Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

“Procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio y su aplicación en algunos problemas de finanzas.”

Tesis

para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta:

M.C. Octavio Paredes Pérez

directores de tesis:

Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara
Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
12 de mayo del 2023

Dedicado a mi familia

"La caída de los imperios que aspiran al dominio universal, puede predecirse con probabilidad muy alta por cualquiera versado en el cálculo del azar."

Pierre Simon de Laplace.

Agradecimientos

A mis padres, ustedes han sido siempre el motor que impulsa mis sueños y esperanzas, quienes estuvieron siempre a mi lado en los días y noches más difíciles durante mis horas de estudio. Siempre han sido mis mejores guías de vida. Hoy cuando por fin logro este objetivo, les dedico esto amados padres, como una meta más conquistada. Orgulloso de haberlos elegido como mis padres y que estén a mi lado en este momento tan importante.

A mis sobrinas, por enseñarme que siempre hay que sonreír, en las buenas y en las malas, nunca a darse por vencido.

Todo el trabajo realizado fue posible gracias al apoyo incondicional de mis asesores: Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara y Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, gracias por su paciencia y constancia, este trabajo no lo hubiese logrado tan fácil. Sus consejos fueron siempre útiles cuando no salían de mi pensamiento las ideas para escribir lo que hoy he logrado. Ustedes formaron parte importante de esta historia con sus aportes profesionales que lo caracterizan. Muchas gracias por sus orientaciones y ayuda durante estos cuatro años de aprendizaje, gracias por su respaldo y atención.

A los profesores, Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes y Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, quienes fueron los primeros en guiarme hacia la rama de probabilidad y estadística desde la licenciatura. Sus palabras fueron sabias, sus conocimientos rigurosos y precisos, a ustedes mis profesores y primeros asesores. Gracias por su paciencia, por compartir sus conocimientos de manera profesional e invaluable, por su dedicación perseverancia y tolerancia.

Al jurado integrado por: Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes, Dr. Francisco Tajonar Sanabria, Dr. Fernando Velasco Luna, Dr. Bulmaro Juárez Hernández y Dr. Raúl Montes De Oca Machorro, gracias a todos ustedes por sus grandes comentarios, sugerencias las cuales han mejorado y enriquecido este trabajo.

A mis compañeros de la facultad, que en las buenas y en las malas siempre están ahí.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado para la realización de este trabajo.

Introducción

Los procesos de decisión de Markov (PDM) proporcionan un sistema muy versátil para crear e implementar procesos de toma de decisiones cuyos resultados son aleatorios. Los PDM son procesos estocásticos útiles para abordar una amplia gama de problemas de optimización de naturaleza continua o discreta (en este trabajo, sólo se contemplará el marco discreto). Por lo cual se considerará que; en cada cierto número de etapas discretas el proceso se encuentra en algún estado y el tomador de decisiones puede elegir cualquier acción que esté disponible para dicho estado. El proceso responde en la siguiente etapa moviéndose aleatoriamente a un nuevo estado y dando al tomador de decisiones una recompensa. El problema central de los PDM es encontrar una "política óptima", es decir, una función que especifique algún mecanismo para seleccionar las acciones de forma óptima en cada etapa.

Los PDM pueden ser resueltos a través de la técnica de programación dinámica. Por ejemplo, en [7] se discute un tratamiento completo y teórico de los fundamentos matemáticos del control estocástico óptimo de los sistemas a tiempo discreto, mientras que en [31] el interés se limita principalmente a los PDM con un espacio de estados de Borel y función de costos probablemente acotados. En [33] se explica que la teoría del método de programación dinámica estocástica es fácilmente aplicable a muchos problemas prácticos, incluso para modelos no estacionarios.

Sin embargo, existen otros métodos que pueden ser considerados para resolver problemas de optimización estocástica, por ejemplo: En [1] se desarrolla un algoritmo de optimización multiobjetivo semiautomatizado basado en el método minimax, modificando el método minimax clásico, que conduce a valores óptimos deseables en estado de incertidumbre a encontrar otra solución óptima de Pareto en estado de incertidumbre. En [2] el autor se centra en un proceso de optimización iterativo-interactivo de criterio general para obtener la solución óptima de Pareto preferible, sujeta a la función objetivo principal especificada a los problemas de programación lineal estocástica multiobjetivo en entorno difuso. Además, en [3] se considera un modelo de gestión de la cadena de suministro en un ciclo cerrado, rentable y centrado en el cliente, junto con el conjunto T que representa la imprecisión inherente a las funciones objetivo que conducen a encontrar que los valores óptimos son superiores a las metas estipuladas para ambas funciones objetivo en el entorno T. Por lo que el problema será el de encontrar la solución óptima de Pareto para el modelo propuesto empleando el método de optimización multiobjetivo basado en el conjunto T. En [9], se desarrollan los efectos de la reducción de los costes de preparación y la mejora de la calidad en un modelo de cadena de suministro de dos eslabones con deterioro. El objetivo es minimizar el coste total de toda la cadena de suministro optimizando simultáneamente el coste de preparación, la calidad del proceso, el número de entregas y el tamaño del lote, se trata de un problema de minimización sin restricciones junto con un problema de programación entera, por lo que se utilizará el método analítico de optimización discreta para encontrar el valor óptimo. En [45], se considera un conjunto de situaciones muy interesantes procedentes de las Redes Móviles e Inalámbricas, Gestión de Conexiones e Internet en las que se requieren decisiones óptimas, y se proporciona una visión lateral sobre los problemas de control y la teoría que los sustenta. En particular se tiene un ejemplo que se centrará en la caminata aleatoria híbrida en redes Inalámbricas multisalto, en este se observa que las longitudes de salto más largas conducen a un mayor rendimiento a expensas de un mayor consumo de energía, por lo que el problema será el de encontrar un mayor rendimiento con respecto a un menor consumo de energía.

Existe la posibilidad de que factores externos obliguen a terminar el proceso antes de lo previsto. Por lo que en este trabajo, será necesario considerar al horizonte o instante de finalización como una variable aleatoria, que puede ser independiente del espacio estado-acción [16]. Esta idea ha sido explorada; por ejemplo, en [49], donde se encuentra la estrategia de selección óptima para el paradigma del Bandido Armado con horizonte aleatorio y factores de descuento posiblemente aleatorios.

En el escenario anterior, se considerará un inversionista con determinado capital inicial que, en cada uno de cierto número de instantes, podrá reinvertir en activos de riesgo, consumir o invertir en un bono sin riesgo. El objetivo es concebir una estrategia de consumo e inversión para maximizar la suma esperada de una utilidad proveniente; exclusivamente, del capital gastado en cada etapa. Por lo tanto, en este trabajo a través de la teoría de PDM con horizonte aleatorio finito y factor de descuento constante igual a uno, se establecerá una política óptima de consumo e inversión, en el caso de que la función de utilidad encargada de evaluar el consumo será una que tenga en cuenta el rechazo a las perdidas es decir aversa al riesgo. El término aversión al riesgo se refiere a la preferencia por las realizaciones estocásticas con una desviación limitada del valor esperado. En el control óptimo con aversión al riesgo, se puede preferir una política con mayor coste en promedio pero con menores desviaciones que otra con menor coste pero posiblemente con mayores desviaciones [14]. Las mas conocidas son: la función de utilidad potencia que pertenece a la clase de aversión al riesgo relativa constante o también denominada CRRA, también es un caso especial de las funciones de utilidad de aversión al riesgo absoluto hiperbólico, conocido como HARA [48], [4] y [47], otro ejemplo será la función de utilidad logaritmo esta pertenece a la clase CRRA [38] y [41] después se tiene a la función de utilidad exponencial esta pertenece a la clase de aversión al riesgo absolutamente constante o mejor conocida como CARA [8], [23] y [58], además, dicha función es un caso especial de las funciones de utilidad tipo HARA. Aunque este tipo de funciones de utilidad son bastante clásicas, son útiles ya que dichas funciones consideran una fuerte aversión al riesgo.

Posteriormente, se considera nuevamente como criterio de rendimiento a la recompensa total esperada pero ahora descontada, con un factor de descuento que varía en el tiempo y que podría depender del estado y de la acción [35]. Además, se supone que el desarrollo del proceso puede ser interrumpido por factores externos al sistema, es decir, se considera un horizonte con cierta incertidumbre.

La motivación para estudiar factores de descuento variables proviene de diversos aspectos financieros y económicos. El factor de descuento se aplica en los modelos de depreciación del dinero con respecto al tiempo. En estos casos, es necesario ajustar el valor del factor de descuento en función de las situaciones del mercado.

En la literatura existen varios trabajos que presentan generalizaciones del PDM con factores de descuento, estos son estudiados bajo diferentes metodologías. Por mencionar algunos, con múltiples factores de descuento:[13],[19] y [20]; dependiente del estado: [29], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56] y [58]; dependientes del estado y de la acción: [33], [40], [46], con un factor de descuento variable: [17], [22], [29], con un factor de descuento aleatorio: [24], [25], [26], [27], [28] y con un factor de descuento variable que tiene un horizonte aleatorio: [35].

Por lo que en este documento se presentará un estudio del problema de control óptimo con factores que varían en el tiempo en función del estado y de la acción. Como se mencionó anteriormente, existen varios trabajos con estas consideraciones, sin embargo, no hay muchos trabajos que consideren el horizonte como una variable aleatoria en los criterios de desempeño.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo uno, se proporcionan las definiciones básicas en torno a la teoría de los PDM, junto con algunos supuestos que serán útiles para justificar la validez de la técnica de programación dinámica. Se analizarán las ideas fundamentales en torno a los PDM con horizonte aleatorio junto con una equivalencia entre los criterios de rendimiento de un PDM con horizonte aleatorio y que tiene soporte finito con respecto a un PDM con horizonte determinista. Además, se estudiarán los PDM con un factor de descuento que varía con el tiempo y que además tienen un horizonte aleatorio con soporte finito. De igual modo, se proporcionará una equivalencia entre los criterios de rendimiento de un PDM con un factor de descuento que varía en el tiempo que tiene horizonte aleatorio y soporte finito con respecto a un PDM con un horizonte determinista.

En el capítulo dos, se proporcionará el concepto de mercado financiero y algunas definiciones que serán muy útiles para resolver el problema principal de este trabajo.

En el capítulo tres se abordará el problema de consumo e inversión que tiene horizonte aleatorio con soporte finito. Adicionalmente, este capítulo contiene la principal contribución de este trabajo: el hallazgo de la política óptima para el problema de consumo e inversión con horizonte aleatorio finito y función de utilidad exponencial. También se tratará el mismo problema pero ahora considerando a un factor de descuento variable en el tiempo y horizonte aleatorio con soporte finito. De igual forma, se alcanzó el objetivo de encontrar la política óptima para dicho problema. Igualmente, se resolvió el problema de rastreo de índice pero con horizonte aleatorio. Análogamente, se obtuvo la política óptima para este problema. Después se presenta un ejemplo numérico, para poder ilustrar algunos de los resultados obtenidos. Finalmente, se presentarán las conclusiones de este trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se definirá la teoría de los procesos de decisión de Markov con horizonte finito, después a los procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio y que tienen soporte finito, por último el caso más general, los procesos de decisión de Markov con factor de descuento variable en el tiempo con horizonte aleatorio y soporte finito, que serán la herramienta principal para resolver los problemas de interés para esta tesis.

1.1. Teoría de los modelos de decisión de Markov

1.1.1. Modelo de decisión de Markov con horizonte fijo finito

En primer lugar, se definirá a los procesos de decisión de Markov con horizonte fijo finito. Por lo tanto, en tal contexto se proporcionará la siguiente definición [6], [35] y [31].

Definición 1.1. *Un Modelo de Decisión de Markov (MDM) con horizonte finito, consiste del conjunto* (E, A, D, Q, r_n, g_N) *con* $n = 0, 1, \ldots, N-1$*, donde*

- E *es un espacio de Borel, llamado espacio de estados, dotado con la* σ*-álgebra* $\mathfrak{E}$.
- A *es un espacio de Borel, llamado espacio de acciones, equipado con la* σ*-álgebra* $\mathfrak{A}$.
- $D \subseteq E \times A$ *es un subespacio medible de* $E \times A$*, que denota al conjuto de todas las posibles combinaciones de estado acción. Se asumirá que* D *contiene la gráfica de una función medible* $f : E \to A$*. Para* $x \in E$*, el conjunto* $D(x) := \{a \in A | (x, a) \in D\}$ *será llamado conjunto de acciones admisibles, con la propiedad de que el conjunto de parejas admisibles estado-acción* $\mathbb{K} := \{(x, a) | x \in E, a \in D(x)\}$*, se asumirá que es subconjunto medible de* $E \times A$.
- *Para cada* $n \geq 1$, $r_n : D \to \mathbb{R}$ *es una función medible, que proporciona la recompensa del sistema en la etapa* n.
- $g_N : E \to \mathbb{R}$ *es una función medible, tal que* $g_N(x)$ *proporciona la recompensa terminal si el estado final es* x.
- Q *es el kérnel de transición estocástico en* D *dado* E. $Q(B|x, a)$ *da la probabilidad de que el próximo estado esté en* B *si el estado actual es* x *y la acción* a *es tomada.*

Observación 1.1. *Por lo general, la definición de un modelo de decisión de Markov considera todos sus componentes como invariantes en el tiempo; sin embargo, en vista de los propósitos de este trabajo, se estudiará a la función de recompensa en función del tiempo, de hecho, esta condición surge naturalmente cuando se considera un horizonte aleatorio. Además, también es posible definir al MDM en un entorno más general al considerar una dependencia del tiempo en el conjunto de estado-acción, funciones de transición y kérneles de transición, sin embargo, dicho paradigma está más allá del interés de este documento, sin embargo, las ideas correspondientes pueden ser encontradas por ejemplo en [6] y [32].*

En el Capítulo 3, se considerará que los kérneles de transición Q estarán caracterizados por variables aleatorias (Z_n) definidas en algún espacio medible $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z})$ llamado *espacio de perturbaciones*. Se supondrá que tales variables aleatorias tienen una distribución en común Q^Z que puede depender de $(x, a) \in D$ y que existe una función medible $T : D \times \mathcal{Z} \to E$ conocida como función de transición, $T(x, a, z)$ proporcionará el siguiente estado del sistema cuando el actual es x, se toma la acción a y se produce la perturbación z. Por lo tanto, los kérneles de transición correspondientes se definen de la siguiente manera:

$$Q(B|x, a) := Q^Z(\{z \in \mathcal{Z} | T(x, a, z) \in B\}|x, a), \ B \in \mathfrak{E}.$$

En el contexto de MDM, las decisiones se modelan a través de funciones medibles de E en A como se puede observar en la siguiente definición.

Definición 1.2.

(a) Una función medible $f : E \to A$, tal que $f(x) \in D(x)$ para cualquier $x \in E$, es llamada regla de decisión*. Se denotará por F al conjunto de todas las reglas de decisiones.*

(b) Una sucesión de reglas de decisiones $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ con $f_n \in F$ es llamada política *o* estrategia *determinista Markoviana. El conjunto de esta clase de políticas es denotada por Π.*

1.1.2. Tipos de políticas de control

Uno podría preguntarse ¿por qué las reglas de decisión son solo funciones de los estados actuales y no dependen de la historia completa? Para ello, primero considérese un Modelo de decisión de Markov y defina H_n, el espacio de las historias observadas del proceso de control hasta el tiempo n. Como:

$$\begin{aligned} H_0 &:= E, \\ H_n &:= H_{n-1} \times A \times E. \end{aligned}$$

Un elemento $h_n = (x_0, a_0, x_1, \ldots, x_n) \in H_n$ es llamada historia hasta la etapa n.

Definición 1.3. *(a) Una función medible $f_n : H_n \to A$ con la propiedad $f_n(h_n) \in D(x_n)$ para cualquier $h_n \in H_n$ es llamada* regla de decisión histórico-dependiente *en la etapa n.*

(b) Una sucesión $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, en donde f_n es una regla de decisión histórico-dependiente en la etapa n, es llamada una política *o* estrategia *histórico-dependiente en la etapa n.*

Definición 1.4. *F_n denota el conjunto de funciones medibles $f_n : E \to A$ tal que $f_n(x) \in D(x)$ para cualquier $x \in E$ con $n = 0, \ldots, N-1$ y Φ representa el conjunto de kérneles estocásticos φ de A dado E para los cuales $\varphi(D(x)|x) = 1$, para cualquier $x \in E$. Las funciones en F_n se denominan "funciones de decisión" o "selectores".*

Un selector $f_n \in F_n$ puede ser identificado con el kérnel estocástico $\varphi \in \Phi$ en donde $\varphi(\cdot|x)$ es la medida de *Dirac* en $f_n(x)$ para cualquier $x \in E$, es decir,

$$\delta_x = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

Por lo tanto, se tendrá que $F_n \subset \Phi$, [31].

Como se ha mencionado antes, asumimos que F_n es no vacío, o equivalentemente, que el conjunto $D(x)$ contiene la gráfica de una función medible de E en A. Esta suposición asegura que el conjunto de políticas de control, es no vacío.

El conjunto de políticas de control es denotado por Π. Además, una política de control $\pi = \{\pi_n\}$ se dice que es una:

(a) **Política Markoviana Aleatorizada** (Π_{RM}) si existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de kérneles estocásticos $\pi_n \in \Phi$ tal que

$$\pi_n(\cdot|h_n) = \varphi_n(\cdot|x_n), \ \ \textit{para cualquier} \ \ h_n \in H_n, \ \ \textit{con} \ \ n = 0, 1, \ldots;$$

(b) **Política Estacionaria Aleatorizada** (Π_{RS}) si existe $\varphi \in \Phi$ independiente de n, tal que,

$$\pi_n(\cdot|h_n) = \varphi(\cdot|x_n), \ \ \textit{para cualquier} \ \ h_n \in H_n, \ \ \textit{con} \ \ n = 0, 1, \ldots;$$

(c) **Política Determinista o Pura** (Π_D) si existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones medibles $g_n : H_n \to A$ tal que, para cada $h_n \in H_n$ y $n = 0, 1, \ldots$, tenemos que $g_n(h_n) \in D(x_n)$ y $\pi_n(\cdot|h_n)$ es la medida de Dirac concentrada en $g_n(h_n)$;

(d) **Política Markoviana Determinista** (Π_{DM}) si existe una sucesión $\{f_n\}$ de selectores $f_n \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_n(\cdot|h_n)$ es la medida de Dirac en $f_n(x_n) \in D(x_n)$ para cualquier $h_n \in H_n$ y $n = 0, 1, \ldots$;

(e) **Política Estacionaria Determinista** (Π_{DS}) si existe un selector $f \in F_n$ tal que $\pi_n(\cdot|h_n)$ es la medida de Dirac en $f(x_n) \in D(x_n)$ para cualquier $h_n \in H_n$ y $n = 0, 1, \ldots$.

Observación 1.2. *Note que* $\Pi_{RS} \subset \Pi_{RM} \subset \Pi$ *y* $\Pi_{DS} \subset \Pi_{DM} \subset \Pi_D \subset \Pi$.

La formalización de los Modelos de Decisión de Markov bajo un espacio de probabilidad, permitirá asociarlos con alguna medida de probabilidad y en consecuencia será posible definir la esperanza matemática correspondiente. La *construcción canónica* es como sigue. Se definirá el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ por

$$\Omega = E^{N+1}, \ \ \mathcal{F} = \mathfrak{E} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{E}.$$

Se denotará por $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \Omega$. Las variables aleatorias $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ estarán definidas en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ por

$$X_n(\omega) = X_n(x_0, x_1, \ldots, x_N) = x_n,$$

la n-ésima proyección de ω. La variable aleatoria X_n representa el estado del sistema en el tiempo n y (X_n) es llamado *proceso de decisión de Markov.*

Se supondrá ahora que $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ es una política fija y $x \in E$ es el estado inicial. Conforme el Teorema de Ionescu-Tulcea [6] y el Apéndice B, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_x^\pi$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ con

(i) $\mathbb{P}_x^\pi(x_0 \in B) = \delta_x(B)$ para cualquier $B \in \mathfrak{E}$,

(ii) $\mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B|X_0, X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B|X_n) = Q_n(B|X_n, f_n(X_n))$.

