BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LA ECUACIÓN DE EULER PARA LA SOLUCIÓN DE JUEGOS ESTOCÁSTICOS DESCONTADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

REI ISRAEL ORTEGA GUTIÉRREZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. HUGO A. CRUZ SUÁREZ

DR. RAÚL MONTES DE OCA MACHORRO

PUEBLA, PUE. MARZO 2011

A mis padres

...por su ayuda, y por su guía.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por darme la vida y permitirme llegar hasta este momento.

Agradezco a las personas que siempre han estado conmigo y me han apoyado en todo momento, mis padres Remedios Gutiérrez y Gerardo Ortega quienes han hecho un gran esfuerzo humano y económico para que yo salga adelante y con sus consejos me enseñaron que la verdadera sabiduría no sólo se aprende de los libros si no de las experiencias que se viven día a día. También reconozco el apoyo y cariño de mis hermanos Paulina, Gerardo, Dalila, Areli y Rubén que siempre ha sido y seguirá siendo muy importante para mí.

Durante la realización de esta tesis recibí la valiosa ayuda de mis asesores, es un placer ahora expresar mi agradecimiento sincero a ellos: Al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez por su tiempo, dedicación, amistad y sobre todo por haber confiado en mí. Al Dr. Raúl Montes De Oca por todas las ideas y sugerencias que han constituido una aportación de valor incalculable.

Por su apoyo, motivación, comprensión, y sobre todo por compartir buenos y malos momentos pero sobre todo por la amistad que existe, un agradecimiento a Rosario Ávila, a todos mis compañeros y amigos.

También se agradece a CONACyT, por el apoyo económico otorgado para la realización de esta maestría.

Índice general

Índice general I

INTRODUCCIÓN III

1. PRELIMINARES **1**
1.1. Procesos de Decisión de Markov (PDM's) 1
1.1.1. Programación Dinámica 4
1.2. Diferenciabilidad en PDM's 5
1.3. Juegos Estocásticos de Suma no Cero 7
1.3.1. Juegos Estáticos y Equilibrio de Nash 7
1.3.2. Estrategias 9
1.3.3. Criterio de Optimalidad 10
1.3.4. Existencia de Equilibrios de Nash 12

2. EQUILIBRIOS DINÁMICOS **20**
2.1. Definiciones Básicas 21
2.1.1. Equilibrio de Cournot en el caso estático 21
2.1.2. Equilibrio de Stackelberg: caso estático 23
2.2. La Ecuación de Euler en Juegos Estocásticos 26
2.2.1. Ecuación de Euler 26
2.2.2. Equilibrio Dinámico de Cournot-Nash 29

3. APLICACIONES EN ECONOMÍA **34**
3.1. Maximización de la Utilidad en un Monopolio 34
3.1.1. Planteamiento del Problema 34
3.1.2. Solución del Problema 35
3.2. Maximización de la Utilidad en un Duopolio 41
3.3. Equilibro Dinámico de Stackelberg 50

4. CONCLUSIONES **58**

A. La topología de convergencia débil **60**

B. Teorema de Kakutani **62**

C. Teorema de selección **64**

Bibliografía **65**

INTRODUCCIÓN

La tesis trata con la teoría de juegos estocásticos (véase [15] y [32]). En ella se considera el caso de juegos que presentan incertidumbre en la selección de estrategias óptimas y se supone que éstos pueden tener diferentes escenarios en el tiempo. La teoría de juegos se desarrolla en el contexto de espacios de Borel, donde las decisiones admisibles de cada jugador se consideran en un espacio compacto. También se supone que el juego es llevado a cabo en un número finito de etapas. En este contexto, se caracterizan equilibrios dinámicos tipo Nash (véase [25] y [26]). Después se presenta una versión de la Ecuación de Euler (EE) para juegos estocásticos (véase [22] y [23]).

La teoría de juegos consiste de modelos matemáticos usados para el estudio de situaciones de conflicto. En donde un conflicto está compuesto de participantes (jugadores), quienes pueden seleccionar libremente sus estrategias, las cuales los conducirán a varios resultados posibles sobre los cuales ellos tienen ciertas preferencias. Un participante puede tener control parcial sobre los resultados, pero con la condición de que otros jugadores, con diferentes estrategias, también tienen la oportunidad de influir en dicho resultado. La teoría de juegos abstrae los resultados esenciales de competencias, para ponerlos en un modelo matemático, y de esta manera dar un enfoque científico para analizar dichos problemas. El objetivo principal de teoría de juegos es analizar cuáles son las mejores estrategias de cada jugador cuando se enfrenta a algún conflicto, y de esta forma proporcionar al jugador una guía para tomar un comportamiento racional frente a estas decisiones. La teoría de juegos fue desarrollada en un principio como una herramienta para entender el comportamiento de la Economía, aunque es importante mencionar que en la actualidad es usada en otros campos, como en la Biología, Sociología, Psicología y Filosofía.

Los primeros estudios de juegos en el área de economía fueron dados por Cournot (véase [8]), Bertrand (véase [5]) y Edgeworth (véase [12]) en precios y producción de un oligopolio (i.e., un mercado en el que existen sólo pocos vendedores para un mismo producto). Posteriormente la idea general de la teoría de juegos fue introducida por John von Neumann y Oskar Morgenstern en su famoso libro de 1944: *Theory of Games and Economic Behavior* (véase [35]), el cual propone que los problemas de Economía deben ser abordados usando la teoría de juegos. Después John B. Nash introdujo lo que llegó a ser conocido como "equilibrio de Nash" (véase [25]), el cual fue una forma de extender el análisis teórico de juegos de suma cero.

Aquí se retoman estas ideas para probar, mediante el uso de Programación Dinámica (PD), la existencia de un equilibrio de Nash para juegos dinámicos estocásticos. La prueba se lleva a cabo por inducción sobre el horizonte del problema y haciendo uso del teorema del punto fijo de Glicksberg (véase el Teorema B.0.11 del Apéndice B). Dicha prueba está motivada por el trabajo de Dutta y Sundaram (véase [11]).

Posteriormente se aplican los resultados a un modelo económico de tipo pesquerías ("fisheries"), donde se caracteriza un equilibrio de Nash en la clase de políticas estacionarias. Las estrategias son determinadas usando una versión estocástica de la Ecuación de Euler para juegos, la cual es una variante de la estudiada en [9], para el caso de Procesos de Decisión de Markov (PDM's). El estudio del modelo de pesquerías es analizado también para un oligopolio, en este caso se determina la política óptima de consumo de la utilidad total descontada. Este modelo es aplicado en un caso particular de un duopolio con utilidad logarítmica para el cual se caracteriza un equilibrio de Cournot-Nash y otro de Stackelberg. Finalmente, se presenta una comparación de los equilibrios encontrados para el caso cuando el ruido en la transición se encuentre concentrado en un punto (el estado inicial del proceso). Es importante mencionar que este modelo fue estudiado inicialmente por: [22] y [23]. En estas referencias se presenta un razonamiento heurístico para el cálculo de las estrategias de equilibrio de Nash, en cambio, aquí se propone un método iterativo para la solución del mismo.

En resumen, el trabajo de investigación se enfocó a encontrar una versión de la Ecuación de Euler en el contexto de teoría de juegos, y ejemplificar su uso en un modelo económico de tipo pesquerías.

La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se hace una revisión de conceptos básicos que serán usados en el desarrollo de la tesis. En el Capítulo 2 se presenta la contribución principal de esta tesis: una versión de la EE en el contexto de juegos estocásticos. En el Capítulo 3 se dan ejemplos aplicados a economía donde se muestra como usar la EE dada previamente.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se presentan las definiciones básicas de Procesos de Decisión de Markov para el criterio de pago descontado y horizonte finito, en donde se prueba la existencia de una política óptima. También, como caso análogo se presentan las definiciones básicas de juegos estocásticos con criterio de pago descontado y horizonte finito, donde se dan las condiciones para garantizar la existencia de un equilibrio de Nash.

1.1. Procesos de Decisión de Markov (PDM's)

Definición 1.1.1 *Un Modelo de Control de Markov (MCM), estacionario, a tiempo discreto, consiste de una quíntupla:*

$$(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, r), \tag{1.1}$$

donde:

(a) *X es un espacio de Borel no vacío (i.e., un subconjunto de Borel de un espacio métrico completo y separable), llamado espacio de estados. A los elementos de X se les llama estados;*

(b) *A, es el conjunto de acciones (o controles), el cual también es un espacio de Borel no vacío;*

(c) *$\{A(x) : x \in X\}$ es una familia de subconjuntos medibles no vacíos $A(x)$ de A, donde $A(x)$ denota el conjunto de acciones admisibles para el estado $x \in X$ y con la propiedad de que el conjunto*

$$\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\},$$

de parejas de estado-acción admisible, es un subconjunto medible de $X \times A$*;*

(d) Q *es un kérnel estocástico (véase [18]) definido en* X *dado* $\mathbb{K}$*;*

(e) $r : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ *es una función medible llamada función de recompensa (o costo) en un paso.*

El modelo de control (1.1) representa un sistema de control estocástico el cual es observado de manera periódica en los tiempos $t = 0, 1, 2, ...$ Sean $x_t = x \in X$ y $a_t = a \in A(x)$, el estado del sistema y la acción (o control) aplicada en el tiempo t, entonces ocurre lo siguiente:

a) se recibe una recompensa $r(x, a)$ y,

b) el sistema se moverá a un nuevo estado x_{t+1} con la distribución de probabilidad $Q(\cdot \mid x, a)$, i.e.,

$$Q(B \mid x, a) = \Pr(x_{t+1} \in B \mid x_t = x, a_t = a),$$

$B \in \mathcal{B}(X)$.

Una vez que el sistema pasa a un nuevo estado, se elige nuevamente una acción y el proceso anterior se repite.

Políticas. Ahora, para poder definir una política o estrategia, considérese un MCM y para cada tiempo $t = 0, 1, \ldots$, defínase *el espacio* $\mathbb{H}_t$ que *denota las historias observadas del proceso hasta el tiempo* t, el cual está definido como $\mathbb{H}_0 = X$ y $\mathbb{H}_t = \mathbb{K} \times \mathbb{H}_{t-1}$, para $t = 0, 1, ...$ A un elemento h_t de $\mathbb{H}_t$, se le conoce como t-historia admisible, el cual es un vector de la forma

$$h_t = (x_0, a_0, x_1, a_1, ..., x_{t-1}, a_{t-1}, x_t),$$

donde $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 0, ..., t-1$ y $x_t \in X$.

Definición 1.1.2 *Una política (aleatorizada admisible) es una sucesión* $\pi = \{\pi_t\}_{t=0}^{\infty}$ *de kérneles estocásticos* π_t *en* A *dado* H_t*, que satisface*

$$\pi_t(A(x_t) \mid h_t) = 1,$$

para $h_t \in H_t$ *y* $t \geq 0$.

El conjunto de todas las políticas será denotado por Π*. En particular, la clase de políticas estacionarias será denotado por:*

$$\mathbb{F} = \{f : X \to A : f(x) \in A(x) \text{ para cada } x \in X \text{ y } f \text{ medible}\}.$$

Construcción canónica: Sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ el espacio canónico, donde $\Omega := (X \times A)^{\infty}$ y $\mathfrak{F}$ es su correspondiente σ-álgebra producto. Luego, sea $\pi = \{\pi_t\}$ una política de control arbitraria y ν una medida de probabilidad en X, la cual es la "distribución inicial". Entonces, por el Teorema de Ionescu-Tulcea (véase [2]) existe una única medida de probabilidad P_{ν}^{π} definida en $(\Omega, \mathfrak{F})$ tal que $P_{\nu}^{\pi}(\mathbb{H}_{\infty}) = 1$, donde $\mathbb{H}_{\infty} = \mathbb{K}^{\infty}$, el cual es el conjunto de historias admisibles $(x_0, a_0, x_1, a_1, ...,)$ con $(x_t, a_t) \in \mathbb{K}$ para todo $t = 0, 1, \ldots$.

Además, para cada $C \in \mathcal{B}(A)$, $B \in \mathcal{B}(X)$, $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, ...$, se tiene que

$$P_{v}^{\pi}(x_0 \in B) = \nu(B),$$

$$P_{x}^{\pi}(a_t \in C \mid h_t) = \pi_t(C \mid h_t), \tag{1.2}$$

$$P_{x}^{\pi}(x_{t+1} \in B \mid h_t, a_t) = Q(B \mid x_t, a_t). \tag{1.3}$$

De acuerdo a (1.3), la distribución del estado x_{t+1} sólo depende de la pareja estado-acción (x_t, a_t), dicha condición es una propiedad tipo Markov. La esperanza con respecto a P_x^{π} será denotada por E_x^{π}.

El proceso estocástico $((\Omega, \mathfrak{F}, P_x^{\pi}), \{x_t\})$ es llamado un *Proceso de Control de Markov a tiempo discreto* o *Proceso de Decisión de Markov (PDM).*

Criterio de Rendimiento. Cada PDM estará dotado de una función real, llamada función objetivo o criterio de rendimiento, que medirá en algún sentido la calidad de cada política, a través de la sucesión de recompensas que genera.

Considérese un MCM y un conjunto de políticas Π. Se define el criterio de rendimiento **Recompensa total descontada** para $\pi \in \Pi$ y $x \in X$, de la siguiente forma

$$V_N(x, \pi) := E_x^{\pi}\left[\sum_{t=0}^{N-1} \alpha^t r(x_t, a_t)\right],$$

con $\alpha \in (0, 1)$. A α se le conoce como factor de descuento y N un entero positivo conocido, el cual representa el horizonte del problema.

Definición 1.1.3 *Una política $\pi^* \in \Pi$, es óptima, si para cada $x \in X$*

$$V_N(x, \pi^*) = \sup_{\pi \in \Pi} V_N(x, \pi).$$

La función V definida para $x \in X$ como

$$V(x) := \sup_{\pi \in \Pi} V_N(x, \pi),$$

se le llama función de valor óptimo.

El problema de control óptimo consiste en determinar a la política óptima.

1.1.1. Programación Dinámica

El objetivo de esta sección es presentar una herramienta esencial para resolver el problema de control óptimo, conocida como Programación Dinámica. Este procedimiento permite determinar la función de valor óptimo, así como la política óptima. Bajo condiciones adecuadas sobre la función de recompensa y la ley de transición, la función de valor óptimo V se caracteriza mediante una ecuación funcional.

La idea principal de la Programación Dinámica es dividir el problema de optimización de N etapas en subproblemas más pequeños, en los que se requiere optimizar la recompensa recibida en un número de periodos menor a N. De manera intuitiva, los subproblemas son más sencillos de resolver en la medida en que involucran menos intervenciones por parte del controlador que el problema original.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [18].

Teorema 1.1.4 *Defina para $x \in X$ y $n = 1, 2, ..., N$, a*

$$V_n(x) := \max_{a \in A(x)} \left\{ r(x, a) + \alpha \int V_{n-1}(y) Q(dy|\, x, a) \right\}, \tag{1.4}$$

con $V_0(x) = 0$.

Supóngase que estas funciones son medibles y que para cada $n = 1, 2, ..., N$, existe $f_n \in \mathbb{F}$ tal que para $x \in X$

$$V_n(x) = r(x, f_n(x)) + \alpha \int V_{n-1}(y) Q(dy|\, x, f_n(x)).$$

Entonces la política determinista de Markov $\pi^* = \{f_1, f_2, ..., f_N\}$ es óptima y la función de valor óptimo V es V_N.

En algunas aplicaciones la ley de transición Q es inducida por una ecuación de diferencias estocásticas de la forma siguiente:

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t), \tag{1.5}$$

para $t = 0, 1, 2, ...,$ $x_0 = x$ conocido. Donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias (v.a.'s) independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), tomando valores en un espacio S, con distribución común $\widehat{\mu}$ e independiente del estado x_0. $F : \mathbb{K} \times S \to X$ es una función medible conocida. En este caso la ley de transición Q está dada por:

$$Q(B|\, x, a) = E\left[I_B(F(x,a,\xi))\right],$$

$B \in \mathcal{B}(X)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$, y E es la esperanza con respecto a la distribución $\widehat{\mu}$.

Obsérvese que cuando la dinámica es deterministica, es decir, $x_{t+1} = F(x_t, a_t)$ con $F : \mathbb{K} \to X$, $t = 0, 1, \ldots$, y $x_0 = x$ conocido, la ley de transición es:

$$Q(B \mid x, a) = I_B(F(x,a)),$$

para todo $B \in \mathcal{B}(X)$.

Usando el teorema de cambio de variable (véase [2]), para cada función medible $v : X \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} E\left[v(x_{t+1})|\, x_t = x, a_t = a\right] &= \int v(y) Q(\,dy|\, x, a) \\ &= \int v(F(x,a,y)) d\widehat{\mu}(y), \end{aligned}$$

en el sentido de que si una de las integrales existe, la otra también y además son iguales.

De esta manera, las funciones de iteración de valores (1.4) se pueden escribir de la siguiente forma

$$V_n(x) = \max_{a \in A(x)} \left\{ r(x,a) + \alpha E\left[V_{n-1}(F(x,a,\xi))\right]\right\},$$

para $n \geq 1$ con $V_0 = 0$. Además la función de valor óptimo satisface:

$$V(x) = \max_{a \in A(x)} \left\{ r(x,a) + \alpha E\left[V(F(x,a,\xi))\right]\right\},$$

para cada $x \in X$.

1.2. Diferenciabilidad en PDM's

En esta sección se enunciarán algunos teoremas de diferenciabilidad, los cuales serán usados en el siguiente Capítulo.

Sea $G : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ una función medible. Y supóngase que existe una función medible $h : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$G(x,a) \leq h(x),$$

para toda $x \in X$ y $a \in A(x)$. Defínase a $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) := \sup_{a \in A(x)} G(x,a),$$

$x \in X$.

Considérese la siguiente notación: $C^2(X, Y)$ denotará el conjunto de funciones $G : X \to Y$ que tienen derivada de segundo orden continua. G_x, G_a y G_{aa} denotan la derivada de G con respecto a x y a a, y la segunda derivada con respecto a a, respectivamente. El interior del conjunto X será denotado por $int(X)$.

La prueba del siguiente teorema se puede consultar en [10].

