|}, \end{aligned}$$

así que

$$\lambda \frac{J_n(\lambda,x)}{n} \leq \|C\|\,|\lambda - \lambda_1| + \lambda_1 \frac{J(\lambda_1,x)}{n}, \qquad (4.7)$$

tomando el límite superior cuando n tiende a ∞ en ambos lados de la desigualdad (4.7), se tiene que

$$\lambda J(\lambda, x) - \lambda_1 J(\lambda_1, x) \leq \|C\|\,|\lambda - \lambda_1|,$$

y la conclusión se obtiene intercambiando los roles de λ y λ_1. ■
Una vez probado el Lema anterior, podemos seguir con la demostración del Teorema 4.4.

Demostración del Teorema 4.4.
Sea $x \in S$ fijo y dado un estado arbitrario $y \in \mathcal{A}(x)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$P_x[X_m = y] > 0. \tag{4.8}$$

Ahora, sean $\lambda > 0$ y $\alpha \in (0,1)$ arbitrarios y observe que (2.11) implica
$$\begin{aligned}
e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)} &= E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_t)}\right] \\
&= E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{m-1} \alpha^t C(X_t)} e^{\lambda \sum_{t=m}^{\infty} \alpha^t C(X_t)}\right] \\
&\geq E_x\left[I[X_m = y] e^{\lambda \sum_{t=0}^{m-1} \alpha^t C(X_t)} e^{\lambda \sum_{t=m}^{\infty} \alpha^t C(X_t)}\right] \\
&\geq e^{-\lambda m\|C\|} E_x\left[I[X_m = y] e^{\lambda\alpha^m \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_{m+t})}\right], \qquad (4.9)
\end{aligned}$$
mientras que por la propiedad de Markov
$$\begin{aligned}
&E_x\left[I[X_m = y] e^{\lambda\alpha^m \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_{m+t})} \middle| X_m\right] \\
&= I[X_m = y] E_y\left[e^{\lambda\alpha^m \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_t)}\right], \\
&= I[X_m = y] e^{\lambda\alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y)},
\end{aligned}$$
ver (2.11) para la segunda igualdad. Por lo tanto,
$$\begin{aligned}
&E_x\left[I[X_m = y] e^{\lambda\alpha^m \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t C(X_{m+t})}\right] \\
&= E_x\left[I[X_m = y] e^{\lambda\alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y)}\right] \\
&= P_x\left[X_m = y\right] e^{\lambda\alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y)}.
\end{aligned}$$
Esta relación y (4.9) juntas implican que
$$e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)} \geq e^{-\lambda m\|C\|} P_x\left[X_m = y\right] e^{\lambda\alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y)}.$$
A continuación, observe que
$$\begin{aligned}
V(\lambda,\alpha,y) &= \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha^k V(\lambda\alpha^k,\alpha,y) - \alpha^{k+1} V(\lambda\alpha^{k+1},\alpha,y)] \\
&\quad + \alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k g(\lambda\alpha^k,\alpha,y) + \alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y) \\
&\leq m\|C\| + \alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a la Definición 4.1, y el Lema 4.5(iii) se usó en la última desigualdad. Como λ es positivo, combinando las dos relaciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} e^{\lambda h(\lambda,\alpha,x,y)} &= \frac{e^{\lambda V(\lambda,\alpha,x)}}{e^{\lambda V(\lambda,\alpha,y)}} \\ &\geq \frac{e^{-\lambda m\|C\|} P_x\left[X_m = y\right] e^{\lambda\alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y)}}{e^{\lambda m\|C\| + \lambda\alpha^m V(\lambda\alpha^m,\alpha,y)}} \\ &= e^{-2\lambda m\|C\|} P_x\left[X_m = y\right], \end{aligned}$$

así que

$$h(\lambda,\alpha,x,y) \geq -2m\|C\| + \log\left(P_x\left[X_m = y\right]\right)/\lambda.$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{\lambda\geq\varepsilon,\ \alpha\in(0,1)} h(\lambda,\alpha,x,y) \geq -2m\|C\| + \log\left(P_x\left[X_m = y\right]\right)/\varepsilon > -\infty,$$

así por la segunda desigualdad se obtiene (4.8). ■

Observación 4.6 *Sea R una clase de recurrencia de la ley de transición $[p_{x,y}]_{x,y\in S}$, entonces por el Teorema 2.4 se tiene que $\mathcal{A}(x) = R$ si $x \in R$. En este caso la inclusión $y \in \mathcal{A}(x)(= R)$ siempre se cumple para cada $x, y \in R$. Del Teorema 4.4 aplicado a (x,y) y (y,x) se sigue que*

$$\sup_{\lambda\geq\varepsilon,\alpha\in(0,1)} |h(\lambda,\alpha,x,y)| < \infty$$

cuando $x, y \in R$.

4.2.2. Cota superior al criterio promedio

A continuación, se establecerá un límite superior para el costo promedio λ-sensible.

Teorema 4.7 *Para cada $x \in S$, $\lambda > 0$ y $\alpha \in (0,1)$, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*
(i) $y \in \mathcal{A}(x) \implies \mathcal{A}(y) \subset \mathcal{A}(x)$;
(ii) $y \in \mathcal{A}(x) \implies g(\lambda,\alpha,y) \leq \tilde{g}(\lambda,\alpha,y) \leq \tilde{g}(\lambda,\alpha,x)$;
(iii) $J(\lambda,x) \leq \tilde{g}(\lambda,\alpha,x)$.

Demostración. (i) Suponga que $y \in \mathcal{A}(x)$, y sea $z \in \mathcal{A}(y)$ arbitrario. Por la Definición 2.6 existen enteros no negativos n y m tales que

$$P_x[X_n = y] > 0 \quad \text{y} \quad P_y[X_m = z] > 0.$$

Por lo tanto, una aplicación de la propiedad de Markov implica que

$$\begin{aligned} P_x[X_{n+m} = z] &\geq P_x[X_n = y, X_{n+m} = z] \\ &= P_x[X_n = y]P_x[X_{n+m} = z|X_n = y] \\ &= P_x[X_n = y]P_y[X_m = z] \\ &> 0, \end{aligned}$$

de modo que $z \in \mathcal{A}(x)$. Por lo tanto, ya que $z \in \mathcal{A}(y)$ y es arbitrario, se sigue que $\mathcal{A}(y) \subset \mathcal{A}(x)$.
(ii) La afirmación se sigue combinando la Definición 2.6, (4.3) y la parte (i).
(iii) Se demostrará, por inducción para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{n\lambda \tilde{g}(\lambda,\alpha,x)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,x)} \geq E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_n)}\right], \quad x \in S. \tag{4.10}$$

Para empezar, tenga en cuenta que (4.2) y (4.3) juntas implican

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\lambda,\alpha,x) + \alpha V(\alpha\lambda,\alpha,x) &\geq g(\lambda,\alpha,x) + \alpha V(\alpha\lambda,\alpha,x) \\ &= V(\lambda,\alpha,x), \end{aligned}$$

y mediante la ecuación de Poisson descontada (2.12) se sigue que

$$e^{\lambda \tilde{g}(\lambda,\alpha,x)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,x)} \geq e^{\lambda C(x)} \sum_{y\in S} p_{x\,y} e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,y)}, \quad x \in S,$$

una desigualdad que es equivalente a (4.10) con $n = 1$.
A continuación, suponga que (4.10) se cumple para un entero positivo $n \geq 1$, y el estado inicial $X_0 = x \in S$ es fijo. Usando la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} &E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{n} C(X_t)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_{n+1})}\,\middle|\, X_t,\ 0 \leq t \leq n\right] \\ &\quad= e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)} e^{\lambda C(X_n)} \sum_{y\in S} p_{X_n,y} e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,y)} \\ &\quad\leq e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)} e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_n)+\lambda\tilde{g}(\lambda,\alpha,X_n)}, \end{aligned}$$

donde se utilizó la relación anterior para establecer la desigualdad. Ahora, usando que $X_n \in \mathcal{A}(x)$ P_x-c. s., por (2.1), la parte (ii) implica que

$$\tilde{g}(\lambda,\alpha,X_n) \leq \tilde{g}(\lambda,\alpha,x) \quad P_x\text{-c. s.},$$

entonces

$$\begin{aligned} &E_x\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{n} C(X_t)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_{n+1})}\,\middle|\, X_t,\ 0 \leq t \leq n\right] \\ &\quad\leq e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)} e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_n)+\lambda\tilde{g}(\lambda,\alpha,x)}, \quad P_x\text{-c. s.}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n}C(X_t)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_{n+1})}\right]\\
&\le E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,X_n)}\right]e^{\lambda\tilde g(\lambda,\alpha,x)}\\
&\le e^{\lambda n\tilde g(\lambda,\alpha,x)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,x)}e^{\lambda\tilde g(\lambda,\alpha,x)}\\
&= e^{\lambda(n+1)\tilde g(\lambda,\alpha,x)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,x)},
\end{aligned}
$$

donde la segunda desigualdad se debe a la hipótesis de inducción. Esto muestra que (4.10) se cumple con $n+1$ en lugar de n, completando el argumento de inducción. Combinando (2.7) y (4.10) se sigue que, para cada $x\in S$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$
\begin{aligned}
&e^{n\lambda\tilde g(\lambda,\alpha,x)+\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,x)}\\
&\ge E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}\right]e^{-\alpha\lambda\|V(\alpha\lambda,\alpha,\cdot)\|}\\
&= e^{\lambda J_n(\lambda,x)-\alpha\lambda\|V(\alpha\lambda,\alpha,\cdot)\|},
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\tilde g(\lambda,\alpha,x)\ge \lim\ \sup_{n\to\infty}\left[\frac{J_n(\lambda,x)}{n}-\frac{\alpha\|V(\alpha\lambda,\alpha,\cdot)\|+\alpha V(\alpha\lambda,\alpha,x)}{n}\right],
$$

así $\tilde g(\lambda,\alpha,x)\ge J(\lambda,x)$, por (2.8). ■

Las siguientes propiedades (monotonicidad) del índice promedio serán útiles en la siguiente sección.