La ecuación (ii) es llamada *propiedad de Markov*, es decir, la sucesión de variables aleatorias $X_0, X_1, \ldots, X_n$ es un proceso de Markov no estacionario con respecto a $\mathbb{P}_x^\pi$. Por $\mathbb{E}_x^\pi$ se denotará a la esperanza con respecto a $\mathbb{P}_x^\pi$. Por otra parte, se indicará por $\mathbb{P}_{nx}^\pi$ a la probabilidad condicional $\mathbb{P}_{nx}^\pi(\cdot) := \mathbb{P}^\pi(\cdot|X_n = x)$ y $\mathbb{E}_{nx}^\pi$ a su esperanza condicional.

Definición 1.5. *El proceso estocástico* $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x^\pi), \{X_n\})$ *con* $x \in E$ *y* $n = 0, 1, \ldots,$ *es llamado un proceso de decisión de Markov (PDM) o un proceso de control de Markov (PCM) a tiempo discreto.*

1.1.3. Criterio de rendimiento y programación dinámica para procesos de decisión de Markov con horizonte finito

En este caso se considerará al horizonte como una variable degenerada (constante) y factor de descuento constante igual a uno, es necesario imponer un supuesto que garantice que cualquier esperanza que aparezca, esté bien definida. Denotaremos por $x^+ = max\{0, x\}$ a la parte positiva de x.

Suposición 1.1. *Para* $n = 0, 1, \ldots, N$

$$\delta_0^N(x) := \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{nx}^\pi[\sum_{k=0}^{N-1} r_k^+(X_k,\ f_k(X_k)) + g_N^+(X_N)] < \infty, \ \ x \in E.$$

Se asumirá que la Suposición 1.1 se cumple para el PDM con horizonte N a lo largo del siguiente capítulo. Obviamente el Supuesto 1.1 se satisface si r_n y g_N están acotadas superiormente.

Se contemplará el criterio de rendimiento de la política π cuando el estado inicial es $x \in E$, conocido como recompensa total esperada:

$$V(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} r_k(X_k,\ f_k(X_k)) + g^+(X_N) \right],\ x \in E.$$

Entonces, el objetivo es optimizar el criterio de rendimiento:

$$V^*(x) := \sup_{\pi \in \Pi} V(\pi, x),\ x \in E.$$

Las funciones $V(\pi, x)$ y $V^*(x)$ están bien definidas ya que

$$V(\pi, x) \leq V^*(x) \leq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} r_k^+(X_k,\ f_k(X_k)) + g^+(X_N) \right] < \infty.$$

Una política π^* es llamada óptima, si se cumple que $V(\pi^*, x) = V^*(x)$ para cualquier $x \in E$, [31] y [32].

En general la existencia de una política óptima no está garantizada. Se tendrán que hacer suposiciones adicionales acerca de la estructura del problema para asegurar dicha existencia. La siguiente suposición permite proporcionar condiciones suficientes para establecer la existencia de las políticas óptimas [6].

Suposición 1.2. *Existen conjuntos* $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}(E) := \{v : E \to [-\infty, \infty)| v \text{ medible}\}$ *y* $\Psi \subset F$, *para* $n = 0, 1, \ldots, N-1$, *tales que:*

(i) $g_N \in \mathbb{M}$.

(ii) *Si* $v \in \mathbb{M}$, *entonces* $\mathcal{T}_n v(x)$ *está bien definido y* $\mathcal{T}_n v \in \mathbb{M}$. *(Con* $\mathcal{T}_n v(x) := \sup_{a \in D(x)}\{r_n(x,a) + \int v(x')Q(dx'|x,a)\}$, $x \in E$*).*

(iii) *Para cualquier* $v \in \mathbb{M}$ *existe un maximizador* $f \in \Psi$ *de* v*; es decir,* $\mathcal{T}_n v(x) = r_n(x, f(x)) + \int v(x')Q(dx'|x, f(x))$, $x \in E$.

La técnica de programación dinámica se expresa en el siguiente teorema también conocido como el Teorema de estructura, cuya demostración puede encontrarse por ejemplo en [6], [31] y [32].

Teorema 1.1. *Sean* $V_0, V_1, \ldots, V_N$ *funciones en* E *definidas por*

$$V_N(x) := g_N(x),$$

y para $n = N-1, N-2, \ldots, 0$

$$V_n(x) := sup_{a \in D(x)} \left[r_n(x,a) + \int_E V_{n+1}(y) Q(dy|x,a) \right]. \tag{1.1}$$

Bajo la suposición 1.2 se cumple que existen maximizadores $f_n \in \Psi$ *de* V_n*, además la política determinista Markoviana* $\pi^* = (f_0, \ldots, f_{N-1})$ *es óptima.*

La Inducción hacia atrás es el proceso de razonar atrás en el tiempo, desde el final de un problema o situación, para determinar una secuencia de acciones óptimas. Se procede, en primer lugar tomando en cuenta la última vez que se llevó a cabo una decisión y se elige qué hacer en ese momento. Con esta información, se puede entonces determinar lo que debería hacer en la penúltima decisión. Este proceso continúa hacia atrás hasta que se ha determinado la mejor acción para cada situación posible (es decir, para cada posible conjunto de información) en cada punto en el tiempo.

En el método matemático de optimización (programación dinámica), la inducción hacia atrás es uno de los principales métodos para resolver la ecuación de Bellman [6]. En la teoría de juegos, la inducción hacia atrás es un método utilizado para calcular el equilibrio perfecto en subjuegos en los juegos secuenciales [21]. La única diferencia es que la optimización implica un solo tomador de decisiones, que elige lo que debe hacer en cada momento del tiempo, mientras que la teoría de juegos analiza cómo las decisiones de varios jugadores interactúan. Es decir, mediante la previsión de lo que el último jugador que elige va a hacer en esa situación, es posible determinar que va a hacer el penúltimo jugador en elegir y así sucesivamente. En los campos relacionados con la planificación automática y la programación automatizada y demostración automática de Teoremas, el método se llama búsqueda hacia atrás o encadenamiento hacia atrás .

Algoritmo de inducción hacia atrás.

1. Sea $n := N$ y para $x \in E$:
$$V_N(x) := g_N(x).$$

2. Sea $n := N-1$ y calculamos para $x \in E$
$$V_n(x) = \sup_{a \in D(x)} \left\{ r_n(x,a) + \int V_{n+1}(x') Q_n(dx'|x,a) \right\}.$$

   calcula un maximizador f_n^* de V_{n+1}.

3. Si $n = 0$, entonces la función valor V_0 es calculada y la política óptima π^* es dada por $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \ldots, f_{N-1}^*)$. De otra manera ir al paso 2.

El Teorema 1.1 dice que los maximizadores producen una estrategia o política óptima. Sin embargo, la afirmación inversa no es verdadera [6]: las políticas óptimas no necesariamente contienen sólo maximizadores.

Observación 1.3. *Minimizar el costo. En lugar de la recompensa de una etapa r_n y la recompensa terminal g_N, en algunos problemas están dados como el costo en una etapa c_n y costo terminal h_N. En este caso queremos minimizar*

$$\mathbb{E}_x^\pi\left[\sum_{k=n}^{N-1} c_k(X_K, f_k(X_k)) \; + \; h_N(X_N)\right], \;\; x \in E,$$

para $\pi = (f_0, \ldots, f_{N-1})$. Pero este problema puede ser transformado en un problema de maximización de recompensa haciendo $r_n(x,a) := -c_n(x,a)$, $g_N(x) := -h_N(x)$. Así, todas las afirmaciones hasta el momento siguen siendo válidas. Usaremos la misma notación $V_{n\pi}$ y V_n para las funciones de costo bajo la política π y la función de costo mínima. Además, el operador de costo mínimo τ_n tiene la forma

$$(\mathcal{T}_n v)(x) = \inf_{a \in D(x)} \left\{ c_n(x,a) + \int v(x')Q_n(dx'|x,a) \right\}.$$

En este caso V_n es también llamada función de costo.

1.2. Procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio

En esta sección se considerará que el horizonte es una variable aleatoria con soporte finito y con un factor de descuento constante igual a uno.

En la literatura se pueden encontrar referencias en donde se estudian los problemas de control a tiempo discreto con horizonte aleatorio y con criterio de rendimiento a la recompensa total esperada, modelados mediante la teoría de los procesos de decisión de Markov [6], [16], [34], [44] y [49]. En ellos se han considerado las siguientes condiciones: distribución de probabilidad arbitraria para el horizonte con soporte finito o distribución geométrica para el soporte infinito.

Sea τ una variable aleatoria asociada a un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P})$. Se supondrá que la distribución de τ es conocida, dada por $\mathbb{P}(\tau = n) := \rho_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ con $N \in \mathbb{N}$ o $N = \infty$. Considere un modelo de decisión de Markov $(E, A, \{D(x) : x \in E\}, Q, r_n, g_N, \tau)$ y como criterio de rendimiento

$$V^\tau(\pi, x) := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)\right],$$

$\pi \in \Pi$, $x \in E$ denota el valor esperado con respecto a la distribución conjunta del proceso $\{(x_n, a_n)\}$ y τ. Luego, se considerará el correspondiente problema de control óptimo. Para ello, la función de valor óptimo será:

$$V^\tau(x) := \sup_{\pi \in \Pi} V^\tau(\pi, x), \; x \in E. \tag{1.2}$$

De esta manera, el problema de control óptimo con horizonte aleatorio consiste en encontrar una política $\pi^* \in \Pi$ tal que $V^\tau(\pi^*, x) = V^\tau(x)$, para toda $x \in E$. Para poder encontrar una caracterización del problema de decisión de Markov con horizonte aleatorio con respecto al que tiene horizonte fijo se considerará la siguiente suposición:

Suposición 1.3. *Para cada $x \in E$ y $\pi \in \Pi$ el proceso inducido $\{(x_n, a_n | n = 0, 1, 2, \ldots)\}$ es independiente de τ.*

Entonces, bajo la Suposición 1.3 se tendrá que [16]

$$\begin{aligned}
V^{\tau}(\pi, x) &= \mathbb{E}_x^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)\right] \\
&= \mathbb{E}_x^{\pi}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)|\tau\right]\right] \\
&= \sum_{m=0}^{N} \mathbb{E}_x^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m} r(x_n, a_n)\right]\rho_m \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{n=m}^{N} \mathbb{E}_x^{\pi}\left[r(x_n, a_n)\right]\rho_m \\
&= \mathbb{E}_x^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_n r(x_n, a_n)\right],
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$\pi \in \Pi$, $x \in E$, donde $\mathbb{P}_n := \sum_{m=n}^{N} \rho_n = \mathbb{P}(\tau \geq n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Con esto, se muestra una equivalencia entre un problema de control óptimo con horizonte aleatorio τ y un problema de control óptimo con horizonte fijo $N+1$, con recompensa por etapa no homogéneo dada por $\mathbb{P}_n r$ y recompensa terminal igual a cero.

1.2.1. Solución por programación dinámica

El criterio de rendimiento para el problema de control óptimo con horizonte aleatorio es

$$V^{\tau}(\pi, x) := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)\right],$$

$\pi \in \Pi$ y $x \in E$. Se supondrá que $N < \infty$, entonces como ya se observó en (1.3), en este caso el criterio de rendimiento se reduce a:

$$V^{\tau}(\pi, x) = \mathbb{E}_x^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_n r(x_n, a_n)\right],$$

$\pi \in \Pi$ y $x \in E$, donde $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\tau \geq n)$. Será necesaria la siguiente suposición, para la existencia de las políticas óptimas [16] y [31]:

Suposición 1.4.

(a) La función de costo por etapa c_n es semicontinua inferiormente, no negativa e inf-compacta sobre $\mathbb{K}$.

(b) La ley de transición Q es fuertemente continua o débilmente continua.

(c) Existe una política π tal que $V(\pi, x) < \infty$, para cada $x \in E$.

En el caso de maximización, se tiene un resultado equivalente a la Suposición 1.4.

Suposición 1.5.

(a) La función de recompensa por etapa r_n es semicontinua superiormente, no positiva y sup-compacta sobre $\mathbb{K}$.

(b) La ley de transición Q es fuertemente continua o débilmente continua.

(c) Existe una política $\pi \in \Pi$ tal que $V(\pi, x) > -\infty$, para cada $x \in E$.

El siguiente teorema proporciona la ecuación de programación dinámica que permite resolver el problema de control óptimo con horizonte aleatorio cuando la distribución del horizonte tiene soporte finito ($N < \infty$) [16].

Teorema 1.2. *Sean V_0, V_1,...,V_{N+1} funciones sobre E definidas por*

$$V_{N+1} := 0$$

y para $n = N$, $N-1$,..., 0.

$$V_n(x) := \max_{a \in D_n(x)} [\mathbb{P}_n r(x, a) + \int_E V_{n+1}(y) Q(dy|x, a)], x \in E. \tag{1.4}$$

Bajo la Suposición 1.4, estas funciones son medibles y para cada $n = 0, 1, \ldots, N$, existe $f_n \in \mathbb{F}$ tal que $f_n(x) \in D_n(x)$ alcanza el máximo para todo $x \in E$, esto es

$$V_n = \mathbb{P}_n r(x, f_n(x)) + \int_E V_{n+1}(y) Q(dy|x, f_n(x)),$$

$x \in E$ y $n = 0, i, \ldots, N$. Entonces la política Markoviana determinista $\pi^* = \{f_0, \ldots, f_N\}$ es óptima y la función de valor óptimo está dada por

$$V^\tau(x) = v^\tau(\pi^*, x) = V_0(x),\ x \in E.$$

1.3. Procesos de decisión de Markov con factor de descuento variable en el tiempo y que tiene horizonte aleatorio

En esta sección se estudiará el panorama más general que se considerará en este trabajo: factores de descuento que varían con el tiempo y la presencia del horizonte aleatorio.

En la literatura se pueden encontrar referencias donde se trabajan procesos de decisión de Markov con un factor de descuento no constante [17], [22] y [31]. Además, se considerará que el horizonte es una variable aleatoria discreta [16] y [35].

Se considerará un Modelo de Decisión de Markov $(E, A, D, Q, r_n, g_N, \tau, \alpha_n)$, con $\alpha_n : \mathbb{K} \to (0, 1]$, una función medible para cada n, que representa un factor de descuento aplicado a la etapa n. Se definirá el siguiente criterio de rendimiento.

$$V^\tau(\pi, x) := \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x_k, a_k)\right) r_n(x_n, a_n) + g_N(x_\tau) \prod_{k=0}^{\tau-1} \alpha_k(x_k, a_k)\right], \tag{1.5}$$

donde $\pi \in \Pi$, $x \in E$ y $\mathbb{E}$ denota el valor esperado con respecto a la distribución conjunta del proceso $\{(x_n, a_n) : n \geq 0\}$ y la variable aleatoria τ. Entonces, se considerará el problema de control óptimo correspondiente. Para hacer esto, se define la función de valor óptimo de la siguiente manera:

$$V^\tau(x) := \sup_{\pi \in \Pi} V^\tau(\pi, x),\ x \in E. \tag{1.6}$$

De esta forma, el problema de control óptimo con un horizonte aleatorio consiste en encontrar una política $\pi^* \in \Pi$ tal que $V^\tau(\pi^*, x) = V^\tau(x)$, $\forall x \in E$.

Así, bajo la Suposición 1.3 y la ecuación (1.5), se tendrá que el criterio de rendimiento se reduce a

$$V^\tau(\pi, x) = \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x_k, a_k) \right) \mathbb{P}_n r_n(x_n, a_n) + \mathbb{P}_N g_N(x_N) \prod_{k=0}^{N-1} \alpha_k(x_k, a_k) \right], \tag{1.7}$$

$x \in E, \ \pi \in \Pi$.

Observación 1.4. *(a) Si la distribución del horizonte aleatorio τ tiene un soporte finito o infinito, el problema de optimización con horizonte aleatorio se considera como un problema con un horizonte finito o infinito, respectivamente.*

(b) Si τ se concentra en N, el criterio de rendimiento (1.6) *se simplifica a la siguiente expresión:*

$$V^\tau(\pi, x) = \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x_k, a_k) \right) r_n(x_n, a_n) + g_N(x_N) \prod_{k=0}^{N-1} \alpha_k(x_k, a_k) \right]. \tag{1.8}$$

Además, si el factor de descuento $\alpha_k(x, a) = \alpha \in (0, 1)$, para cada $(x, a) \in D(x)$ en (1.8)*, entonces el criterio de rendimiento es el criterio habitual de recompensa con descuento [31].*

Sea $\hat{\alpha}_0 := \mathbb{P}_0 = 1$ y $\hat{\alpha}_n := \frac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{P}_{n-1}}$, para $n = 1, 2, \ldots, N$. Los factores $\{\hat{\alpha}_n\}$ se puede considerar como la siguiente probabilidad condicional: $\hat{\alpha}_n = \mathbb{P}(\tau \geq n+1 | \tau \geq n)$. Además, para cada $n \geq 1$, $\mathbb{P}_n$ se puede escribir como:

$$\mathbb{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \hat{\alpha}_k. \tag{1.9}$$

Entonces, se tendrá para cada $x \in E$ y $\pi \in \Pi$, que

$$V^\tau(\pi, x) = \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{n=1}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_k(x_k, a_k) \right) r_n(x_n, a_n) + g_N(x_N) \prod_{k=0}^{N-1} \tilde{\alpha}_k(x_k, a_k) \right], \tag{1.10}$$

donde $\tilde{\alpha}_k(x_k, a_k) := \hat{\alpha}_k \alpha_k(x_k, a_k)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

1.3.1. Programación dinámica

Es posible considerar que las funciones de recompensa no sean necesariamente no negativas, sin embargo, es ahora necesario suponer que [32]:

Suposición 1.6. *Para cada estado $x \in E$:*

(a) El conjunto $A(x)$ es compacto.

(b) El costo por etapa c(x,a) es semicontinua inferiormente en $a \in A(x)$.

(c) La función $u'(x, a) := \int u(y) Q(dy|x, a)$ es continua en $a \in A(x)$ para cada función u en $\mathbb{B}(E)$, donde $\mathbb{B}(E)$ denota el espacio de Banach de las funciones medibles acotadas de valor real u en E, con la norma supremo $\|u\| := sup_E |u(x)|$.

(d) Las funciones de factor de descuento $\tilde{\alpha}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ son semicontinuas inferiormente.

Observación 1.5. *El Supuesto 1.6 (c) es equivalente a la condición aparentemente más débil [32]:*

(c') $u'(x,a)$ es semicontinua inferiormente en $a \in A(x)$ para cada función no negativa u en $\mathbb{B}(E)$.

Suposición 1.7. *Existen constantes no negativas $\overline{c}$ y β, con $1 \leq \beta < \alpha^{-1}$, y una función de peso $w \geq 1$ en E tal que para cada estado $x \in E$:*

(a) $sup_{A(x)}|c(x,a)| \leq \overline{c}w(x)$.

(b) $sup_{A(x)} \int w(y)Q(dy|x,a) \leq \beta w(x)$.

Además, se supondrá que w satisface lo siguiente:

Suposición 1.8. *Para cada estado $x \in E$, la función $w'(x,a) := \int w(y)Q(dy|x,a)$ es continua en $a \in A(x)$.*

Además, se contemplará la siguiente suposición:

Suposición 1.9. *Las funciones de descuento $\tilde{\alpha}_n$, $n = 0,1,2,\ldots$ son semicontinuas inferiormente.*

El Teorema de programación dinámica con factor de descuento variable en el tiempo es el siguiente [35].