Teorema 1.2.1 ***(Teorema de la Envolvente)*** *Supóngase que la función $G \in C^2\left(int(\mathbb{K}); \mathbb{R}\right)$ y $G_{aa}(x, \cdot)$ es definida negativa, para $x \in X$. Si existe $f \in \mathbb{F}$, tal que para cada $x \in X$, $f(x) \in int(A(x))$ y $g(x) = G(x, f(x))$. Entonces, $f \in C^1(int(X); A)$, $g \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y además, para cada $x \in int(X)$*

$$g'(x) = G_x(x, f(x)).$$

Defínase para $(x, a) \in \mathbb{K}$ y $n = 1, 2, ...$,

$$G^n(x, a) := r(x, a) + \alpha E\left[V_{n-1}\left(F(x, a, s)\right)\right].$$

Teorema 1.2.2 *Supóngase que:*

a) $r \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$, $F(\cdot, s) \in C^2(int(\mathbb{K}); X)$ para cada $s \in S$, ambas crecientes en X, $G^n_{aa}(x, \cdot)$ es definida negativa para cada $n \geq 1$;

b) $f_n(x) \in int((A(x))$ para cada $x \in X$ y $n = 1, 2, ...$;

Entonces para cada $n = 1, 2, ...$, $f_n \in C^1(int(X); A)$, $V_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y para cada $x \in int(X)$

$$V_n'(x) = G^n_x(x, f_n(x)),$$

donde f_n son los maximizadores del algoritmo de programación dinámica.

Demostración. Sea $x \in int(X)$. Primero se probará para $n = 1$. Como

$$V_1(x) = \max_{a \in A(x)} r(x, a),$$

además por hipótesis $f_1(x) \in int(A(x))$ y r es de clase C^2 con $G^n_{aa}(x, a)$ definida negativa, entonces por el Teorema de la envolvente (Teorema 1.2.1) se tiene que $f_1 \in C^1(int(X); A)$, $V_1 \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y

$$V_1'(x) = r_x(x, f_1(x)) = G^1_x(x, f_1(x)).$$

Para $n = 2$, se tiene que

$$V_2(x) = \max_{a \in A(x)} G^2(x, a).$$

Como r, F y V_1 son de clase C^2 entonces la función G^2 también lo es, además G^2_{aa} es definida negativa. Luego, debido a que $f_2(x) \in int(A(x))$, por el Teorema de la envolvente (Teorema 1.2.1) se llega a que $f_2 \in C^1(int(X); A)$, $V_2 \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y

$$V_2'(x) = G^2_x(x, f_2(x)).$$

Ahora, supóngase que $V_{n-1} \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ con $n > 2$. Como r, F y V_{n-1} son de clase C^2 entonces la función G^n también lo es. Por otra parte, $G^n_{aa}(x, a)$ es definida negativa, siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior ($n = 2$) se concluye que $f_n \in C^1(int(X); A)$, $V_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y

$$V_n'(x) = G^n_x(x, f_n(x)).$$

■

1.3. Juegos Estocásticos de Suma no Cero

El desarrollo de esta sección se basa en el artículo [11]. En esta sección se demostrará la existencia de un equilibrio de Nash para juegos estocásticos con criterio de pago descontado. Se estudiarán juegos con espacio de estados de Borel, conjunto de acciones compacto y horizonte finito. Para ello primero se definirá lo que es un juego estático y se dará la definición de equilibrio de Nash.

1.3.1. Juegos Estáticos y Equilibrio de Nash

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Además, tiene por objetivo estudiar las estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos.

Aunque tiene algunos puntos en común con la teoría de la decisión, la teoría de juegos estudia decisiones realizadas en entornos donde interaccionan los jugadores. En otras palabras, estudia la elección de la conducta óptima cuando los costos y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos.

Los elementos de un juego estático son:

(1) los jugadores

(2) las estrategias que tiene cada jugador y

(3) la ganancia de cada jugador en cada combinación posible de estrategias.

Ahora, se definirá formalmente, lo que es un juego. Para facilitar la exposición, supóngase que sólo son dos jugadores $i = 1, 2$.

Definición 1.3.1 *Un juego estático con dos jugadores consta de un conjunto de estrategias A_i para el jugador i, de esta forma $a_i \in A_i$ denotará un elemento de A_i. Sea (a_1, a_2) las estrategias para el jugador 1 y 2, respectivamente y sea r^i la función de recompensa del jugador i. Entonces $r^i(a_1, a_2)$ es la ganancia del jugador i si los jugadores eligen (a_1, a_2). Dicho juego será denotado por $G = \{A_1, A_2; r^1, r^2\}$.*

Ahora, se dará el concepto de equilibrio de Nash en un juego estático, quien en su tesis de doctorado (véase [26]) define los equilibrios que hoy llevan su nombre, tratando las estrategias aleatorizadas (véase [3] y [16]) y demostrando que cualquier juego con un número finito de estrategias tiene al menos un equilibrio de Nash (véase [3]).

Definición 1.3.2 *Sea $G = \{A_1, A_2; r^1, r^2\}$ un juego con dos jugadores. Se dice que las estrategias $(a_1^*, a_2^*) \in A_1 \times A_2$ forman un equilibrio de Nash, si a_1^* es la mejor respuesta del jugador 1 a la respuesta del jugador 2; análogamente, a_2^* es la mejor respuesta del jugador 2 a la respuesta del jugador 1, es decir,*

$$r^1(a_1^*, a_2^*) \geq r^1(a_1, a_2^*)$$

$$r^2(a_1^*, a_2^*) \geq r^2(a_1^*, a_2)$$

para cada estrategia $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$. En otras palabras,

$$a_1^* = \arg \max_{a_1 \in A_1} r^1(a_1, a_2^*),$$

y

$$a_2^* = \arg \max_{a_2 \in A_2} r^2(a_1^*, a_2).$$

El Modelo del Juego Estocástico

Definición 1.3.3 *Considérese el modelo del juego estocástico de suma no cero para dos jugadores*

$$GM := \left\{X, \left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)_{i=1,2}, Q, N\right\} \tag{1.6}$$

donde,

(1) *X es un espacio de Borel, el cual es llamado espacio de estados.*

(2) *Cada jugador $i = 1, 2$ es caracterizado por tres elementos $\left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)$, donde*

- **(a)** *A_i es el espacio de acciones para el jugador i. Sea $A = A_1 \times A_2$, $\mathbf{a}$ denota un elemento de A; y además, dichos espacios se suponen que son espacios de Borel.*
- **(b)** *Φ_i es una multifunción (véase Apéndice B) de X a A_i, la cual define para cada $x \in X$ el conjunto de acciones admisibles para el jugador i en el estado x. Sea, $\Phi(x) = \Phi_1(x) \times \Phi_2(x)$ y $\mathbf{K} := \{(x, \mathbf{a}) \mid x \in X, \mathbf{a} \in \Phi(x)\}$ el cual es un subconjunto de Borel de $X \times A_1 \times A_2$.*
- **(c)** *$r^i : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, es una función medible y acotada que representa (para cada $x \in X$ y cada acción $\mathbf{a} \in \Phi(x)$ tomadas por los jugadores en x) la recompensa $r^i(x, \mathbf{a})$ para el jugador i.*

(3) *$Q \in \mathbb{P}(X \mid \mathbf{K})$ es un kérnel estocástico en X dado $\mathbf{K}$ ó ley de transición del juego (donde $\mathbb{P}(X \mid \mathbf{K})$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad de X dado $\mathbf{K}$).*

(4) *$N \in \mathbb{N}$ es el horizonte del juego.*

Observación 1.3.4 *Obsérvese que si $N = 1$, el juego es estático, considerando el espacio de estados como el conjunto singular $\{x_0\}$.*

El juego se desarrolla de la siguiente manera: en cada fase (o tiempo t) $t = 0, 1, \ldots,$ cada jugador observa el estado actual $x \in X$ del sistema y entonces independientemente del otro jugador, elige la acción $a_i \in \Phi_i(x)$, $i = 1, 2$. Como consecuencia de esto, ocurre lo siguiente:

1. cada jugador $i = 1, 2$, recibe una recompensa $r^i(x, \mathbf{a})$,
2. el sistema se mueve a un nuevo estado y con distribución $Q(\cdot \mid y, \mathbf{a})$.

1.3.2. Estrategias

Sea $H_0 := X$ y $H_t := \mathbf{K} \times H_{t-1}$ para cada $t = 1, 2, \ldots$, un elemento $h_t \in H_t$, el cual está dado por

$$h_t = (x_0, \mathbf{a}_0, \ldots, x_{t-1}, \mathbf{a}_{t-1}, x_t)$$

representa una historia del juego hasta el tiempo t, donde $(x_j, \mathbf{a}_j) \in \mathbf{K}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, t-1$ y $x_t \in X$. Una estrategia para el jugador $i = 1, 2$, es definida como una sucesión $\pi_i = \{\pi_{i,t}\}_{t=0}^{N-1}$ de probabilidades de transición $\pi_{i,t}$ en $\mathbb{P}(A_i \mid H_t)$ tal que

$$\pi_{i,t}(\Phi_i(x_t) \mid h_t) = 1,$$

$\forall h_t \in H_t$, $t = 0, 1, \ldots$.

Se denotará por Π_i a la familia de todas las estrategias para el jugador i. Sea $\Pi := \Pi_1 \times \Pi_2$, así un elemento de Π será denotado por π y es llamada una multiestrategia.

Una estrategia $\pi_i = \{\pi_{i,t}\}_{t=0}^{N-1}$ es llamada de Markov si $\pi_{i,t} \in \mathbb{P}(A_i \mid X)$ para cada $t = 0, 1, \ldots$, es decir, cada $\pi_{i,t}$ depende sólo del estado actual x_t del sistema, el conjunto de todas las estrategias de Markov para el jugador $i = 1, 2$; será denotado por $\Pi_{i,M}$. Luego, se dice, que una estrategia de Markov $\pi_i = \{\pi_{i,t}\}_{t=0}^{N-1}$ es una estrategia estacionaria si existe $f \in \mathbb{P}(A_i \mid X)$ tal que $\pi_{i,t} = f$ para cada $t = 0, 1, \ldots$. En este caso, la estrategia estacionaria π_i será denotada por f, así, $\Pi_{i,S}$ denota el conjunto de todas estrategias estacionarias para el jugador i. Entonces

$$\Pi_{i,S} \subset \Pi_{i,M} \subset \Pi_i.$$

De manera similar

$$\Pi_S \subset \Pi_M \subset \Pi,$$

donde $\Pi_S := \Pi_{1,S} \times \Pi_{2,S}$ es el conjunto de multiestrategias estacionarias y $\Pi_M := \Pi_{1,M} \times \Pi_{2,M}$ es el conjunto de multiestrategias de Markov.

Análogamente como en PDM, sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible, que consiste del espacio muestral $\Omega := (X \times A)^\infty$ con la σ-álgebra producto $\mathfrak{F}$. Entonces para cada estrategia $\pi \in \Pi$ y cada estado inicial $x \in X$, por el Teorema de Ionescu-Tulcea (véase [2]), existe una medida de probabilidad P_x^π y un proceso estocástico $\{(x_t, \mathbf{a}_t), t = 0, 1, \ldots\}$ definido en $(\Omega, \mathfrak{F})$ en su forma canónica, donde x_t, $\mathbf{a}_t$ representa el estado y las acciones para cada uno de los jugadores en cada tiempo $t = 0, 1, \ldots$, respectivamente. El operador esperanza con respecto P_x^π es denotado por E_x^π.

1.3.3. Criterio de Optimalidad

Definición 1.3.5 *Sea α_i un número en $(0, 1)$ fijo, defínase la función de pago esperado descontado en N etapas para el jugador i, como*

$$V_{i,N}(x, \pi) = E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{N-1} \alpha_i^t r^i(x_t, \mathbf{a}_t) \right], \tag{1.7}$$

para cada multiestrategia $\pi \in \Pi$ *y estado inicial* $x \in X$*, donde* N *es un entero positivo conocido. El número* α_i *se le llama factor de descuento del jugador* $i = 1, 2$.

Definición 1.3.6 *Una multiestrategia* $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi$ *es un* ***equilibrio de Nash*** *del juego en* N *etapas si*

$$V_{1,N}\left(x, \pi^*\right) \geq V_{1,N}\left(x, (\pi_1, \pi_2^*)\right),$$

y

$$V_{2,N}\left(x, \pi^*\right) \geq V_{2,N}\left(x, (\pi_1^*, \pi_2)\right),$$

para todo $\pi_1 \in \Pi_1$*,* $\pi_2 \in \Pi_2$ *y* $x \in X$*.*

Definición 1.3.7 *Sea* $\pi_2 \in \Pi_2$ *una estrategia (fija) para el jugador 2. Se define el conjunto de las respuestas óptimas para el jugador 1 con respecto a la estrategia* π_2 *como*

$$RO_1(\pi_2) = \left\{ \pi_1^* \in \Pi_1 : V_{1,N}(x, (\pi_1^*, \pi_2)) = \sup_{\pi_1 \in \Pi_1} V_{1,N}(x, (\pi_1, \pi_2)) \right\}.$$

Análogamente, el conjunto de las respuestas óptimas del jugador 2 a una estrategia $\pi_1 \in \Pi_1$ *del jugador 1 se define como*

$$RO_2(\pi_1) = \left\{ \pi_2^* \in \Pi_2 : V_{2,N}(x, (\pi_1, \pi_2^*)) = \sup_{\pi_2 \in \Pi_2} V_{2,N}(x, (\pi_1, \pi_2)) \right\}.$$

Una definición equivalente a la Definición 1.3.6 es la siguiente:

Definición 1.3.8 *Se dice que una multiestrategia* $(\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi_1 \times \Pi_2$*, es un* ***equilibrio de Nash*** *si*

$$\pi_1^* \in RO_1(\pi_2^*) \text{ y } \pi_2^* \in RO_2(\pi_1^*).$$

Equivalentemente, (π_1^*, π_2^*) *es un equilibrio de Nash si*

$$V_{1,N}(x, (\pi_1^*, \pi_2^*)) = \sup_{\pi_1 \in \Pi_1} V_{1,N}(x, (\pi_1, \pi_2^*)),$$

y

$$V_{2,N}(x, (\pi_1^*, \pi_2^*)) = \sup_{\pi_2 \in \Pi_2} V_{2,N}(x, (\pi_1^*, \pi_2)).$$

Sean $\upsilon : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$ una función medible y $\pi_0 = (\pi_{1,0}, \pi_{2,0}) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x)) \times \mathbb{P}(\Phi_2(x))$, para algún $x \in X$, donde $\mathbb{P}(\Phi_i(x))$ denota el conjunto de medidas de probabilidad definidas en $\Phi_i(x)$, para $i = 1, 2$, y $x \in X$ (véase Apéndice A). Sea

$$\begin{aligned} \upsilon(x, \pi_0) &= \int_A \upsilon(x, \mathbf{a}) \pi_0(d\mathbf{a}) \\ &= \int_{A_1} \int_{A_2} \upsilon(x, \mathbf{a}) \pi_{1,0}(da_1) \pi_{2,0}(da_2). \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} r^i(x, \pi_0) &= \int_A r^i(x, \mathbf{a}) \pi_0(d\mathbf{a}) \\ &= \int_{A_1} \int_{A_2} r^i(x, \mathbf{a}) \pi_{1,0}(da_1) \pi_{2,0}(da_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\cdot \,| x, \pi_0) &= \int_A Q(\cdot \mid x, \mathbf{a}) \pi_0(d\mathbf{a}) \\ &= \int_{A_1} \int_{A_2} Q(\cdot \mid x, \mathbf{a}) \pi_{1,0}(da_1) \pi_{2,0}(da_2). \end{aligned}$$

1.3.4. Existencia de Equilibrios de Nash

Ahora, se probará la existencia de un equilibrio de Nash para juegos estocásticos en espacios de Borel con horizonte finito.

Considérese el modelo del juego estocástico en (1.6) con las siguientes condiciones.

Condición 1.3.9 **(a)** *A_i compacto.*

(b) *$\Phi_i : X \twoheadrightarrow A_i$ es una multifunción (véase Apéndice B) compacto valuada en X.*

(c) *r^i es acotada y medible en $(x, \mathbf{a})$; y además, continua en $\mathbf{a}$ para cada $x \in X$ fijo.*

(d) *Para cada $B \in \mathfrak{B}(X)$, $Q(B \mid x, \cdot)$ es continua para cada $x \in X$; i.e., si $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$ entonces $Q(\cdot \mid x, \mathbf{a}_n)$ converge a $Q(\cdot \mid x, \mathbf{a})$.*

Defínase para cada $x \in X$

$$\Pi(x) := \mathbb{P}(\Phi_1(x)) \times \mathbb{P}(\Phi_2(x)). \tag{1.8}$$

.

Lema 1.3.10 $\Pi(\cdot)$ *es no vacío, compacto y convexo.*

Demostración. Sea $x \in X$, fijo. Claramente $\Pi(x)$ es no vacío. Para probar que $\Pi(x)$ es compacto, obsérvese que $\mathbb{P}(\Phi_i(x))$ tiene la topología de la convergencia débil (véase Apéndice A, Definición A.0.4) y debido a la Condición 1.3.9 (b) $\Phi_i(x)$ compacto valuada, entonces por el Teorema A.0.5 (véase Apéndice A) se tiene que $\mathbb{P}(\Phi_i(x))$ es compacto. Luego, como el producto de conjuntos compactos es un conjunto compacto se concluye que $\Pi(x)$ es compacto. La convexidad de $\Pi(x)$ se sigue del hecho de que la combinación convexa de medidas de probabilidad es nuevamente una probabilidad. ■

Defínase

$$BR_1(\pi) := \left\{ \pi_1^* \in \mathbb{P}(\Phi_1(x)) : r^1(x, (\pi_1^*, \pi_2)) = \sup_{\pi_1 \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))} r^1(x, (\pi_1, \pi_2)) \right\},$$

y

$$BR_2(\pi) := \left\{ \pi_2^* \in \mathbb{P}(\Phi_2(x)) : r^2(x, (\pi_1, \pi_2^*)) = \sup_{\pi_2 \in \mathbb{P}(\Phi_2(x))} r^2(x, (\pi_1, \pi_2)) \right\},$$

para cada $\pi := (\pi_1, \pi_2) \in \Pi(x)$, $i = 1, 2$, y $x \in X$. A $BR_i(\pi)$ se le conoce como el conjunto de mejores respuestas para el jugador $i = 1, 2$, en π. Sea $BR(\pi) := BR_1(\pi) \times BR_2(\pi)$, de esta forma se induce una multifunción en $\Pi(x)$ para cada $x \in X$

Lema 1.3.11 $BR(\pi)$ *es un conjunto no vacío convexo para cada* $\pi \in \Pi(x)$.