Lema 4.8 *Para cada $x\in S$ y $\lambda>0$, las afirmaciones (i) y (ii) siguientes son válidas:*
(i) Si $\emptyset\neq\mathcal{H}\subset S$, entonces $J(\lambda,x)\ge J_{\mathcal{H}}(\lambda,x),\ x\in\mathcal{H}$.
(ii) $y\in\mathcal{A}(x)\implies J(\lambda,y)\le J(\lambda,x)$.

Demostración. (i) Observando que

$$
e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}\ge e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[X_t\in\mathcal{H},\,0\le t<n],
$$

para cada entero $n\ge 1$, la conclusión se sigue de (2.7), (2.8) y (4.11).
(ii) Suponga que $y\in\mathcal{A}(x)$ y seleccione $m\in\mathbb{N}$ tal que $P_x[X_m=y]>0$. Observando que

$$
e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}\ge e^{-m\lambda\|C\|}e^{\lambda\sum_{t=m}^{n-1}C(X_t)}I[X_m=y],
$$

la propiedad de Markov implica que, para $n>m$,

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}\,\middle|\,X_r,\,0\le r\le m\right]\\
&\quad\ge e^{-m\lambda\|C\|}I[X_m=y]E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=m}^{n-1}C(X_t)}\,\middle|\,X_r,\,0\le r\le m\right]\\
&\quad\ge e^{-m\lambda\|C\|}I[X_m=y]E_y\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-m-1}C(X_t)}\right],
\end{aligned}
$$

así que

$$E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}\right]\geq e^{-m\lambda\|C\|}P_x[X_m=y]E_y\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-m-1}C(X_t)}\right],$$

mediante (2.7) y cálculos directos producen que, para enteros positivos n, m con $n > m$,

$$\frac{1}{n}J_n(\lambda,x) \geq \frac{-m\|C\|+\log(P_x[X_m=y])/\lambda}{n}+\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n-m}J_{n-m}(\lambda,y).$$

Tomando el límite superior cuando n tiende a ∞ en ambos lados de esta relación, la desigualdad $J(\lambda,x)\geq J(\lambda,y)$ se sigue por (2.8).
■

4.3. Sistema de ecuaciones locales de Poisson

En el Lema 2.12, se caracteriza al criterio promedio λ-sensible a través de una ecuación local de Poisson, siempre que la condición de comunicación (2.9) se cumpla en el modelo. Cuando la condición de comunicación falla, el criterio promedio λ-sensible, $J(\lambda,\cdot)$ no es contante en general, y es caracterizado a través de un sistema de ecuaciones (locales) de Poisson similar a (2.10) (ver [1] y [11]).
En esta sección presentamos en el Teorema 4.13, Lema 4.14 y el Lema 4.15 la propuesta desarrollada en [5] donde caracterizamos al criterio promedio λ-sensible en un sistema de ecuaciones locales de Poisson sin la restricción (2.9). Antes de iniciar con el desarrollo de esta sección, usaremos la siguiente definición para caracterizar al criterio promedio λ-sensible a través de subconjuntos del espacio de estados.

Definición 4.9 *Dado un conjunto no vacío $\mathcal{H}\subset S$, para cada $x\in\mathcal{H}$ el costo promedio incurrido λ-sensible mientras el sistema permanece dentro de $\mathcal{H}$ se define de la siguiente manera: Para cada $x\in\mathcal{H}$,*

$$J_{\mathcal{H}}(\lambda,x)=\lim\ sup_{n\to\infty}\frac{1}{n\lambda}\log\left(E_x\left[e^{\lambda\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[X_t\in\mathcal{H},\,0\leq t<n]\right]\right). \tag{4.11}$$

4.3.1. Una relación de equivalencia en el espacio de estados

Para lograr el objetivo de caracterizar el criterio promedio λ-sensible a través de un sistema de ecuaciones locales de Poisson, se

introduce una partición del espacio de estados utilizando el criterio descontado y luego el criterio promedio se analiza en cada conjunto de la partición.
A lo largo del capítulo consideramos $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ y $\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ sucesiones fijas que satisfacen

$$\lambda^* := \lim_{n\to\infty} \lambda_n \in (0,\infty) \quad \text{y} \quad \alpha_n \nearrow 1. \tag{4.12}$$

Adicionalmente, teniendo en cuenta que el espacio de estados es finito y vía el método de la diagonal de Cantor, se asume sin pérdida de generalidad, después de tomar una sucesión de $\{(\lambda_n, \alpha_n)\}$ (si es necesario), que los siguientes límites existen

$$g_0(x) := \lim_{n\to\infty} g(\lambda_n, \alpha_n, x), \tag{4.13}$$

$$g_1(x) := \lim_{n\to\infty} g(\alpha_n\lambda_n, \alpha_n, x), \quad x \in S, \tag{4.14}$$

y

$$h_i(x,w) := \lim_{n\to\infty} h(\alpha_n^i\lambda_n, \alpha_n, x, w) \in [-\infty, \infty], \tag{4.15}$$

con $x, w \in S, i = 0, 1, 2$.
Tenga en cuenta que el límite de los costos diferenciales $g_0(\cdot)$ y $g_1(\cdot)$ satisfacen

$$g_0(\cdot) \geq g_1(\cdot), \tag{4.16}$$

y

$$\|g_0(\cdot)\|, \|g_1(\cdot)\| \leq \|C\|, \tag{4.17}$$

por las partes (ii) y (iii) del Lema 4.5. Por otro lado, (4.3) y la primera convergencia en (4.14) implican que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(\lambda_n, \alpha_n, x) &= \lim_{n\to\infty} \max_{w\in\mathcal{A}(x)} g(\lambda_n, \alpha_n, w) \\ &= \max_{w\in\mathcal{A}(x)} g_0(w).\end{aligned}$$

Considere

$$\tilde{g}_0(x) := \max_{w\in\mathcal{A}(x)} g_0(w), \tag{4.18}$$

por la relación anterior y el Teorema 4.7(ii) se tiene que

$$\tilde{g}_0(x) \geq \tilde{g}_0(y) \geq g_0(y), \quad y \in \mathcal{A}(x), \quad x \in S. \tag{4.19}$$

A continuación, la *función límite del valor relativo* $h_0(\cdot,\cdot)$ en (4.15) se utilizará para definir una relación en el espacio de estados.

Definición 4.10 *La relación ‘ $\sim$ ‘ sobre el espacio S se define*

$$x \sim y \iff h_0(x,y) \in \mathbb{R}, \qquad x, y \in S.$$

Observando que $h_0(x,y) = h_0(x,w) + h_0(w,y)$ cuando $h_0(x,w)$ y $h_0(w,y)$ son finitos, no es difícil ver que ' $\sim$ ' es una relación de equivalencia.
Durante el resto del trabajo, consideraremos que $\mathcal{H}(x)$ representa la clase de equivalencia que contiene a x, i.e.,

$$\mathcal{H}(x) := \{y \in S \,|\, y \sim x\} = \{y \in S \,|\, h_0(x,y) \in \mathbb{R}\}, \quad x \in S. \tag{4.20}$$

Observación 4.11 *(i) Por el Lema 4.5 (iii),*

$$\begin{aligned} &|\lambda_n V(\lambda_n, \alpha_n, \cdot) - \alpha_n^i \lambda_n (V(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, \cdot)| \\ &\leq |\lambda_n - \alpha_n^i \lambda_n| \|C\| / (1 - \alpha_n) \leq i \lambda_n \|C\|, \end{aligned}$$

y entonces

$$|V(\lambda_n, \alpha_n, \cdot) - \alpha_n^i V(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, \cdot)| \leq i \|C\|.$$