Teorema 1.3. *Bajo las Suposiciones 1.6-1.9 y $N \in \mathbb{N}$ un entero positivo que a su vez es el valor máximo del horizonte τ, con $N < \infty$ o $N = \infty$. Sean para cada $x \in E$ con $n = 0,1,\ldots,N$, las siguientes funciones medibles:*

$$\begin{aligned} V_{N+1}(x) &:= 0, \\ V_n(x) &:= \sup_{a \in A(x)} \left\{ r(x,a) + \tilde{\alpha}_n(x,a) \int_E V_{n+1}(y)Q(dy|x,a) \right\}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Entonces para cada $n = 0,1,\ldots,N$, existe $f_n \in \mathbb{F}$, tal que f_n alcanza el valor máximo en (1.11) para toda $x \in E$ y $\pi^* = \{f_0,\ldots,f_N\}$ es la política óptima y la función de valor óptimo está dada por

$$V^\tau(x) = v^\tau(\pi^*,x) = V_0(x), \ x \in E.$$

Capítulo 2

Mercados financieros

Los mercados financieros permiten una asignación eficiente de recursos dentro de la economía. A través de intercambios organizados y regulados, estos mercados darán a los participantes cierta garantía de que recibirán un trato justo y honesto. Es una plataforma que permite a los comerciantes comprar y vender fácilmente instrumentos financieros y valores que pueden ser acciones, bonos, papel comercial, letras de cambio, obligaciones y más. La función principal de un mercado financiero radica en que actúa como intermediario entre ahorradores e inversores, o ayuda a los ahorradores a convertirse en inversionistas [30] y [39]. En otras palabras, pone en contacto a compradores y vendedores. En base a ello se puede nombrar estas 4 principales funciones de los mercados financieros:

- Poner en contacto a todo el mundo que quiera intervenir en él.
- Fijar un precio adecuado a cualquier activo.
- Proporcionar liquidez a los activos.
- Reducir los plazos y costes de intermediación facilitando una mayor circulación de los activos.

Los mercados financieros tienen una serie de características comunes que les definen [39]:

- **Transparencia:** los activos que forman parte de los mercados financieros son transparentes, en el sentido de que cualquier inversor puede obtener toda la información que necesita de una forma fácil y rápida.
- **Amplitud:** un mercado financiero tiene mucha amplitud cuanto mayor sea el volumen de activos que en él se negocian y el número de inversores que acuden a él.
- **Libertad:** no existen barreras de entrada ni para la compra ni para la venta de activos.
- **Profundidad:** un mercado será tanto más profundo cuanto mayor es el número de órdenes de compra y venta que se negocian en él.
- **Flexibilidad:** un mercado será flexible si los agentes que intervienen en él pueden responder rápidamente a una orden de compra y venta.
- **Sin costes de transacción**, en el sentido de que no existen impuestos, variación de tipos de interés o inflación.

Como se ha mencionado, los mercados financieros permiten la formación de precios, que se establecen en función de su oferta y su demanda. Normalmente, *los activos fluctúan de precio en base a las expectativas de los inversores a futuros rendimientos*, lo que hará que sean más baratos o más caros en el futuro.

En condiciones normales, los precios son bastante estables. Sin embargo, en condiciones de incertidumbre, *como ha ocurrido en la actual crisis del covid-19*, las cotizaciones pueden oscilar de manera significativa. En estos casos, *se dice que los mercados son muy volátiles*, o que están sufriendo mucha volatilidad.

La volatilidad *es una característica intrínseca a los mercados financieros*, que ha estado presente en todo momento y circunstancia histórica y en cierto modo supone una medida de su riesgo. Cuanto mayor sea la volatilidad del activo financiero, *mayor será la pérdida latente*, pero también mayor su ganancia.

En conclusión, cualquier potencial civilizado tiene un sistema financiero lo suficientemente desarrollado, donde los mercados tienen un papel esencial para garantizar el flujo de recursos entre ofertantes y demandantes.

Se va utilizar un mercado financiero completo porque existen contratos que aseguran contra cualquier tipo de eventualidad posible. Por lo que, los mercados completos son deseables ya que permiten a productores, consumidores e inversores asignar recursos escasos, invertir capital y compartir riesgos financieros de una manera eficiente desde el punto de vista de Pareto [18]. Los mercados completos ofrecen a consumidores, productores e inversores la mayor flexibilidad a la hora de asignar retribuciones y planificar contingencias inciertas. Se presta especial atención a los mercados de futuros y opciones [37]. Por ejemplo, las opciones de compra, las opciones de venta y otros derivados son socialmente beneficiosos porque aumentan la completitud. Además, los mercados completos en el espacio de Arrow-Debreu proporcionan un análisis de vanguardia de los mercados de capitales y las estructuras de capital. Por ejemplo, la fijación de precios sin arbitraje sólo es factible en un mercado completo, y las expectativas de los inversores son fáciles de deducir de los precios de un mercado completo. Por último, la teoría del mercado completo ofrece orientación a los empresarios financieros sobre nuevos valores, estrategias de inversión y arquitectura del mercado de capitales.

Para que un mercado sea completo, debe ser posible entrar instantáneamente en cualquier posición con respecto a cualquier estado futuro del mercado. Por el contrario, un mercado se denomina dinámicamente completo si es posible construir una estrategia de negociación autofinanciada que tenga el mismo flujo de caja. En otras palabras, un mercado completo le permite colocar toda su apuesta a la vez, mientras que un mercado dinámicamente completo puede requerir que ejecute operaciones posteriores después de realizar su inversión inicial. El requisito de que la estrategia se autofinancie significa que las operaciones posteriores deben ser neutrales desde el punto de vista del flujo de fondo (no puede aportar ni retirar fondos adicionales). Cualquier mercado completo también es dinámicamente completo [12].

Formalmente, un mercado es completo con respecto a una estrategia de negociación ϕ, si existe una estrategia de negociación autofinanciada ϕ_0, tal que en cualquier momento n, los rendimientos de las dos estrategias, ϕ y ϕ_0 son iguales. Esto equivale a afirmar que, para un mercado completo, todos los flujos de fondos de una estrategia de negociación pueden replicarse utilizando una estrategia de negociación sintética similar. Dado que una estrategia de negociación puede simplificarse en un conjunto de créditos contingentes simples (estrategias que pagan 1 en un estado y 0 en todos los demás estados), un mercado completo puede generalizarse como la capacidad de replicar los flujos de fondos de todos los créditos contingentes simples [12].

2.1. Activos dinámicos y portafolios

En está sección se presentará la idea de mercado financiero a tiempo discreto. Definiremos un portafolio o estrategia y se caracterizará a la ausencia de arbitraje en estos mercados. En los capítulos posteriores, a menudo se restringen los precios de los activos a procesos de Markov; con el fin de poder utilizar el marco de los procesos de decisión de Markov.

Se asumirá que el precio de los activos son monitoriados a tiempo discreto. El índice bursátil Alemán (DAX) por ejemplo es calculado cada segundo. Así, suponemos que el tiempo es dividido en periodos de longitud Δt y $t_n = n\Delta t$. Uno de los modelos más populares para el precio de los activos es de tipo multiplicativo, es decir, si S_n es el precio a tiempo $t_n > 0$ entonces

$$S_{n+1} = S_n \tilde{R}_{n+1}.$$

La variable aleatoria positiva $\tilde{R}_{n+1}$ define el *cambio de precio relativo* S_{n+1}/S_n entre t_n y t_{n+1}. Para un bono sin riesgo el cambio de precio relativo S^0_{n+1}/S^0_n es $1 + i_{n+1}$ con tasa de interés determinista $i_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.

En lo que sigue se considerará un mercado financiero de N-periodos con d activos riesgosos y un bono sin riesgo. Se asumirá que las variables aleatorias están definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con filtración $(\mathcal{F}_n)$ y $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. El mercado financiero estará dado por:

- Un bono sin riesgo con $S^0_0 \equiv 1$ y

  $$S^0_{n+1} := S^0_n(1 + i_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

  donde i_{n+1} denota la tasa de interés determinista para el periodo $[n, n+1)$. Si la tasa de interés es constante, es decir, $i_n \equiv i$, entonces $S^0_n = (1+i)^n$.

- Existen d activos riesgosos y el proceso de precios del k-ésimo activo está dado por $S^k_0 = s^k_0$ y

  $$S^k_{n+1} = S^k_n \tilde{R}^k_{n+1}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

  El proceso (S^k_n) se supone que es adaptado con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)$ para cualquier k. Además, se supodrá que $\tilde{R}^k_{n+1} > 0$ $\mathbb{P}$-c.s. para cualquier k y n con s^k_0 determinista. $\tilde{R}^k_{n+1}$ es el cambio de precio relativo en el intervalo $[n, n+1)$ para el activo riesgoso k.

A continuación se denotará $S_n := (S^1_n, \ldots, S^d_n)$, $\tilde{R}_n := (\tilde{R}^1_n, \ldots, \tilde{R}^d_n)$ y $\mathcal{F}^S_n := \sigma(S_0, \ldots, S_n)$. Como (S_n) es $(\mathcal{F}_n)$-adaptado se tiene: $\mathcal{F}^S_n \subset \mathcal{F}_n$ para $n = 0, 1, \ldots, N$. En la mayoría de los casos se asumirá que los vectores aleatorios $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_N$ son independientes, sin embargo, no se impondrá esta suposición restrictiva ahora, porque también se considerará algunos modelos donde el supuesto de independencia no se cumple. Se supondrá ahora que somos capaces de invertir en este mercado financiero.

Definición 2.1. *Un* portafolio *o* estrategia de comercio *es un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_n)$, donde $\phi = (\phi^0_n, \phi_n)$ con $\phi^0_n \in \mathbb{R}$ y $\phi_n = (\phi^1_n, \ldots, \phi^d_n) \in \mathbb{R}^d$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. La cantidad ϕ^k_n denota el monto de dinero que es invertido en el k-ésimo activo durante el intervalo $[n, n+1)$.*

Observación 2.1. *En general no se hará restricción en el signo de ϕ^k_n. En particular ϕ^k_n es permitida ser negativa, en caso que $k = 0$ implica que un préstamo es tomado y que la tasa de interés es la misma para endeudamiento y préstamos. En caso de que $\phi^k_n < 0$ para $k \neq 0$ esto corresponde a una venta en corto del k-ésimo activo.*

El vector (ϕ_0^0, ϕ_0) es llamado portafolio inicial del inversionista, su valor inicial está dado por:

$$X_0 := \sum_{k=0}^{d} \phi_0^k = \phi_0^0 + \phi_0 \cdot e$$

donde $x \cdot y = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$ denota el producto interior de los vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $e := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$.

Sea ϕ un portafolio y se denotará por X_{n-} el valor del portafolio al tiempo n antes de ser negociado. Entonces

$$X_n := X_{n-} := \sum_{k=0}^{d} \phi_{n-1}^k \tilde{R}_n^k = \phi_n^0 + \phi_n = \phi_{n-1}^0 (i + i_n) + \phi_{n-1} \tilde{R}_n.$$

El valor del portafolio al tiempo n después de ser negociado está dado por

$$X_{n+} := \sum_{k=0}^{d} \phi_n^k = \phi_n^0 + \phi_n \cdot e.$$

En lo que sigue, algunas veces se escribirá X_n^ϕ cuando se quiera hacer explícita la dependencia en el portafolio ϕ.

En matemáticas financieras, un portafolio autofinanciado es un portafolio que tiene la característica de que, si no hay una infusión o retirada exógena de dinero, la compra de un nuevo activo debe financiarse con la venta de uno antiguo. Por lo que se tendrá la siguiente definición:

Definición 2.2. *Un portafolio ϕ es llamado autofinanciado si*

$$X_{n-}^\phi = X_{n+}^\phi \ \ \mathbb{P} - c.s.$$

para cualquier $n = 1, \ldots, N-1$, es decir, la riqueza actual sólo se reasigna a los activos.

Un portafolio autofinanciado se caracteriza por rasgos específicos como la inversión cero y la exposición sin riesgo (no se permiten las entradas y salidas de capital). Por lo tanto, un portafolio de este tipo no necesita inversiones adicionales. Los cambios en el valor de este portafolio proceden de las ganancias obtenidas de los activos que la componen, como un activo y una cuenta del mercado monetario. El activo puede negociarse y el beneficio resultante se invertirá en la cuenta del mercado monetario. Otro ejemplo es una colección de opciones, acciones y bonos: la opción puede replicarse de forma sintética utilizando la estrategia de negociación de autofinanciación que se basa únicamente en acciones y bonos.

En el resto del trabajo, se considerarán portafolios autofinanciados, se asumirá que la siguiente equivalencia se cumple para cualquier $n = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$X_n = X_{n+} \Leftrightarrow \phi_n^0 + \phi_n \cdot e = \phi_{n-1}^0 (1 + i_n) + \phi_{n-1} \cdot \tilde{R}_n.$$

Además, si un portafolio es autofinanciado entonces esta ecuación puede ser usada para derivar una fórmula recursiva para modelar la evolución de la riqueza:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (X_t - X_{t-1}) \\ &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} \left(\phi_{t-1}^0 i_n + \phi_{t-1} \cdot (\tilde{R}_t - e) \right). \end{aligned}$$

Como $\phi_n^0 = X_n - \phi_n \cdot e$ entonces, al simplificar se obtendrá:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \left(\phi_n^0 i_{n+1} + \phi_n \cdot (\tilde{R}_{n+1} - e) \right) \\ &= X_n(1 + i_{n+1}) + \sum_{k=1}^{d} \phi_n^k (\tilde{R}_{n+1} - 1 - i_{n+1}). \end{aligned}$$

Cuando se introduce el proceso de riesgo relativo (R_n) definido por $R_n := (R_n^1, \ldots, R_n^d)$ y

$$R_n^k := \frac{\tilde{R}_n^k}{1 + i_n} - 1, \quad k = 1, \ldots, d,$$

producirá lo siguiente:

$$R_n^k := \frac{\tilde{R}_n^k}{1 + i_n} - 1 = \frac{\tilde{R}_n^k - (1 + i_n)}{1 + i_n} \Rightarrow R_n^k(1 + i_n) = \tilde{R}_n^k - (1 + i_n).$$

Al sustituir en X_{n+1} se obtendrá que:

$$X_{n+1} = (1 + i_{n+1})(X_n + \phi_n R_{n+1}). \tag{2.1}$$

La ventaja de la ecuación (2.1) es que solo presenta a la evolución del capital en términos de las inversiones en activos con riesgo. Como es usual, se eliminarán las oportunidades de arbitraje en el mercado financiero.

Definición 2.3. *Una oportunidad de arbitraje es un portafolio autofinanciado $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ con la propiedad: $X_0^\phi = 0$ y*

$$\mathbb{P}(X_N^\phi \geq 0) = 1 \ \ y \ \ \mathbb{P}(X_N^\phi > 0) > 0.$$

En términos generales una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión libre de riesgo con la posibilidad de una ganancia. El siguiente Teorema caracteriza la ausencia de oportunidades de arbitraje, su demostración puede encontrarse en [6]. Demuestra que el mercado está libre de las oportunidades de arbitraje si y sólo si existe localmente una oportunidad sin arbitraje. Esta propiedad es importante cuando reducimos problemas de optimización multiperiódicas a problemas de un periodo.

Teorema 2.1. *Se considerará mercado financiero de N-periodos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) No existen oportunidades de arbitraje.

(b) Para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ y para cualquier $\phi_n \in \mathbb{R}^d$ que sea $\mathcal{F}_n$ medible se cumple que:

$$\phi_n \cdot R_{n+1} \geq 0 \ \ \mathbb{P} - c.s. \ \ \Rightarrow \ \ \phi_n \cdot R_{n+1} = 0 \ \ \mathbb{P} - c.s.$$

2.2. Funciones de utilidad

En esta sección se abordará el concepto de función de utilidad. En general una función de utilidad es una función $U : dom\ U \to \mathbb{R}$ que se aplica a un resultado aleatorio de una inversión. En particular, si se tienen dos variables aleatorias X y Y, se podrá compararlas usando $\mathbb{E}[U(X)]$ con $\mathbb{E}[U(Y)]$ donde el mayor valor se prefiere. Este concepto es cercanamente relativo a los ordenes estocásticos [6]. La idea es que U es elegida por un individuo y debería reflejar en cierta medida su tolerancia al riesgo. Una U razonable debería ser creciente, lo que significa más dinero. A menudo, también se asumirá que U es cóncava, lo que significa que para un individuo la utilidad marginal de la riqueza es decreciente. Esta interpretación se desprende de Von Neumann y Morgenstern [42] lo que significa que una inversión segura con la misma expectativa es siempre preferida por un inversionista que es adverso al riesgo.

Definición 2.4. *Una función $U : dom\ U \to \mathbb{R}$ es llamada función de utilidad, si U es estrictamente creciente, cóncava y continua en el dom U.*

Si el *dom* U es un intervalo abierto, entonces la concavidad de U inmediatamente implicará que U es también continua. Si *dom* $U = [0, \infty)$, entonces U es continua en $(0, \infty)$ y se supondrá que U es también continua por la derecha en 0.

Si un inversionista elige $U(x) = x$ (que no es una función de utilidad por definición, ya que no es cóncava), entonces se dirá que tiende a ser neutral al riesgo ya que no se tiene en cuenta el riesgo.

Las siguientes son funciones de utilidad estándar más empleadas.

a) *Utilidad Logaritmo.* Aquí tenemos $U(x) = \log(x)$ y *dom* $U = (0, \infty)$. Tenga en cuenta que el logaritmo penaliza resultados cerca de cero.

b) *Utilidad Potencia.* Aquí tenemos $U(x) = \frac{1}{\gamma} x\gamma$ y el *dom* $U = [0, \infty)$ cuando $0 < \gamma < 1$. Si $\gamma < 0$ tenemos *dom* $U = (0, \infty)$.

c) *Utilidad Exponencial.* Aquí tenemos $U(x) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x}$ con $\gamma > 0$ y *dom* $U = \mathbb{R}$.

d) *Utilidad Cuadrática.* Aquí tenemos $U(x) = x - \gamma x^2$ para $\gamma > 0$ y *dom* $U = (-\infty, (2\gamma)^{-1})$. Esta función es solo creciente para $x < (2\gamma)^{-1}$. $\Diamond$

Varios experimentos empíricos y psicológicos han revelado que el comportamiento de muchos tomadores de decisiones está en contraste con la teoría de la utilidad esperada. En particular las probabilidades pequeñas suelen sobreponderarse. Un ejemplo muy conocido es la paradoja de Allais donde los tomadores de decisiones tienen que elegir en dos experimentos entre dos loterías. Esto ha llevado a modificar la teoría de la utilidad esperada, conocida como utilidad esperada generalizada o teoría de la utilidad no esperada.

Sea U una función de utilidad y X es un resultado aleatorio con valores en el *dom* U. Debido al Teorema del Valor Intermedio, existe un número $ceq(X) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}[U(X)] = U(ceq(X))$. El valor $ceq(X)$ es llamado *ciertamente equivalente* y $R(X) := \mathbb{E}[X] - ceq(X) > 0$ es llamada *prima de riesgo*. Si U es al menos dos veces continuamente diferenciable obtenemos con el desarrollo de la serie de Taylor:

$$U(ceq(X)) \approx U(\mathbb{E}[X]) + U'(\mathbb{E}[X])(ceq(X) - \mathbb{E}[x]),$$

$$U(X) \approx U(\mathbb{E}[X]) + U'(\mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2} U''(\mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^2.$$

La ultima ecuación implica que

$$U(ceq(X)) = \mathbb{E}[U(X)] \approx U(\mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2} U''(\mathbb{E}[X]) Var(X).$$

Combinando esto con la primera aproximación y recordando la definición de prima de riesgo se obtendrá:

$$R(X) \approx -\frac{1}{2}\frac{U''(\mathbb{E}[X])}{U'(\mathbb{E}[X])}Var(X).$$

Por lo tanto la prima de riesgo es igual a la varianza multiplicada por un coeficiente que depende de la función de utilidad. Este coeficiente determinará el grado de aversión de riesgo.