Demostración. Dado $\pi := (\pi_1, \pi_2) \in \Pi(x)$, el problema de mejor respuesta al que se enfrenta el jugador i, es un Modelo de Control de Markov descontado $MCM := \left\{ \{x\}, \Phi_i(x), \widehat{r}^i \right\}$, (véase Definición 1.1.1) donde $\{x\}$ es el espacio de estados, $\Phi_i(x)$ es el espacio de acciones admisibles y

$$\widehat{r}^1(x, a_1) := r^1(x, (a_1, \pi_2)),$$

$$\widehat{r}^2(x, a_2) := r^2(x, (\pi_1, a_2)),$$

la cuales son continuas en a_1 y a_2, respectivamente. El conjunto $BR_i(\pi)$ es no vacío, debido a la continuidad y la compacidad de $\mathbb{P}(\Phi_i(x))$ (véase [18]).

Sea $\widetilde{r}^i(x)$ la función de valor del MCM y sean μ_1, $\mu_2 \in BR_i(\pi)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ (i.e., $\mu(B) = \lambda\mu_1(B) + (1 - \lambda)\mu_2(B)$ para cada $B \in \mathcal{B}(\Phi_i(x))$). Entonces

$$\widehat{r}^i(x, \mu) = \lambda\widehat{r}^i(x, \mu_1) + (1 - \lambda)\widehat{r}^i(x, \mu_2). \tag{1.9}$$

Como μ_1, $\mu_2 \in BR_i(\pi)$, la expresión anterior (1.9) es lo mismo que

$$\widetilde{r}^i(x) = \lambda\widetilde{r}^i(x) + (1-\lambda)\widetilde{r}^i(x),$$

i.e.,

$$\widehat{r}^i(x,\mu) = \widetilde{r}^i(x).$$

Por lo tanto, $\mu \in BR_i(\pi)$ y así $BR_i(\pi)$ es convexo.

De esta manera, $BR(\pi)$ es convexo. ■

Lema 1.3.12 *BR es una multifunción superiormente semicontinua (u.s.c) y compacto valuada para cada $\pi \in \Pi(x)$.*

Demostración. Sea $\pi_n := (\pi_{1,n}, \pi_{2,n}) \in BR(\pi)$ tal que

$$\pi_n \to \pi = (\pi_1, \pi_2)\,, \tag{1.10}$$

y $\gamma_{i,n} \in BR_i(\pi_n)$ con

$$\gamma_{i,n} \to \gamma_i \in \mathbb{P}(\Phi_i(x)), \tag{1.11}$$

en la topología de convergencia débil. Se debe probar que $\gamma_i \in BR_i(\pi)$. Luego, observe que como $\gamma_{i,n} \in BR_i(\pi_n)$ se sigue que

$$r^1(x,(\gamma_{1,n},\pi_{2,n})) \geq r^1(x,(\beta,\pi_2)), \tag{1.12}$$

$$r^2(x,(\pi_{1,n},\gamma_{2,n})) \geq r^2(x,(\pi_1,\widehat{\beta})), \tag{1.13}$$

para todo n y $\left(\beta,\widehat{\beta}\right) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$.

Luego, como $r^i(x,\mathbf{a})$ es continua en $\mathbf{a}$, por el Corolario A.0.6 (véase Apéndice A), cuando $n \to \infty$ y usando (1.10) y (1.11), se llega a que

$$r^1(x,(\gamma_{1,n},\pi_{2,n})) \to r^1(x,(\gamma_1,\pi_2)),$$

$$r^2(x,(\pi_{1,n},\gamma_{2,n})) \to r^2(x,(\pi_1,\gamma_2)),$$

y

$$r^1(x,(\pi_{1,n},\widehat{\beta})) \to r^1(x,(\pi_1,\widehat{\beta})),$$
$$r^2(x,(\beta,\pi_{2,n})) \to r^2(x,(\beta,\pi_2)),$$

para todo $\left(\beta,\widehat{\beta}\right) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$.

Entonces, cuando $n \to \infty$, por (1.12) se tiene que

$$r^1(x,(\gamma_1,\pi_2)) \geq r^1(x,(\beta,\pi_2)),$$

$$r^2(x,(\pi_1,\gamma_2)) \geq r^2(x,(\pi_1,\widehat{\beta})),$$

para todo $\left(\beta,\widehat{\beta}\right) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$; por tanto, $\gamma_i \in BR_i(\pi)$, lo cual prueba que BR_i es u.s.c..

La propiedad de semicontinuidad superior de BR prueba que $\gamma_i \in BR_i(\pi)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{P}(\Phi_i(x))$. Luego, como $\mathbb{P}(\Phi_i(x))$ es compacto, $BR_i(\pi)$ también es compacto. ■

Teorema 1.3.13 *Para algún $x \in X$ fijo, considérese el modelo estocástico de dos jugadores en el cual los conjuntos de acciones admisibles son espacios métricos compactos $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ y las funciones de recompensa son $r^1(x,\cdot)$, $r^2(x,\cdot)$ definidas en $\Phi(x) = \Phi_1(x)\times\Phi_2(x)$. Si $r^i(x,\cdot)$ es continua en $\Phi(x)$ para cada $i = 1,2$, el modelo del juego estocástico $\left\{\{x\},\left(\Phi_i(x),r^i\right)_{i=1,2}\right\}$ tiene un equilibrio de Nash. Es decir, existe $\pi^* := (\pi_1^*,\pi_2^*) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$ tal que*

$$r^1(x,\pi^*) \geq r^1(x,(\pi_1,\pi_2^*)),$$

$$r^2(x,\pi^*) \geq r^2(x,(\pi_1^*,\pi_2)),$$

para todo $(\pi_1,\pi_2) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$.

Demostración. De los Lemas 1.3.11 y 1.3.12 se tiene que para cada π, $BR(\pi)$ es un conjunto no vacío compacto y convexo y por tanto $BR(\cdot)$ es un k-mapeo (véase Definición B.0.8, Apéndice B). Entonces, por el Teorema del punto fijo de Glicksberg (véase Teorema B.0.11, Apéndice B) existe $\pi^* \in \Pi(x)$ tal que $\pi^* \in BR(\pi^*)$, de esta forma π^* es un equilibrio de Nash. ■

Teorema 1.3.14 *Sea $\upsilon_i : X \to \mathbb{R}^2$ una función medible y acotada, para $i = 1,2$. Defínase,*

$$H_i(x,\mathbf{a}) := r^i(x,\mathbf{a}) + \alpha_i \int_X \upsilon_i(y)Q(dy \mid x,\mathbf{a}).$$

para cada $x \in X$, $i = 1,2$, y $\mathbf{a} \in \Phi_1(x)\times\Phi_2(x)$. Entonces, el modelo del juego estocástico $\left\{X,(A_i,\Phi_i(x),H_i(x,\mathbf{a}))_{i=1,2}\right\}$ tiene un equilibrio de Nash. Es decir, existe $\pi^* := (\pi_1^*,\pi_2^*) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$ tal que

$$H_1(x,\pi^*) \geq H_1(x,(\pi_1,\pi_2^*)),$$

$$H_2(x,\pi^*) \geq H_2(x,(\pi_1^*,\pi_2)),$$

para todo $(\pi_1,\pi_2) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))\times\mathbb{P}(\Phi_2(x))$ y $x \in X$.

Demostración. La idea de la demostración consiste en usar el Teorema 1.3.13**,** para probar la existencia de un equilibrio de Nash para cada $x \in X$ (Paso 0), y después usar el Teorema de Selección C.0.14 (véase Apéndice C) y de esta forma obtener un equilibrio de Nash (Paso 1).

Paso 0: Primeramente obsérvese que se puede probar que la Condición 1.3.9 (d) es equivalente a: si $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$, entonces para cada función f medible y acotada,

$$\int_X f(y) Q(dy \mid x, \mathbf{a}_n) \to \int_X f(y) Q(dy \mid x, \mathbf{a}).$$

Por lo anterior, se sigue que

$$H_i(x, \mathbf{a}_n) \to H_i(x, \mathbf{a}),$$

si $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$. Por lo cual, $H_i(x, \mathbf{a})$ es continua en $\mathbf{a}$. Por el Teorema 1.3.13**,** para cada $x \in X$ el modelo del juego estocástico

$$\left\{ \{x\}, (\Phi_i(x), H_i(x, \mathbf{a}))_{i=1,2} \right\}$$

tiene un equilibrio de Nash.

Debido a que es posible encontrar un equilibrio de Nash para cada $x \in X$. Sea $\Pi := \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$, se define la multifunción $\Theta : X \twoheadrightarrow \Pi$ definida para $x \in X$ de la siguiente forma

$$\Theta(x) = \left\{ \begin{array}{c} \pi^* \in \Pi(x) : H_1(x, \pi^*) \geq H_1(x, (\pi_1, \pi_2^*)) \text{ y} \\ H_2(x, \pi^*) \geq H_2(x, (\pi_1^*, \pi_2)), (\pi_1, \pi_2) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x)) \times \mathbb{P}(\Phi_2(x)) \end{array} \right\},$$

equivalentemente

$$\Theta(x) = \left\{ \begin{array}{c} \pi^* \in \Pi(x) : H_1(x, \pi^*) = \sup_{\pi_1 \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))} H_1(x, (\pi_1, \pi_2^*)) \\ \text{y } H_2(x, \pi^*) = \sup_{\pi_2 \in \mathbb{P}(\Phi_2(x))} H_2(x, (\pi_1^*, \pi_2)) \end{array} \right\}. \quad (1.14)$$

Supóngase sin pérdida de generalidad que

$$r^i(x, \mathbf{a}) = \theta - 1,$$

si $\mathbf{a} \notin \Phi(x)$ para cada $i = 1, 2$, donde $\theta := \inf_{i,x,\mathbf{a}} r^i(x, \mathbf{a})$. Así, si $\pi^* := (\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Theta(x)$, entonces

$$r^1(x, \pi^*) \geq r^1(x, (\mu_1, \pi_2^*)),$$

y

$$r^2(x, \pi^*) \geq r^2(x, (\pi_1^*, \mu_2)),$$

para todo $\mu_i \in \mathbb{P}(A_i)$. Además, si $\theta := \min\left(\inf_{i,x,\mathbf{a}} r^i(x,\mathbf{a}), \inf_{i,x} \upsilon_i(x)\right)$, entonces

$$H_1(x,\pi^*) \geq H_1(x,(\mu_1,\pi_2^*)),$$

y

$$H_2(x,\pi^*) \geq H_2(x,(\pi_1^*,\mu_2)),$$

para todo $\mu_i \in \mathbb{P}(A_i)$, incluso si el soporte $(\mu_i) \cap\ \Phi_i(x)^c \neq \emptyset$. De lo cual se sigue que $H_i(x,\pi)$ está bien definida para todo $\pi \in \Pi$. Esta observación se usará en el siguiente paso.

En este paso se probará que existe un selector medible para Θ, i.e., una función medible $\xi : X \to \Pi$ tal que $\xi(x) \in \Theta(x)$ para cada $x \in X$. Para ello se hará uso del Teorema C.0.14 (véase Apéndice C), por lo cual es necesario verificar las siguientes propiedades

(i) Π satisface la propiedad $\mathbb{S}$ (véase Observación C.0.13, Apéndice C)

(ii) $\Theta(x)$ es compacto para cada $x \in X$, y

(iii) $\Theta^{-1}(F)$ es un conjunto de Borel en X para todo conjunto cerrado F en Π.

Para demostrar (i) obsérvese que por el Teorema A.0.7 (véase Apéndice A), Π es un espacio métrico separable. Entonces existe un subconjunto denso y numerable de Π tal que las bolas cerradas con radio un número racional y centro un elemento del conjunto denso numerable, separa los puntos de Π, así (i) se cumple.

Para probar la afirmación (ii), sea $\{\pi_n^* : n = 1,2,\ldots\} \subset \Theta(x)$ (donde $\pi_n^* := (\pi_{1,n}^*, \pi_{2,n}^*)$) tal que $\pi_n^* \to \pi^*$. Como $\pi_n^* \in \Theta(x)$, entonces para cada n se tiene que

$$H_1(x,\pi_n^*) \geq H_1(x,(\mu_1,\pi_{2,n}^*)),$$

y

$$H_2(x,\pi_n^*) \geq H_2(x,(\pi_{1,n}^*,\mu_2)),$$

para todo $\mu_i \in \mathbb{P}(A_i)$, $i = 1,2$. Luego, por el Corolario A.0.6 (véase Apéndice A), cuando $n \to \infty$

$$H_1(x,\pi^*) \geq H_1(x,(\mu_1,\pi_2^*)),$$

y

$$H_2(x,\pi^*) \geq H_2(x,(\pi_1^*,\mu_2)),$$

para todo $(\mu_1,\mu_2) \in \Pi$.

De esta forma $\pi^* \in \Theta(x)$, y así $\Theta(x)$ es un subconjunto cerrado del espacio compacto $\Pi(x)$, $x \in X$. Por tanto, Θ es una multifunción compacto valuada.

Para la prueba de (iii) se hará uso de (1.14). Sea $F : X \times \Pi \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$F(x,\pi) := \begin{pmatrix} H_1(x,\pi) - \sup_{\mu_1 \in \mathbb{P}(\Phi_1(x))} H_1(x,(\mu_1,\pi_2)), \\ H_2(x,\pi) - \sup_{\mu_2 \in \mathbb{P}(\Phi_2(x))} H_2(x,(\pi_1,\mu_2)) \end{pmatrix},$$

la cual es conjuntamente medible en $X \times \Pi$. Entonces el conjunto

$$F^{-1}(0,0),$$

es Borel medible y se puede probar que $F^{-1}(0,0) = Gr(\Theta)$. Entonces por el Teorema B.0.12 (véase Apéndice B), (iii) es válido.

De acuerdo a lo anterior se prueba que se satisfacen las hipótesis del Teorema C.0.14 (véase Apéndice C) y por lo tanto, existe un selector medible para Θ. ∎

Teorema 1.3.15 *Supóngase que las Condiciones 1.3.9 (a), (b), (c) y (d) se cumplen y que N es finito. Entonces, el modelo del juego estocástico GM tiene un equilibrio de Nash en las estrategias Markovianas (posiblemente no estacionarias).*

Demostración. Supóngase que $N = 1$. Como, $r^i(x,\cdot)$ es continua en $\Phi(x)$ para cada x y además r^i es medible en $X \times A$. Entonces, por el Teorema 1.3.14, existe una estrategia $\pi := (\pi_1, \pi_2) \in \Pi$ tal que para cada $x \in X$,

$$r^1(x,\pi) \geq r^1(x,(\beta,\pi_2)),$$

y

$$r^2(x,\pi) \geq r^2(x,(\pi_1,\widehat{\beta})),$$

para todo $\left(\beta,\widehat{\beta}\right) \in \mathbb{P}(\Phi_1(x)) \times \mathbb{P}(\Phi_2(x))$.

Denótese a π por π^1 y sea $v_i(x) = r^i(x,\pi^1)$, $i = 1,2$. Entonces π^1 es un equilibrio de Nash del juego $\left\{X, \left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)_{i=1,2}\right\}$, donde v_i es el correspondiente pago. Ahora, sea $H_i(x,\mathbf{a})$ como en el Teorema 1.3.14**,** entonces el juego estocástico

$$\left\{X, (A_i, \Phi_i(x), H_i(x,\cdot))_{i=1,2}\right\},$$

tiene un equilibrio. Denótese por π^2 el equilibrio de este juego, entonces (π^1,π^2) es un equilibrio de

$$\left\{X, \left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)_{i=1,2}, Q, 2\right\}.$$

El resto de la prueba se hará por inducción. Para ello, supóngase que existe una estrategia $\left(\pi^1, \ldots, \pi^{N-1}\right)$, tal que es un equilibrio de Nash del juego estocástico

$$\left\{X, \left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)_{i=1,2}, Q, N-1\right\},$$

y sea $\upsilon_i(x)$ es el correspondiente pago descontado del jugador i y estado inicial x. Por el Teorema 1.3.14, el juego

$$\left\{X, (A_i, \Phi_i(x), H_i(x,\cdot))_{i=1,2}\right\},$$

tiene un equilibrio $\pi^N \in \Pi$. De esto se sigue que $\left(\pi^1, \ldots, \pi^{N-1}, \pi^N\right)$ es un equilibrio del juego estocástico $\left\{X, \left(A_i, \Phi_i(x), r^i\right)_{i=1,2}, Q, N\right\}$ y el pago descontado está dado por

$$\upsilon_i(x, \pi^N) = \int_A H_i(x, \mathbf{a}) \pi^N(d\mathbf{a}\,|x),$$

$i = 1, 2$. Nótese que si $\pi = \left(\pi^1, \ldots, \pi^{N-1}, \pi^N\right)$, entonces

$$\upsilon_i(x, \pi^N) = V_{i,N}(x, \pi).$$

También obsérvese que $\pi \in \Pi_M$. De esta forma, el teorema queda demostrado. ■

Capítulo 2

EQUILIBRIOS DINÁMICOS

En este capítulo, se darán las definiciones básicas de lo que es un equilibrio de Cournot y Stackelberg en el caso estático. Posteriormente se dará una versión de la Ecuación de Euler (EE) para juegos estocásticos la cual permitirá encontrar equilibrios dinámicos, en particular el equilibrio dinámico de Cournot-Nash, el cual se aborda para un problema de pesquerías, donde se modela la interacción biológica y aspectos económicos de un problema de pesquerías en un duopolio, el cual puede ser planteado usando algún otro recurso renovable. Además, en dicho modelo se supone que la población de pescado es dinámica y que los países están interesados en el bienestar de su población. En particular, supóngase que los países maximizan las utilidades de suma descontada sujeta a las restricciones impuestas por una función de crecimiento biológico.

Esta parte se encuentra motivada por [22] y [23], en estas citas se hace el planteamiento del problema estudiado aquí y se resuelve usando un procedimiento heurístico basado en la EE. En esta tesis se retoma este problema y se resuelve usando un método iterativo, el cual está fundamentado en la EE.

También se supone que los países o empresas capturan peces de las mismas aguas. Además, cada país obtiene una utilidad por los peces que captura en cada período y por lo tanto, un interés en el efecto a largo plazo de sus capturas. Por otra parte, cada país debe asumir la captura del otro país al decidir sobre sus propias capturas. El problema se analizará mediante el uso de un argumento de programación dinámica y utilizando el concepto de equilibrio de Cournot-Nash. De esta forma, se formularán las ecuaciones de PD para cada uno de los países y se resolverán mediante la EE, mostrando que existe un equilibrio dinámico de Cournot-Nash.