Así, para cada $x, w \in S$ y $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &h(\lambda_n, \alpha_n, x, w) - \alpha_n^i h(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, x, w) \\ &= [V(\lambda_n, \alpha_n, x) - V(\lambda_n, \alpha_n, w)] \\ &- \alpha_n^i [V(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, x) - V(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, w)] \\ &= [V(\lambda_n, \alpha_n, x) - \alpha_n^i V(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, x)] \\ &- [V(\lambda_n, \alpha_n, w)] - \alpha_n^i V(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, w)], \end{aligned}$$

entonces

$$h(\lambda_n, \alpha_n, x, w) - \alpha_n^i h(\alpha_n^i \lambda_n, \alpha_n, x, w) \;\in [-2i\|C\|, 2i\|C\|], \tag{4.21}$$

usando que $\alpha_n \nearrow 1$ y (4.15), la ecuación (4.21) implican lo siguiente: para cada $i = 1, 2$,

$$h_0(x,w) \text{ es finito si y solo si } h_i(x,w) \text{es finito},$$

$$h_0(x,w) = \infty \text{ si y solo si } h_i(x,w) = \infty,$$

y

$$h_0(x,w) = -\infty \text{ si y solo si } h_i(x,w) = -\infty.$$

En particular, si en la Definición 4.10 la función h_0 es reemplazada por h_i, entonces la relación ' $\sim$ ' no se altera, y para cada $x, y \in S$ y $i = 0, 1, 2$,

$$y \in \mathcal{H}(x) \iff h_i(y,x) \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ son clases de equivalencia con respecto a "$\sim$", de (4.2) y (4.15) se sigue que

$$h_i(x,y) = h_i(x,\tilde{x}) + h_i(\tilde{x},\tilde{y}) + h_i(\tilde{y},y),$$

para cada $x, \tilde{x} \in \mathcal{H}$ *y* $y, \tilde{y} \in \mathcal{H}'$*, donde* $h_i(x, \tilde{x})$ *y* $h_i(\tilde{y}, y)$*, son números finitos, y así*

$$h_i(x, y) = \infty \iff h_i(\tilde{x}, \tilde{y}) = \infty.$$

Por lo tanto, $h_i(x, x') = \infty$ *para algún par* $(x, x') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ *si y solo si*

$$h_i(x, x') = \infty,$$

para cada par $(x, x') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}'$*.*

A continuación, se formula una relación de orden en el conjunto de clases de equivalencia asociadas con la relación '$\sim$'.

Definición 4.12 *Sean* $\mathcal{H}$ *y* $\mathcal{H}'$ *dos clases diferentes de equivalencia determinadas por la relación '*$\sim$*'. En este caso*

$$\mathcal{H} \succ \mathcal{H}' \iff h_0(x, x') = \infty \text{ para algún par } (x, x') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}'.$$

De la Observación 4.11, se deduce que $\mathcal{H} \succ \mathcal{H}'$ si y solo si $h_i(x, x') = \infty$ para cada par $(x, x') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ y algún $i \in \{0, 1, 2\}$.
No es difícil ver que '$\succ$' es un orden estricto en la familia $\mathcal{F}$ de clases de equivalencia asociadas con '$\sim$', es decir, si $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}'$, entonces $\mathcal{H} \succ \mathcal{H}'$ o $\mathcal{H}' \succ \mathcal{H}$. Durante el resto del trabajo, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_d$ denotarán los diferentes miembros de $\mathcal{F}$, así que

$$\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j, = \emptyset, \quad 1 \leq i \neq j \leq d, \quad \bigcup_{k=1}^{d} \mathcal{H}_k = S,$$

y ya que '$\succ$' es un orden total, sin pérdida de generalidad, se supone que las clases de equivalencia son tales que

$$\mathcal{H}_d \succ \mathcal{H}_{d-1} \succ \cdots \succ \mathcal{H}_1. \tag{4.22}$$

Además, se supone que los estados w_k son fijos y satisfacen

$$w_k \in \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, d. \tag{4.23}$$

El objetivo principal de este capítulo es establecer el siguiente resultado

Teorema 4.13 *Para cada* $x \in S$*,*

$$J(\lambda^*, x) = \tilde{g}_0(x);$$

ver (4.12)–(4.18).

La demostración de este teorema es bastante técnica y se ha dividido en dos partes, expresada en los Lemas 4.14 y 4.15.
Primeramente, dada una clase de equivalencia $\mathcal{H}_k$, una ecuación de Poisson similar a (2.10) se establecerá en esta clase, y se mostrará que las funciones de límite de costo diferencial $g_0(\cdot)$ y $g_1(\cdot)$ están relacionadas en el conjunto $\mathcal{H}_k$ mediante una matriz estocástica.

Lema 4.14 *Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$, las siguientes afirmaciones (i)-(iv) son válidas:*
(i) $x \in \mathcal{H}_k \implies \mathcal{A}(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{H}_i$.
(ii) Para $i, j = 0, 1, 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{y\in\mathcal{H}_s} p_{x,y} e^{\alpha_n^i \lambda_n [V(\alpha_n^j \lambda_n, \alpha_n, y) - V(\alpha_n^j \lambda_n, \alpha_n, w_k)]} = 0, \quad 1 \le s < k; \tag{4.24}$$

donde w_k se define en (4.23).
(iii) La siguiente ecuación de Poisson se cumple en la clase $\mathcal{H}_k$:

$$e^{\lambda^* g_0(x) + \lambda^* h_1(x, w_k)} = e^{\lambda^* C(x)} \sum_{y\in\mathcal{H}_k} p_{x,y} e^{\lambda^* h_1(y, w_k)}, \quad x \in \mathcal{H}_k. \tag{4.25}$$

(iv) Si $x \in \mathcal{H}_k$, entonces

$$e^{\lambda^* g_0(x)} = \sum_{y\in\mathcal{H}_k} \hat{p}_{x,y} e^{\lambda^* g_1(y)}, \tag{4.26}$$

donde la matriz estocástica $[\hat{p}_{x,y}]_{x,y\in\mathcal{H}_k}$ es dada por

$$\hat{p}_{x,y} := \frac{p_{x,y} e^{\lambda^* h_2(y, w_k)}}{\sum_{w\in\mathcal{H}_k} p_{x,w} e^{\lambda^* h_2(w, w_k)}}, \quad x, y \in \mathcal{H}_k. \tag{4.27}$$

Demostración. (i) Suponga que $x \in \mathcal{H}_k (= \mathcal{H}(x))$ y sea $y \in \mathcal{A}(x)$ arbitrario. En este contexto, el Teorema 4.4 y la ecuación (4.15) juntas dan como resultado

$$h_0(x, y) > -\infty,$$

de modo que

$$h_0(x, y) \in \mathbb{R} \;\text{ o }\; h_0(x, y) = \infty.$$

En el primer caso se sigue que $y \sim x$, y luego $y \in \mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_k$, debido a la Definición 4.10 y la ecuación (4.20). Mientras que en el segundo caso $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}(x) \succ \mathcal{H}(y)$ y luego $y \in \mathcal{H}(y) = \mathcal{H}_s$ para algún $s < k$, por Definición 4.12 y la ecuación (4.22). Por lo tanto, la pertenencia

$$y \in \bigcup_{s=1}^{k} \mathcal{H}_s$$

siempre se cumple, de modo que $\mathcal{A}(x) \subset \bigcup_{s=1}^{k} \mathcal{H}_s$, ya que $y \in \mathcal{A}(x)$ es arbitrario.
(ii) Sean $i, j = 0, 1, 2$. Combinando la Definición 4.12, la ecuación (4.22) y la Observación 4.11(ii), se sigue que si $y \in \mathcal{H}_s$ con $s < k$, entonces

$$h(\alpha_n^j \lambda_n, \alpha_n, y, w_k) = [V(\alpha_n^j \lambda_n, \alpha_n, y) - V(\alpha_n^j \lambda_n, \alpha_n, w_k)] \to -\infty,$$

cuando n tiende a ∞, y la conclusión se sigue a través de la ecuación (4.12).
(iii) Comenzando con la ecuación de Poisson (2.12), usando cálculos directos, (2.1) y la Definición 4.1 se tiene para cada $x \in S$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_n g(\lambda_n, \alpha_n, x) + \alpha_n \lambda_n V(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, x)} \\ & = e^{\lambda_n C(x)} \sum_{y \in \mathcal{A}(x)} p_{x\,y} e^{\alpha_n \lambda_n V(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, y)}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de esta igualdad por $e^{-\alpha_n \lambda_n V(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, w_k)}$, la parte (i) y (4.2) implican que

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_n g(\lambda_n, \alpha_n, x) + \alpha_n \lambda_n h(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, x, w_k)} \\ & = e^{\lambda_n C(x)} \sum_{s=1}^{k} \sum_{y \in \mathcal{H}_s} p_{x\,y} e^{\alpha_n \lambda_n h(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, y, w_k)}, \quad x \in \mathcal{H}_k. \end{aligned}$$

Luego, tomando el límite cuando n crece a ∞ en ambos lados de esta igualdad, por lo anterior y (4.12)–(4.15) implican que la igualdad (4.25) se cumple.
(iv) Sean $x \in \mathcal{H}_k$ y $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Usando la ecuación de Poisson (2.12), a través del inciso (i) y la ecuación (4.2)