Definición 2.5. *Sea U es una función de utilidad dos veces diferenciable, entonces el coeficiente de aversión al riesgo absoluto* Arrow-Pratt *de U dado el nivel x estará definido por*

$$\alpha_{AP}(x) := -\frac{U''(x)}{U'(x)}, \quad x \in dom\ U.$$

La función $\alpha_{AP}(x)$ mostrará como cambia la aversión al riesgo con el nivel de riqueza. Una suposición razonable es que $\alpha_{AP}(x)$ es decreciente, ya que con más dinero, se incrementará la tendencia de tomar un cierto riesgo. La funciones de utilidad que se han presentado hasta el momento pertenecen a ciertas clases de aversión al riesgo como son:

a) *Aversión de Riesgo Absolutamente Constante* (CARA). Esta clase de funciones de utilidad son definidas por $\alpha_{AP}(x) \equiv \alpha_{AP} > 0$. Esto consiste de funciones de utilidad de la forma

$$U(x) = a - be^{-\alpha x}$$

para $a \in \mathbb{R}$, $b,\ \alpha > 0$ y $dom\ U = \mathbb{R}$.

b) *Aversión de Riesgo Absolutamente Hiperbólica* (HARA). Esta clase de funciones de utilidad es definida por $\alpha_{AP}(x) = (cx + d)^{-1}$. Esto consiste de funciones de utilidad de la forma

$$U(x) = \frac{1}{\gamma}(ax + b)^{\gamma}$$

para $\gamma < 1$, $\gamma \neq 1$ y $a > 0$, $b \geq 0$. Si $0 < \gamma < 1$ entonces $dom\ U = [-\frac{a}{b}, \infty)$, en caso contrario $dom\ U = (-\frac{b}{a}, \infty)$. Todas las funciones de utilidad discutidos previamente pueden verse como casos especiales de la utilidad HARA al menos en un sentido limitante [6].

Capítulo 3

Problemas de optimización financieros

En este capítulo se empleará la teoría de los procesos de decisión de Markov, que ha sido presentada en el capítulo 1, en la cuál será aplicada a algunos problemas dinámicos de optimización financiera seleccionados. El modelo básico principal es el del mercado financiero del capítulo 2. Siempre se va ha a suponer que los inversionistas son pequeños y estos no pueden influir en el proceso de precios de los activos. Además se proporcionarán condiciones para obtener la solución óptima del problema de interés.

3.1. Problema de consumo e inversión con horizonte aleatorio

Se supondrá un inversionista con cierta riqueza inicial $x > 0$ y al comienzo de cada uno de un número aleatorio (τ) de periodos puede decidir que parte de la riqueza consumir y qué parte invertir en el mercado financiero. En particular $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_n^S$. La cantidad c_n que es consumida en el tiempo n es evaluada por una función de utilidad $U_c(c_n)$. La riqueza restante es invertida en un activo riesgoso y en un bono sin riesgo, la riqueza terminal X_N produce otra función de utilidad $U_p(X_N)$. ¿Cómo debería consumir e invertir el inversionista, con el fin de maximizar la suma de sus utilidades esperadas?.

El proceso de riqueza evoluciona como sigue

$$X_{n+1} = (1 + i_{n+1})(X_n - c_n + a_n \cdot R_{n+1})$$

donde $(c_n, a_n) = (c, a)$ es una estrategia de consumo e inversión, es decir, (a_n) y (c_n) son $\mathcal{F}_n$-adaptados con $0 \leq c_n \leq X_n$.

El problema de consumo e inversión, entonces está dado por:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} U_c(c_n) + U_p\left(X_\tau^{(c,a)}\right)\right] \to \text{máx}, \\ (c,a) \text{ es una estrategia de consumo e inversión con } X_\tau^{(c,a)} \in domU_p,\ \mathbb{P} - c.s. \end{cases} \tag{3.1}$$

El Problema puede ser resuelto por el siguiente modelo de decisión de Markov:

- $E := [0, \infty)$,
- $A := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

- $D(x) := \{(c,a) \in A | 0 \leq c \leq x \; y \; (1+i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}) \geq 0, \; \mathbb{P} - c.s.\}$ para $x \geq 0$,
- $\mathcal{Z} := [-1, \infty)^d$ donde $z \in \mathcal{Z}$ denota el riesgo relativo,
- $T(x,c,a,z) := (1+i_{n+1})(x - c + a \cdot z)$, es la función de transición,
- Q^Z es la distribución de R_{n+1},
- $r_n(x,c,a) := U_c(c)$, es la función de recompensa por etapa,
- $g_N(x) := U_p(x)$, es la función de recompensa términal,
- τ, es el horizonte aleatorio con soporte en $\{0, 1, \ldots, N\}$.

El objetivo será optimizar el criterio de rendimiento, que está definido por:

$$V_n(x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}_{nx}^{\pi} \left[\sum_{K=0}^{N-1} \mathbb{P}_n U_c(c_n(X_n)) + \mathbb{P}_N U_p(X_N) \right]$$

donde el supremo se tomará sobre todas las políticas $\pi = \{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ con $f_n(x) = (c_n(x), a_n(x))$. A fin de aplicar el Teorema 1.3 se tendrá que observar el siguiente problema de optimización de un periodo. Para $x \in domU_p$ se considerará

$$D(x) := \{(c,a) \in A | 0 \leq c \leq x \;\; y \;\; (1+i)(x - c + a \cdot R) \in domU_p \; \mathbb{P} - c.s.\},$$

$$u(x,c,a) := U_c(c) + \mathbb{E}\left[U_p((1+i)(x - c + a \cdot R))\right]$$

y sea

$$v(x) := \sup_{(c,a) \in D(x)} u(x,c,a).$$

Se darán condiciones suficientes para proponer la solución del problema de consumo e inversión con un horizonte aleatorio con soporte finito. Bajo la Suposición 1.2, la prueba del siguiente resultado se puede obtener usando el Teorema 1.3 y la dinámica de la riqueza dada en [6]. Su conclusión permite asociar un PDM con horizonte aleatorio con soporte en $\{0, 1, \ldots, N\}$ con otro PDM con función de recompensa no homogénea y horizonte determinista $(N+1)$ y con costo terminal igual a cero.

La siguiente Suposición, será de gran ayuda ya que ésta implica que al no existir una oportunidad de arbitraje existe una función medible $f^* : domU_p \to A$ tal que $u(x, f^*(x)) = v(x)$, $x \in domU_p$, además de que las esperanzas estén bien definidas.

Suposición 3.1. (*i*) *No existen las oportunidades de arbitraje.*

(*ii*) $\mathbb{E}\|R_n\| < \infty$ *para cualquier* $n = 1, \ldots, N$.

Teorema 3.1. *En el problema multiperiódico de consumo e inversión, se definirán las funciones* $V_0, V_1, \ldots, V_{N+1}$ *sobre* E *por*

$$\begin{aligned} V_{N+1}(x) &:\equiv 0, \\ V_N(x) &:= \mathbb{P}_N U_p(x), \\ V_n(x) &:= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{\mathbb{P}_n U_c(c) + \mathbb{E} V_{n+1}((1+i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}))\}. \end{aligned}$$

Entonces, existen maximizadores f_n^* *de* V_n *y la política* $\{f_0^*, \ldots, f_N^*\}$ *es óptima para el problema de consumo e inversión.*

Demostración. Se mostrará que el Supuesto 1.1 se satisface con

$$\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ | v \text{ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua}\}$$

y $\Psi := F$, entonces se tendrá que:

(i) $g_N = U_p \in \mathbb{M}_N$ se cumple, ya que U_p es una función de utilidad.

(ii) Ahora sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces

$$\tau_n v(x) = \sup_{(c,a)\in D_n(x)} \{\mathbb{P}_n U_c(c) + \mathbb{E}v\left((1+i_{n+1})(x-c+a\cdot R_{n+1})\right)\},\ x \in E$$

pero por el Supuesto 3.1 se tiene que $\tau_n v \in \mathbb{M}_n$.

(iii) La existencia de maximizadores se cumple por el Teorema 1.3.

■

3.1.1. Función de utilidad potencia

En Economía, la función isoelástica de utilidad, también conocida como función de utilidad potencia, se utiliza para expresar la utilidad en términos de consumo o de alguna otra variable económica de la que se ocupa un tomador de decisiones. La función de utilidad isoelástica es un caso especial de aversión al riesgo absoluto hiperbólico (HARA) y al mismo tiempo, es la única clase de funciones de utilidad con aversión al riesgo relativo constante, por lo que también se denomina función de utilidad CRRA [48], [4] y [47]. Esta y sólo esta función de utilidad tiene la característica de aversión al riesgo relativo constante. En los modelos teóricos, esto suele implicar que la toma de decisiones no se ve afectada por la escala. Por ejemplo, en el modelo estándar de un activo sin riesgo y un activo con riesgo, bajo una aversión al riesgo relativa constante, la fracción de riqueza colocada de forma óptima en el activo con riesgo es independiente del nivel de riqueza inicial.

Ahora se trabajará el problema de consumo e inversión con la función de utilidad potencia con horizonte aleatorio finito.

Las funciones de utilidad Uc y Up serán de la forma:

$$\gamma^{-1}x^{\gamma},\ x > 0 \text{ y } 0 < \gamma < 1. \tag{3.2}$$

Ya que será más conveniente trabajar con fracciones de dinero invertido en lugar de cantidades [6]. El conjunto de fracciones admisibles estará definido por:

$$A(x) := \{\alpha \in \mathbb{R}^d | 1 + \alpha \cdot R_{n+1} \geq 0,\ \mathbb{P} - c.s.\}.$$

Suposición 3.2. *Se supondrá que para cualquier $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ se tendrá que*

$$0 \leq \mathbb{P}_n^{-\delta}(k_{n+1}(1+i_{n+1})^{\gamma}v_n)^{\delta}x_n \leq x_n$$

donde

$$\begin{aligned} k_{n+1} = {}& \mathbb{P}_{n+1}\gamma^{-1}\left(\frac{1}{(\gamma k_{n+2}(1+i_{n+2})^{\gamma}v_{n+1})^{\delta}\mathbb{P}_{n+1}^{-\delta}+1}\right)^{\gamma} \\ & + k_{n+2}(1+i_{n+2})^{\gamma}\left(\frac{(\gamma k_{n+2}(1+i_{n+2})^{\gamma}v_{n+1})^{\delta}\mathbb{P}_{n+1}^{-\delta}}{(\gamma k_{n+2}(1+i_{n+2})^{\gamma}v_{n+1})^{\delta}\mathbb{P}_{n+1}^{-\delta}+1}\right)^{\gamma} v_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

con $\delta = (1-\gamma)^{-1}$ *y* v_{n+1} *tendrá la forma siguiente:*

$$v_{n+1} = sup_{\alpha \in A(x)} \mathbb{E}[(1+\alpha \cdot R_{n+2})^{\gamma}]. \tag{3.4}$$

Entonces se obtiene el siguiente resultado para el problema de consumo e inversión con horizonte aleatorio (finito) y cuya función de utilidad en específico (potencia). Así que este Teorema proporciona un mecanismo para actuar de forma óptima con respecto al consumo y a las inversiones de riesgo, dicha decisión óptima proviene de la optimización de las ecuaciones expresadas del Teorema 3.2.

Teorema 3.2. *Se supondrá que ambas funciones de utilidad* $U_c(c)$ *y* $U_p(x)$ *son de la forma* (3.2) *con* $0 < \gamma < 1$. *Entonces se tendrá que:*

$$\begin{aligned} V_{N+1}(x) &:= 0, \\ V_N(x) &= \mathbb{P}_N \gamma^{-1} x^{\gamma} = k_N x^{\gamma}, \\ V_n(x) &= k_n x^{\gamma},\ n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \end{aligned}$$

Para cualquier $x > 0$, *donde* k_n *y* v_n *están dadas por las ecuaciones* (3.3) *y* (3.4) *respectivamente. Además, el consumo óptimo en la etapa* n *es* $c_n^* = \zeta_n^* x_n$, *donde*

$$\zeta_n^* x_n = \frac{x_n}{(\gamma k_{n+1}(1+i_{n+1})^{\gamma} v_n)^{\delta} \mathbb{P}_n^{-\delta} + 1},\ \textit{con}\ \delta = (1-\gamma)^{-1}$$

y la inversión óptima en la etapa n *es* $a_n^* = \frac{\alpha x_n (\gamma k_{n+1}(1+i_{n+1})^{\gamma} v_n)^{\delta} \mathbb{P}_n^{-\delta}}{(\gamma k_{n+1}(1+i_{n+1})^{\gamma} v_n)^{\delta} \mathbb{P}_n^{-\delta} + 1}$, *donde* α *es el argumento máximo de* v_n.

Demostración. i) Se definirá para la etapa $N+1$:

$$V_{N+1} := 0.$$

ii) Para la etapa N, se tendrá que:

$$V_N = \mathbb{P}_N \gamma^{-1} x^{\gamma} = k_N x^{\gamma},$$

iii) Por lo tanto, se utilizará la siguiente forma para las etapas posteriores:

$$\begin{aligned} V_{N-1}(x) &= \sup_{(c,a) \in D(x)} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \gamma^{-1} c^{\gamma} + \mathbb{E} V_N [(1+i_N)(x - c + a \cdot R_N)] \right\} \\ &= \sup_{(c,a) \in D(x)} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \gamma^{-1} c^{\gamma} + \mathbb{E}[k_N((1+i_N)(x - c + a \cdot R_N))^{\gamma}] \right\} \\ &= \sup_{(c,a) \in D(x)} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \gamma^{-1} c^{\gamma} + k_N (1+i_N)^{\gamma} \mathbb{E}[(x - c + a \cdot R_N)^{\gamma}] \right\}. \end{aligned}$$

Se usará la siguiente transformación: $c = \zeta x$ y $a = \alpha(1-\zeta)x$.

$$\begin{aligned} V_{N-1} &= \sup_{0 \le \zeta \le 1} \Big\{ \mathbb{P}_{N-1} \gamma^{-1} (\zeta x)^{\gamma} + k_N (1+i_N)^{\gamma} \\ &\quad \sup_{\alpha \in A(x)} \mathbb{E}[(x - \zeta x + \alpha(1-\zeta)x \cdot R_N)^{\gamma}] \Big\} \\ &= \sup_{0 \le \zeta \le 1} \Big\{ \mathbb{P}_{N-1} \gamma^{-1} (\zeta x)^{\gamma} + k_N (1+i_N)^{\gamma} ((1-\zeta)x)^{\gamma} \\ &\quad \sup_{\alpha \in A(x)} \mathbb{E}[(1 + \alpha \cdot R_N)^{\gamma}] \Big\} \\ &= x^{\gamma} \sup_{0 \le \zeta \le 1} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \gamma^{-1} \zeta^{\gamma} + k_N (1+i_N)^{\gamma} (1-\zeta)^{\gamma} v_{N-1} \right\}. \end{aligned}$$

Para encontrar el valor óptimo de consumo en la etapa $N-1$, se utilizará la siguiente sustitución:

$$\ell(\zeta) = \mathbb{P}_{N-1}\gamma^{-1}\zeta^{\gamma} + k_N(1+i_N)^{\gamma}(1-\zeta)^{\gamma}v_{N-1}.$$

Haciendo los cálculos pertinentes, se obtendrá que:

$$\zeta^* x = \frac{x}{(\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}+1}, \text{ con } \delta = (1-\gamma)^{-1}.$$

Se sabe que $0 \leq c \leq x$, entonces $0 \leq \zeta x \leq x$. Por lo tanto, se puede deducir que $0 \leq ((\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}+1)^{-1} \leq 1$. Por consiguiente, es admisible.

Para la inversión óptima en la etapa $N-1$ el valor será:

$$a^* = \alpha\frac{x(\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}}{(\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}+1}.$$

Donde α es el valor óptimo de $v_{N-1} := \sup_{\alpha\in A(x)} \mathbb{E}[(1+\alpha\cdot R_N)^{\gamma}]$.

Sustituyendo los valores óptimos en V_{N-1} se obtendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_{N-1} &= x^{\gamma}\mathbb{P}_{N-1}\gamma^{-1}\left(\frac{1}{(\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}+1}\right)^{\gamma}\\
&\quad + k_N(1+i_N)^{\gamma}\left(\frac{(\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}}{(\gamma k_N(1+i_N)^{\gamma}v_{N-1})^{\delta}\mathbb{P}_{N-1}^{-\delta}+1}\right)^{\gamma} v_{N-1}\\
&= k_{N-1}x^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Si se repitiera el proceso hasta la etapa $N-n$, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
V_{N-n} &= x^{\gamma}\mathbb{P}_{N-n}\gamma^{-1}\left(\frac{1}{(\gamma k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}v_{N-n})^{\delta}\mathbb{P}_{N-n}^{-\delta}+1}\right)^{\gamma}\\
&\quad + k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}\left(\frac{(\gamma k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}v_{N-n})^{\delta}\mathbb{P}_{N-n}^{-\delta}}{(\gamma k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}v_{N-n})^{\delta}\mathbb{P}_{N-n}^{-\delta}+1}\right)^{\gamma} v_{N-n}\\
&= k_{N-n}x^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Con su respectivo consumo óptimo de la etapa $N-n$:

$$\zeta^* x = \frac{x}{(\gamma k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}v_{N-n})^{\delta}\mathbb{P}_{N-n}^{-\delta}+1}, \text{ con } \delta = (1-\gamma)^{-1}.$$

Y su inversión óptima de la etapa $N-n$:

$$a^* = \alpha\frac{x(\gamma k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}v_{N-n})^{\delta}\mathbb{P}_{N-n}^{-\delta}}{(\gamma k_{N-n+1}(1+i_{N-n+1})^{\gamma}v_{N-n})^{\delta}\mathbb{P}_{N-n}^{-\delta}+1}.$$

Así, se podrá concluir que para la etapa 0 se tendrá que:

$$\begin{aligned}
V_0 &= x^{\gamma}\mathbb{P}_0\gamma^{-1}\left(\frac{1}{(\gamma k_1(1+i_1)^{\gamma}v_0)^{\delta}\mathbb{P}_0^{-\delta}+1}\right)^{\gamma}\\
&\quad + k_1(1+i_1)^{\gamma}\left(\frac{(\gamma k_1(1+i_1)^{\gamma}v_0)^{\delta}\mathbb{P}_0^{-\delta}}{(\gamma k_1(1+i_1)^{\gamma}v_0)^{\delta}\mathbb{P}_0^{-\delta}+1}\right)^{\gamma} v_0\\
&= k_0x^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Con el consumo óptimo en la etapa 0 igual a:

$$\zeta^* x = \frac{x}{(\gamma k_1(1+i_1)^\gamma v_0)^\delta \mathbb{P}_0^{-\delta} + 1}, \text{ con } \delta = (1-\gamma)^{-1}.$$

Y su inversión óptima en la etapa 0:

$$a^* = \alpha \frac{x(\gamma k_1(1+i_1)^\gamma v_0)^\delta \mathbb{P}_0^{-\delta}}{(\gamma k_1(1+i_1)^\gamma v_0)^\delta \mathbb{P}_0^{-\delta} + 1}.$$

■

3.1.2. Función de utilidad logaritmo

La función de utilidad logarítmica es un caso especial de la función de utilidad de aversión al riesgo relativo constante (CRRA). A grandes rasgos, esta familia de funciones de utilidad considera que los riesgos en porcentajes de la riqueza son constantes para todos los niveles de riqueza. Es decir, tanto los ricos como los pobres se preocupan de la misma manera [38], [41].

La función de utilidad logaritmo es una función de utilidad cóncava. Como se dijo antes, un inversionista se dice averso al riesgo cuando, la utilidad de un valor esperado es mayor al valor esperado de las utilidades [6].