2.1. Definiciones Básicas

En esta sección se dan las definiciones y suposiciones para encontrar un equilibrio de Cournot y Stackelberg para el caso estático.

2.1.1. Equilibrio de Cournot en el caso estático

La competencia de Cournot es un modelo económico, en donde compiten dos empresas con respecto a la cantidad que producen dichas empresas y deciden al mismo tiempo de forma independiente una de la otra cuanto producir. Este modelo tiene las siguientes características:

1. Hay dos empresas las cuales elaboran un producto homogéneo, es decir, no hay diferenciación de productos.
2. Las empresas no cooperan (no hay colusión).
3. Las empresas tienen poder de mercado, en otras palabras, la decisión de producción de cada empresa afecta el precio del bien.
4. Las empresas compiten por cantidades y las eligen de forma simultánea.
5. Las empresas son económicamente racionales y actúan estratégicamente, por lo que buscan maximizar sus utilidades dadas las decisiones de sus competidores.

Ahora, supóngase que la empresa $i = 1, 2$, elige producir la cantidad $q_i \geq 0$, de esta manera la cantidad total producida por las dos empresas es $q = q_1 + q_2$.

Se supone también que el precio del producto es una función decreciente de la cantidad total de las dos empresas. Por ejemplo, considérese la siguiente función de precios

$$P(q) = (\Gamma - q)^+ = \begin{cases} \Gamma - q & \text{si } 0 \leq q \leq \Gamma; \\ 0 & \text{si } \; q > \Gamma, \end{cases}$$

donde Γ representa el precio máximo que está dispuesto a pagar el consumidor.

La cantidad producida por las dos empresas juntas es $q_1 + q_2$, por lo que los ingresos para la empresa i por producir q_i unidades es $q_i P(q_1 + q_2)$. El costo de producción para la empresa i es $c_i q_i$. Cada empresa quiere maximizar su propia función de recompensa (beneficios), la cual es el ingreso total menos el costo total,

$$u_1(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_1 - c_1 q_1,$$

y

$$u_2(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_2 - c_2 q_2.$$

Es posible demostrar que las cantidades de producción óptima están en $(0, \Gamma)$, las cuales se encuentran caracterizadas por las siguientes condiciones de primer orden

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0,$$

y

$$\frac{\partial u_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0,$$

lo cual implica que

$$-2q_1 - q_2 + \Gamma - c_1 = 0, \tag{2.1}$$

$$-2q_2 - q_1 + \Gamma - c_2 = 0. \tag{2.2}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2.1) y (2.2) se obtienen las cantidades de producción óptima para cada una de las empresas

$$q_1^* = \frac{\Gamma + c_2 - 2c_1}{3},$$

y

$$q_2^* = \frac{\Gamma + c_1 - 2c_2}{3}.$$

Si $\Gamma > c_1 + c_2$ entonces $\Gamma > q_1^* > 0$ y $\Gamma > q_2^* > 0$. En estos puntos se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_1(q_1^*, q_2^*)}{\partial^2 q_1} = -2 < 0,$$

y

$$\frac{\partial^2 u_2(q_1^*, q_2^*)}{\partial^2 q_2} = -2 < 0,$$

por lo tanto (q_1^*, q_2^*) son los valores que maximizan ambas funciones de beneficios de cada una de las empresas. La cantidad total que las dos empresas deben producir es

$$q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2\Gamma - c_1 - c_2}{3},$$

y $\Gamma > q^* > 0$, si $\Gamma > c_1 + c_2$. El precio del mercado de los productos producidos por ambas empresas cuando producen las cantidades óptimas es

$$\begin{aligned} P(q_1^* + q_2^*) &= p = \Gamma - (q_1^* + q_2^*) \\ &= \frac{\Gamma + c_1 + c_2}{3}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $q = P^{-1}(p)$, i.e.,

$$\begin{aligned} q &= P^{-1}(p) = \Gamma - p \\ &= \frac{2\Gamma - c_1 - c_2}{3} \\ &= \frac{\Gamma + c_2 - 2c_1}{3} + \frac{\Gamma + c_1 - 2c_2}{3} \\ &= q_1^* + q_2^*. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que la cantidad de productos vendidos (demandados) será exactamente la cantidad que cada empresa debe producir a este precio. Esto es llamado equilibrio de mercado, el cual es un equilibrio de Nash (véase Definición 1.3.2) que representa las cantidades óptimas de producción.

Finalmente, sustituyendo el punto de equilibrio de Nash en las funciones de beneficios, los beneficios resultantes en dicho punto son:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\Gamma + c_2 - 2c_1)^2}{9},$$

y

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\Gamma + c_1 - 2c_2)^2}{9}.$$

2.1.2. Equilibrio de Stackelberg: caso estático

El modelo de liderazgo de Stackelberg es un juego estratégico en economía, en donde la empresa líder (empresa 1) selecciona primero su estrategia a seguir y posteriormente la empresa seguidora (empresa 2). Este tipo de modelo tiene la característica de que los jugadores están compitiendo por las cantidades de producción. Además, también se supone que el líder debe conocer a priori que el seguidor observará su acción.

En otras palabras, si una empresa conoce la cantidad de producción de la otra empresa, también debe determinar cuanto producir. Para resolver este problema, supóngase que la empresa líder anuncia que produce q_1 productos a un costo c_1 pesos por unidad. Entonces la empresa 2 decidirá cuanto producir, por ejemplo q_2 al costo c_2. También supóngase que el costo por producir es constante. El precio por unidad será considerado como función de la cantidad total producida, para este caso considérese la siguiente función $P = P(q_1, q_2) = (\Gamma - q_1 - q_2)^+ = \max\{\Gamma - q_1 - q_2, 0\}$. De esta forma las funciones de beneficio están dadas por

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) &= (\Gamma - q_1 - q_2)q_1 - c_1 q_1, \\ u_2(q_1, q_2) &= (\Gamma - q_1 - q_2)q_2 - c_2 q_2. \end{aligned}$$

Las cuales son las mismas que en el modelo de Cournot, pero ahora q_1 está dado y es fijo. De esta manera, el problema es calcular cual es la mejor respuesta para la empresa 2 dado que la producción de la empresa 1 fue q_1. Es decir, la empresa 2 debe saber como elegir $q_2 = q_2(q_1)$ con el objetivo de maximizar $u_2(q_1, q_2(q_1))$ sobre q_2, dado q_1. Derivando $u_2(q_1, q_2(q_1))$ e igualando a cero, se llega a

$$\frac{\partial u_2(q_1, q_2(q_1))}{\partial q_2} = -2q_2(q_1) - q_1 + \Gamma - c_2 = 0,$$

de lo cual se sigue que la empresa 2 debe elegir

$$q_2(q_1) = \frac{\Gamma - q_1 - c_2}{2}.$$

Esta es la cantidad que la empresa 2 debe producir, tomando en cuenta que la producción de la empresa 1 es q_1.

Ahora, sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2(q_1)) &= (\Gamma - q_1 - q_2(q_1))q_1 - c_1 q_1 \\ &= \left(\Gamma - q_1 - \frac{\Gamma - q_1 - c_2}{2}\right) q_1 - c_1 q_1 \\ &= q_1 \frac{\Gamma - q_1}{2} + q_1 \left(\frac{c_2}{2} - c_1\right). \end{aligned}$$

La empresa 1 quiere elegir q_1 para hacer que su beneficio sea lo más grande posible. Entonces

$$q_1^* = \frac{\Gamma - 2c_1 + c_2}{2},$$

y la cantidad óptima para la empresa 2 será

$$q_2^* = q_2(q_1^*) = \frac{\Gamma + 2c_1 - 3c_2}{4}.$$

De esta forma las funciones de beneficio evaluadas en las cantidades óptimas son

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\Gamma - 2c_1 + c_2)^2}{8},$$

y

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\Gamma + 2c_1 - 3c_2)^2}{16}.$$

Sea $c_1 = c_2 = c$, entonces las cantidades de producción óptimas en el modelo de Cournot son:

$$q_1 = \frac{\Gamma - c}{3},$$

y

$$q_2 = \frac{\Gamma - c}{3}.$$

Así, las funciones de beneficio están dadas

$$u_1(q_1, q_2) = \frac{(\Gamma - c)^2}{9},$$

y

$$u_2(q_1, q_2) = \frac{(\Gamma - c)^2}{9}.$$

Comparando con el modelo de Stackelberg se tiene que

$$q_1^* = \frac{\Gamma - c}{2} > q_1,$$

y la cantidad óptima para la empresa 2 será

$$q_2^* = \frac{\Gamma - c}{4} < q_2.$$

Obsérvese que la empresa 1 produce más en el modelo de Stackelberg que en el modelo de Cournot. Sin embargo, la empresa 2 en el modelo de Stackelberg produce menos que en el modelo de Cournot. En cuanto a los beneficios de las empresas se tiene que

$$u_1(q_1, q_2) = \frac{(\Gamma - c)^2}{9} < u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\Gamma - c)^2}{8},$$
$$u_2(q_1, q_2) = \frac{(\Gamma - c)^2}{9} > u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(\Gamma - c)^2}{16}.$$

Por lo tanto, la empresa 1 obtiene mayor beneficio anunciando su cantidad de producción, sin en cambio, la empresa 2 obtiene menor beneficio conociendo la cantidad producida por la empresa 1. De esta manera, a la empresa 1 le conviene más anunciar su nivel de producción, mientras que a la empresa 2 le conviene que las cantidades de producción se elijan simultáneamente.

También es posible hacer una comparación con la cantidad total producida en ambos modelos

$$q_1 + q_2 = \frac{2}{3}(\Gamma - c) < q_1^* + q_2^* = \frac{3}{4}(\Gamma - c),$$

y finalmente, una comparación sobre los precios de equilibrio (recuerde que $\Gamma > c$)

$$P(q_1^* + q_2^*) = \frac{\Gamma + 3c}{4} < P(q_1 + q_2) = \frac{\Gamma + 2c}{3}.$$

2.2. La Ecuación de Euler en Juegos Estocásticos

2.2.1. Ecuación de Euler

En el desarrollo subsecuente de esta sección se considera que en el GM (véase Definición 1.3.3), $X \subseteq \mathbb{R}$, $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y para cada $x \in X$, $A_i(x)$ son conjuntos convexos. También se considera que la multifunción $x \twoheadrightarrow A_i(x)$, es creciente y convexa, para todo $i = 1, 2$. Además, suponga que la ley de transición es inducida por la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= L\left(F(x_t, \mathbf{a}_t), \xi_t\right) \\ &= L\left(F(x_t, a_{1,t}, a_{2,t}), \xi_t\right), \end{aligned}$$

donde, $\{\xi_t\}$ es una sucesión de v.a.'s i.i.d. tomando valores en un espacio $S \subset \mathbb{R}$ con densidad común Δ e independiente del estado inicial $x_0 = x \in X$; se supone que $L : X' \times S \to X$ es una función medible conocida, con $X' \subset \mathbb{R}^n$ y $F : \mathbf{K} \to X'$ es una función medible conocida. Para este modelo también se supone que se satisfacen las Condiciones 1.3.9 (a), (b), (c) y (d).

Entonces se tiene que para cada $n = 0, 1, ..., N$, existen $f_n, g_n \in \mathbb{F}$ tales que las funciones de iteración de valores para cada jugador son de la forma

$$V_n(x) = \max_{a_1 \in A_1(x)} \left\{ r^1(x, a_1, g_n(x)) + \alpha_1 E\left[V_{n-1}(L\left(F(x, a_1, g_n(x)), \xi\right))\right] \right\},$$

$$\widehat{V}_n(x) = \max_{a_2 \in A_2(x)} \left\{ r^2(x, f_n(x), a_2) + \alpha_2 E\left[\widehat{V}_{n-1}(L\left(F(x, f_n(x), a_2), \xi\right))\right] \right\},$$

con $V_0(x) = \widehat{V}_0(x) = 0$, $x \in X$ y $n \geq 1$.

Además, para cada $x \in X$

$$V_n(x) = r^1(x, f_n(x), g_n(x)) + \alpha_1 E\left[V_{n-1}(L\left(F(x, f_n(x), g_n(x)), \xi\right))\right],$$

$$\widehat{V}_n(x) = r^2(x, f_n(x), g_n(x)) + \alpha_2 E\left[\widehat{V}_{n-1}(L\left(F(x, f_n(x), g_n(x)), \xi\right))\right].$$

Se define para $(x, a_1) \in X \times A_1$, $(x, a_2) \in X \times A_2$ y $n = 1, 2, ..., N$, la función

$$G^n(x, a_1) := r^1(x, a_1, g_n(x)) + \alpha_1 E\left[V_{n-1}(L\left(F(x, a_1, g_n(x)), \xi\right))\right],$$

$$\widehat{G}^n(x, a_2) := r^2(x, f_n(x), a_2) + \alpha_2 E\left[\widehat{V}_{n-1}(L\left(F(x, f_n(x), a_2), \xi\right))\right].$$

Teorema 2.2.1 *Supóngase que*

a) Para cada $i = 1, 2$, $r^i \in C^2(int(\mathbf{K}); \mathbb{R})$, $r^1_{a_1 a_1}(x, \cdot, a_2)$ *y* $r^2_{a_2 a_2}(x, a_1, \cdot)$ *son definidas negativas.* $L(\cdot, s) \in C^2(int(X' \times S); X)$ *para cada* $s \in S$ *y* $L_{uu}(\cdot, s)$

definida negativa. $F \in C^2(int(\mathbf{K}); X')$, *creciente en* X *y* $F_{a_i a_i}(\cdot)$ *semidefinida negativa, además* $F_{a_i}(x, a_1, a_2)$ *invertible, donde* $u = F(x, a_1, a_2)$ *para* $a_i \in int(A_i(x))$ *con* $i = 1, 2$*;*

b) $f_n(x) \in int((A_1(x))$ *y* $g_n(x) \in int((A_2(x))$ *para cada* $x \in X$ *y* $n = 0, 1, ..., N$*;*

c) Las funciones definidas para $(x, a_1, a_2) \in \mathbf{K}$ *como*

$$H_1(x, a_1, g_n(x)) := \left[r^1_x - r^1_{a_1} F^{-1}_{a_1} F_x\right](x, a_1, g_n(x)),$$

$$H_2(x, f_n(x), a_2) := \left[r^2_x - r^2_{a_2} F^{-1}_{a_2} F_x\right](x, f_n(x), a_2),$$

son invertibles en la segunda variable y tercera variable, con inversas h_1 *y* h_2*, respectivamente.*

Entonces, para $n = 1, 2, ..., N$*,* $f_n \in C^1(int(X); A_1)$*,* $g_n \in C^1(int(X); A_2)$ *y* $V_n, \widehat{V}_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$*. Además,* V_n *y* $\widehat{V}_n$ *satisfacen las Ecuaciones de Euler dadas por*

$$\begin{aligned}(r^1_{a_1} F^{-1}_{a_1})\left(x, h_1\left(x, \frac{V'_n(x)}{1+g'_n(x)}, g_n(x)\right), h_2\left(x, f_n(x), \frac{\widehat{V}'_n(x)}{1+f'_n(x)}\right)\right) = \\ -\alpha_1 E[V'_{n-1}\left(L\left(F\left(x, h_1\left(x, \tfrac{V'_n(x)}{1+g'_n(x)}, g_n(x)\right), h_2\left(x, f_n(x), \tfrac{\widehat{V}'_n(x)}{1+f'_n(x)}\right)\right), \xi\right)\right) \\ L_u\left(F\left(x, h_1\left(x, \tfrac{V'_n(x)}{1+g'_n(x)}, g_n(x)\right), h_2\left(x, f_n(x), \tfrac{\widehat{V}'_n(x)}{1+f'_n(x)}\right)\right), \xi\right)]\end{aligned}, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}(r^2_{a_2} F^{-1}_{a_2})\left(x, h_1\left(x, \frac{V'_n(x)}{1+g'_n(x)}, g_n(x)\right), h_2\left(x, f_n(x), \frac{\widehat{V}'_n(x)}{1+f'_n(x)}\right)\right) = \\ -\alpha_2 E[\widehat{V}'_{n-1}\left(L\left(F\left(x, h_1\left(x, \tfrac{V'_n(x)}{1+g'_n(x)}, g_n(x)\right), h_2\left(x, f_n(x), \tfrac{\widehat{V}'_n(x)}{1+f'_n(x)}\right)\right), \xi\right)\right) \\ L_u\left(F\left(x, h_1\left(x, \tfrac{V'_n(x)}{1+g'_n(x)}, g_n(x)\right), h_2\left(x, f_n(x), \tfrac{\widehat{V}'_n(x)}{1+f'_n(x)}\right)\right), \xi\right)]\end{aligned}, \tag{2.4}$$

para cada $x \in int(X)$*.*

Demostración. La prueba se hará para el caso del jugador 1, en el caso del jugador 2 la prueba es similar. Sea $x \in X$ fijo. Sea $M(x, a_1) := L(F(x, a_1, g_n(x)), s)$, con g_n fijo. Nótese que M es de clase C^2 en $\mathbf{K}$, ya que L y F lo son C^2. Pero por L_{uu} y $F_{a_i a_i}$ son semidefinidas negativas, entonces L y F son cóncavas y por lo tanto, M también lo es. En resumen M es de clase C^2 y cóncava, implicando que $M_{a_1 a_1}$ es semidefinida negativa.

Por lo anterior se tiene que r^1 y G^n satisfacen las hipótesis del Teorema 1.2.2 y por lo tanto, se tiene que para cada $n = 1, 2, ..., N$, $V_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$, $f_n \in C^1(int(X); A_1)$ y

$$V'_n(x) = G^n_x(x, f_n(x)).$$

Por otro lado, sea $x \in int(X)$, como

$$V_1(x) = \max_{a_1 \in A_1(x)} \left\{ r^1(x, a_1, g_1(x)) \right\},$$

teniendo en cuenta que $f_1(x) \in int((A_1(x))$, por la condición de primer orden se tiene que $G^1_{a_1}(x, f_1(x)) = r^1_{a_1}(x, f_1(x), g_1(x)) = 0$ y por lo tanto V_1 satisfface la ecuación (2.3).