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_n g(\lambda_n, \alpha_n, x)} \\ & = \frac{e^{\lambda_n V(\lambda_n, \alpha_n, x)}}{e^{\alpha_n \lambda_n V(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, x)}} \\ & = \frac{e^{\lambda_n C(x)} \sum_{r=1}^{k} \sum_{y \in \mathcal{H}_r} p_{x,y} e^{\alpha_n \lambda_n V(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, y)}}{e^{\alpha_n \lambda_n C(x)} \sum_{r=1}^{k} \sum_{y \in \mathcal{H}_r} p_{x,y} e^{\alpha_n^2 \lambda_n V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y)}} \\ & = \frac{e^{(1-\alpha_n)\lambda_n C(x)} \sum_{r=1}^{k} \sum_{y \in \mathcal{H}_r} p_{x,y} e^{\alpha_n^2 \lambda_n V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y)} e^{\alpha_n \lambda_n g(\alpha \lambda_n, \alpha_n, y)}}{\sum_{r=1}^{k} \sum_{y \in \mathcal{H}_r} p_{x,y} e^{\alpha_n^2 \lambda_n V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y)}}, \end{aligned}$$

donde se usó la Definición 4.1 para establecer la última igualdad. Por lo tanto,

$$e^{\lambda_n g(\lambda_n, \alpha_n, x)} = e^{(1-\alpha_n)\lambda_n C(x)} \sum_{r=1}^{k} \sum_{y \in \mathcal{H}_r} p_{x,y}^{[n]} e^{\alpha_n \lambda_n g(\alpha_n \lambda_n, \alpha_n, y)}, \tag{4.28}$$

donde

$$p_{x,y}^{[n]} := p_{x,y} e^{\alpha_n^2 \lambda_n V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y)} \Big/ \sum_{r=1}^{k} \sum_{w \in \mathcal{H}_r} p_{x,w} e^{\alpha_n^2 \lambda_n V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, w)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} p_{x,y}^{[n]} &= \frac{p_{x,y} e^{\alpha_n^2 \lambda_n [V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y) - V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, w_k)]}}{\sum_{r=1}^{k} \sum_{w \in \mathcal{H}_r} p_{x,w} e^{\alpha_n^2 \lambda_n [V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, w) - V(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, w_k)]}} \\ &= \frac{p_{x,y} e^{\alpha_n^2 \lambda_n h(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y, w_k)}}{\sum_{r=1}^{k} \sum_{w \in \mathcal{H}_r} p_{x,w} e^{\alpha_n^2 \lambda_n h(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, y, w_k)}}, \qquad y \in \bigcup_{r=1}^{k} \mathcal{H}_r. \end{aligned}$$

Combinando la parte (ii) con (4.12) y (4.15) se tiene para $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{k} \sum_{w \in \mathcal{H}_r} p_{x,w} e^{\alpha_n^2 \lambda_n h(\alpha_n^2 \lambda_n, \alpha_n, w, w_k)} \\ & \to \sum_{w \in \mathcal{H}_k} p_{x,w} e^{\lambda^* h_2(w, w_k)}; \\ p_{x,y}^{[n]} & \to \frac{p_{x,y} e^{\lambda^* h_2(y, w_k)}}{\sum_{w \in \mathcal{H}_k} p_{x,w} e^{\lambda^* h_2(w, w_k)}} = \hat{p}_{x,y}, \quad y \in \mathcal{H}_k; \\ p_{x,y}^{[n]} & \to 0, \ y \in \bigcup_{1 \le r < k} \mathcal{H}_r. \end{aligned}$$

Después de tomar el límite cuando n tiende a ∞ en ambos lados de (4.28), la relación implica que

$$e^{\lambda^* g_0(x)} = \sum_{y \in \mathcal{H}_k} \hat{p}_{x,y} e^{\lambda^* g_1(y)}.$$

■

A continuación, se da una condición suficiente para asegurar que $\{\tilde{g}_0(X_t)\}$ sea sucesión constante casi seguramente mientras el sistema permanece en la clase de equivalencia del estado inicial.

Lema 4.15 *Dado $k \in \{1, \ldots, d\}$, suponga que el estado x satisface*

$$x \in \mathcal{H}_k, \quad g_0(x) = \tilde{g}_0(x). \tag{4.29}$$

En este caso, las afirmaciones (i)–(iii) son válidas:
(i) $p_{x,y} > 0$ y $y \in \mathcal{H}_k \implies \tilde{g}_0(x) = g_0(y) = \tilde{g}_0(y)$.
(ii) Las igualdades $\tilde{g}_0(X_t) = g_0(X_t) = \tilde{g}_0(x)$ se cumplen P_x-c. s. mientras que el sistema permanece en $\mathcal{H}_k$. Más explícitamente, para cada, $n \in \mathbb{N}$,

$$P_x[X_t \in \mathcal{H}_k, \ 0 \le t \le n] = P_x[(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{G}_{k;n}], \tag{4.30}$$

donde

$$\mathcal{G}_{k;n} := \{(y_0, \ldots, y_n) \,|\, y_t \in \mathcal{H}_k,\ g_0(y_t) = \tilde{g}_0(y_t) = g_0(y_0),\ 0 \le t \le n\}. \tag{4.31}$$

(iii) Cuando n tiende a ∞,

$$\frac{1}{n\lambda^*} \log \left(E_x \left[e^{\lambda^* \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t)} I[X_t \in \mathcal{H}_k,\ 0 \le t \le n] \right] \right) \to \tilde{g}_0(x), \tag{4.32}$$

de modo que

$$J_{\mathcal{H}_k}(\lambda^*, x) = \tilde{g}_0(x);. \tag{4.33}$$

Demostración. Observe que la ecuación (4.27) implica que

$$\hat{p}_{w,y} > 0 \iff p_{w,y} > 0, \quad \text{para} \ \ w, y \in \mathcal{H}_k. \tag{4.34}$$

(i) Suponga que (4.29) es verdadera y por la relación anterior, la Definición 2.1 y (4.19) implican que

$$y \in \mathcal{H}_k \text{ and } \hat{p}_{x,y} > 0 \implies y \in \mathcal{A}(x) \implies g_0(y) \le \tilde{g}_0(y) \le \tilde{g}_0(x). \tag{4.35}$$

Combinando esta propiedad con (4.16) y la igualdad (4.26) se deduce que

$$e^{\lambda^* \tilde{g}_0(x)} \ge \sum_{y \in \mathcal{H}_k} \hat{p}_{x\,y} e^{\lambda^* g_0(y)} \ge \sum_{y \in \mathcal{H}_k} \hat{p}_{x\,y} e^{\lambda^* g_1(y)} = e^{\lambda^* g_0(x)},$$

así

$$e^{\lambda^* \tilde{g}_0(x)} \ge \sum_{y \in \mathcal{H}_k} \hat{p}_{x\,y} e^{\lambda^* g_0(y)} \ge e^{\lambda^* g_0(x)},$$

una desigualdad que a través de (4.35) y la condición $g_0(x) = \tilde{g}_0(x)$ en (4.29), implican que

$$y \in \mathcal{H}_k \text{ and } \hat{p}_{x,y} > 0 \implies g_0(y) = \tilde{g}_0(x) = \tilde{g}_0(y),$$

de modo que la conclusión se sigue combinando esta propiedad con (4.34).

(ii) Asuma que (4.29) es válida y usando la notación en (4.31), note que la conclusión en la parte (i) se puede escribir de manera equivalente como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } x \in \mathcal{H}_k \text{ and } g_0(x) = \tilde{g}_0(x) \text{ entonces} \\
&P_x[X_0, X_1 \in \mathcal{H}_k] \\
&= P_x[X_0, X_1 \in \mathcal{H}_k, g_0(X_1) = \tilde{g}_0(X_1) = \tilde{g}(X_0) = g_0(X_0)] \\
&= P_x[(X_0, X_1) \in \mathcal{G}_{k;1}].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Por lo tanto, (4.30) es válida para $n = 1$. Procediendo por inducción en (4.30) ocurre para algunos enteros positivos n y, para facilitar la presentación, establezca que

$$X_0^n = (X_0, X_1, \ldots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego, observe que las siguientes igualdades ocurren P_x-casi seguramente:

$$\begin{aligned}
&P_x[X_r \in \mathcal{H}_k,\, 0 \le r \le n+1 | X_r,\ 0 \le r \le n] \\
&\quad = I[X_r \in \mathcal{H}_k,\, 0 \le r \le n]\, P_{X_n}[X_{n+1} \in \mathcal{H}_k] \\
&\quad = I[X_0^n \in \mathcal{G}_{k;n}]\, P_{X_n}[X_{n+1} \in \mathcal{H}_k] \\
&\quad = I[X_0^n \in \mathcal{G}_{k;n}] I[X_n \in \mathcal{H}_k, g_0(X_n) = \tilde{g}_0(X_n)]\, P_{X_n}[X_{n+1} \in \mathcal{H}_k] \\
&\quad = I[X_0^n \in \mathcal{G}_{k;n}] P_{X_n}[X_{n+1} \in \mathcal{H}_k, g_0(X_{n+1}) = \tilde{g}_0(X_{n+1}) = g_0(X_n)]\,],
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la propiedad de Markov, la segunda se basa en la hipótesis de inducción, mientras que la tercera y la cuarta se deben a (4.31) y (4.36), respectivamente. Por lo tanto, una aplicación de la propiedad de Markov implica que

$$\begin{aligned}
&P_x[X_r \in \mathcal{H}_k,\, 0 \le r \le n+1 | X_r,\ 0 \le r \le n] \\
&\quad = P_x[X_0^n \in \mathcal{G}_{k;n}, X_{n+1} \in \mathcal{H}_k, g_0(X_{n+1}) \\
&\quad = \tilde{g}(X_{n+1}) = g(X_n) \,|\, X_r, 0 \le r \le n] \\
&\quad = P_x[(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) \in \mathcal{G}_{k;n+1} \,|\, X_r, 0 \le r \le n],
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debido a (4.31). Por consiguiente,

$$P_x[X_r \in \mathcal{H}_k,\, 0 \le r \le n{+}1] = P_x[(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) \in \mathcal{G}_{k;n+1}],$$

mostrando que (4.30) se cumple con $n+1$ en lugar de n, completando el argumento de inducción.
(iii) Suponga que el estado x satisface (4.29). Se demostrará por inducción, que la siguiente igualdad es válida para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&e^{n\lambda^* g_0(x) + \lambda^* h_1(x, w_k)} \\
&\quad = E_x\left[e^{\lambda^* \sum_{t=0}^{n-1} C(X_t) + \lambda^* h_1(X_n, w_k)} I[X_t \in \mathcal{H}_k,\, 0 \le t \le n]\right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Para empezar, tenga en cuenta que para $n = 1$ esta afirmación es equivalente a la ecuación (4.25) en el Lema 4.14(iii). A continuación, suponga que (4.37) es válida para algún entero positivo n, y observe que las siguientes igualdades se cumplen P_x-casi seguramente.