El problema de consumo e inversión se planteará con una función de utilidad logarítmica con horizonte aleatorio finito. Las funciones de utilidad son muy útiles en los problemas de Economía y Finanzas. Ambas funciones de utilidad U_c y U_p son de la forma:

$$\log(x),\ x > 0. \tag{3.5}$$

En este caso es conveniente considerar la fracción del dinero que se invierte en los activos [6]. Así, el conjunto quedará definido como:

$$A(x) := \{\alpha \in \mathbb{R}^d | 1 + \alpha \cdot R_{n+1} > 0,\ \mathbb{P} - c.s.\}.$$

Suposición 3.3. *Se supondrá que para cualquier $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ se cumple que:*

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{N} \mathbb{P}_j x_n \leq x_n.$$

A continuación, se van a definir las siguientes igualdades, para una mayor comodidad:

$$k_n := \sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}_j, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} d_n := {} & \mathbb{P}_n \log(\mathbb{P}_n) + \sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}_{j+1} \log(\mathbb{P}_{j+1}) - \sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}_j \log(\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}_j) \\ & + \sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}_j \log(1+i_n) + \sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}_j v_n + d_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $d_N = 0$ y el valor de v_n tiene la forma de:

$$v_n = sup_{\alpha \in A(x)} \mathbb{E}[\log(1 + \alpha \cdot R_{n+1})]. \tag{3.8}$$

Luego se deducirá el siguiente resultado para el problema de consumo e inversión con horizonte aleatorio y que tiene soporte finito y cuya función de utilidad es logarítmica. Por lo tanto, este Teorema proporciona una herramienta para ejercer de forma óptima el problema de consumo e inversiones arriesgadas en cada periodo, dicha decisión proviene de la optimización de las ecuaciones expresadas en el Teorema 3.3.

Teorema 3.3. *Se supondrá que ambas funciones de utilidad $U_c(c)$ y $U_p(x)$ son de la forma* (3.5) *con $x > 0$. Entonces se cumplirá que:*

$$\begin{aligned} V_{N+1}(x) &:= 0, \\ V_N(x) &= \mathbb{P}_N \log(x) = k_N \log(x) + d_N, \text{ con } d_N = 0, \\ V_n(x) &= k_n \log(x) + d_n, \ n \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \end{aligned}$$

Para cualquier $x \geq 0$, donde k_n, d_n y v_n están dados por las ecuaciones (3.6), (3.7) *y* (3.8) *respectivamente. Además, el consumo óptimo en la etapa n es $c_n^* = \zeta_n^* x_n$, donde $\zeta_n^* x_n = \frac{\mathbb{P}_n x_n}{\sum_{j=n}^N \mathbb{P}_j}$ y la inversión óptima en la etapa n es $a_n^* = \frac{\alpha_n \left(\sum_{j=n+1}^N \mathbb{P}_j x_n\right)}{\sum_{j=n}^N \mathbb{P}_j}$, donde α_n es la solución de v_n.*

Demostración. i) Se definirá para la etapa $N+1$:

$$V_{N+1} := 0.$$

ii) Para la etapa N:

$$V_N = \mathbb{P}_N \log(x) = k_N \log(x) + d_N,$$

con $d_N = 0$.

iii) Por lo tanto, se utilizará para las siguientes etapas la forma correspondiente:

$$\begin{aligned} V_{N-1}(x) &= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \log(c) + \mathbb{E} V_N[(1+i_N)(x - c + a \cdot R_N)] \right\} \\ &= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \log(c) + \mathbb{E}[k_N \log((1+i_N)(x - c + a \cdot R_N))] \right\} \\ &= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \log(c) + k_N \log(1+i_N) + k_N \mathbb{E} \log(x - c + a \cdot R_N) \right\}. \end{aligned}$$

La siguiente transformación será utilizada: $c = \zeta x$ y $a = \alpha(1-\zeta)x$.

$$\begin{aligned} V_{N-1} &= \sup_{0\leq\zeta\leq 1} \Big\{ \mathbb{P}_{N-1} \log(\zeta x) + k_N \log(1+i_N) \\ &\quad + \sup_{\alpha\in A(x)} k_N \mathbb{E} \log(x - \zeta x + \alpha(1-\zeta)x \cdot R_N) \Big\} \\ &= \sup_{0\leq\zeta\leq 1} \Big\{ \mathbb{P}_{N-1} \log(\zeta x) + k_N \log(1+i_N) + k_N \log((1-\zeta)x) \\ &\quad + \sup_{\alpha\in A(x)} k_N \mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_N) \Big\} \\ &= \sup_{0\leq\zeta\leq 1} \left\{ \mathbb{P}_{N-1} \log(\zeta x) + k_N \log(1+i_N) + k_N \log((1-\zeta)x) + k_N v_{N-1} \right\}. \end{aligned}$$

Para encontrar el valor óptimo del consumo en la etapa $N-1$, se utilizará la siguiente sustitución:

$$\ell(\zeta) = \mathbb{P}_{N-1} \log(\zeta x) + k_N \log(1+i_N) + k_N \log((1-\zeta)x) + k_N v_{N-1}.$$

Haciendo los cálculos pertinentes, se tendrá que:

$$\zeta^* x = \frac{\mathbb{P}_{N-1} x}{\sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j}.$$

Como $0 \leq \sum_{j=N}^{N} \mathbb{P}_j \leq 1$ se cumple. Por lo que de esto resulta lo siguiente: $0 \leq \zeta \leq 1$, De aquí se podrá decir que el valor óptimo de ζ es admisible.

Para la inversión óptima en la etapa $N-1$ el valor será:

$$a^* = \alpha \frac{\sum_{j=N}^{N} \mathbb{P}_j x}{\sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j}.$$

Donde α es el valor óptimo de $v_{N-1} := \sup_{\alpha \in A(x)} \mathbb{E}[\log(1 + \alpha \cdot R_N)]$.

Al sustituir los valores óptimos en V_{N-1} se obtendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_{N-1} = & \sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j \log(x) + \mathbb{P}_{N-1} \log(\mathbb{P}_{N-1}) + \sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_{j+1} \log(\mathbb{P}_{j+1}) \\ & - \sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j \log(\sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j) + \sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j \log(1 + i_{N-1}) + \sum_{j=N-1}^{N} \mathbb{P}_j v_{N-1} \\ & = k_{N-1} \log(x) + d_{N-1}. \end{aligned}$$

Si se repitiera el proceso hasta la etapa $N-n$, producirá lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_{N-n} = & \sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j \log(x) + \mathbb{P}_{N-n} \log(\mathbb{P}_{N-n}) + \sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_{j+1} \log(\mathbb{P}_{j+1}) \\ & - \sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j \log(\sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j) + \sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j \log(1 + i_{N-n}) + \sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j v_{N-n} + d_{N-n+1} \\ & = k_{N-n} \log(x) + d_{N-n}. \end{aligned}$$

Con su respectivo consumo óptimo de la etapa $N-n$:

$$\zeta^* x = \frac{\mathbb{P}_{N-n} x}{\sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j}.$$

Y su inversión óptima de la etapa $N-n$:

$$a^* = \alpha \frac{\sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_{j+1} x}{\sum_{j=N-n}^{N} \mathbb{P}_j}.$$

Así, se podrá concluir que para la etapa 0 se tendrá:

$$\begin{aligned} V_0 = & \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j \log(x) + \mathbb{P}_0 \log(\mathbb{P}_0) + \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_{j+1} \log(\mathbb{P}_{j+1}) \\ & - \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j \log(\sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j) + \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j \log(1 + i_0) + \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j v_0 + d_1 \\ & = k_0 \log(x) + d_0. \end{aligned}$$

Con el consumo óptimo en la etapa 0 igual a:

$$\zeta^* x = \frac{\mathbb{P}_0 x}{\sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j}.$$

Y su inversión óptima en la etapa 0:

$$a^* = \alpha \frac{\sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_{j+1} x}{\sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}_j}.$$

■

3.1.3. Función de utilidad exponencial

Esta subsección tratará de una versión del problema de consumo e inversión con funciones de utilidad exponencial y con un horizonte aleatorio finito. En este escenario, el proceso que describe la evolución del capital del inversionista puede terminar antes debido a causas externas. Sin embargo, la Suposición 3.4 impide que el tomador de decisiones termine dicho proceso debido a malas inversiones que puedan llevar este proceso caiga por debajo de cero.

En el enfoque de la varianza media de Merton y Samuelson, ya se encontró que una utilidad cuadrática proporciona una solución de forma cerrada para la selección del portafolio en condiciones muy generales, sin embargo, en el caso de la potencia y la función de utilidad exponencial no es posible encontrar soluciones de forma cerrada sin información sobre la distribución del proceso de devolución [10]. Además, en [11] al suponer que los rendimientos de un portafolio siguen una distribución logarítmica normal aproximada, las expresiones de forma cerrada del portafolio óptimo se obtuvieron para las funciones de utilidad de potencia y logarítmica.

En la optimización del portafolio, para maximizar la utilidad logarítmica generalizada de algún inversionista, se tienen en cuenta activos cuyos precios dependen de sus valores pasados de forma no Markoviana [43]. Sobre el mismo tema [36] (Capítulo 9), proporciona una contribución muy interesante sobre el tratamiento de las funciones de utilidad, en particular se aborda en profundidad la aversión al riesgo.

Un caso similar, en [23] es posible revisar un estudio independiente de las funciones de utilidad (exponencial y de potencia de primer y segundo tipo) junto con algunas de sus aplicaciones en Finanzas. Esta referencia también analiza el riesgo óptimo de Pareto y presenta ejemplos muy ilustrativos sobre las funciones de utilidad mencionadas anteriormente.

Las funciones de utilidad exponencial se emplean ampliamente porque consideran una constante aversión absoluta al riesgo (CARA) [6], [8] y [58]. Es la única función de utilidad creciente con aversión al riesgo cuya prima de riesgo es invariante con respecto a la riqueza [15], [57]. El término aversión al riesgo se refiere a la preferencia otorgada a realizaciones estocásticas con desviación limitada del valor esperado. En el control óptimo con aversión al riesgo, uno puede preferir una política con un costo más alto esperado pero desviaciones más bajas a una con un costo más bajo pero posiblemente con desviaciones más altas [14]. En este trabajo se asumirá que, ambas funciones de utilidad U_c y U_p son de la forma

$$-\gamma^{-1}\exp(-\gamma y),\ \gamma > 0 \text{ y } y \in E, \tag{3.9}$$

El siguiente supuesto será necesario para garantizar que los consumos óptimos no excedan el capital disponible.

Suposición 3.4. *Para cada $n = 0, 1, ..., N$ y $x > 0$, se supondrá que*

$$1 < \frac{\mathbb{P}_n}{k_{n+1}(b_{n+1}(1 + i_{n+1})v_n)} < \exp(x_n\gamma),$$

donde

$$\begin{aligned} k_{n+1} = &\left(\frac{\mathbb{P}_{n+1}}{\gamma}\right)\left(\frac{k_{n+2}b_{n+2}(1+i_{n+2})v_{n+1}}{\mathbb{P}_{n+1}}\right)^{\left(\frac{\gamma}{b_{n+2}(1+i_{n+2})+\gamma}\right)} \\ &+ k_{n+2}v_{n+1}\left(\frac{k_{n+2}b_{n+2}(1+i_{n+2})v_{n+1}}{\mathbb{P}_{n+1}}\right)^{\left(\frac{b_{n+2}(1+i_{n+2})}{b_{n+2}(1+i_{n+2})+\gamma}\right)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

y

$$b_{n+1} = \frac{b_{n+2}(1+i_{n+2})\gamma x}{b_{n+2}(1+i_{n+2})+\gamma}, \tag{3.11}$$

con $k_N = \mathbb{P}_N\gamma^{-1}$, $b_N = \gamma$, $\mathbb{P}_n := \sum_{i=n}^{N}\rho_i = \mathbb{P}(\tau \geq n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ *y*

$$v_n := \inf_{\alpha\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma\frac{S_N^0}{S_n^0}\alpha\cdot R_{n+1}\right)\right], \tag{3.12}$$

que existe gracias al Teorema 4.1.1 *de [6].*

Entonces es posible deducir el siguiente resultado para el problema de consumo e inversión con horizonte aleatorio (finito) y función de utilidad creciente aversa al riesgo cuya prima de riesgo es invariante con respecto a la riqueza (función de utilidad exponencial). Este Teorema proporciona un mecanismo para actuar de manera óptima con respecto al consumo y las inversiones de riesgo en cada etapa, dicha decisión óptima proviene de la optimización de las ecuaciones expresadas en el Teorema 3.4 que son relativamente simples en este caso gracias a las definiciones de coeficientes b_n y k_n.

Teorema 3.4. *Se supondrá que ambas funciones $U_c(c)$ y $U_p(x)$ son funciones de utilidad exponencial* (3.9) *con $\gamma > 0$. Entonces se tendrá que:*

$$\begin{aligned} V_{N+1}(x) &= 0, \\ V_N(x) &= -\mathbb{P}_N\gamma^{-1}\exp(-\gamma x) = -k_N\exp(-b_N x), \\ V_n(x) &= -k_n\exp(-b_n x),\ n\in\{0,1,\ldots,N-1\}, \end{aligned}$$

$\forall x \geq 0$, donde k_n, b_n y v_n están dadas por las ecuaciones (3.10), (3.11) *y* (3.12) *respectivamente. Además, el consumo óptimo por etapa n es $c_n^* = \zeta_n^* x_n$, donde*

$$\zeta_n^* x_n = \frac{\ln\mathbb{P}_n + b_{n+1}(1+i_{n+1})x_n - \ln|k_{n+1}b_{n+1}(1+i_{n+1})v_n|}{b_{n+1}(1+i_{n+1})+\gamma}$$

y la inversión óptima por etapa n es $a_n^* = \frac{S_N^0}{S_n^0(1+i_{n+1})}\alpha_n^*$, donde α_n^* es la solución de (3.12)*, que se puede encontrar a través de $\alpha_n^* = \frac{1}{\gamma}\frac{S_n^0}{S_N^0}\tilde{\alpha}_n$ donde $\tilde{\alpha}_n$ es el mínimo de*

$$\alpha \mapsto \mathbb{E}[exp(-\alpha\cdot R_{n+1})],\ \alpha\in\mathbb{R}^d.$$

Observación 3.1. *El Teorema anterior proporciona la política óptima de consumo e inversión tal que (f_n^*) es*

$$f_n^*(x) = (\zeta_n^* x_n, a_n^*), \tag{3.13}$$

con ζ_n^* y a_n^* como en el Teorema 3.4.

Demostración. En primer lugar, se establecerá los siguientes conjuntos de funciones para probar la Suposición 1.1

$$\mathbb{M} := \{v : E \to \mathbb{R} | v(x) \equiv 0 \ \text{ o } \ v(x) = -k\exp(-bx), \ \text{para } k, b > 0\}.$$

y

$$\Psi := \{f \in F | f(x) = (\zeta x, \alpha), \ \text{con } \alpha \in \mathbb{R}^d, \ \zeta \in \mathbb{R}_+\}.$$

i) $V_{N+1}(x) \equiv 0$ y $V_N(x) = g_N(x) = U_p(x)$, ambos pertenecen a $\mathbb{M}$.

ii) Sí $v(x) \equiv 0$ entonces es sencillo ver que $\mathcal{T}_n v(x) \in \mathbb{M}$. Se asumirá ahora que, $v(x) = -k\exp(-bx)$ para $k, b > 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n v(x) &= \sup_{(c,a)\in D(x)} \{\mathbb{P}_n U_c(c) + \mathbb{E} v[(1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1})]\} \\
&= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{-\mathbb{P}_n \gamma^{-1} \exp(-\gamma c) + \mathbb{E}\left[-k\exp\left(-b(1 + i_{n+1})\right.\right.\right. \\
&\quad (x - c + a \cdot R_{n+1}))]\} \\
&= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{-\mathbb{P}_n \gamma^{-1} \exp(-\gamma c) - k\exp(-b(1 + i_{n+1})(x - c))\right. \\
&\quad \left.\mathbb{E}[\exp(-b(1 + i_{n+1})(a \cdot R_{n+1}))]\right\}.
\end{aligned}$$

Se considerará la transformación: $c = \zeta x$ y $a = \frac{S_N^0}{S_n^0 b(1+i_{n+1})}\alpha$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n v(x) &= \sup_{0\leq\zeta\leq 1} \left\{-\mathbb{P}_n \gamma^{-1} \exp(-\gamma\zeta x) - k\exp(-b(1 + i_{n+1})(x - \zeta x))\right. \\
&\quad \left.\mathbb{E}_{\alpha\in\mathbb{R}^d}\left[\exp\left(-b(1 + i_{n+1})\left(\frac{S_N^0}{S_n^0 b(1 + i_{n+1})}\alpha \cdot R_{n+1}\right)\right)\right]\right\} \\
&= \sup_{0\leq\zeta\leq 1} \left\{-\mathbb{P}_n \gamma^{-1} \exp(-\gamma\zeta x) - k\exp(-b(1 + i_{n+1})(x - \zeta x)) v_n\right\},
\end{aligned}$$

donde v_n está dada por (3.12).

iii) La existencia de un maximizador en el conjunto. Ψ será probado. Para ello, se examinará la función real $\ell(\zeta)$ declarada como

$$\ell(\zeta) := -\mathbb{P}_n \gamma^{-1} \exp(-\gamma\zeta x) - k\exp(-b(1 + i_{n+1})(x - \zeta x)) v_n.$$

Es posible descubrir su máximo a través de técnicas de optimización estándar. Por lo tanto, de la Suposición 3.4 se observará que el único punto crítico de ℓ que está en $[0, 1]$ es:

$$\zeta = \frac{\ln \mathbb{P}_n + b(1 + i_{n+1})x - \ln|kb(1 + i_{n+1})v_n|}{x[b(1 + i_{n+1}) + \gamma]}.$$

Que es un máximo relativo por el criterio de la segunda derivada. Sustituyendo el valor de ζ en $\mathcal{T}_n v(x)$ se encontrará que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n v(x) &= \left[-\mathbb{P}_n \gamma^{-1} \mathbb{P}_n^{\left(\frac{-\gamma}{b(1+i_{n+1})+\gamma}\right)} (kb(1 + i_{n+1})v_n)^{\left(\frac{\gamma}{b(1+i_{n+1})+\gamma}\right)}\right. \\
&\quad \left. - k\mathbb{P}_n^{\left(\frac{b(1+i_{n+1})}{b(1+i_{n+1})+\gamma}\right)} (kb(1 + i_{n+1})v_n)^{\left(\frac{-b(1+i_{n+1})}{b(1+i_{n+1})+\gamma}\right)} v_n\right] \\
&\quad \exp\left(\frac{-b(1 + i_{n+1})\gamma x}{b(1 + i_{n+1}) + \gamma}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el maximizador para v será de la forma$(\zeta x, a)$ con $\mathcal{T}_n v(x) \in \mathbb{M}$.

iv) Las expresiones para V_n y sus maximizadores correspondientes utilizando el Teorema 3.4 será alcanzado.