Ahora para $n > 1$, como en la demostración del Teorema 1.2.2 se sabe que $G^n \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$ y dado que $f_n(x) \in int((A_1(x))$, por la condición de primer orden se sigue que $G^n_{a_1}(x, f_n(x)) = 0$. Debido a que $F_{a_1}(x, a_1, g_n)$ es invertible se tiene que

$$-r^1_{a_1} F^{-1}_{a_1}(x, f_n(x), g_n(x)) = \alpha_1 E \left[\begin{array}{c} V'_{n-1} \left(L \left(F(x, f_n(x), g_n(x)), s \right) \right) \\ L_u(F(x, f_n(x), g_n(x)), s) \end{array} \right], \quad (2.5)$$

donde $u = F(x, a_1, a_2)$.

Dado que $V_n(x) = G^n(x, f_n(x))$ y por Teorema 1.2.2, se obtiene que

$$\begin{aligned} V'_n(x) &= r^1_x(x, f_n(x), g_n(x)) \left(1 + g'_n(x)\right) \\ &\quad + \alpha_1 E \left[V'_{n-1} \left(L \left(F(x, f_n(x), g_n(x)), s \right) \right) L_u(F(x, f_n(x), g_n(x)), s) \right] \\ &\quad F_x(x, f_n(x), g_n(x)) \left(1 + g'_n(x)\right). \end{aligned}$$

Al sustituir (2.5) en esta última igualdad se llega a que

$$\begin{aligned} V'_n(x) &= \left[r^1_x - r^1_{a_1} F^{-1}_{a_1} F_x \right] (x, f_n(x), g_n(x)) \left(1 + g'_n(x)\right) \\ &= H_1(x, f_n(x), g_n(x)) \left(1 + g'_n(x)\right), \end{aligned}$$

entonces

$$H_1(x, f_n(x), g_n(x)) = \frac{V'_n(x)}{1 + g'_n(x)}$$

por la invertibilidad de H_1 en la segunda variable, se concluye que

$$f_n(x) = h_1 \left(x, \frac{V'_n(x)}{1 + g'_n(x)}, g_n(x) \right). \quad (2.6)$$

Análogamente

$$g_n(x) = h_2 \left(x, f_n(x), \frac{\widehat{V}'_n(x)}{1 + f'_n(x)} \right). \quad (2.7)$$

Finalmente al sustituir (2.6) y (2.7) en (2.5) se tiene que (2.3) es válida. Similarmente se obtiene (2.4). ∎

2.2.2. Equilibrio Dinámico de Cournot-Nash

Supóngase que dos países extraen peces de la misma región, de esta forma cada país tiene sus propias utilidades. Por otro lado, cada país está interesado en maximizar la esperanza de la suma total de las utilidades descontadas de consumo, tomando en cuenta las acciones del otro país, de tal forma que siempre obtenga su mejor pesca.

Supóngase que el espacio de estados es $X = A_1 = A_2 = [0, \infty)$; donde A_1 y A_2 son el conjunto de acciones para el país 1 y país 2, respectivamente. También el conjunto de acciones admisibles para el país 1 y país 2 son iguales, es decir, $A_1(x) = A_2(x) = [0, h(x)]$, para cada $x \in X$ (de esta manera se define una multifunción $\Phi_i : X \twoheadrightarrow A_i$, dada por $x \twoheadrightarrow A_i(x)$). La dinámica que rige el crecimiento de la población de pescado en la región, se encuentra dada mediante una función de producción $h : X \to X$, la cual cumple las siguientes suposiciones:

$$h(0) = 0,\ h'(0) = +\infty; \tag{2.8}$$

y

$$h' > 0,\ \ h'' < 0. \tag{2.9}$$

La condición (2.8) en la literatura económica se le conoce como condiciones de Inada (véase [14]). De esta forma, la ley del movimiento es controlada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = h\left(x_t - a_{1,t} - a_{2,t}\right) \xi_t,$$

con $x_0 = x$ conocido y $t = 0, 1, ..., N - 1$, donde $a_{i,t} \in A_i(x_t)$ representa la captura de pescado de cada país, $i = 1, 2$, x_t es el stock (tamaño de la población de peces) al tiempo t, y $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d), las cuales representan la tasa de mortalidad de peces o la proporción de stock que migra, con valores en $S = [0, \infty)$. Se supone que $x_t > a_{1,t} + a_{2,t}$, en otras palabras, los dos países juntos no pueden extraer más pescado del que se produce, $t = 0, 1, ..., N - 1$. Por último, las funciones de recompensa están dadas como funciones de utilidad $u_1(a_1)$ y $u_2(a_2)$ para el país 1 y el país 2, respectivamente, para cada $a_1 \in A_1(x)$ y $a_2 \in A_2(x)$, las cuales cumplen los supuestos siguientes:

$$u_i' > 0,\ u_i'' < 0 \text{ y } u_i'(0) = +\infty \tag{2.10}$$

y además u_i' es invertible con inversa H_i, para todo $i = 1, 2$.

También, se considera que existe una constante $c_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$|u_i(a_i)| \leq c_i, \tag{2.11}$$

para todo $a_i \in A_i(x)$, $i = 1, 2$.

Las funciones de valor óptimo están dadas por

$$V(x) := \sup_{\pi_1 \in \Pi_1} V_N(x, (\pi_1, \pi_2^*)),$$

$$\widehat{V}(x) := \sup_{\pi_2 \in \Pi_2} \widehat{V}_N(x, (\pi_1^*, \pi_2)),$$

para cada $x \in X$ y $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, donde se está usando la siguiente notación $V_N = V_{1,N}$ y $\widehat{V}_N = V_{2,N}$ (véase (1.7)). Sujeto a la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = h(x_t - a_{1,t} - a_{2,t})\xi_t, \; t = 0, 1, \ldots, N-1$$

y

$$x_0 = x.$$

Ahora, para que se tenga un juego de tipo Cournot-Nash, el modelo debe tener las mismas características (1), (2), (3), (4) y (5) del caso estático. En particular, la característica (4) dice que los dos países compiten por la cantidad de peces que se extraen de la región, y eligen simultáneamente cuanto pescar. Además, cada uno de los jugadores elige estrategias estacionarias y sobre esta clase se determinará un equilibrio de tipo Cournot-Nash.

Lema 2.2.2 *Para este ejemplo el Teorema 1.3.15 es válido, es decir, existe un equilibrio de Nash.*

Demostración. Es fácil ver que $\Phi_i : X \twoheadrightarrow A_i$, es una multifunción compacto valuada, ya que para cada $x \in X$, $A_i(x)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, por lo tanto es compacto para cada $x \in X$. Dado que $u_i \in C^2((0, \infty); \mathbb{R})$, se tiene que u_i es continua en $A_i(x) = [0, h(x)]$. Claramente, la ley de transición es continua en $\mathbf{a}$ para cada x fijo.

Además, por (2.11) se tiene que la recompensa es acotada y por las condiciones (2.10) de la función de utilidad es medible y continua en $(x, a_1, a_2) \in \mathbf{K}$ y por lo tanto la hipótesis del Teorema 1.3.15 se cumplen, lo cual significa que existe un equilibrio de Nash para este juego. Además, obsérvese que por las características (1), (2), (3), (4) y (5) del caso estático, este es un equilibrio de tipo Cournot-Nash. ■

Sean $f_n \in \mathbb{F}$ y $g_n \in \mathbb{F}$ las estrategias tomadas por el país 1 y 2, respectivamente. Dichas estrategias deben satisfacer lo siguiente:

$$V_n(x) = \max_{a_1 \in A_1(x)} G^n(x, a_1) = G^n(x, f_n(x)) \tag{2.12}$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \max_{a_2 \in A_2(x)} \widehat{G}^n(x, a_2) = \widehat{G}^n(x, g_n(x)), \tag{2.13}$$

(véase Teorema 1.3.15) donde $V_0(x) = \widehat{V}_0(x) = 0$,

$$G^n(x, a_1) = u_1(a_1) + \alpha_1 E\left[V_{n-1}\left(h(x - a_1 - g_n(x))\xi\right)\right] \tag{2.14}$$

y

$$\widehat{G}^n(x, a_2) = u_2(a_2) + \alpha_2 E\left[\widehat{V}_{n-1}\left(h(x - f_n(x) - a_2)\xi\right)\right],$$

para $(x, a_1) \in X \times A_1$, $(x, a_2) \in X \times A_2$; y α_1, α_2 son los factores de descuento para el país 1 y 2, respectivamente.

Debido a la característica (5) del caso estático, las ecuaciones (2.12) y (2.13) indican que cada país quiere encontrar su captura óptima de peces bajo el supuesto de que el otro país tomará la mejor decisión en el sentido de maximizar sus utilidades.

Lema 2.2.3 *Las funciones definidas en (2.12) y (2.13) son estrictamente cóncavas y sus maxizadores f_n y g_n son únicos.*

Demostración. La demostración se hará para el caso del país 1, el caso del jugador 2 se prueba de manera similar. Sean $x, y \in X = [0, \infty)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $a_1 \in A_1(x) = [0, h(x)]$ y $\overline{a}_1 \in A_1(y) = [0, h(y)]$, entonces $0 \leq \lambda a_1 \leq \lambda h(x)$ y $0 \leq (1 - \lambda)\overline{a}_1 \leq (1 - \lambda)h(y)$, implicando que $0 \leq \lambda a_1 + (1 - \lambda)\overline{a}_1 \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$, como h es cóncava se concluye que $\lambda a_1 + (1 - \lambda)\overline{a}_1 \in A_1(\lambda x + (1 - \lambda)y) = [0, h(\lambda x + (1 - \lambda)y)]$. Además si $x < y$, es fácil ver que $A_1(x) \subset A_1(y)$. Por lo tanto, la multifunción $x \twoheadrightarrow A_1(x)$ es convexa y creciente.

Por otro lado, como h es estrictamente cóncava, entonces la función

$$F(x, a_1, g_n(x), s) = s(h(x - a_1 - g_n(x)))$$

es cóncava en $\mathbf{K}$ para cada $s \in S$ y como la función de utilidad u se supone estrictamente cóncava entonces por el Teorema 1.2.2 se concluye que V_n es estrictamente cóncava y el maximizador f_n es único. ■

Lema 2.2.4 *Para $n = 1, 2, \ldots, N - 1$, las funciones de iteración de valores $V_n, \widehat{V}_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y $f_n \in C^1(int(X); A_1)$, $g_n \in C^1(int(X); A_2)$.*

Demostración. La prueba se hará para el caso del país 1. Sea $x > 0$, fijo. Nótese que para $n = 1$, $V_1(x) = \max_{a_1 \in [0,h(x)]} u_1(a_1)$ y por (2.10), u_1 es creciente, de lo cual se sigue que $V_1(x) = u_1(h(x))$ y $f_1(x) = h(x)$. Debido a las condiciones (2.8), (2.9) y (2.10) u_1 y h son de clase C^2, por lo tanto V_1 es de clase C^2, y además $V_1'(x) = u_i'(h(x))h'(x)$.

Para $n = 2$, se cumple la siguiente relación

$$V_2(x) = \max_{a_1 \in [0,h(x)]} \{u_1(a_1) + \alpha_1 E\left[V_1(h(x - a_1 - g_2(x))\xi)\right]\}.$$

Derivando G^2 (véase 2.14) con respecto a $a_1 \in (0, h(x))$, se obtiene que

$$G^2_{a_1}(x, a_1) = u_1'(a_1) - \alpha_1 E\left[V_1'(h(x - a_1 - g_2(x))\xi)\xi\right].$$

Derivando de nuevo la ecuación anterior se tiene que $G^2_{a_1 a_1}(x, a_1) = u_1''(a_1) + \alpha_1 E\left[V_1''(h(x - a_1 - g_2(x))\xi)\xi^2\right]$ de esta manera G^2 es de clase C^2.

Por otro lado, debido a que $f_2(x) \in (0, h(x))$ y $V_2(x) = G^2(x, f_2(x))$ está en C^2, entonces por el Teorema 1.2.2 se tiene que $V_2 \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y $f_2 \in C^1(int(X); A_1)$.

Ahora, para $n > 2$ supóngase que $V_{n-1} \in C^2(int(X); \mathbb{R})$, $V''_{n-1}(x) < 0$. Obsérvese que la función de iteración de valores viene dada por

$$V_n(x) = \max_{a_1 \in [0,h(x)]} \{u_1(a_1) + \alpha_1 E\left[V_{n-1}(h(x - a_1 - g_n(x))\xi)\right]\}.$$

De manera análoga al argumento utilizado para el caso $n = 2$ se cumple que $f_n(x) \in (0, h(x))$. Entonces usando nuevamente el Teorema 1.2.2 se garantiza que $V_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y $f_n \in C^1(int(X); A_1)$.

Para el caso del país 2, la demostración es análoga. ∎

Teorema 2.2.5 *Se satisfacen las siguientes Ecuaciones de Euler*

$$\begin{aligned} V_n'(x) &= \alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left(h\left(x - H_1\left(\frac{V_n'(x)}{1 - g_n'(x)}\right) - H_2\left(\frac{\widehat{V}_n'(x)}{1 - f_n'(x)}\right)\right)\xi\right)\xi\right] \\ &\quad \cdot h'\left(x - H_1\left(\frac{V_n'(x)}{1 - g_n'(x)}\right) - H_2\left(\frac{\widehat{V}_n'(x)}{1 - f_n'(x)}\right)\right)(1 - g_n'(x)), \end{aligned} \tag{2.15}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{V}_n'(x) &= \alpha_2 E\left[\widehat{V}_{n-1}'\left(h\left(x - H_1\left(\frac{V_n'(x)}{1 - g_n'(x)}\right) - H_2\left(\frac{\widehat{V}_n'(x)}{1 - f_n'(x)}\right)\right)\xi\right)\xi\right] \\ &\quad \cdot h'\left(x - H_1\left(\frac{V_n'(x)}{1 - g_n'(x)}\right) - H_2\left(\frac{\widehat{V}_n'(x)}{1 - f_n'(x)}\right)\right)(1 - f_n'(x)), \end{aligned} \tag{2.16}$$

para cada $n \geq 2$ *y* $x \in int(X)$*.*

Demostración. Primeramente se hará la prueba para el país 1. Derivando con respecto a a_1, la función G^n, se tiene que

$$G^n_{a_1}(x,a_1) = u_1'(a_1) - \alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left(h(x-a_1-g_n(x))\xi\right)\xi\right] h'(x-a_1-g_n(x)),$$

para cada $(x,a_1) \in X \times A_1$. En particular, la ecuación anterior se cumple para el maximizador $f_n \in \mathbb{F}$, i.e.,

$$u_1'(f_n(x)) = \alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left(h(x-f_n(x)-g_n(x))\xi\right)\xi\right] h'(x-f_n(x)-g_n(x)) \quad (2.17)$$

para cada $x \in int(X)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} V_n'(x) &= \alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left(h(x-f_n(x)-g_n(x))\xi\right)\xi\right] \\ &\quad \cdot h'(x-f_n(x)-g_n(x))(1-g_n'(x)), \end{aligned} \quad (2.18)$$

para cada $x \in int(X)$, sustituyendo (2.18) en (2.17) se llega a que

$$u_1'(f_n(x)) = \frac{V_n'(x)}{1-g_n'(x)},$$

para cada $x \in int(X)$. Luego, por la invertibilidad de u_1', se tiene que

$$f_n(x) = H_1\left(\frac{V_n'(x)}{1-g_n'(x)}\right). \quad (2.19)$$

Análogamente, para el país 2

$$g_n(x) = H_2\left(\frac{\widehat{V}_n'(x)}{1-f_n'(x)}\right), \quad (2.20)$$

para cada $x \in int(X)$. Ahora, sustituyendo las ecuaciones (2.19) y (2.20) en (2.18) se obtiene (2.15). Similarmente, se llega a (2.16). ■

Capítulo 3

APLICACIONES EN ECONOMÍA

En este capítulo se planteará un modelo económico enfocado a un problema de pesquerías y se estudiará tanto para el caso del monopolio como para el caso del duopolio. En el caso del monopolio se determina una estrategia óptima que debe seguir el jugador para optimizar su utilidad descontada esperada. En el caso del duopolio se encuentra un equilibrio dinámico de Cournot-Nash y otro de Stackelberg.

3.1. Maximización de la Utilidad en un Monopolio

Supóngase que cierto país o empresa cuenta con una utilidad, la cual se encuentra en función de los peces capturados en cada período, dicho país o empresa está interesado en el efecto a largo plazo de sus capturas. De esta manera el objetivo del país o empresa es maximizar la esperanza total de las utilidades de la suma descontada.

El problema de optimización será resuelto usando la metodología de Programación Dinámica (PD) en tiempo discreto y la solución se encontrará usando iteración de valores aplicado a la Ecuación de Euler (véase [9]).

3.1.1. Planteamiento del Problema

Supóngase que $X = A = [0, \infty)$. Sea $h : X \to [0, \infty)$ la función que determina el crecimiento de pescado, la cual cumple los supuestos: (2.8) y (2.9) dados en la Subsección 2.2.2. Por lo cual, el conjunto de acciones admisibles está dado por $A(x) = [0, h(x)]$, $x \in X$.

La recompensa se da como una función de utilidad del consumo $u : A \to \mathbb{R}$, de esta forma

$$r(x,a) = u(a),$$

si $(x,a) \in \mathbb{K}$. Análogamente, como en la Subsección 2.2.2 se supone que la utilidad cumple las condiciones (2.10) y también que u' tiene inversa H.

La dinámica del sistema se desarrolla de la siguiente forma:

$$x_{t+1} = h\left(x_t - a_t\right)\xi_t,$$

$t = 0, 1, ...$, donde x_t es el stock en el tiempo t; y $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d), con valores en $S = [0, \infty)$ y $E(\ln \xi) = \mu < \infty$.

De esta forma, el problema es maximizar la esperanza total de las utilidades descontadas

$$V(x,\pi) := E_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t u(a_t),$$

$\pi \in \Pi$ y $x \in X$, con $0 < \alpha < 1$. Así, la función óptima de utilidad es definida por

$$V(x) := \sup_{\pi \in \Pi} V(x,\pi),$$

$x \in X$, sujeto a

$$x_0 = x,$$

y

$$x_t = h(x_{t-1} - a_t)\xi_t,$$

$t = 0, 1, \ldots$.

3.1.2. Solución del Problema

En esta sección se supone que un país quiere maximizar la esperanza total de las utilidades descontadas de consumo, para ello primero se hará la formulación utilizando PD y luego se resolverá usando un método iterativo basado en la EE.