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n}C(X_t)+\lambda^* h_1(X_{n+1},w_k)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,\,0\le t\le n+1]\,|X_r,0\le r\le n\right]\\
&\quad= e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,\,0\le t\le n]e^{\lambda^* C(X_n)}\sum_{y\in\mathcal{H}_k}p_{X_n,y}e^{\lambda^* h_1(y,w_k)}\\
&\quad= e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,\,0\le t\le n]e^{\lambda^* g_0(X_n)+\lambda^* h_1(X_n,w_k)}\\
&\quad= e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[(X_0,X_1,\ldots,X_n)\in\mathcal{G}_{k:n}]e^{\lambda^* g_0(X_n)+\lambda^* h_1(X_n,w_k)}\\
&\quad= e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[(X_0,X_1,\ldots,X_n)\in\mathcal{G}_{k:n}]e^{\lambda^* g_0(x)+\lambda^* h_1(X_n,w_k)},
\end{aligned}
$$

donde se utilizó la propiedad de Markov en el paso inicial, la segunda igualdad se debe a (4.25), la tercera es una consecuencia de la parte anterior mientras que, usando $P_x[X_0=x]=1$, el último paso se debe al hecho de que $g_0(X_n)=g_0(x)$ P_x-casi seguramente si $(X_0,X_1,\ldots,X_n)\in\mathcal{G}_{k;n}$; ver (4.31). Combinando la relación anterior con (4.30), a través de la propiedad de Markov se sigue que

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n}C(X_t)+\lambda^* h_1(X_{n+1},w_k)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,\,0\le t\le n+1]\,|X_r,0\le r\le n\right]\\
&= e^{\lambda^* g_0(x)}\times\\
&\qquad E_x\left[e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)+\lambda^* h_1(X_n,w_k)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,0\le t\le n]\,|X_r,0\le r\le n\right],
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n}C(X_t)+\lambda^* h_1(X_{n+1},w_k)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,\,0\le t\le n+1]\right]\\
&\qquad= e^{\lambda^* g_0(x)}E_x\left[e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)+\lambda^* h_1(X_n,w_k)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,0\le t\le n]\right]\\
&\qquad= e^{(n+1)\lambda^* g_0(x)+\lambda^* h_1(x,w_k)},
\end{aligned}
$$

donde la segunda igualdad se debe a la hipótesis de inducción; esto muestra que (4.37) es válida con $n+1$ en lugar n, completando el argumento de inducción. Para concluir, observe que $\|h_1(\cdot,w_k)\|_{\mathcal{H}_k}:=\max_{x\in\mathcal{H}_k}|h_1(x,w_k)|$ es finito, y que (4.37) implica

$$
\begin{aligned}
&n\lambda^* g_0(x)-2\lambda^*\|h_1(\cdot,w_k)\|_{\mathcal{H}_k}\\
&\qquad\le\log\left(E_x\left[e^{\lambda^*\sum_{t=0}^{n-1}C(X_t)}I[X_t\in\mathcal{H}_k,\,0\le t\le n]\right]\right)\\
&\qquad\le n\lambda^* g_0(x)+2\lambda^*\|h_1(\cdot,w_k)\|_{\mathcal{H}_k},
\end{aligned}
$$

dado que $\tilde{g}_0(x)=g_0(x)$, esta relación nos conduce inmediatamente a (4.32), y luego (4.33) se sigue a través de (4.11). ■

A continuación, presentamos la demostración del Teorema 4.13.

Demostración del Teorema 4.13. Sea $w \in S$ arbitrario pero fijo, y observe que $J(\cdot, w)$ es continua sobre $(0, \infty)$, por el Lema 4.5(iv). Observe que $J(\lambda_n, w) \leq \tilde{g}(\lambda_n, \alpha_n, w)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 4.7(iii), y tomando el límite cuando n tiende a ∞ en ambos lados de esta desigualdad, a través de (4.12) and (4.18) se sigue que

$$J(\lambda^*, w) \leq \tilde{g}_0(w). \tag{4.38}$$

Luego, sea un estado x tal que

$$x \in \mathcal{A}(w) \quad \text{y} \quad g_0(x) = \tilde{g}_0(w); \tag{4.39}$$

ver (4.18). La inclusión $x \in \mathcal{A}(w)$ implica que

$$\tilde{g}_0(w) \geq \tilde{g}_0(x) \geq g_0(x),$$

por (4.19), y luego la igualdad de la relación anterior producen que

$$\tilde{g}_0(w) = g_0(x) = \tilde{g}_0(x). \tag{4.40}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{g}_0(w) = \tilde{g}_0(x) = J_{\mathcal{H}(x)}(\lambda^*, x) \leq J(\lambda^*, x) \leq J(\lambda^*, w),$$

donde la segunda igualdad se debe al Lema 4.15(iii), y se utilizó el Lema 4.8 para establecer las desigualdades. Combinando la relación anterior con (4.38) se sigue que $J(\lambda^*, w) = \tilde{g}_0(w)$, y entonces $J(\lambda^*, \cdot) = \tilde{g}_0(\cdot)$, ya que $w \in S$ es arbitrario. ■

Observación 4.16 *Sea R una clase de recurrencia de la matriz $[p_{x,y}]_{x,y \in S}$. Se mostrará que*

$$\lim_{n \to \infty} [\tilde{g}(\lambda_n, \alpha_n, x) - g(\lambda_n, \alpha_n, x)] = 0,$$

para cada $x \in R$, es decir,

$$\tilde{g}_0(y) = g_0(y), \quad y \in R,$$

así que $J(\lambda^*, y) = g_0(y)$ para cada $y \in R$, por el Teorema 4.13. Para lograr este objetivo, tenga en cuenta que la Observación 4.6, (4.15) y la Definición 4.10 implican que $x \sim y$ para cada $x, y \in R$, de modo que R está contenido en una sola clase de equivalencia de la relación '$\sim$', digamos $\mathcal{H}_k$, así que

$$\mathcal{A}(x) = R \subset \mathcal{H}_k, \quad x \in R. \tag{4.41}$$

Luego, dado $w \in R$, y seleccionando a x como en (4.39), se tiene que $x \in \mathcal{A}(w) = R \subset \mathcal{H}_k$ y $\tilde{g}(x) = g(x)$, por (4.40), y luego el

Lema 4.15(ii) se puede aplicar. Dado que $P_x[X_t \in R] = 1$ *para cada* $t \in \mathbb{N}$*, a través de las relaciones (4.30) y (4.31) se sigue que*

$$P_x[\tilde{g}_0(X_n) = g_0(X_n) = g(x)] = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, sea $y \in R$ *arbitrario, y observe que la igualdad en (4.41) implica que* $P_x[X_n = y] > 0$ *para algún entero no negativo* n*, por la Definición 2.1, un hecho que junto con la relación anterior da como resultado* $\tilde{g}_0(y) = g_0(y)$*.*

4.4. Demostración del Teorema 4.2 y el Corolario 4.3

En esta sección usando los resultados auxiliares presentados en la Sección 4.2 y 4.3 se presenta la demostración formal del Teorema 4.2 y el Corolario 4.3.

Demostración del Teorema 4.2.