Para $x > 0$,
$$V_N(x) = -\mathbb{P}_N \gamma^{-1} \exp(-\gamma x) = -k_N \exp(-b_N x).$$

Por un proceso inductivo, y siguiendo esencialmente las mismas líneas que las de *ii*) y *iii*), se podrá encontrar para $n = 1, ..., N-1$ que:

$$V_{N-n}(x) = -k_{N-n} \exp(-b_{N-n} x), \ \forall x \in E,$$

donde k_{N-n} y b_{N-n} estarán dadas por las ecuaciones (3.10) y (3.11). Además, el consumo óptimo está dado por $c_{N-n} = \zeta_{N-n} x$ con:

$$\zeta_{N-n} = \frac{\ln \mathbb{P}_{N-n} + b_{N-n-1}(1 + i_{N-n-1})x - \ln |k_{N-n-1} b_{N-n-1}(1 + i_{N-n-1}) v_{N-n}|}{x[b_{N-n-1}(1 + i_{N-n-1}) + \gamma]}$$

y la inversión óptima es $a^* = \frac{S_N^0}{S_{N-n}^0 \gamma (1+i_{N-n-1})} \alpha^*$, donde α^* es la solución de

$$v_{N-n} = \inf_{\alpha^* \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma \frac{S_N^0}{S_{N-n}^0} \alpha \cdot R_{N-n-1}\right)\right].$$

■

3.2. Problema de consumo e inversión con factor de descuento variable en el tiempo y que tiene horizonte aleatorio

Se considerará que un accionista con algún capital inicial $x > 0$ diseñará una estrategia que al inicio de un número aleatorio de etapas (τ), dictará en el tiempo $n \geq 1$, cuánto de su capital será consumido (c_n), y cuánto será invertido en d activos de riesgo (a_n) y en un bono sin riesgo en el mercado financiero dado por ejemplo en [6] o en el Apéndice B de [44]. Además, se contempla una función de utilidad; $U_c : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, para evaluar el capital consumido, sin embargo la riqueza terminal X_τ se mide por otra función de utilidad; $U_p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. La cuestión principal consiste en encontrar un esquema de consumo-inversión para maximizar su suma esperada de beneficios descontados. Se puede deducir que el proceso de riqueza evolucionará como sigue:

$$X_{n+1} = (1 + i_{n+1})(X_n - c_n + a_n \cdot R_{n+1}), \tag{3.14}$$

donde, $R_n = \left(R_n^1, R_n^2, \ldots, R_n^d\right)$ es llamado proceso de riesgo relativo [6] en el cual $R_n^k = \frac{\tilde{R}_n^k}{1+i_n} - 1$ y $\tilde{R}_n^k$ es una variable aleatoria positiva que representa la variación del precio relativo de las acciones $1 \leq k \leq d$ entre los tiempos n y $n+1$; es decir, $S_{n+1}^k = S_n^k \tilde{R}_{n+1}^k$ (aquí, S_{n+1}^k denotará el precio del k-ésimo activo). Finalmente, i_n es la tasa de interés para el periodo $[n, n+1)$. Adicionalmente, (c_n, a_n) es una estrategia de consumo e inversión, es decir que $0 \leq c_n \leq X_n$ y el proceso (a_n) y (c_n) es adaptado a la filtración natural generada por los precios de las acciones; $(\mathcal{F}_n)$ con $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ y $S_n = (S_n^1, S_n^2, \ldots, S_n^d)$. El problema de consumo e inversión se puede resumir como:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\tau} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k(X_k, c_k, a_k)\right) U_c(c_k) 1_{\{\tau < N\}} + \alpha_N(X_N) U_p(X_\tau^{c,a}) 1_{\{\tau = N\}}\right] \to \text{máx}, \\ (c, a) \text{ es una estrategia de consumo e inversión con } X_\tau^{c,a} \geq 0, \ \mathbb{P} - c.s. \end{cases} \tag{3.15}$$

Dicho problema, puede resolverse mediante un modelo de decisión de Markov con las siguientes componentes:

- $E := [0, \infty)$ donde $x \in E$ denota la riqueza,
- $A := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ donde $a \in \mathbb{R}^d$ es la cantidad de dinero invertida en el activo y $c \in \mathbb{R}_+$ es la riqueza consumida,
- $D(x) := \{(c, a) \in A | 0 \leq c \leq x \ y \ (1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}) \geq 0, \ \mathbb{P} - a.s.\}$ es el conjunto de acciones admisibles para cada $x \geq 0$,
- $\mathcal{Z} := [-1, \infty)^d$ donde $z \in \mathcal{Z}$ denota el riesgo relativo,
- $T(x, c, a, z) := (1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot z)$, es la función de transición,
- $Q^Z(\cdot | x, c, a) :=$ denota la distribución de R_{n+1} (independiente (x, c, a)),
- $r(x, c, a) := U_c(c)$, es la función de recompensa,
- $g(x) := U_p(x)$, es la función de recompensa terminal,
- τ, representa el horizonte aleatorio con soporte en $\{0, 1, \ldots, N\}$.
- $\mathbb{K} := \{(x, a) | x \in E, a \in D(x)\}$, es un subconjunto medible de $E \times A$.
- $\alpha_n : \mathbb{K} \to (0, 1]$, es una función medible, que representan un factor de descuento aplicado a la recompensa por etapa.

Para este problema el objetivo será el de optimizar el criterio de rendimiento:

$$V(x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}_x^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\tau-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_k(X_k, (c_k, a_k)) \right) U_c(c_n(X_n)) + U_p(X_\tau) \prod_{k=0}^{\tau-1} \tilde{\alpha}_k(x_k, a_k) \right]$$

donde el supremo se tomará sobre todas las políticas $\pi = \{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ con $f_n(x) = (c_n(x), a_n(x))$.

La demostración del siguiente resultado de Programación Dinámica es una consecuencia del Teorema 1.3 junto con la dinámica del proceso de riqueza expresada en (3.14) y los supuestos 1.6-1.9.

Teorema 3.5. *Para el problema multiperiódico de consumo e inversión con factor de descuento variable en el tiempo y que tiene horizonte aleatorio con soporte en $\{1, \ldots, N\}$, se considerará las funciones $V_0, V_1, \ldots, V_{N+1}$ definidas en $[0, \infty)$ dadas por*

$$\begin{aligned} V_{N+1}(x) &:\equiv 0, \\ V_N(x) &:= U_p(x), \\ V_n(x) &= \sup_{(c,a) \in D(x)} \{U_c(c) + \tilde{\alpha}_n(x, a) \mathbb{E} V_{n+1}\left((1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1})\right)\}. \end{aligned}$$

Entonces, existen maximizadores $f_n^* \in \mathbb{F}$ de V_n y la estrategia $\{f_0^*, \ldots, f_N^*\}$ es óptima para el problema de consumo e inversión.

3.2.1. Función de utilidad exponencial

Esta sección, se ocupará de una elección clásica pero útil de funciones de utilidad que implica una aversión absoluta constante al riesgo (CARA), a saber, de tipo exponencial [6]. Por lo tanto, se supondrá que ambas funciones de utilidad $U_c(c)$ y $U_p(x)$ son de la forma:

$$-\gamma^{-1}\exp(-\gamma x),\ \gamma > 0 \text{ y } x \in E. \tag{3.16}$$

Hasta donde el autor sabe, no existen referencias en las que se tengan en cuenta elecciones particulares de funciones de descuento. En esta dirección, se considerará factores de descuento de la forma $\alpha_n(x,c,a) = h_n(x)\exp(c\beta_n(x))$ ya que, desde un punto de vista técnico, los cálculos se aligerarán al considerar que la función de descuento depende sólo de la riqueza actual y del consumo (excluyendo el capital invertido) y que $\alpha_n(x,c) = h_n(x)f_n(c,x)$ y $\frac{\partial f_n}{\partial c}(c,x) = f_n(c,x)\beta_n(x)$, que ocurre si y sólo si $f_n(c,x) = \exp(c\beta_n(x))$, con $f_n(0) = 1$ y $\beta_n(x) < 0$ para todo $x > 0$.

Para garantizar que los consumos óptimos no superen nunca el capital actual, será necesaria la siguiente hipótesis.

Suposición 3.5. *Para cualquier $n \in \{0,1,\dots,N\}$ y $x \in E$:*

$$1 < \frac{1}{\hat{\alpha}_n h_n(x_n)k_{n+1}(x_{n+1})v_n[b_{n+1}(x_n)(1+i_{n+1}) + \beta_n(x_{n+1})]} < \exp([\gamma + \beta_n(x_n)]x_n).$$

Donde

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x_{n+1}) = \gamma^{-1}\,&(\hat{\alpha}_{n+1}h_{n+1}(x_{n+1})k_{n+2}(x_{n+2})v_{n+1}[b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2}) \\ &+ \beta_{n+1}(x_{n+1})])^{\frac{\gamma}{b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2})+\gamma+\beta_{n+1}(x_{n+1})}} + \hat{\alpha}_{n+1}h_{n+1}(x_{n+1})k_{n+2}(x_{n+2})v_{n+1} \\ &\quad(\hat{\alpha}_{n+1}h_{n+1}(x_{n+1})k_{n+2}(x_{n+2})v_{n+1}\,[b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2}) \\ &+ \ \beta_{n+1}(x_{n+1})])^{\frac{-b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2})-\beta_{n+1}(x_{n+1})}{b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2})+\gamma+\beta_{n+1}(x_{n+1})}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

y

$$b_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2})\gamma}{b_{n+2}(x_{n+2})(1+i_{n+2}) + \gamma + \beta_{n+2}(x_{n+2})}. \tag{3.18}$$

Con $k_N(x) = \gamma^{-1}$, $b_N(x) = \gamma$ y

$$v_n := \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma \frac{S_N^0}{S_n^0}\alpha \cdot R_{n+1}\right)\right], \tag{3.19}$$

donde (S_n^0) es la secuencia asociada a la evolución del bono sin riesgo.

Nota 3.1. *En ciertos casos, el esquema recursivo para $k_n(x_n)$ y $b_n(x_n)$ no depende del capital x_n; por ejemplo, el caso habitual en el que α_n es constante, así como el marco en el que $\alpha_n(x_n, c_n) = \exp(c_n - x_n)$.*

A continuación se obtendrá el siguiente resultado para el problema de consumo e inversión con factor de descuento variable en el tiempo y que tiene horizonte aleatorio con soporte finito, cuya función de utilidad tiene aversión al riesgo (tipo exponencial). Dicho Teorema nos suministra un criterio de decisión para obtener la asignación óptima de capital para cada etapa, que además es relativamente sencillo gracias a las definiciones de los coeficientes b_n y k_n.

Teorema 3.6. *Bajo las condiciones anteriormente descritas, se tendrá que para cada capital inicial $x > 0$ las funciones definidas en el Teorema 3.5 adoptan la forma*

$$\begin{aligned}
V_{N+1}(x) &:= 0,\\
V_N(x) &= -\gamma^{-1}\exp(-\gamma x) = -k_N(x)\exp(-b_N(x)x),\\
V_n(x) &= -k_n(x)\exp(-b_n(x)x),\ n \in \{0, 1, \dots, N-1\},
\end{aligned}$$

donde $k_n(x)$, $b_n(x)$ y v_n están dados por las ecuaciones (3.17), (3.18) *y* (3.19) *respectivamente. Además, se tendrá que el consumo óptimo en la etapa n es:*

$$c_n^*(x_n) = \frac{b_{n+1}(x_n)(1+i_{n+1})x_n - \ln(\hat{\alpha}_n h_n(x_n) k_{n+1}(x_n) v_n[b_{n+1}(x_n)(1+i_{n+1}) + \beta_n(x_n)])}{b_{n+1}(x_n)(1+i_{n+1}) + \gamma + \beta_n(x_n)}$$

y la inversión óptima en la etapa n es $a_n^* = \frac{S_N^0}{S_n^0 b(1+i_{n+1})}\alpha_n^*$, donde α_n^* puede encontrarse a través de $\alpha_n^* = \frac{1}{\gamma}\frac{S_n^0}{S_N^0}\tilde{\alpha}_n$ en donde $\tilde{\alpha}_n$ es el punto mínimo de $\alpha \mapsto \mathbb{E}[exp(-\alpha \cdot R_{n+1})]$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Se fijará $V_{N+1} :\equiv 0$, por lo que se tendrá que:

$$V_N(x) = -k_N(x)\exp(-b_N(x)x).$$

Además,

$$\begin{aligned}
V_{N-1}(x) &= \sup_{(c,a)\in D(x)} \{U_c(c) + \tilde{\alpha}_{N-1}(x,c)\mathbb{E}V_N[(1+i_N)(x-c+a\cdot R_N)]\}\\
&= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{-\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) + \tilde{\alpha}_{N-1}(x,c)\mathbb{E}\left[-k_N(x)\exp\left(-b_N(x)(1+i_N)\right.\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left.(x-c+a\cdot R_N)\right)\right]\right\}\\
&= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{-\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-1}\alpha_{N-1}(x,c)k_N(x)\exp\left(-b_N(x)(1+i_N)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.(x-c)\right)\mathbb{E}[\exp(-b_N(x)(1+i_N)a\cdot R_N)]\right\}.\\
&= \sup_{(c,a)\in D(x)} \left\{-\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)f_{N-1}(c)k_N(x)\exp\left(-b_N(x)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.(1+i_N)(x-c)\right)\mathbb{E}[\exp(-b_N(x)(1+i_N)a\cdot R_N)]\right\}.
\end{aligned}$$

La transformación $a = \frac{S_N^0}{S_{N-1}^0 b(1+i_N)}\alpha$, conducirá a:

$$\begin{aligned}
V_{N-1}(x) &= \sup_{c\in[0,x]} \left\{-\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)f_{N-1}(c)k_N(x)\exp\left(-b_{N-1}(x)(1+i_N)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.(x-c)\right)\mathbb{E}_{\alpha\in\mathbb{R}^d}\left[\exp\left(-b_N(x)(1+i_N)\left(\frac{S_N^0}{S_{N-1}^0 b(1+i_N)}\alpha\cdot R_N\right)\right)\right]\right\}\\
&= \sup_{c\in[0,x]} \left\{-\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)f_{N-1}(c)k_N(x)\right.\\
&\quad \left.\exp(-b_N(x)(1+i_N)(x-c))v_{N-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Ahora se está en condiciones para demostrar la existencia de un maximizador de V_{N-1}. Para ello, se considerará la siguiente función

$$\ell(c) := -\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)f_{N-1}(c)k_N(x)\exp(-b_N(x)(1+i_N)(x-c))v_{N-1},$$

lo cual implicará que

$$\begin{aligned}
\ell'(c) &= \exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)f_{N-1}(c)b_N(x)(1+i_N)k_N\exp(-b_N(x)(1+i_N)(x-c))\\
&\quad v_{N-1} - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)f'_{N-1}(c)k_N(x)\exp(-b_N(x)(1+i_N)(x-c))v_{N-1} = 0.
\end{aligned}$$

Después de realizar algunos cálculos se tendrá que el consumo óptimo en la etapa $N-1$ es:

$$c^*_{N-1}(x) = \frac{b_N(x)(1+i_N)x - \ln(\hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)k_N(x)v_{N-1}[b_N(x)(1+i_N)+\beta_{N-1}(x)])}{b_N(x)(1+i_N)+\gamma+\beta_{N-1}(x)}$$

y su correspondiente inversión óptima será: $a^*_{N-1} = \frac{S^0_N}{S^0_{N-1}\gamma(1+i_N)}\alpha^*$, donde α^* es la solución de

$$v_{N-1} = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma\frac{S^0_N}{S^0_{N-1}}\alpha\cdot R_N\right)\right].$$

El Supuesto 3.5 asegurará que $0 \leq c^*_{N-1}(x) \leq x$.

Sustituyendo el valor de c^*_{N-1} en $V_{N-1}(x)$ producirá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_{N-1}(x) = &\Big\{-\gamma^{-1}\left(\hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)k_N(x)v_{N-1}\left[b_N(x)(1+i_N)\right.\right.\\
&\left.\left.+\beta_{N-1}(x)\right]\right)^{\frac{\gamma}{b_N(x)(1+i_N)+\gamma+\beta_{N-1}(x)}} - \hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)k_N(x)v_{N-1}\\
&(\hat{\alpha}_{N-1}h_{N-1}(x)k_N(x)v_{N-1}[b_N(x)(1+i_N+\beta_{N-1}(x))])^{\frac{-b_N(x)(1+i_N)-\beta_{N-1}(x)}{b_N(x)(1+i_N)+\gamma+\beta_{N-1}(x)}}\Big\}\\
&\exp\left(\frac{-b_N(x)(1+i_N)\gamma x}{b_N(x)(1+i_N)+\gamma+\beta_{N-1}(x)}\right)\\
= &-k_{N-1}(x)\exp(-b_{N-1}(x)x),
\end{aligned}$$

donde $k_{N-1}(x)$ y $b_{N-1}(x)$ podrán ser encontrados por las ecuaciones (3.17) y (3.18) respectivamente.

Repitiendo inductivamente el mismo procedimiento, se tendrá que; para $2 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned}
V_{N-n}(x) = \sup_{(c,a)\in A(x)} &\left\{-\gamma^{-1}\exp(-\gamma c) - \hat{\alpha}_{N-n}h_{N-n}(x)f_{N-n}(c)k_{N-n+1}(x)\right.\\
&\exp(-b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})(x-c))\\
&\left.\mathbb{E}[\exp(-b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})a\cdot R_{N-n+1})]\right\}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente el consumo óptimo en la etapa $N-n$ será de:

$$\begin{aligned}
c^*_{N-n}(x) = &\frac{b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})x}{b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})+\gamma+\beta_{N-n}(x)}\\
&-\frac{\ln(\hat{\alpha}_{N-n}h_{N-n}(x)k_{N-n+1}(x)v_{N-n}[b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})+\beta_{N-n}(x)])}{b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})+\gamma+\beta_{N-n}(x)}
\end{aligned}$$

con la correspondiente inversión óptima dada por: $a^*_{N-n} = \frac{S^0_N}{S^0_n\gamma(1+i_{n+1})}\alpha^*$, donde α^* es la solución de

$$v_{N-n} = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma\frac{S^0_N}{S^0_{N-n}}\alpha\cdot R_{N-n+1}\right)\right].$$

Remplazando $c^*_{N-n}(x)$ en $V_{N-n}(x)$ se obtendrá que:

$$\begin{aligned}
V_{N-n}(x) = &\Big\{-\gamma^{-1}\left(\hat{\alpha}_{N-n}h_{N-n}(x)k_{N-n+1}(x)v_{N-n}[b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})\right.\\
&\left.+\beta_{N-n}(x)]\right)^{\frac{\gamma}{b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})+\gamma+\beta_{N-n}(x)}} - \hat{\alpha}_{N-n}h_{N-n}(x)k_{N-n+1}(x)v_{N-n}\\
&(\hat{\alpha}_{N-n}h_{N-n}(x)k_{N-n+1}(x)v_{N-n}[b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1}\\
&+\beta_{N-n}(x))])^{\frac{-b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})-\beta_{N-n}(x)}{b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})+\gamma+\beta_{N-n}(x)}}\Big\}\\
&\exp\left(\frac{-b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})\gamma x}{b_{N-n+1}(x)(1+i_{N-n+1})+\gamma+\beta_{N-n}(x)}\right)\\
= &-k_{N-n}(x)\exp(-b_{N-n}(x)x),
\end{aligned}$$

donde, $k_{N-n}(x)$ y $b_{N-n}(x)$ podrán encontrarse por las ecuaciones (3.17) y (3.19) respectivamente.

De las consideraciones anteriores, se podrá concluir que:

$$\begin{aligned} V_0(x) = &\Big\{ -\gamma^{-1} \left(\hat{\alpha}_0 h_0(x) k_1(x) v_0 [b_1(x)(1+i_1) + \beta_0(x)]\right)^{\frac{\gamma}{b_1(x)(1+i_1)+\gamma+\beta_0(x)}} - \hat{\alpha}_0 \\ &h_0(x) k_1(x) v_0 \left(\hat{\alpha}_0 h_0(x) k_1(x) v_0 [b_1(x)(1+i_1+\beta_0(x))]\right)^{\frac{-b_1(x)(1+i_1)-\beta_0(x)}{b_1(x)(1+i_1)+\gamma+\beta_0(x)}} \Big\} \\ &\exp\left(\frac{-b_1(x)(1+i_1)\gamma x}{b_1(x)(1+i_1)+\gamma+\beta_0(x)}\right) \\ = &-k_0(x)\exp(-b_0(x)x), \end{aligned}$$

donde, $k_0(x)$ y $b_0(x)$ podrán encontrarse por medio de las ecuaciones (3.17) y (3.19) respectivamente.