Las funciones de iteración de valores están dadas por:

$$V_n(x) = \max_{a \in A(x)} G^n(x,a), \tag{3.1}$$

donde $V_0(x) = 0$, y

$$G^n(x,a) = u(a) + \alpha E\left[V_{n-1}(h(x-a)\xi)\right], \tag{3.2}$$

para todo $(x,a) \in \mathbb{K}$.

Observación 3.1.1 *Debido a las propiedades de continuidad y compacidad que presenta el modelo, se puede garantizar la validez de PD y la existencia de maximizadores (véase [18]). Además, debido a las hipótesis sobre u y h también se puede probar que para cada $n \geq 1$, V_n es una función creciente, cóncava y diferenciable (véase [23]).*

Teorema 3.1.2 *Supóngase que existen $f_n \in \mathbb{F}$. Entonces, las funciones de iteración de valores satisfacen la siguiente ecuación funcional:*

$$V_n'(x) = \alpha E\left[V_{n-1}'(\xi(h\left(x - H(V_n'(x))\right)))\xi\right] h'\left(x - H(V_n'(x))\right), \tag{3.3}$$

para cada $n \geq 2$ y $x \in int(X)$. La ecuación (3.3) es conocida en la literatura como Ecuación de Euler.

Demostración. Derivando con respecto a a, la función G^n, se tiene que

$$G_a^n(x,a) = u'(a) - \alpha E\left[V_{n-1}'\left(h(x-a)\xi\right)\xi\right] h'(x-a),$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$. Evaluando la ecuación anterior en el maximizador $f_n \in \mathbb{F}$ se tiene que

$$u'(f_n(x)) = \alpha E\left[V_{n-1}'\left(h(x - f_n(x))\xi\right)\xi\right] h'(x - f_n(x)). \tag{3.4}$$

Por otro lado,

$$V_n'(x) = \alpha E\left[V_{n-1}'\left(h(x - f_n(x))\xi\right)\xi\right] h'(x - f_n(x)) \tag{3.5}$$

$x \in int(X)$, entonces sustituyendo (3.4) en (3.5)

$$u'(f_n(x)) = V_n'(x),$$

$x \in int(X)$. Por la invertibilidad de u', se tiene que

$$f_n(x) = H(V_n'(x)). \tag{3.6}$$

Finalmente, sustituyendo (3.6) en (3.5) se tiene la ecuación (3.3) . ■

Ahora, como caso particular, supóngase que $u(a) = \ln a$ y que $h(x) = x^\delta$. De esta manera, el conjunto de acciones admisibles para el estado $x \in X$ es $A(x) = [0, x^\delta]$.

En este caso la relación (3.1) presenta la forma siguiente:

$$V_n(x) = \max_{a \in A(x)} \left\{\ln a + \alpha E\left[V_{n-1}((x-a)^\delta \xi)\right]\right\}, \tag{3.7}$$

en donde $V_0(x) = 0$.

Corolario 3.1.3 *Las funciones de iteración de valores satisfacen la EE*

$$V_n'(x) = \alpha\delta E\left[V_{n-1}'\left(\left(\frac{xV_n'(x)-1}{V_n'(x)}\right)^{\delta}\xi\right)\xi\right]\left(\frac{xV_n'(x)-1}{V_n'(x)}\right)^{\delta-1}, \qquad (3.8)$$

para cada $n \geq 2$ *y* $x \in (0, +\infty)$.

Demostración. Para poder usar el Teorema 3.1.2 nótese que es suficiente identificar a H, h y h' y sustituir en la ecuación (3.3). Derivando a la función de utilidad con respecto a a, se tiene que

$$u'(a) = \frac{1}{a},$$

$a \in (0, x^{\delta})$ entonces,

$$H(a) = \frac{1}{a},$$

$a \in (0, x^{\delta})$. De esta forma, por la ecuación (3.6) se llega a que:

$$H(V_n'(x)) = \frac{1}{V_n'(x)},$$

$x \in (0, +\infty)$.

Por otro lado,

$$h\left(x - \frac{1}{V_n'(x)}\right) = h\left(\frac{xV_n'(x)-1}{V_n'(x)}\right) = \left(\frac{xV_n'(x)-1}{V_n'(x)}\right)^{\delta}, \qquad (3.9)$$

y

$$h'\left(x - \frac{1}{V_n'(x)}\right) = h'\left(\frac{xV_n'(x)-1}{V_n'(x)}\right) = \delta\left(\frac{xV_n'(x)-1}{V_n'(x)}\right)^{\delta-1}, \qquad (3.10)$$

$x \in (0, +\infty)$. Así, sustituyendo las ecuaciones (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.3), se tiene la ecuación (3.8). ■

Teorema 3.1.4 *Para el caso del monopolio la función de valor óptimo y la política óptima están dadas por*

$$V(x) = K \ln x + C,$$

y

$$f(x) = \lambda_M x,$$

respectivamente, para cada $x \in X$ en donde

$$K = \frac{1}{1-\alpha\delta},$$

$$C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\alpha\delta) + \ln(1-\alpha\delta) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right],$$

y

$$\lambda_M = 1-\alpha\delta.$$

Demostración. Primero, nótese que

$$V_1(x) = \delta \ln x,$$

$x \in X$, de esto se sigue que

$$V_1'(x) = \frac{\delta}{x},$$

$x \in (0,+\infty)$. Para $n = 2$, sustituyendo en (3.8) y usando la ecuación anterior, se llega a que

$$\begin{aligned} V_2'(x) &= \alpha E\left[V_1'\left(\left(\frac{xV_2'(x)-1}{V_2'(x)}\right)^{\delta}\xi\right)\xi\right]\delta\left(\frac{xV_2'(x)-1}{V_2'(x)}\right)^{\delta-1} \\ &= \frac{\alpha\delta^2 V_2'(x)}{xV_2'(x)-1}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$V_2'(x) = \frac{\alpha\delta^2+1}{x},$$

$x \in (0,+\infty)$.

Se probará por inducción que para todo $n \geq 2$, $V_n'(x) = \frac{K_n}{x}$. Para esto supóngase que

$$V_{n-1}'(x) = \frac{K_{n-1}}{x}, \tag{3.11}$$

$x \in (0,+\infty)$, donde

$$K_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(\alpha\delta)^i + \alpha^{n-2}\delta^{n-1}.$$

Así, sustituyendo (3.11) en (3.8)

$$V_n'(x) = \frac{\alpha\delta K_{n-1}V_n'(x)}{xV_n'(x)-1},$$

de lo cual se sigue que

$$V_n'(x) = \frac{\alpha\delta K_{n-1} + 1}{x} = \frac{K_n}{x},$$

$x \in (0, +\infty)$, donde $K_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha\delta)^i + \alpha^{n-1}\delta^n$.

De esta forma,

$$V_n(x) = K_n \ln x + C_n,$$

para todo $n \geq 1$, $x \in X$. Ahora, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$V_n(x) = K_n \ln x + C_n \to V(x) = K \ln x + C,$$

$x \in X$, donde

$$K = \lim_{n\to\infty} K_n = \frac{1}{1-\alpha\delta}. \tag{3.12}$$

Así, para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} K \ln x + C &= \max_{a \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a + \alpha E \left[V\left((x-a)^\delta \xi \right) \right] \right\} \\ &= \max_{a \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a + \alpha\delta K \ln(x-a) + \alpha\mu K + \alpha C \right\}. \end{aligned}$$

Derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a} - \frac{\alpha\delta K}{x-a} = 0,$$

de la cual despejando y sustituyendo (3.12) se tiene que

$$f(x) = (1 - \alpha\delta)x,$$

$x \in X$.

De esta forma para $x \in X$,

$$\begin{aligned} K \ln x + C &= (1 + \alpha\delta K) \ln x + \alpha\delta K \ln\left(\frac{\alpha\delta K}{\alpha\delta K + 1} \right) - \ln(\alpha\delta K + 1) \\ &\quad + \alpha\mu K + \alpha C. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} K &= 1 + \alpha\delta K \\ &= \frac{1}{1-\alpha\delta} \end{aligned}$$

y

$$C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln(\alpha\delta) + \ln(1-\alpha\delta) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right].$$

■

Obsérvese que cuando la dinámica está dada por $x_{t+1} = h(x_t - a_t)$ se puede probar que la política óptima coincide con la del caso estocástico, de esta forma la trayectoria óptima del sistema de control determinista sigue la siguiente ley

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= h(x_t - f(x_t)) \\ &= (\alpha\delta)^{\delta} x_t^{\delta}. \end{aligned}$$

Se dice que en el sistema hay un estado de equilibrio, si la población de pescados es constante. En otras palabras:

$$x_t = x_{t+1},$$

para todo t. Por lo tanto, si el estado de equilibrio es $\overline{x}$, entonces

$$\overline{x} = (\alpha\delta)^{\delta}\,\overline{x}^{\delta},$$

de lo cual se sigue que

$$\overline{x} = (\alpha\delta)^{\frac{\delta}{1-\delta}}.$$

Dicho sistema se representa en la Figura 1.

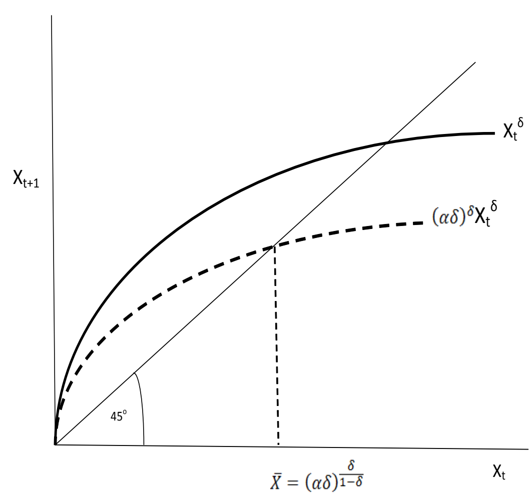

Figura 1

En la Figura 1, la curva x_t^δ representa la función de crecimiento de pescado y la curva punteada $(\alpha\delta)^\delta x_t^\delta$, representa la trayectoria óptima para el monopolio. Por lo tanto, habrá un equilibrio cuando se cruza la recta $x_t = x_{t+1}$ con la trayectoria óptima.

3.2. Maximización de la Utilidad en un Duopolio

En esta sección se dará un ejemplo de como usar la EE en juegos estocásticos.

Como caso particular del problema que se presentó en el capítulo anterior, sean $h(x) = x^\delta$, $u_1(a_1) = \ln a_1$ y $u_2(a_2) = \ln a_2$ para cada $a_i \in A_i(x)$, $i = 1, 2$, donde $X = A_1 = A_2 = [0, \infty)$ y $A_1(x) = A_2(x) = [0, x^\delta]$, para $x \in X$. Luego, la dinámica está dada por $x_{t+1} = (x_t - a_{1,t} - a_{2,t})^\delta \xi_t$, $t = 0, 1, ...$ (véase Subsección 2.2.2).

Nótese, que en este modelo no se cumplen las Condiciones 1.3.9 (a) y (c), ya que, los espacios de acciones no son conjuntos compactos y las funciones de utilidad no están acotadas. A pesar de ello se determina un equilibrio de Nash, aún cuando el horizonte es infinito.

De esta forma se tiene que las ecuaciones (2.12) y (2.13) presentan la siguiente forma

$$V_n(x) = \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E \left[V_{n-1} \left((x - a_1 - g_n(x))^\delta \xi \right) \right] \right\}, \tag{3.13}$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \max_{a_2 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_2 + \alpha_2 E \left[\widehat{V}_{n-1} \left((x - f_n(x) - a_2)^\delta \xi \right) \right] \right\}, \tag{3.14}$$

con $V_0(x) = \widehat{V}_0(x) = 0$.

Lema 3.2.1 *Las funciones de iteración de valores satisfacen las siguientes Ecuaciones de Euler*

$$\begin{aligned} V_n'(x) &= \alpha_1 \delta E \left[V_{n-1}' \left(\left(x - \frac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \frac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)} \right)^\delta \xi \right) \xi \right] \qquad (3.15) \\ & \cdot \left(x - \frac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \frac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)} \right)^{\delta - 1} (1 - g_n'(x)), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{V}_n'(x) &= \alpha_2\delta E\left[\widehat{V}_{n-1}'\left(\left(x-\frac{1-g_n'(x)}{V_n'(x)}-\frac{1-f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)}\right)^{\delta}\xi\right)\xi\right] \\ &\quad\cdot\left(x-\frac{1-g_n'(x)}{V_n'(x)}-\frac{1-f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)}\right)^{\delta-1}\left(1-f_n'(x)\right),\end{aligned} \tag{3.16}$$

para el país 1 *y* 2 *respectivamente, para cada* $n \geq 2$ *y* $x \in (0,+\infty)$.

Demostración. Para el caso del país 1, derivando con respecto a a_1 la parte que está entre llaves de la ecuación (3.13), se tiene que

$$\frac{1}{a_1}-\alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left((x-a_1-g_n(x))^{\delta}\xi\right)\xi\right]\delta(x-a_1-g_n(x))^{\delta-1}=0,$$

para cada $a_1 \in (0,x^{\delta})$. En particular, la ecuación anterior se cumple para el maximizador $f_n \in \mathbb{F}$, i.e.

$$\frac{1}{f_n(x)}=\alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left((x-f_n(x)-g_n(x))^{\delta}\xi\right)\xi\right]\delta(x-f_n(x)-g_n(x))^{\delta-1}, \tag{3.17}$$

$x \in (0,+\infty)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}V_n'(x) &= \alpha_1 E\left[V_{n-1}'\left((x-f_n(x)-g_n(x))^{\delta}\xi\right)\xi\right] \\ &\quad\cdot\delta(x-f_n(x)-g_n(x))^{\delta-1}(1-g_n'(x)).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Evaluando (3.18) en (3.17) se llega a que

$$V_n'(x)=\frac{1-g_n'(x)}{f_n(x)},$$

$x \in (0,+\infty)$, de lo cual se sigue que

$$f_n(x)=\frac{1-g_n'(x)}{V_n'(x)}. \tag{3.19}$$

Análogamente, se llega a que

$$g_n(x)=\frac{1-f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)}, \tag{3.20}$$

$x \in (0,+\infty)$.

Luego sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.20) en (3.18) se obtiene (3.15). Similarmente se tiene la ecuación (3.16). ■

Teorema 3.2.2 *Las funciones de valor óptimo y las políticas óptimas están dadas por*

$$V(x) = K \ln x + C, \qquad \widehat{V}(x) = \widehat{K} \ln x + \widehat{C}$$

y

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x, \\ g(x) &= \frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$, donde

$$K = \frac{1}{1-\alpha_1\delta},$$

$$\widehat{K} = \frac{1}{1-\alpha_2\delta},$$

y

$$C = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) \\ +\ln\left(\frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)+\frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta} \end{array}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha_2}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) \\ +\ln\left(\frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right)+\frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta} \end{array}\right].$$

Además, (f_n, g_n) es un equilibrio de Cournot-Nash para el juego.

Demostración. Obsérvese, que cuando $n = 1$, se tiene que $V_1(x) = \widehat{V}_1(x) = \delta \ln x$, entonces $V_1'(x) = \widehat{V}_1'(x) = \frac{\delta}{x}$, para cada $x \in (0, +\infty)$.

Para $n = 2$, en el caso del país 1, usando la ecuación (3.15)

$$\begin{aligned} V_2'(x) &= \alpha_1 E\left[V_1'\left((x - f_2(x) - g_2(x))^\delta \xi\right)\xi\right] \\ &\quad \cdot\delta(x - f_2(x) - g_2(x))^{\delta-1}(1 - g_2'(x)) \\ &= \frac{\alpha_1\delta^2(1 - g_2'(x))}{x - f_2(x) - g_2(x)}. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.20) para $n = 2$, se tiene que

$$V_2'(x) = \frac{\alpha_1\delta^2(1 - g_2'(x))}{x - \frac{1-g_2'(x)}{V_2'(x)} - \frac{1-f_2'(x)}{\widehat{V}_2'(x)}},$$

de lo cual se sigue que

$$V_2'(x) = \frac{(\alpha_1\delta^2+1)(1-g_2'(x))\widehat{V}_2'(x)}{x\widehat{V}_2'(x)-(1-f_2'(x))}. \tag{3.21}$$

Similarmente

$$\widehat{V}_2'(x) = \frac{(\alpha_2\delta^2+1)(1-f_2'(x))V_2'(x)}{xV_2'(x)-(1-g_2'(x))}. \tag{3.22}$$

Luego, sustituyendo (3.22) en (3.21) se llega a que

$$V_2'(x) = \frac{\left[(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)-1\right](1-g_2'(x))}{\alpha_2\delta^2 x}, \tag{3.23}$$

nuevamente sustituyendo (3.23) en (3.22) se concluye que

$$\widehat{V}_2'(x) = \frac{\left[(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)-1\right](1-f_2'(x))}{\alpha_1\delta^2 x}, \tag{3.24}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$.

Pero de las ecuaciones (3.19) y (3.20) se llega a que

$$1-f_2'(x) = g_2(x)\widehat{V}_2'(x) \tag{3.25}$$

y

$$1-g_2'(x) = f_2(x)V_2'(x), \tag{3.26}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$.

Otra vez sustituyendo, (3.26) en (3.23) se tiene que

$$V_2'(x) = \frac{\left[(\alpha_1\delta^2+1)(\alpha_2\delta^2+1)-1\right] f_2(x)V_2'(x)}{\alpha_2\delta^2 x},$$

de lo cual se sigue que

$$f_2(x) = \frac{\alpha_2 x}{\alpha_1\alpha_2\delta^2+\alpha_1+\alpha_2},$$

para cada $x \in X$. Análogamente, sustituyendo (3.25) en (3.24)

$$g_2(x) = \frac{\alpha_1 x}{\alpha_1\alpha_2\delta^2+\alpha_1+\alpha_2},$$

para cada $x \in X$.

Luego de lo anterior se sigue que

$$V_2'(x) = \frac{\alpha_1\delta^2 + 1}{x},$$

y

$$\widehat{V}_2'(x) = \frac{\alpha_2\delta^2 + 1}{x},$$

para cada $x \in (0, +\infty)$.