Sea $K \subset (0, \infty)$ un conjunto compacto y no vacío. Considere el estado $x \in S$ arbitrario pero fijo. Ahora, se define

$$\Delta_m := \sup_{\alpha \in (1-1/m,1),\, \lambda \in K} |\tilde{g}(\lambda, \alpha, x) - J(\lambda, x)|, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

y observe que (4.4) es equivalente a

$$\lim_{m \to \infty} \Delta_m = 0. \tag{4.42}$$

Para lograr este objetivo, para cada $m \in \mathbb{N}$ seleccione

$$\lambda_m \in K \quad \text{y} \quad \alpha_m \in (1 - 1/m, 1), \tag{4.43}$$

las cuales satisfacen

$$|\tilde{g}(\lambda_m, \alpha_m, x) - J(\lambda_m, x)| \geq \Delta_m/2. \tag{4.44}$$

Como K es compacto, existe una subsucesión $\{(\lambda_{m_n}, \alpha_{m_n})\}$ de $\{(\lambda_m, \alpha_m)\}$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{m_n} = \lambda^* \in K, \quad \text{and} \quad \alpha_{m_n} \nearrow 1. \tag{4.45}$$

Además, sin pérdida de generalidad se puede suponer que las convergencias (4.14) y (4.15) se cumplen con $(\lambda_{m_n}, \alpha_{m_n})$ en lugar de (λ_n, α_n). Por lo tanto, el Teorema 4.13 produce que

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{g}(\lambda_{m_n}, \alpha_{m_n}, x) = \tilde{g}_0(x) = J(\lambda^*, x). \tag{4.46}$$

Por otro lado, usando la continuidad de $J(\cdot, x)$ sobre $(0, \infty)$ (ver Lema 4.5(iv)), de (4.45) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} J(\lambda_{m_n}, x) = J(\lambda^*, x),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} |\tilde{g}(\lambda_{m_n}, \alpha_{m_n}, x) - J(\lambda_{m_n}, x)| = 0,$$

y así $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_{m_n} = 0$, por (4.44). Como $\{\Delta_m\}$ es una sucesión decreciente, se concluye que (4.42) es válida. ■

Demostración del Corolario 4.3
Supongamos que x es un estado recurrente, de modo que

$$J(\lambda^*, x) = g_0(x),$$

por la Observación 4.16. En este caso, reemplazando $\tilde{g}(\lambda_n, \alpha_n, x)$ por $g(\lambda_n, \alpha_n, x)$ en la demostración anterior, se sigue que

$$\sup_{\lambda\in K} |g(\lambda, \alpha, x) - J(\lambda, x)| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde K es un subconjunto compacto arbitrario de $(0, \infty)$. ■

En este capítulo se demostró el principal resultado de este trabajo de tesis (Teorema 4.3). Otra aportación en este trabajo de tesis se tiene en el siguiente capítulo; mediante un ejemplo mostramos que la normalización empleada en el Teorema 4.3 con el mayor costo diferencial funciona para estados transitorios pero la normalización con el costo diferencial falla (ver el Teorema 3.3) para este estado transitorio.

Capítulo 5

Ejemplo

En el capítulo 3 se da solución al problema de aproximación al criterio promedio λ-sensible a través de las funciones descontadas λ-sensibles, donde la condición de comunicación (2.9) fue necesaria para demostrar la propuesta de aproximación presentada en el Teorema 3.3, esta condición no fue necesaria para demostrar el Teorema 4.2 en el capítulo 4.
En este capítulo mostramos un ejemplo el cual ilustra que la propuesta de aproximación del Teorema 3.3 en el capítulo 3, no es válida cuando la cadena de Markov de costos asociados tiene un estado transitorio, es decir, la condición de comunicación (2.9) falla y con la normalización del Teorema 4.2 presentada en el capítulo 4 sí funciona para dicho estado transitorio.

Ejemplo 5.1 *Consideremos*

$$S := \{0, 1, 2, 3\}, \quad C(x) = x, \quad x = 0, 1, 2, \quad C(3) = 0, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &p_{3,3} = 1, \quad p_{2,2} = e^{-4} = 1 - p_{2,3}, \\ &p_{1,1} = e^{-1} = 1 - p_{1,3}, \quad p_{0,1} = p_{0,2} = 1/2. \end{aligned}$$

Ahora, establecemos el siguiente resultado.

Proposición 5.2 *En el Ejemplo 5.1, consideremos $\lambda_0 = 4$ entonces las siguientes afirmaciones (i)–(iv) son válidas:*

(i) $e^{\lambda g(\lambda,\alpha,0)} = \dfrac{e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,1)} + e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,2)}}{e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,1)} + e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,2)}},$ *para cada $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$.*
(ii) $\lim_{\alpha\nearrow 1}[V(\lambda_0, \alpha, 1) - V(\lambda_0, \alpha, 2)] = \infty$.
(iii) $\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 0) = 3/4$.
(iv) $\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 1) = 3/4$, $\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 2) = 1$.
(v) $\lim_{\alpha\nearrow 1} \sup_{w\in\mathcal{A}(0)} g(\lambda_0, \alpha, w) = J(\lambda_0, 0) > \lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0, \alpha, 0)$.

La demostración de este resultado se basa en las propiedades de los costos diferenciales en los estados 1 y 2, que son estudiados en los Lemas 5.3 y 5.4, respectivamente.

Lema 5.3 *En el contexto del Ejemplo 5.1, las propiedades (i)–(iv) siguientes son válidas::*
(i) Para cada $\lambda > 0$ y $\alpha \in (0,1)$,

$$g(\lambda, \alpha, 1) = 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \log\left(1 + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha + \cdots + \alpha^n) - n}}\right). \quad (5.2)$$

(ii) Para cada $\lambda > 0$,

$$g(\lambda, \alpha, 1) \searrow L_1(\lambda) := \frac{(\lambda - 1)^+}{\lambda}, \quad \text{cuando } \alpha \nearrow 1. \quad (5.3)$$

(iii) Si $\{(\alpha_n, \lambda_n)\} \subset (0,1) \times (0, \infty)$ es tal que

$$\alpha_n \nearrow 1 \text{ y } \lambda_n \to \lambda^* \text{ cuando } n \to \infty, \quad (5.4)$$

entonces $\lim_{n\to\infty} g(\lambda_n, \alpha_n, 1) = L_1(\lambda^*)$.
(iv) Para cada $\lambda_0 > 0$

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} (1-\alpha)\lambda_0 V(\lambda_0, \alpha, 1) = \int_0^{\lambda_0} \frac{(\lambda-1)^+}{\lambda} d\lambda.$$

Demostración. (i) Sean λ y $\alpha \in (0,1)$ arbitrarios. Observe ahora que

$$\begin{aligned} e^{\lambda V(\lambda,\alpha,1)} &= E_1\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{\infty} C(X_t)\alpha^t}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_1\left[e^{\lambda \sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t} I[X_{n-1} = 1, X_n = 3]\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(1 + \cdots + \alpha^{n-1})} e^{-(n-1)}(1 - e^{-1}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

y entonces

$$\begin{aligned} e^{\lambda V(\lambda,\alpha,1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda(1+\cdots+\alpha^n)} e^{-n}(1-e^{-1}) \\ &= (1-e^{-1})e^{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^n)} e^{-n}\right). \end{aligned}$$

Reemplazando λ por $\alpha\lambda$ en (2.11) se sigue que

$$\begin{aligned}
e^{\lambda\alpha V(\lambda\alpha,\alpha,1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha\lambda(1+\cdots+\alpha^{n-1})}e^{-(n-1)}(1-e^{-1})\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^{n})}e^{-(n-1)}(1-e^{-1})\\
&= e(1-e^{-1})\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^{n})}e^{-n}.
\end{aligned}$$

Estas dos últimas relaciones juntas producen que

$$e^{\lambda g(\lambda,\alpha,1)} = e^{\lambda-1}\left(1+\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^{n})}e^{-n}}\right),$$

igualdad que es equivalente a la conclusión deseada.
(ii) Sea $\lambda > 0$ arbitrario y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^{n})-n} &\nearrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{n(\lambda-1)}\\
&= \begin{cases} e^{\lambda-1}/(1-e^{\lambda-1}), & 0<\lambda<1,\\ \infty, & \lambda\geq 1,\end{cases}
\end{aligned}$$

cuando $\alpha \nearrow 1$, de modo que
(a) Si $0 < \lambda < 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^{n})}e^{-n}}\right) &\searrow \log\left(1+\frac{1-e^{\lambda-1}}{e^{\lambda-1}}\right)\\
&= -(\lambda-1),
\end{aligned}$$

y
(b) $\log\left(1+\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^{n})}e^{-n}}\right) \searrow \log(1) = 0$ donde $\lambda \geq 1$.
Estas convergencias y la parte (i) juntas implican que $g(\lambda,\alpha,1) \searrow L_1(\lambda)$ cuando $\alpha \nearrow 1$.
(iii) Observe que $K := \{x \in \mathbb{R}\,|\, x = \lambda^* \text{ o } x = \lambda_n \text{ para algún } n\}$ es un subconjunto compacto de $(0,\infty)$, y que las funciones $L_1(\cdot)$ y $g(\cdot,\alpha,1)$ son continuas sobre $(0,\infty)$. A través del teorema de Dini (ver pagina 180 en [3]), la monotonía en la convergencia (5.3) implica que

$$\sup_{\lambda\in K} |g(\lambda,\alpha_n,x) - L_1(\lambda)| \to 0 \text{ cuando } n\to\infty. \tag{5.6}$$