El consumo óptimo correspondiente a la etapa 0 será:

$$c_0^*(x) = \frac{b_1(x)(1+i_1)x - \ln(\hat{\alpha}_0 h_0(x) k_1(x) v_0 [b_1(x)(1+i_1) + \beta_0(x)])}{b_1(x)(1+i_1)+\gamma+\beta_0(x),}$$

con una inversión óptima de $a_0^* = \frac{S_N^0}{S_0^0 \gamma (1+i_1)} \alpha^*$, donde α^* es la solución de

$$v_0 = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma \frac{S_N^0}{S_0^0} \alpha \cdot R_1\right)\right].$$

■

3.2.2. Ejemplos de funciones de factor de descuento $\alpha_n(x_n, c_n, a_n)$ que satisfacen el Teorema 3.6

1. Sea $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n h_n(x_n)$; es decir, $\beta_n(x_n) = 0\ \forall x$, sólo depende del capital actual. El consumo óptimo para la etapa n será:

$$c_n^*(x_n) = \frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})x_n - \ln(k_{n+1}(x_{n+1})\hat{\alpha}_n h_n(x_n) v_n b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}))}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})+\gamma},$$

y la inversión óptima en la etapa n: $a_n^* = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha \cdot R_{n+1}\right)\right].$

Donde $k_n(x_n)$, $b_n(x_n)$ y v_n podrán encontrarse a través de las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) respectivamente.

$$\begin{aligned} k_n(x_n) = &\Big\{ \gamma^{-1} (\hat{\alpha}_n h_n(x_n) k_{n+1}(x_{n+1}) v_n b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}))^{\frac{\gamma}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})+\gamma}} + \hat{\alpha}_n h_n(x_n) \\ &k_{n+1}(x_{n+1}) v_n (\hat{\alpha}_n h_n(x_n) k_{n+1}(x_{n+1}) v_n b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}))^{\frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})+\gamma}} \Big\}, \end{aligned}$$

$$b_n(x_n) = \frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})\gamma}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})+\gamma}.$$

Para algún $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ y $x \in E$ se tendrá que:

$$1 < \frac{1}{k_{n+1}(x_{n+1})\hat{\alpha}_n h_n(x_{n+1}) v_n b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})} < \exp(\gamma x_n).$$

2. Sea $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n \exp(c_n - x_n)$, en este caso depende de la distancia entre el consumo y el capital actual.

   El consumo óptimo para la etapa n:

$$c_n^*(x_n) = \frac{(b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1)x_n - \ln(k_{n+1}(x_{n+1})\hat{\alpha}_n v_n[b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1])}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1 + \gamma},$$

   y su inversión óptima en la etapa n: $a_n^* = \text{ínf}_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha \cdot R_{n+1}\right)\right].$

   Donde $k_n(x_n)$, $b_n(x_n)$ y v_n se podrán encontrar por medio de las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) respectivamente.

$$\begin{aligned} k_n(x_n) = \Big\{ & \gamma^{-1}(\hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1])^{\frac{\gamma}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})-1+\gamma}} \\ & + \hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n (\hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1])^{\frac{1-b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})-1+\gamma}} \Big\}, \end{aligned}$$

$$b_n(x_n) = \frac{(b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1)\gamma}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1 + \gamma}.$$

   Para algún $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ y $x \in E$ se tendrá que:

$$1 < \frac{1}{k_{n+1}(x_{n+1})_{n+1}\hat{\alpha}_n v_n [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1]} < \exp([\gamma - 1]x_n).$$

3. Sea $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n x_n \exp(-c_n)$, en este caso, el consumo penaliza al capital actual.

   Su consumo óptimo en la etapa n es:

$$c_n^*(x_n) = \frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})x_n - \ln(k_{n+1}(x_{n+1})\hat{\alpha}_n v_n x_n [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1])}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1 + \gamma},$$

   con la inversión óptima en la etapa n: $a_n^* = \text{ínf}_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha \cdot R_{n+1}\right)\right].$

   Donde $k_n(x_n)$, $b_n(x_n)$ y v_n se podrán encontrar con las ecuaciones (3.10), (3.18) y (3.19) respectivamente.

$$\begin{aligned} k_n(x_n) = \Big\{ & \gamma^{-1}(\hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1])^{\frac{-\gamma}{1-b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})-\gamma}} \\ & + \hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n (\hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1])^{\frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})}{1-b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})-\gamma}} \Big\}, \end{aligned}$$

$$b_n(x_n) = \frac{(1 - b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}))\gamma}{1 - b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - \gamma}.$$

   Para algún $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ y $x \in E$ se tendrá que:

$$1 < \frac{1}{k_{n+1}(x_{n+1})\hat{\alpha}_n v_n x_{n+1} [b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - 1]} < \exp([\gamma - 1]x_n).$$

4. Sea $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n \exp(-x_n c_n)$, en este caso el consumo penaliza al capital actual de forma más severa.

   Con el consumo óptimo en la etapa n de:

$$c_n^*(x_n) = \frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})x_n - \ln(k_{n+1}(x_n)\hat{\alpha}_n v_n[b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n])}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n + \gamma},$$

   y la inversión óptima en la etapa n: $a_n^* = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha \cdot R_{n+1}\right)\right].$

   Donde $k_n(x_n)$, $b_n(x_n)$ y v_n se podrán encontrar por medio de las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19) respectivamente.

$$\begin{aligned} k_n(x_n) = \Big\{ &\gamma^{-1}(\hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n[b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n])^{\frac{\gamma}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n + \gamma}} \\ &+ \hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n(\hat{\alpha}_n k_{n+1}(x_{n+1}) v_n[b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n])^{\frac{x_n - b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n + \gamma}} \Big\}, \end{aligned}$$

$$b_n(x_n) = \frac{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1})\gamma}{b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n + \gamma}.$$

   Para algún $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ y $x \in E$ se tendrá que:

$$1 < \frac{1}{k_{n+1}(x_{n+1})\hat{\alpha}_n v_n[b_{n+1}(x_{n+1})(1+i_{n+1}) - x_n]} < \exp([\gamma - x_n]x_n).$$

3.3. Rastreo de índice con horizonte aleatorio y que tiene soporte finito

El problema de rastreo de índices que se formula a continuación puede considerarse una aplicación de la cobertura de la varianza media en un mercado incompleto.

Como en la anterior sección, se supondrá que tiene un mercado financiero con un bono sin riesgo y d activos riesgosos. Además de los activos negociables existe un activo no comerciable cuyo precio es muy alto. El proceso de precios $(\hat{S}_n)$ evoluciona conforme a

$$\hat{S}_{n+1} = \hat{S}_n \hat{R}_{n+1}.$$

La variable aleatoria positiva $\hat{R}_{n+1}$ que es el cambio de precio relativo del activo no negociado puede ser correlacionado con R_{n+1}. Se asumirá que los vectores aleatorios $(R_1, \hat{R}_1), (R_2, \hat{R}_2), \ldots$ son independientes y la distribución conjunta de $(R_n, \hat{R}_n)$ es dada. El objetivo ahora es rastrear el activo no negociado lo más cercanamente posible para invertir en el mercado financiero. El error de rastreo es medido en términos de la distancia cuadrática de la riqueza del portafolio al proceso de precios $(\hat{S}_n)$.

El problema de rastreo de índice considerando al horizonte aleatorio τ con soporte finito estará dado por:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{x\hat{s}}\left[\sum_{n=0}^{\tau} (X_n^\phi - \hat{S}_n)^2\right] \to \text{mín}, \\ \phi = (\phi_n) \text{ es un portafolio o cartera de inversión.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Donde ϕ_n es $\mathcal{F}_n = \sigma(R_1, \ldots, R_n, \hat{R}_1, \ldots, \hat{R}_n)$ medible. Este problema puede ser formulado como un problema lineal cuadrático. Es importante señalar aquí, que el espacio de estados del modelo de decisión de Markov incluye (además de la riqueza) el precio del activo no negociado. Así, el modelo de decisión es como sigue:

- $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ donde $(x, \hat{s}) \in E$ y x es la riqueza y $\hat{s}$ el valor del activo no negociado,
- $A := \mathbb{R}^d$ donde $a \in A$ es la cantidad de dinero que es invertida en cada activo riesgoso,
- $D(x, \hat{s}) := A$,
- $\mathcal{Z} := (-1, \infty)^d \times \mathbb{R}_+$ donde $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{Z}$ y z_1 es el riesgo relativo del activo negociado y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado.
- La función de transición está dada por
$$T((x, \hat{s}), a, (z_1, z_2)) := M_n \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix} \right) + B_n a,$$
donde $M_n = \left(\begin{smallmatrix} 1+i_{n+1} & 0 \\ 0 & z_2 \end{smallmatrix} \right)$ y $B_n = \left(\begin{smallmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.
- $Q^Z(\cdot|(x, \hat{s}), a) :=$ distribución conjunta de $(R_{n+1}, \hat{R}_{n+1})$ (independiente de $((x, \hat{s}), a)$),
- $r((x, \hat{s}), a) := -(x - s)^2$,
- $g(x, \hat{s}) := -(x - \hat{s})^2$.

El problema (3.20) puede ser resuelto por un modelo de decisión de Markov. El criterio de rendimiento está dado por:

$$V(x, \hat{s}) := \inf_{\pi} \mathbb{E}^{\pi}_{x\hat{s}} \left[\sum_{k=0}^{\tau} (X_k - \hat{S}_k)^2 \right], \ (x, \hat{s}) \in \mathbb{E}$$

Cuando se define a $W_0 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$, el problema es equivalente a minimizar:

$$\mathbb{E}^{\pi}_{k=0} \left[\sum_{k=0}^{\tau} \left(\begin{smallmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{smallmatrix} \right)^T W_0 \left(\begin{smallmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{smallmatrix} \right) \right] = \mathbb{E}^{\pi}_{k=0} \left[\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}_n \left(\begin{smallmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{smallmatrix} \right)^T W_0 \left(\begin{smallmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{smallmatrix} \right) \right].$$

Por lo que se tendrá un problema lineal cuadrático. El Teorema siguiente nos dará la solución optima al problema propuesto, que es el de encontrar el activo no negociado para poder invertir en el mercado financiero.

Teorema 3.7. *a) Sean las matrices $\tilde{W}_n$ definidas de forma recursiva por*

$$\begin{aligned} \tilde{W}_N &:= \mathbb{P}_N W \\ \tilde{W}_n &:= \mathbb{P}_n W + \mathbb{E}[M^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} M_{n+1}] - \mathbb{E}[M^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} B_{n+1}] \\ &\quad \left(\mathbb{E}[B^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} B_{n+1}] \right)^{-1} \mathbb{E}[B^T_{n+1} \tilde{W}_{n+1} M_{n+1}]. \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{W}_n$ es simétrica, definida positiva y la función óptima del problema (3.20) *está dada por*

$$V_{N+1}(x, \hat{s}) := 0$$
$$V_n(x, \hat{s}) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix} \right)^T \tilde{W}_n \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix} \right), \ (x, \hat{s}) \in E$$

para $n = 0, \ldots, N$.

b) El portafolio óptimo $\pi^* = \{f^*_0, \ldots, f^*_N\}$ es lineal y dado por

$$f^*_n(x, \hat{s}) = -\left(\mathbb{E}[R_{n+1} R^T_{n+1}] \right)^{-1} \mathbb{E} \left[\left(R_{n+1}, \ \frac{w_{21}}{(1 + i_{n+1}) w_{11}} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right) \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de W son denotados por w_{ij}.

Demostración. Se comprobará la Suposición 1.2. Es razonable asumir que

$$\mathbb{M} := \{v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+ | v(x,\hat{s}) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right)^T W \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) \textit{ con } W \text{ simétrica y definida positiva}\}.$$

También resultará que los conjuntos $\Psi_n := \Psi \cap F$ pueden ser elegidos como los conjuntos de todas las funciones lineales, es decir,

$$\Psi := \{f : E \to A | f(x,\hat{s}) = C(x,\hat{s}) \text{ para algún } C \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\}.$$

Se empezará viendo que se cumple la parte (i) del Supuesto 1.2:

$$\begin{aligned} V_N(x,\hat{s}) = \mathcal{T}_N v(x) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{\mathbb{P}_N(x,\hat{s}) W \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}v[T_{N+1}((x,\hat{s}),a,(z_1,z_2))]\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{\mathbb{P}_N(x,\hat{s}) W \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) + 0\} \\ &= (x,\hat{s}) \mathbb{P}_N W \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right), \text{ donde } \tilde{W}_N = \mathbb{P}_N W. \text{ Entonces se tiene que:} \\ V_N(x,\hat{s}) &= (x,\hat{s}) \tilde{W}_N \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto se tendrá que $\mathbb{P}_N \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right)^T W \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{M}$.

Ahora, sea $v(x,\hat{s}) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right)^T \tilde{W}_{n+1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{M}$. Se intentará resolver el siguiente problema de optimización, por los Teoremas 1.1 y 1.2 se tendrá que:

$$V_n(x,\hat{s}) = \mathcal{T}_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{\mathbb{P}_n(x,\hat{s}) W \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}v[T_{n+1}((x,\hat{s}),a,(z_1,z_2))]\},$$

Por lo que $\mathcal{T}_n v(x)$ tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \Bigg\{ & \mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a + a^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \Bigg\}, \end{aligned}$$

como W es simétrica y definida positiva, se tendrá que

$$\mathbb{E}\left[\left(\begin{smallmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{smallmatrix}\right)^T \tilde{W}_{n+1} \left(\begin{smallmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right]$$

es también simétrica y definida positiva [6], por lo tanto regular y la función entre los corchetes es convexa en a (para $x \in E$ fija). Optimizando a la función $\mathcal{T}_n v(x)$ con respecto de a se tendrá que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_n v(x)}{\partial a} = 0 \\
&= \frac{\partial \left[\mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right]}{\partial a} \\
&+ \frac{\partial \left[\begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right]}{\partial a} \\
&+ \frac{\partial \left[2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \right]}{\partial a} \\
&+ \frac{\partial \left[a^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \right]}{\partial a} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= -&\left(\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right)^{-1} \\
&\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así, se tendrá que el único punto mínimo estará dado por

$$
\begin{aligned}
f_n^*(x, \hat{s}) = -&\left(\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right)^{-1} \\
&\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si se sigue desarrollando la expresión anterior se podrá obtener el siguiente resultado,

$$
f_n^*(x, \hat{s}) = -\left(\mathbb{E} \left[z_1 z_1^T \right] \right)^{-1} \mathbb{E} \left[z_1, \frac{w_{12}}{w_{11}(1+i_{n+1})} z_2 z_1 \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.
$$

Se sabe que W es simétrica y definida positiva, además de que z_1 es el riesgo relativo del activo negociado R y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado $\hat{R}$, entonces se podrá escribir a la política óptima de la siguiente forma,

$$
f_n^*(x, \hat{s}) = -\left(\mathbb{E} \left[R_{n+1} R_{n+1}^T \right] \right)^{-1} \mathbb{E} \left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.
$$

A continuación, cuando se substituye la política en $\mathcal{T}_n v(x)$ producirá:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n v(x) = {} & \mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
& + 2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
& \left(- \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T\right]\right)^{-1} \mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right) \\
& + \left(- \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T\right]\right)^{-1} \mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right)^T \\
& \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
& \left(- \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T\right]\right)^{-1} \mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right) \\
= {} & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \Bigg\{ \mathbb{P}_n W + \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \\
& - \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T\right]\right)^{-1} \\
& \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} 1+i_{n+1} & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \Bigg\} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
= {} & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \tilde{W}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.
\end{aligned}$$

Finalmente se obtendrá:

$$\mathcal{T}_n v(x) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right)^T \tilde{W}_n \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{M}.$$

Así, se tendrá que se cumple la Suposición 1.2. Adicionalmente, por los Teoremas 1.1 y 1.2, el problema podrá ser resuelto recursivamente, por lo tanto, al hacer uso de la inducción hacia atrás se obtendrá la siguiente fórmula recursiva.

$$V_n(x, \hat{s}) = (x, \hat{s}) \tilde{W}_n \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right).$$

Para $V_0(x, \hat{s}) = (x, \hat{s}) \tilde{W}_0 \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right)$, donde

$$\tilde{W}_0 = \mathbb{P}_0 W + \mathbb{E}[M_1^T \tilde{W}_1 M_1] - \mathbb{E}[M_1^T \tilde{W}_1 B_1] \left(\mathbb{E}[B_1^T \tilde{W}_1 B_1]\right)^{-1} \mathbb{E}[B_1^T \tilde{W}_1 M_1]$$

Con esto queda concluida la demostración del Teorema. ■

3.4. Implementación

3.4.1. Ejemplo numérico del Teorema 3.2

En esta sección se ilustrará el resultado obtenido de la subsección 3.1.1. Para ello, se considerará $d = 1$ (un activo riesgoso), la distribución del vector aleatorio de riesgo relativo (R_n) puede aproximarse mediante un *modelo binomial o de Cox-Ross-Rubinstein* [6]. En dicho caso, se tiene que para cada n:

$$v_n = sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} (1 + i + \alpha(\mathbf{u} - 1 - i))^{\gamma} p + (1 + i + \alpha(\mathbf{d} - 1 - i))^{\gamma} (1 - p), \tag{3.21}$$

donde

$$\alpha_0 := \frac{1+i}{1+i-\mathbf{u}} < 0 \text{ y } \alpha_1 := \frac{1+i}{1+i-\mathbf{d}} > 0.$$

Se definirá para mayor comodidad que $\delta := (1-\gamma)^{-1}$, por lo que la solución óptima de v_n es:

$$\alpha^* = \frac{1+i}{(1+i-\mathbf{d})(\mathbf{u}-1-i)} \cdot \frac{(\mathbf{u}-1-i)^{\delta} p^{\delta} - (1+i-\mathbf{d})^{\delta}(1-p)^{\delta}}{(\mathbf{u}-i-i)^{\delta\gamma} p^{\delta} + (1+i-\mathbf{d})^{\delta\gamma}(1-p)^{\delta}}. \tag{3.22}$$

Para poder simplificar, considere que el vector aleatorio (R_n) es independiente e idénticamente distribuido con parámetros $p = \frac{1+i-\mathbf{d}}{\mathbf{u}-\mathbf{d}}$, donde $\mathbf{u} := \exp(\sigma\sqrt{\Delta_t})$ y $\mathbf{d} := \exp(-\sigma\sqrt{\Delta_t})$. Asimismo, se utilizarán los siguientes valores para $\sigma = 0.15$, $\Delta_t = 1$ y $\gamma = 0.7$. Por otro lado, se considerará un tipo de interés constante: $i_n = 0.05$. Finalmente, se establecerá que el horizonte aleatorio se comportará como una distribución Uniforme discreta, con $N = 10$. Se dividirá el problema en dos etapas para mayor comodidad.

Etapa I. Antes de aplicar la dinámica del proceso de riqueza:
En esta fase se puede encontrar los valores correspondientes de v_n y α^*:

$$v_n = 1.0347 \text{ y } \alpha^* = 3.9547 \times 10^{-15}$$

los valores de $k_n(x)$ (ayudarán en la construcción del consumo y la inversión óptimos) observados en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Valores de los k_n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_n	0.2092	0.2092	0.2092	0.2092	0.2092	0.2091	0.2083	0.2028	0.1823	0.1429

Etapa II. Realización del proceso de riqueza:
En esta etapa el capital inicial cobra una gran relevancia, como se muestra en la Tabla 3.2, se observa que la evolución de la inversión óptima tiene un comportamiento decreciente al igual que la Tabla 3.3, esta muestra la evolución del consumo óptimo, de igual manera se observa un comportamiento decreciente, esto es natural dado que a menor capital menor inversión y consumo. El proceso de riqueza se ve en la Tabla 3.4 con un capital inicial igual a $\$100, \$500$, $\$750$ y $\$1,000$. Del mismo modo, las Figuras 3.1 - 3.3 ilustran las mismas observaciones pero permiten comparar las trayectorias de a_n, c_n y x_n.