Se probará por inducción que $V_n'(x) = \frac{K_n}{x}$ y $\widehat{V}_n'(x) = \frac{\widehat{K}_n}{x}$, para todo $n \geq 2$, para esto supóngase que

$$V_{n-1}'(x) = \frac{K_{n-1}}{x}, \tag{3.27}$$

y

$$\widehat{V}_{n-1}'(x) = \frac{\widehat{K}_{n-1}}{x},$$

para cada $x \in (0, +\infty)$, donde

$$K_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} (\alpha_1\delta)^i + \alpha_1^{n-2}\delta^{n-1},$$

y

$$\widehat{K}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} (\alpha_2\delta)^i + \alpha_2^{n-2}\delta^{n-1}.$$

Entonces, para el jugador 1 sustituyendo (3.27) en (3.15)

$$V_n'(x) = \frac{\alpha_1\delta K_{n-1}(x - f_n(x) - g_n(x))^{\delta-1}(1 - g_n'(x))}{(x - f_n(x) - g_n(x))^{\delta}},$$

para cada $x \in (0, +\infty)$. Luego, sustituyendo de nuevo las ecuaciones (3.19) y (3.20)

$$V_n'(x) = \frac{\alpha_1\delta K_{n-1}(1 - g_n'(x))}{x - \frac{1 - g_n'(x)}{V_n'(x)} - \frac{1 - f_n'(x)}{\widehat{V}_n'(x)}},$$

análogamente como en el caso $n = 2$, se tiene que

$$V_n'(x) = \frac{(\alpha_1\delta K_{n-1} + 1)(1 - g_n'(x))\widehat{V}_n'(x)}{x\widehat{V}_n'(x) - (1 - f_n'(x))},$$

y

$$\widehat{V}_n'(x) = \frac{(\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1} + 1)(1 - f_n'(x))V_n'(x)}{xV_n'(x) - (1 - g_n'(x))}.$$

Una vez más, haciendo los mismos pasos que en el caso $n = 2$ se tiene que

$$V_n'(x) = \frac{\left[\alpha_1\alpha_2\delta^2 K_{n-1}\widehat{K}_{n-1} - \alpha_1\delta K_{n-1} - \alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\right](1 - g_n'(x))}{\alpha_2\widehat{K}_{n-1}x} \tag{3.28}$$

y

$$\widehat{V}_n'(x) = \frac{\left[\alpha_1\alpha_2\delta^2 K_{n-1}\widehat{K}_{n-1} - \alpha_1\delta K_{n-1} - \alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\right](1 - f_n'(x))}{\alpha_1 K_{n-1}x}. \tag{3.29}$$

Por otra parte, de las ecuaciones (3.19) y (3.20) se tiene respectivamente que

$$1 - f_n'(x) = g_n(x)\widehat{V}_n'(x) \tag{3.30}$$

y

$$1 - g_n'(x) = f_n(x)V_n'(x), \tag{3.31}$$

para cada $x \in (0, +\infty)$.

Luego, sustituyendo (3.31) y (3.30) en (3.28) y (3.29) respectivamente se obtiene

$$f_n(x) = \frac{\alpha_2\widehat{K}_{n-1}x}{\alpha_1\alpha_2\delta K_{n-1}\widehat{K}_{n-1} + \alpha_1 K_{n-1} + \alpha_2\widehat{K}_{n-1}},$$

y

$$g_n(x) = \frac{\alpha_1 K_{n-1}x}{\alpha_1\alpha_2\delta K_{n-1}\widehat{K}_{n-1} + \alpha_1 K_{n-1} + \alpha_2\widehat{K}_{n-1}},$$

para cada $x \in X$.

Por lo tanto,

$$V_n'(x) = \frac{\alpha_1\delta K_{n-1} + 1}{x} = \frac{K_n}{x},$$

y

$$\widehat{V}_n'(x) = \frac{\alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1} + 1}{x} = \frac{\widehat{K}_n}{x},$$

donde $K_n = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_1\delta)^i + \alpha_1^{n-1}\delta^n$, $\widehat{K}_n = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_2\delta)^i + \alpha_2^{n-1}\delta^n$. De esta forma,

$$V_n(x) = K_n \ln x + C_n,$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n,$$

para cada $x \in X$.

Ahora, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se llega a que

$$V_n(x) = K_n \ln x + C_n \to V(x) = K \ln x + C,$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n \to \widehat{V}(x) = \widehat{K} \ln x + \widehat{C},$$

para cada $x \in X$, donde

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n\to\infty} K_n \\ &= \frac{1}{1-\alpha_1\delta} \end{aligned} \tag{3.32}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= \lim_{n\to\infty} \widehat{K}_n \\ &= \frac{1}{1-\alpha_2\delta} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Así,

$$\begin{aligned} K \ln x + C &= \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E \left[V \left((x - a_1 - g(x))^\delta \xi \right) \right] \right\} \\ &= \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 \delta K \ln(x - a_1 - g(x)) + \alpha_1 \mu K + \alpha_1 C \right\}, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1 \delta K}{x - a_1 - g(x)} = 0,$$

de lo cual se tiene que

$$f(x) = \frac{x - g(x)}{1 + \alpha_1 \delta K}.$$

Similarmente

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{1 + \alpha_2 \delta \widehat{K}}.$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores simultáneamente, se llega a que

$$f(x) = \frac{\alpha_2 \widehat{K}}{\alpha_1 \alpha_2 \delta K \widehat{K} + \alpha_1 K + \alpha_2 \widehat{K}} x \tag{3.34}$$

y

$$g(x) = \frac{\alpha_1 K}{\alpha_1 \alpha_2 \delta K \widehat{K} + \alpha_1 K + \alpha_2 \widehat{K}} x, \tag{3.35}$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones (3.32) y (3.33) en las ecuaciones anteriores (3.34) y (3.35) se concluye que

$$f(x) = \frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x$$

y

$$g(x) = \frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}x,$$

para cada $x \in X$.

De esta forma, para $x \in X$,

$$K\ln x + C = (1+\alpha_1\delta K)\ln x + \ln\left(\frac{\alpha_2\widehat{K}}{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K} + \alpha_1 K + \alpha_2\widehat{K}}\right)$$
$$+\alpha_1\delta K\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K}}{\alpha_1\alpha_2\delta K\widehat{K} + \alpha_1 K + \alpha_2\widehat{K}}\right) + \alpha_1\left(K\mu + C\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K &= 1+\alpha_1\delta K \\ &= \frac{1}{1-\alpha_1\delta}, \end{aligned}$$

y

$$C = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) \\ +\ln\left(\frac{\alpha_2\delta(1-\alpha_1\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) + \frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta} \end{array}\right],$$

similarmente

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= 1+\alpha_2\delta\widehat{K} \\ &= \frac{1}{1-\alpha_2\delta} \end{aligned}$$

y

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha_2}\left[\begin{array}{c} \frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^2}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) \\ +\ln\left(\frac{\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)}{1-(1-\alpha_1\delta)(1-\alpha_2\delta)}\right) + \frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta} \end{array}\right].$$

Aún más, (f_n, g_n) cumple con la definición 1.3.8, y como también tienen las características (1), (2), (3), (4) y (5) del caso estático, se tiene que es un equilibrio de Cournot-Nash. ∎

En el caso particular, cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.2.3 *Las funciones de valor óptimo son iguales y las políticas óptimas también son iguales, y además están dadas por*

$$V(x) = \widehat{V}(x) = K \ln x + C,$$

y

$$f(x) = g(x) = \lambda_C x$$

respectivamente para $x \in X$, donde

$$K = \frac{1}{1-\alpha\delta},$$

$$C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln\left(\frac{\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right) + \ln\left(\frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right]$$

y

$$\lambda_C = \frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}.$$

Además, (f_n, g_n) es un equilibrio de Cournot-Nash.

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2.1, sólo basta hacer la siguiente sustitución $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. ■

Similarmente, como en el caso del monopolio, cuando la dinámica está dada por $x_{t+1} = h(x_t - a_{1t} - a_{2t})$ se puede probar que la política óptima coincide con la del caso estocástico, de esta forma la trayectoria óptima del sistema de control determinista está dada por

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= h(x_t - f(x_t) - g(x_t)) \\ &= h(x_t - 2g(x_t)) \\ &= x_t^{\delta}\left(\frac{\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right)^{\delta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\overline{\overline{x}}$ denota el estado de equilibrio, se tiene que

$$\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}}^{\delta}\left(\frac{\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right)^{\delta},$$

de donde se llega a que

$$\overline{\overline{x}} = \left(\frac{\alpha\delta}{2-\alpha\delta}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}}.$$

Esta situación se describe en la Figura 2.

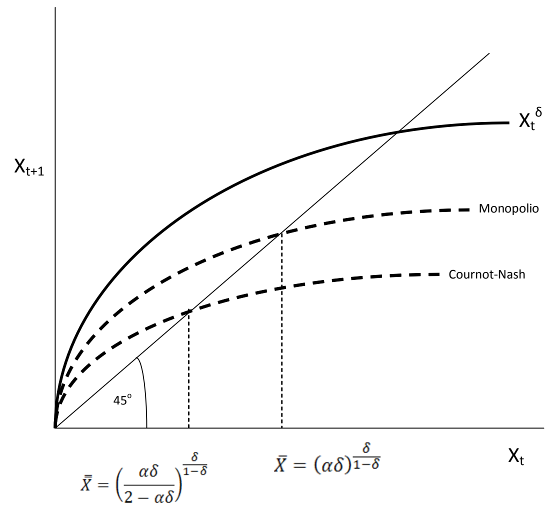

Figura 2

En la Figura 2, se observa que la trayectoria óptima del monopolio está por arriba de la trayectoria óptima del duopolio para el caso de Cournot-Nash, es decir, el duopolio para el caso de Cournot-Nash, consume más pescado que el monopolio.

3.3. Equilibrio Dinámico de Stackelberg

Análogamente, como en el caso de Cournot supóngase que la economía presenta las mismas características del modelo presentado en la Sección 3.2. Pero ahora, supóngase que el país 1 es el líder y el país 2 es el seguidor y que existen $f_n \in \mathbb{F}$ y $g_n \in \mathbb{F}$ tales que cumplen con

$$V_n(x) = \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E \left[V_{n-1} \left((x - a_1 - g_n(a_1))^\delta \xi \right) \right] \right\} \tag{3.36}$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \max_{a_2 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_2 + \alpha_2 E \left[\widehat{V}_{n-1} \left((x - f_n(x) - a_2)^\delta \xi \right) \right] \right\}, \tag{3.37}$$

con $V_0(x) = \widehat{V}_0(x) = 0$.

Teorema 3.3.1 *Para el caso de Stackelberg, se cumple que las funciones de valor óptimo y políticas óptimas están dadas por*

$$V(x) = K \ln x + C, \qquad \widehat{V}(x) = \widehat{K} \ln x + \widehat{C}$$

y

$$f(x) = (1-\alpha_1\delta)\, x, \qquad g(f(x)) = \alpha_1\delta\,(1-\alpha_2\delta)\, x$$

para cada $x \in X$, *donde*

$$K = \frac{1}{1-\alpha_1\delta},$$

$$\widehat{K} = \frac{1}{1-\alpha_2\delta},$$

y

$$C = \frac{1}{1-\alpha_1}\left[\frac{\alpha_1\delta}{1-\alpha_1\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right) + \ln\left(1-\alpha_1\delta\right) + \frac{\alpha_1\mu}{1-\alpha_1\delta}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha_2}\left[\frac{\alpha_2\delta}{1-\alpha_2\delta}\ln\left(\alpha_1\alpha_2\delta^2\right) + \ln\left(\alpha_1\delta(1-\alpha_2\delta)\right) + \frac{\alpha_2\mu}{1-\alpha_2\delta}\right].$$

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. De las ecuaciones (3.36) y (3.37) se sigue que $V_1(x) = \widehat{V}_1(x) = \delta \ln x$. Luego, si $n = 2$ para el país 2 se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{V}_2(x) &= \max_{a_2 \in [0, x^\delta]} \left\{\ln a_2 + \alpha_2 E\left[\widehat{V}_1\left((x - f_2(x) - a_2)^\delta \xi\right)\right]\right\} \\ &= \max_{a_2 \in [0, x^\delta]} \left\{\ln a_2 + \alpha_2\delta^2 \ln(x - f_2(x) - a_2) + \alpha_2\delta\mu\right\} \end{aligned}$$

Derivando la parte que está entre llaves se tiene que

$$\frac{1}{a_2} - \frac{\alpha_2\delta^2}{x - f_2(x) - a_2} = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$g_2(f_2(x)) = \frac{x - f_2(x)}{\alpha_2\delta^2 + 1}. \tag{3.38}$$

Luego, sustituyendo la ecuación anterior (3.38) en (3.36) para $n = 2$, se llega a que

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{\ln a_1 + \alpha_1 E\left[V_1\left((x - a_1 - g_2(a_1))^\delta \xi\right)\right]\right\} \\ &= \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{\ln a_1 + \alpha_1\delta^2 \ln\left(\frac{\alpha_2\delta^2\,(x - a_1)}{\alpha_2\delta^2 + 1}\right) + \alpha_1\delta\mu\right\}. \end{aligned}$$

Luego, derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1\delta^2}{\frac{\alpha_2\delta^2(x-a_1)}{\alpha_2\delta^2+1}}\frac{\alpha_2\delta^2}{\alpha_2\delta^2+1} = 0$$

la cual implica que

$$f_2(x) = \frac{x}{\alpha_1\delta^2 + 1}. \tag{3.39}$$

Sustituyendo (3.39) en (3.38)

$$g_2(f_2(x)) = \frac{\alpha_1\delta^2 x}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \left(1+\alpha_1\delta^2\right)\ln x - \ln\left(\alpha_1\delta^2+1\right) \\ &\quad +\alpha_1\delta^2 \ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^4}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}\right) + \alpha_1\delta\mu \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{V}_2(x) &= \left(1+\alpha_2\delta^2\right)\ln x + \ln\left(\frac{\alpha_1\delta^2}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}\right) \\ &\quad +\alpha_2\delta^2 \ln\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\delta^4}{\left(\alpha_1\delta^2+1\right)\left(\alpha_2\delta^2+1\right)}\right) + \alpha_2\delta\mu. \end{aligned}$$

Ahora, se probará por inducción que $V_n(x) = K_n \ln x + C_n$, $\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n$. Para esto, supóngase que:

$$V_{n-1}(x) = K_{n-1}\ln x + C_{n-1},$$

y

$$\widehat{V}_{n-1}(x) = \widehat{K}_{n-1}\ln x + \widehat{C}_{n-1},$$

donde

$$K_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(\alpha_1\delta)^i + \alpha_1^{n-2}\delta^{n-1}$$

y

$$\widehat{K}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(\alpha_2\delta)^i + \alpha_2^{n-2}\delta^{n-1}.$$

Así, para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \widehat{V}_n(x) &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2 + \alpha_2 E\left[\widehat{K}_{n-1}\ln\left((x-f_n(x)-a_2)^\delta\xi\right)+\widehat{C}_{n-1}\right]\right\} \\ &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]}\left\{\ln a_2 + \alpha_2\delta\widehat{K}_{n-1}\ln(x-f_n(x)-a_2)+\alpha_2\widehat{C}_{n-1}\right\}, \end{aligned}$$

derivando la parte que está dentro de las llaves se tiene que

$$\frac{1}{a_2} - \frac{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1}}{x - f_n(x) - a_2} = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$g_n(f_n(x)) = \frac{x - f_n(x)}{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1}. \tag{3.40}$$

Luego, sustituyendo la ecuación anterior en (3.36) se llega a que

$$\begin{aligned} & V_n(x) \\ = & \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E \left[V_{n-1} \left((x - a_1 - g_2(a_1))^\delta \xi \right) \right] \right\} \\ = & \max_{a_1 \in [0, x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 \delta K_{n-1} \ln \left(\frac{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} (x - a_1)}{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1} \right) + \alpha_1 (K_{n-1} \mu + C_{n-1}) \right\}, \end{aligned}$$

luego, derivando la parte que está entre llaves en la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1 \delta K_{n-1}}{\frac{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} (x - a_1)}{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1}} \frac{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1}}{\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1} = 0$$

lo cual implica que

$$f_n(x) = \frac{x}{\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1}. \tag{3.41}$$

Sustituyendo (3.41) en (3.40)

$$g_n(f_n(x)) = \frac{\alpha_1 \delta K_{n-1} x}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1) \left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1 \right)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & V_n(x) = (1 + \alpha_1 \delta K_{n-1}) \ln x + \\ & \alpha_1 \delta K_{n-1} \ln \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 K_{n-1} \widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1) \left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1 \right)} \right) \\ & - \ln (\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1) + \alpha_1 \mu K_{n-1} + \alpha_1 C_{n-1} \end{aligned}$$

y

$$
\widehat{V}_n(x) = \left(1 + \alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1}\right) \ln x + \ln \left(\frac{\alpha_1 \delta K_{n-1}}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1)\left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1\right)} \right)
$$
$$
+\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} \ln \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 K_{n-1} \widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1)\left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1\right)} \right)
$$
$$
+\alpha_2 \mu \widehat{K}_{n-1} + \alpha_2 \widehat{C}_{n-1}.
$$

Y así

$$
V_n(x) = K_n \ln x + C_n,
$$

y

$$
\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n,
$$

con

$$
K_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_1 \delta)^i + \alpha_1^{n-1} \delta^n,
$$

$$
\widehat{K}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_2 \delta)^i + \alpha_2^{n-1} \delta^n
$$

y

$$
\begin{aligned}
C_n &= \alpha_1 \delta K_{n-1} \ln \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 K_{n-1} \widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1)\left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1\right)} \right) \\
&\quad - \ln(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1) + \alpha_1 \mu K_{n-1} + \alpha_1 C_{n-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{C}_n &= \ln \left(\frac{\alpha_1 \delta K_{n-1}}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1)\left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1\right)} \right) \\
&\quad +\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} \ln \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 K_{n-1} \widehat{K}_{n-1}}{(\alpha_1 \delta K_{n-1} + 1)\left(\alpha_2 \delta \widehat{K}_{n-1} + 1\right)} \right) \\
&\quad +\alpha_2 \mu \widehat{K}_{n-1} + \alpha_2 \widehat{C}_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Tomando, el límite cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$
V_n(x) = K_n \ln x + C_n \to V(x) = K \ln x + C
$$

y

$$\widehat{V}_n(x) = \widehat{K}_n \ln x + \widehat{C}_n \rightarrow \widehat{V}(x) = \widehat{K} \ln x + \widehat{C},$$

donde

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n\to\infty} K_n \\ &= \frac{1}{1-\alpha_1\delta} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{K} &= \lim_{n\to\infty} \widehat{K}_n \\ &= \frac{1}{1-\alpha_2\delta}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \widehat{K}\ln x + \widehat{C} &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]} \left\{ \ln a_2 + \alpha_1 E\left[V\left((x - f(x) - a_2)^\delta \xi \right)\right]\right\} \\ &= \max_{a_2\in[0,x^\delta]} \left\{ \ln a_2 + \alpha_1 \widehat{K} \ln(x - f(x) - a_2) + \alpha_2\mu\widehat{K} + \alpha_2\widehat{C} \right\}, \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{1}{a_2} - \frac{\alpha_1\delta\widehat{K}}{x - a_2 - g(x)} = 0,$$

de lo cual se tiene que

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{1 + \alpha_2\delta\widehat{K}}.$$