Para concluir, observe que $|g(\lambda_n,\alpha_n,1) - L_1(\lambda^*)| \leq |g(\lambda_n,\alpha_n,1) - L_1(\lambda_n)| + |L_1(\lambda_n) - L_1(\lambda^*)|$, y así

$$|g(\lambda_n,\alpha_n,1)-L_1(\lambda^*)| \leq \sup_{\lambda\in K}|g(\lambda,\alpha_n,1)-L_1(\lambda)|+|L_1(\lambda_n)-L_1(\lambda^*)|;$$

tomando el límite cuando n tiende a ∞, la convergencia

$$\lim_{n\to\infty} g(\lambda_n, \alpha_n, 1) = L_1(\lambda^*),$$

sigue usando (5.6) y la continuidad de $L_1(\cdot)$.
(iv) Sea $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ una sucesión arbitraria tal que

$$\alpha_n \nearrow 1. \tag{5.7}$$

Dado $\lambda_0 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, observe que el cálculo directo usando la Definición 4.1 implica que, para cada entero positivo N,

$$V(\lambda_0, \alpha_n, x) - \alpha_n^N V(\alpha_n^N \lambda_0, \alpha_n, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_n^t g(\alpha_n^t \lambda_0, \alpha_n, x).$$

Como $V(\alpha_n^N \lambda_0, \alpha_n, x) \leq \|C\|(1-\alpha_n)$, por el Lema 2.14, tomando el límite cuando N tiende ∞ se sigue que

$$V(\lambda_0, \alpha_n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^t g(\alpha_n^t \lambda_0, \alpha_n, x),$$

entonces

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)\lambda_0 V(\lambda_0, \alpha_n, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0(1-\alpha_n)\alpha_n^t g(\alpha_n^t \lambda_0, \alpha_n, x) \\ &= \int_0^{\lambda_0} G_n(\lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $G_n : (0, \lambda_0] \to \mathbb{R}$ se define por

$$G_n(\lambda) = g(\alpha_n^{t(\lambda,n)} \lambda_0, \alpha_n, x), \quad \lambda \in (0, \lambda_0], \tag{5.9}$$

y $t(\lambda, n) \in \mathbb{N}$ esta determinado por

$$\lambda \in (\alpha_n^{t(\lambda,n)+1} \lambda_0,\ \alpha_n^{t(\lambda,n)} \lambda_0].$$

Observe que $|\alpha_n^{t(\lambda,n)} \lambda_0 - \lambda| \leq |\alpha_n^{t(\lambda,n)} \lambda_0 - \alpha_n^{t(\lambda,n)+1} \lambda_0| \leq (1-\alpha_n)\lambda_0$, y entonces $\alpha_n^{t(\lambda,n)} \lambda_0 \to \lambda$ para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$, por (5.7). Por lo tanto, una aplicación de la parte (iii) implica que $|G_n(\lambda) - L_1(\lambda)| = |g(\alpha_n^{t(\lambda,n)} \lambda_0, \alpha_n, x) - L_1(\lambda)| \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo cual muestra que $G_n(\cdot)$ converge puntualmente a $L_1(\cdot)$. Dado que $|G_n(\cdot)| \leq \|C\|$, (4.6), tomando el límite cuando n tiende a ∞ en (5.8), el teorema de convergencia acotada implica que

$$\lim_{n\to\infty} (1-\alpha_n)\lambda_0 V(\lambda_0, \alpha_n, x) = \int_0^{\lambda_0} L_1(\lambda)\, d\lambda,$$

y la conclusión se sigue ya que la sucesión arbitraria $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ satisface (5.7). ■

Paralelamente a los argumentos utilizados en la demostración anterior, se puede establecer el siguiente lema.

Lema 5.4 *Para cada $\lambda > 0$, las afirmaciones (i)–(iv) siguientes son válidas.*
(i) Para cada $\alpha \in (0,1)$,

$$g(\lambda, \alpha, 2) = 2 - \frac{4}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \log\left(1 + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda(\alpha+\cdots+\alpha^n)} e^{-4n}}\right).$$

(ii) Cuando $\alpha \nearrow 1$

$$g(\lambda, \alpha, 2) \searrow L_2(\lambda) := \frac{(2\lambda - 4)^+}{\lambda}.$$

(iii) Si $\{(\alpha_n, \lambda_n)\} \subset (0,1) \times (0,\infty)$ es tal que

$$\alpha_n \nearrow 1 \text{ y } \lambda_n \to \lambda^* \text{ cuando } n \to \infty, \tag{5.10}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} g(\lambda_n, \alpha_n, 2) = L_2(\lambda^*)$.
(iv) Para cada $\lambda_0 > 0$, $\lim_{\alpha\nearrow 1} (1-\alpha)\lambda_0 V(\lambda_0, \alpha, 1) = \int_0^{\lambda_0} \frac{(2\lambda - 4)^+}{\lambda} d\lambda.$

Ahora, la Proposición 5.2 se puede establecer de la siguiente manera.

Demostración de la Proposición 5.2

(i) Para $\lambda > 0$ y $\alpha \in (0,1)$, la ecuación de Poisson (2.12) aplicada al ejemplo 5.1 implica que

$$e^{\lambda V(\lambda,\alpha,0)} = \frac{1}{2} e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,1)} + \frac{1}{2} e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,2)},$$

y entonces, reemplazando λ por $\alpha\lambda$,

$$e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,0)} = \frac{1}{2} e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,1)} + \frac{1}{2} e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,2)}.$$

Ya que $e^{\lambda g(\lambda,\alpha,0)} = e^{\lambda V(\lambda,\alpha,0) - \alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,0)} = e^{\lambda V(\lambda,\alpha,0)}/e^{\alpha\lambda V(\alpha\lambda,\alpha,0)}$, la conclusión se cumple por las dos relaciones anteriores.
(ii) Como $\lambda_0 = 4$, la cuarta parte de la Proposición 5.3 y 5.4 im-

plican que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\nearrow 1}(1-\alpha)\lambda_0[V(\lambda_0,\alpha,1)-V(\lambda_0,\alpha,2)]\\
&=\int_0^{\lambda_0}\frac{(\lambda-1)^+}{\lambda}\,d\lambda-\int_0^{\lambda_0}\frac{(2\lambda-4)^+}{\lambda}\,d\lambda\\
&=(3-2\log(2))-(4-4\log(2))\\
&=2\log(2)-1>0,
\end{aligned}$$

y así se demuestra la conclusión.
(iii) Recordando la Observación 4.11, la parte (ii) implica que

$$\lim_{\alpha\nearrow 1}[V(\alpha^i\lambda_0,\alpha,1)-V(\alpha^i\lambda_0,\alpha,2)]=\infty,\quad i=1,2.$$

Ahora, observe que la parte (i) conduce a

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_0 g(\lambda_0,\alpha,0)}&=\frac{e^{\alpha\lambda_0V(\alpha\lambda_0,\alpha,1)}\left(1+e^{\alpha\lambda_0[V(\alpha\lambda_0,\alpha,2)-V(\alpha\lambda_0,\alpha,1)]}\right)}{e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,1)}\left(1+e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,2)-\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,1)}\right)}\\
&=e^{\alpha\lambda_0 g(\alpha\lambda_0,\alpha,1)}\frac{1+e^{\alpha\lambda_0[V(\alpha\lambda_0,\alpha,2)-V(\alpha\lambda_0,\alpha,1)]}}{1+e^{\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,2)-\alpha^2\lambda V(\alpha^2\lambda,\alpha,1)}}\\
&\to e^{\lambda_0 L_1(\lambda_0)}\text{ cuando }\alpha\nearrow 1,
\end{aligned}$$

donde la relación anterior y la parte (iii) del Lema 5.3 se utilizaron para establecer la convergencia. Por tanto, dado que $\lambda_0=4$, (5.3) implica que $\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,0)=L_1(\lambda_0)=3/4$.
(iv) Dado que el estado 3 es absorbente y $C(3)=0$, se deduce que las igualdades $V(\lambda,\alpha,3)=0$ y $g(\lambda,\alpha,3)=0$ siempre se satisfacen. Combinando este hecho con la parte (ii), (5.3) y (5.4) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,3)=0,\\
&\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,0)=3/4,\\
&\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,1)=L_1(\lambda_0)=(4-1)^+/4=3/4,\\
&\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,2)=L_2(\lambda_0)=(2(4)-4)^+/4=1.
\end{aligned}$$

Usando $\mathcal{A}(0)=\{0,1,2,3\}=S$, se sigue que

$$\begin{aligned}
J(\lambda_0,0)&=\lim_{\alpha\nearrow 1}\tilde{g}(\lambda_0,\alpha,0)\\
&=\max_{x\in S}\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,x)=1>3/4=\lim_{\alpha\nearrow 1} g(\lambda_0,\alpha,0),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad proviene del Teorema 4.2. ■

Observación 5.5 *Observe que la desigualdad en el inciso* (v) *de la Proposición 5.2 muestra que el Teorema 3.3 falla en el estado transitorio* $x = 0$*, pero la aproximación del mayor costo diferencial en el Teorema 4.2 funciona para este estado transitorio.*

Capítulo 6

Conclusiones y problemas futuros

En la tesis se trató con las cadenas de Markov con costos asociados. En ella se trabajó el problema de aproximar al criterio promedio λ-sensible. La aproximación fue a través de las funciones de valor descontado λ-sensible, usando una normalización de ellas. En este capítulo hablaremos de las conclusiones obtenidas en el trabajo y algunos problemas futuros.