Sustituyendo, la ecuación anterior en (3.36) se tiene que

$$\begin{aligned} & K\ln x + C \\ = \ & \max_{a_1\in[0,x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1 E\left[V_{n-1}\left((x - a_1 - g(a_1))^\delta \xi \right)\right]\right\} \\ = \ & \max_{a_1\in[0,x^\delta]} \left\{ \ln a_1 + \alpha_1\delta K \ln\left(\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}\,(x - a_1)}{\alpha_2\delta\widehat{K} + 1} \right) + \alpha_1 K\mu + \alpha_1 C \right\}, \end{aligned}$$

luego, derivando la parte que está entre llaves de la ecuación anterior se llega a que

$$\frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_1\delta K}{\frac{\alpha_2\delta\widehat{K}(x-a_1)}{\alpha_2\delta\widehat{K}+1}} \frac{\alpha_2\delta\widehat{K}}{\alpha_2\delta\widehat{K}+1} = 0$$

lo cual implica que

$$f_n(x) = \frac{x}{\alpha_1 \delta K + 1}.$$

Entonces,

$$f(x) = (1 - \alpha_1 \delta)\, x,$$

de esto se sigue que

$$g(f(x)) = \alpha_1 \delta\, (1 - \alpha_2 \delta)\, x.$$

Además,

$$K \ln x + C = \left(\frac{1}{1 - \alpha_1 \delta} \right) \ln x +$$
$$\frac{\alpha_1 \delta}{1 - \alpha_1 \delta} \ln (\alpha_1 \alpha_2 \delta) - \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha_1 \delta} \right) + \frac{\alpha_1 \mu}{1 - \alpha_1 \delta} + \alpha_1 C$$

y

$$\widehat{K} \ln x + \widehat{C} = \left(\frac{1}{1 - \alpha_2 \delta} \right) \ln x + \ln (\alpha_1 \delta (1 - \alpha_2 \delta))$$
$$+ \frac{\alpha_2 \delta}{1 - \alpha_2 \delta} \ln \left(\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 \right) + \frac{\alpha_2 \mu}{1 - \alpha_2 \delta} + \alpha_2 \widehat{C}.$$

De donde también se obtiene que

$$C = \frac{1}{1 - \alpha_1} \left[\frac{\alpha_1 \delta}{1 - \alpha_1 \delta} \ln \left(\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 \right) + \ln (1 - \alpha_1 \delta) + \frac{\alpha_1 \mu}{1 - \alpha_1 \delta} \right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1 - \alpha_2} \left[\frac{\alpha_2 \delta}{1 - \alpha_2 \delta} \ln \left(\alpha_1 \alpha_2 \delta^2 \right) + \ln (\alpha_1 \delta (1 - \alpha_2 \delta)) + \frac{\alpha_2 \mu}{1 - \alpha_2 \delta} \right].$$

■

En el caso particular, cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.3.2 *Las funciones de valor óptimo y las políticas óptimas están dadas por*

$$V(x) = K \ln x + C, \qquad \widehat{V}(x) = K \ln x + \widehat{C}$$

y

$$f(x) = \lambda_L x, \qquad g(f(x)) = \lambda_S x$$

para cada $x \in X$, donde

$$K = \frac{1}{1 - \alpha \delta},$$

y

$$C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln\left(\alpha^2\delta^2\right) + \ln\left(1-\alpha\delta\right) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right],$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\delta}{1-\alpha\delta}\ln\left(\alpha^2\delta^2\right) + \ln\left(\alpha\delta(1-\alpha\delta)\right) + \frac{\alpha\mu}{1-\alpha\delta}\right],$$

$$\lambda_L = (1-\alpha\delta) \text{ y } \lambda_S = \alpha\delta(1-\alpha\delta).$$

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 3.3.1, sólo basta hacer la sustitución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. ■

Observación 3.3.3 *1. Para el caso del monopolio la política óptima está dada por $f_M(x) = \lambda_M x$ y para el caso del duopolio la política de Cournot-Nash para cada país es $g_C(x) = \lambda_C x$. Obsérvese que*

$$\lambda_M = 1-\alpha\delta > \lambda_C = \frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}, \tag{3.42}$$

y

$$\lambda_M < 2\lambda_C. \tag{3.43}$$

De las relaciones (3.42) y (3.43) se concluye que en el duopolio, un sólo país consume menos que el país en el monopolio. Sin embargo en el duopolio los dos países juntos, consumen más que el país del monopolio.

2. Para el caso de Stackelberg se tiene que las políticas óptimas están dadas por $f_L(x) = \lambda_L x$, $g_S(f_L(x)) = \lambda_S x$ la política óptima del jugador líder y el jugador seguidor, respectivamente. Nótese que

$$\lambda_L = \lambda_M = 1-\alpha\delta > \lambda_C = \frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}, \tag{3.44}$$

y

$$\lambda_S = \alpha\delta(1-\alpha\delta) < \lambda_C = \frac{1-\alpha\delta}{2-\alpha\delta}. \tag{3.45}$$

Además,

$$\lambda_M < 2\lambda_C < \lambda_L + \lambda_S. \tag{3.46}$$

De la relación (3.44) se concluye que para el duopolio un sólo país del caso de Cournot-Nash consume menos que el líder en el caso de Stackelberg. Por otra parte, (3.45) dice que el país seguidor, en el caso de Stackelberg, consume menos que un sólo país del caso de Cournot-Nash. Además, la desigualdad (3.46) concluye que el país en el monopolio consume menos que los dos países juntos del caso de Cournot-Nash, y que estos consumen menos que los dos países juntos del caso de Stackelberg.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudiaron los juegos estocásticos de suma no cero con criterio de pago descontado para dos jugadores. En esta clase de juegos se prueba la existencia de un equilibrio de Nash, mediante el uso de Programación Dinámica. Este estudio se llevó a cabo para proponer una versión de la Ecuación de Euler (EE) en el contexto de juegos estocásticos, la cual es una de las principales aportaciones en el trabajo de tesis.

Posteriormente se abordó un modelo económico con el objetivo de ejemplificar el uso de la EE, el cual se planteó en el contexto de un problema de pesquerías (fisheries). En este caso se proponen funciones de recompensa presentadas como la utilidad de cada país y una ley de transición dada en función del crecimiento de la población de pescado, donde se supone que cada país tiene su propio factor de descuento. De esta manera se encontró un equilibrio de tipo Cournot-Nash.

Por otra parte, también se estudiaron ejemplos aplicados a Economía, abordados en el contexto de pesquerías, para el caso del monopolio usando la EE y para el caso duopolio usando PD, con el objetivo de determinar un equilibrio de tipo Stackelberg. Posteriormente, se hizo una comparación con el caso de Cournot-Nash, donde se concluyó que la población de peces disminuirá más en el caso del duopolio que en el monopolio. Sin embargo, en el duopolio, para el caso de Stackelberg, la población de peces disminuirá más que en el caso de Cournot-Nash.

A lo largo del estudio del presente trabajo surgieron algunos problemas nuevos, los cuales se pretenden desarrollar a futuro, tales como:

1. Buscar condiciones las cuales garanticen la existencia de equilibrios de Nash, para juegos estocásticos con criterio de pago descontado en espacios de Borel con horizonte infinito.

2. Estudiar procedimientos de aproximación para la EE en el contexto de juegos estocásticos.

3. Hacer un estudio de equilibrios de Nash para otros criterios de rendimiento.

Apéndice A

La topología de convergencia débil

Definición A.0.4 *Sea $\mathbb{P}(X)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(X, \mathfrak{B}(X))$, donde X es un espacio métrico. La topología de convergencia débil en el espacio $\mathbb{P}(X)$ es la topología que tiene las siguientes vecindades básicas,*

$$U_\varepsilon (\mu, \{f_1, \ldots, f_k\}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{P}(X) : \left| \int_X f_i d\lambda - \int_X f_i d\mu \right| < \varepsilon, \; i = 1, \ldots, k \right\}$$

para algún elemento $\mu \in \mathbb{P}(X)$, donde ε es positivo y $f_1, \ldots, f_k$ son elementos de $C(X)$ el cual denota el espacio de las funciones continuas y acotadas en X.

Las pruebas de los siguientes resultados se pueden consultar en [7].

Lema A.0.5 *Sea (X, d) un espacio métrico. Supóngase que $\{\mu_n\} \subset \mathbb{P}(X)$ y $\mu \in \mathbb{P}(X)$. Entonces $\mu_n \to \mu$ en la topología de convergencia débil si y sólo si $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ para todo $f \in C(X)$.*

Corolario A.0.6 *Sean X_1 y X_2 espacios métricos. Supóngase que $\left\{\mu_{i,n}\right\}$ es una sucesión en $\mathbb{P}(X_i)$ y $\mu_i \in \mathbb{P}(X_i)$ para $i = 1, 2$. Cada $\mathbb{P}(X_i)$ tiene la topología de convergencia débil. Si*

$$\mu_{i,n} \to \mu_i \text{ para } i = 1, 2$$

entonces

$$\int f d\mu_{1,n} d\mu_{2,n} \to \int f d\mu_1 d\mu_2$$

para todo $f \in C(X_1 \times X_2)$.

Teorema A.0.7 *Sea* (X, d) *es un espacio métrico compacto y separable. Si* $\mathbb{P}(X)$ *tiene la topología de convergencia débil, entonces* $\mathbb{P}(X)$ *es compacto, separable y metrizable.*

Apéndice B

Teorema de Kakutani

Si cada punto x de un espacio X es mapeado en un conjunto no vacío $T(x)$ de un espacio Y, entonces a T se le conoce como multifunción. Se escribe $T : X \twoheadrightarrow Y$ para especificar que esta es una multifunción.

Definición B.0.8 *Sea T una multifunción de un espacio topológico X a un espacio topológico Y. Se dice que T es un K-mapeo de X en Y si*

i) *para cada x en X, $T(x) \subset Y$ es un conjunto compacto y convexo; y*

ii) *la gráfica de T, la cual es definida por*

$$Gr(T) = \{(x, y) : y \in T(x)\},$$

es cerrada en $X \times Y$.

Si i) se cumple, entonces la condición ii) es equivalente a la condición de continuidad superior (u.s.c.), i.e. si $x_n \to x$ en X, $y_n \in T(x_n)$ y $y_n \to y$, entonces $y \in T(x)$.

Definición B.0.9 *Sea $T : X \twoheadrightarrow X$ una multifunción. Se dice que x es un punto fijo de T si $x \in T(x)$.*

Las demostraciones de los siguientes teoremas se pueden consultar en [1], [13], [17] y [33].

Teorema B.0.10 ***(Teorema de Kakutani)*** *Si $T : X \twoheadrightarrow X$ es un K-mapeo, donde X es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^m$ entonces T tiene un punto fijo.*

Teorema B.0.11 ***(Teorema de Glicksberg)*** *Sea $T : X \twoheadrightarrow X$ un K-mapeo, donde X es subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio Hausdorff localmente convexo. Entonces T tiene un punto fijo.*

Sean $T : X \twoheadrightarrow X$ una multifunción y $A \subset Y$, entonces la inversa inferior T^{-1} es definida por

$$T^{-1}(A) := \{x \in X : T(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Teorema B.0.12 *Supóngase que X y Y son espacios de Borel no vacíos. Si $T : X \twoheadrightarrow Y$ es una multifunción compacto valuada, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *$Gr(T)$ es un subconjunto de Borel $X \times Y$;*

b) *$T^{-1}(F)$ es un subconjunto de Borel de X para todo conjunto cerrado $F \subset Y$.*

Apéndice C

Teorema de selección

Observación C.0.13 *Un espacio topológico X se dice que satisface la condición $\mathbb{S}$ si existe una familia numerable $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados tales que separan a los puntos de X, i.e. si x e y son dos puntos distintos de X, entonces existe un conjunto F_n el cual contiene uno de ellos pero no a ambos.*

La condición $\mathbb{S}$ se satisface trivialmente cuando X es un espacio de Borel.

Teorema C.0.14 ***(Teorema de selección)*** *Sea $(S, \mathfrak{F})$ un espacio medible, y X un espacio topológico el cual satisface la condición $\mathbb{S}$. Si $\Theta : S \twoheadrightarrow X$ es una multifunción tal que $\Theta(s)$ es un subconjunto compacto no vacío de X y $\Theta^{-1}(F) \in \mathfrak{F}$ para todo conjunto cerrado de F en X, entonces existe un selector medible ξ para Θ (es decir, una función medible de S a X con $\xi(s) \in \Theta(s)$ para cada $s \in S$).*

La prueba del teorema anterior se puede consultar en [21].

Bibliografía

[1] Aliprantis C. D. and Burkinshaw O., "Principles of Real Analysis". Academic Press. Third Edition ISBN 0120502577. 1998.

[2] Ash R. B. and Doléans-Dade C. A., "Probability and Measure Theory". Academic Press Elsevier. Second Edition ISBN 0120652021. 2005.

[3] Barron E. N., "Game Theory an Introduction". John Wiley. First Edition ISBN 9780470171325. 2007.

[4] Bellman R., "Dynamic Programming". Princeton University Press. First Edition ISBN 9780691079516. 1957.

[5] Bertrand J., "Theorie Mathematique de la Richesse Sociale". Journal des Savants. Vol. 67. pp. 499-508. 1883.

[6] Bertsekas D. P., "Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models". Prentice-Hall. First Edition ISBN 0132215810. 1987.

[7] Bertsekas D. P. and Shreve S. E., "Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case". Athena Scientific. First Edition ISBN 18865290355. 2007.

[8] Cournot A., "Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses". Paris: L. Hachette. Vol. 8. pp. 1801-1877. 1838.

[9] Cruz-Suárez H. and Montes-de-Oca R., "Discounted Markov control processes induced by deterministic systems". Kybernetika (Prague). Vol. 42. pp. 647-664. 2006.

[10] Cruz-Suárez H. and Montes-de-Oca R., "An envelope theorem and some applications to discounted Markov decision processes". Mathematical Methods of Operations Research. Vol. 67. pp. 299-321. 2008.

[11] Dutta P. K. and Sundaram R. K., “The Equilibrium Existence Problem in General Markovian Games”. In Organizations with Incomplete Information: A Tribute to Roy Radner, (M. Majumdar, Ed.), Cambridge University Press, Cambridge and New York. 1998.

[12] Edgeworth F., “La teoría pura del monopolio”. Giornale degli Economisti. Vol. 40. pp. 13-31. 1897.

[13] Fan K., “Fixed Point and Minimax Theorems in locally convex topological linear spaces”. Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A. Vol. 38. pp 121-126. 1952.

[14] De la Fuente A., “Mathematical Methods and Models for Economists”. Cambridge University Press. First Edition ISBN 0521585295. 2000.

[15] Filar J. and Vrieze K., “Competitive Markov Decision Processes”. Springer–Verlag. First Edition ISBN 0387948058. 1997.

[16] Gibbons R., “Un Primer Curso de Teoría de Juegos”. Antoni Bosch. Primera Edición ISBN 9788485855698. 2003.

[17] Glicksberg I., “A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points”. Proc. Amer. Math. Vol. 3. pp. 170-174. 1952.

[18] Hernández-Lerma O. and Lasserre J. B., “Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria”. Springer-Verlag. First Edition ISBN 0387945792. 1996.

[19] Hernández-Lerma O. and Lasserre J. B., “Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes”. Springer-Verlag. First Edition ISBN 0387986944. 1999.

[20] Himmelberg C.J., Parthasarathy T. and Van Vleck F.S., “Optimal Plans for Dynamic Programming Problems”. Mathematics of Operations Research. Vol. 1. pp 390-394. 1976.

[21] Leese S. J., “Measurable Selections and the Uniformization of Souslin Sets”. Amer. J. Math. Vol. 1. pp 19-41. 1978.

[22] Levhari D. and Mirman L. J., “The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution”. The Bell Journal of Economics. Vol. 11. pp. 322-334. 1980.

[23] Mirman L.J., "Dynamic Models of Fishing: A Heuristic Approach". Control Theory in Mathematical Economics. Vol. 47. pp. 39-73. 1979.

[24] Munkres J. R., "Topología". Pearson Educación. Segunda Edición ISBN 0131816292. 2002.

[25] Nash J. F., "Equilibrium Points in n-Person Games". Proceeding of the National Academy of Science U.S.A. Vol. 36. pp. 48-49. 1950.

[26] Nash J. F., "Non-Cooperative Games". Annals of Mathematics. Vol. 54. pp. 286-295. 1951.

[27] Nowak A. S., "On a noncooperative stochastic game played by internally cooperating generations". Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 144. pp. 88-106. 2010.

[28] Pacheco Glez. C. G., "Existence of Nash equilibria in some Markov games with discounted payoff". Morfismos. Vol. 6. pp. 67-87. 2002.

[29] Puterman M. L., "Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming". Wiley. First Edition ISBN 9780471727828. 1994.

[30] Ramirez Reyes F., "Existence of optimal strategies for zero-sum stochastic games with discounted payoff". Morfismos. Vol. 5. pp 63-83. 2001.

[31] Royden H. L., "Real Analysis". Prentice hall. Third Edition ISBN 8120309731. 1988.

[32] Shapley L.S., "Stochastic Games". Princeton University. Vol. 39. pp. 1095-1100. 1953.

[33] Smart D. R., "Fixed Point Theorems". Cambridge University Press. First Edition ISBN 0521298334. 1974.

[34] Sobel M. J., "Non-Cooperative Stochastic Games". Ann. Math. Stat. Vol. 42. pp. 1930-1935. 1971.

[35] Von Neumann J. and Morgenstern O., "Theory Of Games And Economic Behavior". Princeton University Press. Third Edition ISBN 0691130612. 1944.