6.1. Conclusiones

La teoría de cadenas de Markov con costos asociados es presentada en el capítulo 2, dando sólo resultados necesarios para el desarrollo subsiguiente de la tesis. También se proporcionan las referencias para justificar los resultados principales de esta teoría. Además, usando la notación presentada en este capítulo, presentamos el problema de aproximación al criterio promedio a través de las funciones descontadas sensibles al riesgo que se trabaja en la tesis; además se presenta una sección donde se proveen los antecedentes referentes al problema.
En el capítulo 3 se presenta una solución al problema de aproximación dada en el Teorema 3.3 suponiendo la condición de comunicación (2.9), este capítulo esta basado en el artículo [9]. En el capítulo 4 se presentó la propuesta de aproximación usando dos definiciones importantes; la función de valor relativo y el mayor costo diferencial establecidos en la Definición 4.1. Luego, usando una técnica conocida como normalización se aproxima al criterio promedio a través del mayor costo diferencial cuando el factor de descuento crece a 1. Este es el principal resultado del trabajo de

tesis y se establece en el Teorema 4.2 sin la restricción de comunicación (2.9). Como consecuencia se tiene el Corolario 4.3, el cual es presentado en [9]. Con esto, mostramos que este trabajo de tesis extiende el resultado principal dado en [9], ya que consideran la restricción (2.9). En el Lema 4.5 (*ii*) y el Teorema 4.4 se establecen límites para el valor relativo y el costo diferencial. Además, en el Teorema 4.7, se prueba que el costo promedio es acotado superiormente por el mayor costo diferencial. Finalmente, a través de una relación de equivalencia definida por medio de la función de valor relativo se logra caracterizar al criterio promedio λ-sensible por medio de un sistema de ecuaciones locales de Poisson (ver Lema 4.14)) y se demuestra que es constante cuando el sistema permanezca en una clase de equivalencia (ver el Teorema 4.13 y el Lema 4.15). En el capítulo 5, mediante un ejemplo mostramos que si la condición de comunicación (2.9) falla entonces la normalización con los costos diferenciales al criterio promedio λ-sensible presentada en el Teorema 3.3 no es válida, pero sí se puede aproximar el criterio promedio λ-sensible, con la normalización del mayor costo diferencial presentada en el resultado principal de este trabajo; el Teorema 4.2.

6.2. Problemas futuros

Los problemas que se consideran como consecuencia del trabajo, y se espera continuar su análisis, son los siguientes.

Considere un modelo de Markov con costos asociados.

a) Si el espacio de estados es numerable. ¿La convergencia en (4.4) es válida?. Podemos separar este problema en dos casos:

    1) La ley de transición es comunicante (2.9).

    2) Sin la restricción de comunicación.

b) Extender el problema del inciso a) a espacio de estados de Borel y sin condiciones de comunicación en la ley de transición.

c) Para procesos de decisión de Markov (ver [17]), se puede buscar una aproximación parecida a (4.4), pero se tendría que separar en los siguientes casos:

    a) S finito.

    b) S numerable.

    c) S espacio de Borel.

donde se puede separar al caso comunicante parecido a (2.9) y sin esta restricción. Además, posiblemente sea necesario agregar consideraciones en el espacio de acciones.

Notación

$S:$ espacio de estados.

$\lambda:$ coeficiente de sensibilidad al riesgo.

$\alpha:$ factor de descuento.

$X_t:$ estado del sistema en el tiempo t.

$C(x):$ costo asociado al estado x.

$T_z:$ el primer tiempo de retorno al estado z.

$P[X_{t+1} = y|X_t = x]:$ ley de transición del sistema.

$\mathcal{A}(x):$ conjunto de todos los estados que son accesibles desde x.

$U_\lambda:$ función de utilidad.

$\mathcal{E}[\lambda, W]:$ certeza equivalente del costo aleatorio W con respecto a U_λ.

$J(\lambda, x):$ criterio promedio λ-sensible.

$V(\lambda, \alpha, x):$ criterio descontado λ-sensible.

$g(\lambda, \alpha, x):$ costo diferencial.

$h(\lambda, \alpha, x, y):$ valor relativo.

$\tilde{g}(\lambda, \alpha, x):$ mayor costo diferencial.

$P_x c.s:$ probabilidad casi segura.

$\|f(x)\| = sup\{f(x) : x \in X\}$.

Bibliografía

[1] A. Alanís-Durán and R. Cavazos-Cadena, An optimality system for finite average Markov decision chains under risk-aversion, Kybernetika 48 (2012) 83–104.

[2] A. Arapostathis, V. S. Borkar, E. Fernández-Gaucherand, M. K. Ghosh, S. I. Marcus, Discrete-time controlled Markov processes with average cost criterion: A survey, SIAM J. Control Optim. 31 (2) (1993) 282–334.

[3] R. B. Ash, Real Analysis and probability, Academic Press, New York, (1972).

[4] S. Balaji and S. P. Meyn, Multiplicative ergodicity and large deviations for an irreducible Markov chain, Stoch. Proc. Appl. 90 (1) (2000) 123–144.

[5] R. Blancas-Rivera, R. Cavazos-Cadena and H. Cruz-Suárez, Discounted approximations in risk-sensitive average Markov cost chains with finite state space. Mathematical Methods of Operations Research, (2019), 1-28.

[6] N. Bäuerle and U. Rieder, Markov Decision Processes with Applications to Finance, Springer, New York, (2011).

[7] N. Bäuerle and U. Rieder, More risk-sensitive Markov decision processes, Math. Oper. Res. 39 (1) (2014), 105–120.

[8] V. S. Borkar and S. P. Meyn, Risk-sensitive optimal control for Markov decision process with monotone cost, Math. Oper. Res. 27 (1) (2002), 192–209.

[9] R. Cavazos-Cadena and D. Cruz-Suárez, Discounted approximations to the risk-sensitive average cost in finite markov chains, J. Math. Anal. Appl. 450 (2017) 1345–1362.

[10] R. Cavazos-Cadena and E. Fernández-Gaucherand, The vanishing discount approach in Markov chains with risk-sensitive

criteria, IEEE Trans. Automat. Control 45 (10) (2000) 1800–1816.

[11] R. Cavazos-Cadena and D. Hernández-Hernández, A system of Poisson equations for a non-constant Varadhan functional on a finite state space, Appl. Math. Optim. 53 (2006) 101–119.

[12] Chávez-Rodríguez S, Cavazos-Cadena R and Cruz-Suárez H (2015), Continuity of the optimal average cost in Markov decision chains with small risk-sensitivity, Math Meth Oper Res **81**(3), 269–298.

[13] E. V. Denardo and U. G. Rothblum, A turnpike theorem for a risk-sensitive Markov decision process with stopping, SIAM J. Control Optim. 45 (2) (2006) 414–431.

[14] G. B. Di Masi and L. Stettner, Risk-sensitive control of discrete time Markov processes with infinite horizon, SIAM J. Control Optim. 38 (1) (1999) 61–78.

[15] G. B. Di Masi and L. Stettner, Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes with small risk, Syst. Control Lett. 40 (2000) 15–20.

[16] G. B. Di Masi and L. Stettner, Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes under minorization property, SIAM J. Control Optim. 46 (1) (2007) 231–252.

[17] O. Hernández-Lerma, Adaptive Markov Control Processes, Springer, New York, (1989).

[18] O. Hernández-Lerma and J.B. Lasserre, Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria. Springer-Verlag, New York, (1996).

[19] P.G. Hoel, S.C. Port and C.J. Stone, Introduction to stochastic processes. Waveland Press, (1986).

[20] R. A. Howard and J. E. Matheson, Risk-sensitive Markov decision processes, Manage. Sci. 18 (7) (1972) 356–369.

[21] A. Jaśkiewicz, Average optimality for risk sensitive control with general state space, Ann. Appl. Probab. 17 (2) (2007) 654–675.

[22] I. Kontoyiannis and S. P. Meyn, Spectral theory and limit theorems for geometrically ergodic Markov processes, Ann. App. Probab. 13 (1) (2003) 304–362.

[23] J. Von Neumann, O. Morgenstern. Theory of games economic behavior,Princeton University Press, Princeton, NJ (1947)

[24] M. Pitera, L. Stettner, Long run risk sensitive portfolio with general factors, Math. Meth. Oper. Res 82 (2) (2016) 265–293.

[25] M. L. Puterman, Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming, Wiley, New York, (1994).

[26] S. M. Ross, Applied Probability Models With Optimization Applications, Holden Day, San Francisco, (1970).

[27] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw–Hill, New York, (1987).

[28] Y. Shen, W. Stannat, K. Obermayer, Risk-sensitive Markov control processes, SIAM J. Control Optim. 51 (5) (2013) 3652–3672.

[29] K. Sladký, Growth rates and average optimality in risk-sensitive Markov decision chains, Kybernetika 44 (2) (2008) 205–226.

[30] K. Sladký, Risk-sensitive average optimality in Markov decision processes, Kybernetika 54 (6) (2008) 1218–1230.

[31] L. Stettner, Risk sensitive portfolio optimization, Math. Meth. Oper. Res. 50 (3) (1999) 463–474.

[32] L. C. Thomas, Connectedness conditions for denumerable state Markov decision processes, in: Recent Developments in Markov Decision Processes, Academic Press, New York, (1981), 181–204.

[33] H. C. Tijms, A first course in stochastic models, Wiley, New York, (2003).