Tabla 3.2: Evolución de la inversión óptima a_n.

n	100	500	750	1000
0	0.3233	0.1616	0.2424	0.3233
1	0.2775	0.1387	0.2081	0.2775
2	0.2381	0.1191	0.1786	0.2381
3	0.2044	0.1022	0.1533	0.2044
4	0.1754	0.0877	0.1316	0.1754
5	0.1505	0.0753	0.1129	0.1505
6	0.1288	0.0542	0.0813	0.1084
8	0.0841	0.0421	0.0631	0.0841
9	0.0492	0.0246	0.0369	0.0492

Tabla 3.3: Evolución de los consumos óptimos c_n.

n	100	500	750	1000
0	18.2579	91.2896	136.9345	182.5793
1	15.6706	78.3532	117.5297	156.7063
2	13.4500	67.2500	100.8750	134.5000
3	11.5442	57.7210	86.5815	115.4420
4	9.9097	49.5484	74.3225	99.0967
5	8.5158	42.5789	63.8683	85.1578
6	7.3849	36.9243	55.3865	73.8487
7	6.7930	33.9651	50.9476	67.9302
8	7.5159	37.5794	56.3691	75.1588
9	9.9002	49.5012	74.2518	99.0024

Tabla 3.4: Evolución del capital y procesos de riqueza x_n.

n	100	500	750	1000
0	100	500	750	1000
1	85.8292	429.1459	643.7188	858.3
2	73.6665	368.3324	552.4985	736.7
3	63.2273	316.1365	474.2047	632.3
4	54.2672	271.3362	407.0044	542.7
5	46.5755	232.8773	349.3159	465.8
6	39.9627	199.8133	299.7199	399.6
7	34.2067	171.0334	256.5501	342.1
8	28.7843	143.9217	215.8826	287.8
9	22.3319	111.6595	167.4892	223.3

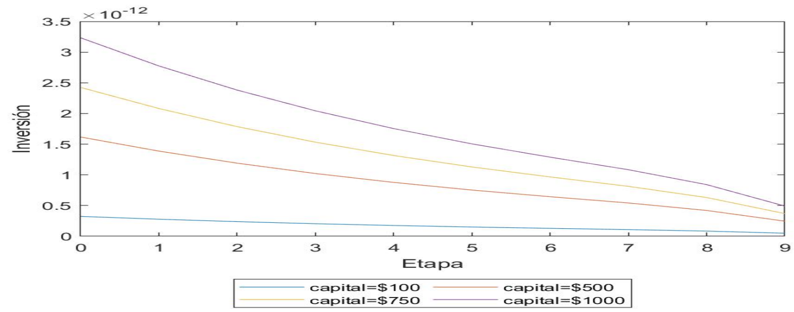

Figura 3.1: Evolución de la inversión.

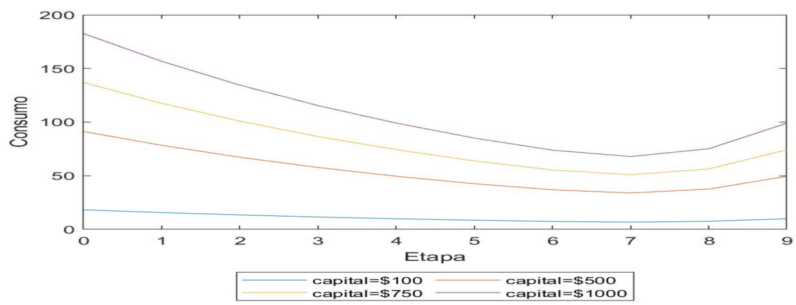

Figura 3.2: Evolución del consumo.

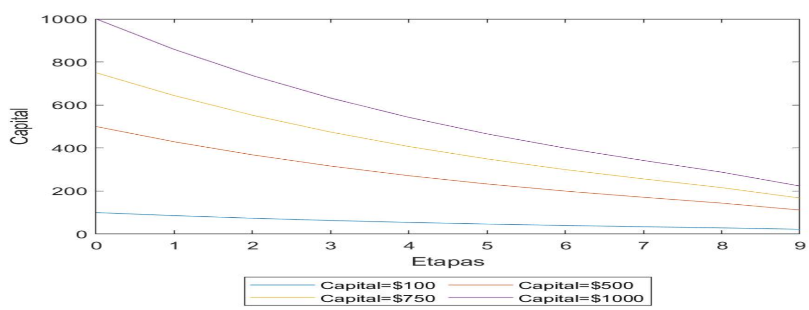

Figura 3.3: Evolución del capital.

La Figura 3.4 muestra la dinámica del consumo al considerar diferentes valores de γ con el resto de los parámetros fijos como antes. Se observa que la trayectoria cambia abruptamente conforme cambia el valor de γ, mientras que el valor de la inversión se comporta casi de la misma manera sin verse demasiado afectado sólo cuando γ es muy grande, como se ilustra en la Figura 3.5.

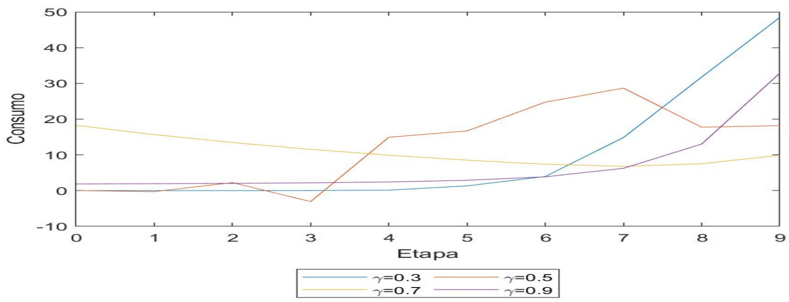

Figura 3.4: Evolución del consumo con γ variable.

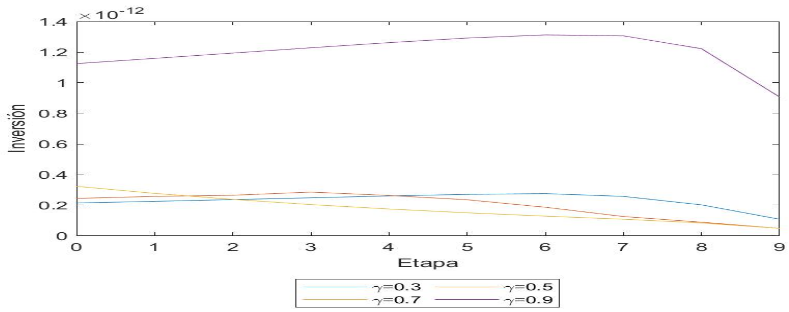

Figura 3.5: Evolución de la inversión con γ variable.

La Figura 3.6 esquematiza el consumo con respecto a diferentes tipos de tasa de interés. Se observa un comportamiento similar que aumenta a medida que se incrementa el tipo de interés constante, mientras que la Figura 3.7 muestra que la inversión tiende a disminuir cuando la tasa de interés es grande con respecto a la tasa de interés es pequeña.

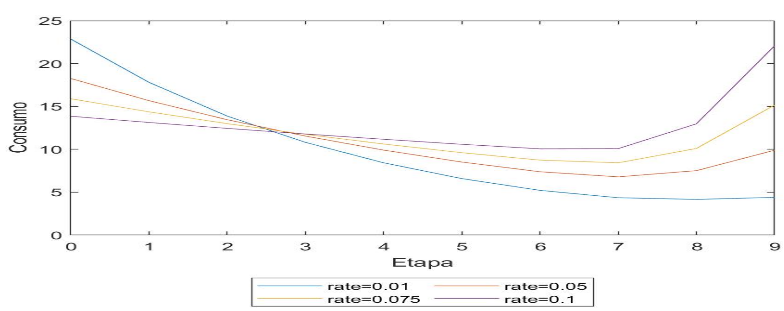

Figura 3.6: Evolución del consumo con tasa de interés variable.

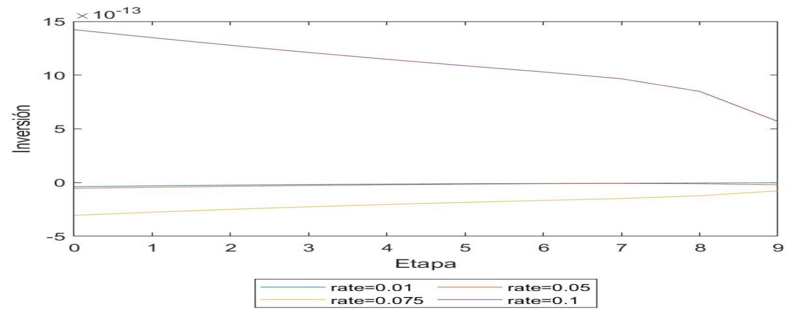

Figura 3.7: Evolución de la inversión con tasa de interés variable.

3.4.2. Ejemplo numérico del Teorema 3.3

En esta parte se ejemplificará el resultado que se obtuvo en la subsección 3.1.2. Para ello, se tendrá que considerar $d = 1$ (un activo riesgoso), la distribución del vector aleatorio de riesgo relativo (R_n) puede aproximarse mediante un *modelo binomial o de Cox-Ross-Rubinstein* como en la subsección anterior 3.1.1. En dicho caso, v_n tiene la misma forma que (3.21) y cuyo valor óptimo α_n^* es igual que (3.22). Se considerarán los siguientes valores para $\sigma = 0.10$ y $\Delta_t = 0.8$. Por otra parte, se tendrá una tasa de interés constante: $i_n = 0.05$. Por último, se supondrá que el horizonte aleatorio se comportará como una distribución Uniforme discreta, con $N = 10$. De la misma manera, se dividirá el problema en dos etapas para mayor comodidad.

Etapa I. Antes de aplicar la dinámica del proceso de riqueza:
En este paso se podrá encontrar los valores correspondientes de v_n y α^*:

$$v_n = 0.0488 \text{ y } \alpha^* = 4.6629 \times 10^{-15}$$

dichos valores de $k_n(x)$ y d_n (ayudarán en la construcción del consumo y la inversión óptimos) observados en la tabla 3.5.

Tabla 3.5: Valores de los k_n y d_n.

n	k_n	d_n
0	0.1000	-1.8635
1	0.2000	-1.7346
2	0.3000	-1.5632
3	0.4000	-1.3675
4	0.5000	-1.1563
5	0.6000	-0.9348
6	0.7000	-0.7063
7	0.8000	-0.4731
8	0.9000	-0.2373
9	0.1000	0

Etapa II. Realización del proceso de riqueza:
Como se mencionó anteriormente, en esta etapa el capital inicial cobra relevancia, en la Tabla 3.6 se observa la evolución de la inversión óptima, esta tiene un comportamiento decreciente, la Tabla 3.7 muestra la evolución del consumo óptimo el cuál tiene un comportamiento

creciente, a diferencia del ejemplo anterior, conforme pasa las etapas el capital decrece al igual que la inversión mientras que el consumo crece. El proceso de riqueza se puede observar en la Tabla 3.8 con capital inicial de $100, $500, $750 y $1,000. Así, las Figuras 3.8 - 3.10 ilustran las mismas observaciones pero estas permiten comparar las trayectorias de a_n, c_n y x_n.

Tabla 3.6: Evolución de la inversión óptima a_n.

n	100	500	750	1000
0	0.4197	0.2098	0.3147	0.4197
1	0.3917	0.1958	0.2938	0.3917
2	0.3599	0.1799	0.2699	0.3599
3	0.3239	0.1619	0.2429	0.3239
4	0.2834	0.1417	0.2125	0.2834
5	0.2380	0.1190	0.1785	0.2380
6	0.1875	0.0937	0.1406	0.1875
7	0.1312	0.0656	0.0984	0.1312
8	0.0689	0.0344	0.0517	0.0689
9	0	0	0	0

Tabla 3.7: Evolución de los consumos óptimos c_n.

n	100	500	750	1000
0	10	50	75	100
1	10.5000	52.5000	78.7500	105.0000
2	11.0250	55.1250	82.6875	110.2500
3	11.5763	57.8813	86.8219	115.7625
4	12.1551	60.7753	91.1630	121.5506
5	12.7628	63.8141	95.7211	127.6282
6	13.4010	67.0048	100.5072	134.0096
7	14.0710	70.3550	105.5325	140.7100
8	14.7746	73.8728	110.8092	147.7455
9	15.5133	77.5664	116.3496	155.1328

Tabla 3.8: Evolución del capital y procesos de riqueza con x_n.

n	100	500	750	1000
0	100	500	750	1000
1	94.5000	472.5000	708.7500	945.0
2	88.2000	441.0000	661.5000	882.0
3	81.0338	405.1688	607.7531	810.3
4	72.9304	364.6519	546.9778	729.3
5	63.8141	319.0704	478.6056	638.1
6	53.6038	268.0191	402.0287	536.0
7	42.2130	211.0651	316.5976	422.1
8	29.5491	147.7455	221.6183	295.5
9	15.5133	77.5664	116.3496	155.1

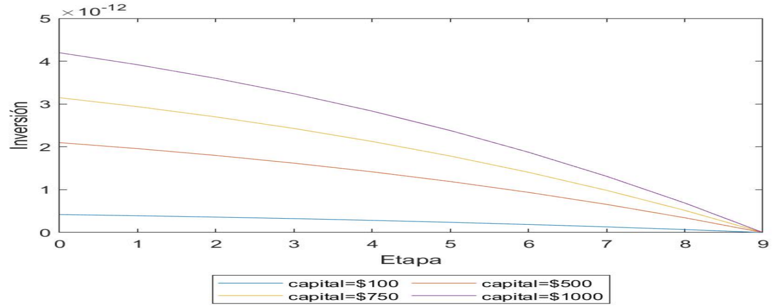

Figura 3.8: Evolución de la inversión.

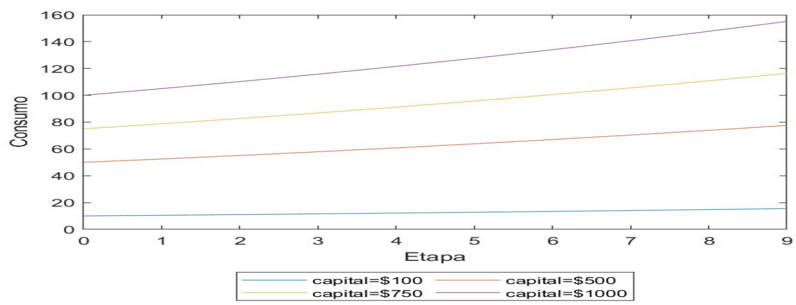

Figura 3.9: Evolución del consumo.

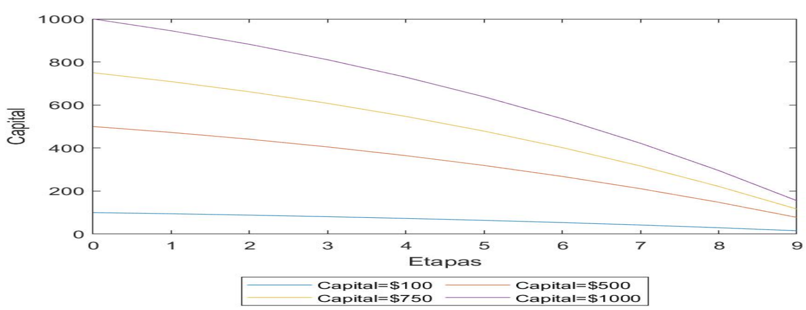

Figura 3.10: Evolución del capital.

La Figura 3.11 esquematiza el consumo con respecto a diferentes tipos de tasa de interés. En donde se observa que a medida que aumenta la tasa de interés este tiene un comportamiento creciente, mientras que la Figura 3.12 se ejemplifica la inversión, esta tiende a disminuir cuando la tasa de interés crece a excepción de una tasa muy grande.

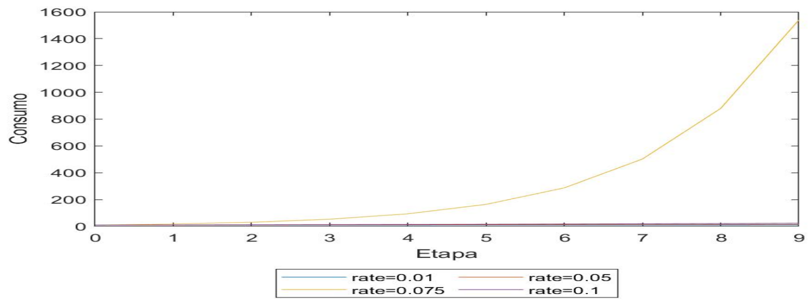

Figura 3.11: Evolución del consumo con tasa de interés variable.

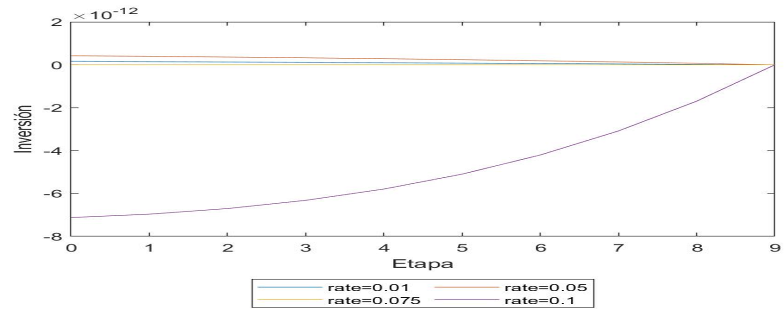

Figura 3.12: Evolución de la inversión con tasa de interés variable.

3.4.3. Ejemplo numérico del Teorema 3.4

En este apartado, los resultados de la subsección 3.1.3 serán ilustrados. Para esto, se considerará $d = 2$ (dos activos riesgosos) y la distribución del vector aleatorio de riesgo relativo (R_n) puede aproximarse mediante una distribución normal bivariada con parámetros μ_n y Σ_n. En este caso, se puede encontrar que, para cada n

$$v_n = e^{-\mu_{n+1}^T \cdot \Sigma_{n+1}^{-1}\mu_{n+1} + \frac{1}{2}[\Sigma_{n+1}^{-1}\mu_{n+1}]^T \Sigma_{n+1}[\Sigma_{n+1}^{-1}\mu_{n+1}]}. \tag{3.23}$$

y que

$$a_n^* = \frac{1}{\gamma(1 + i_{n+1})}\Sigma_{n+1}^{-1}\mu_{n+1} \tag{3.24}$$

En aras de la simplicidad, considere que los vectores aleatorios (R_n) son independientes e idénticamente distribuidas con parámetros $\Sigma_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ y $\mu_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$. Adicionalmente, se establecerá $\gamma = 0.6$ para que la función de utilidad no crezca demasiado lento; sobre el eje horizontal (valores más grandes de γ conducen a funciones de utilidad más cercanas al eje X) y se contemplará una tasa de interés constante: $i_n = 0.05$. Finalmente, se establecerá que el horizonte aleatorio se comportará como una distribución Binomial con parámetros 10 y 0.5.

Se tratará el ejemplo de simulación en dos etapas:

Etapa I. Antes de implementar la dinámica del proceso del capital o riqueza:
En esta etapa, es posible encontrar los valores correspondientes de v_n y a_n^*. Dadas las simplificaciones consideradas anteriormente, es posible encontrar valores constantes de

$$v_n = 0.877204 \text{ y } a_n^* = (1.26984, 2.53968)$$

y los valores de b_n y k_n (que ayudarán en la construcción de consumos óptimos) observados en la Tabla 3.9.

Tabla 3.9: Valore de b_n y k_n.

n	b_n	k_n
0	0.0740	0.456
1	0.0804	0.5433
2	0.0884	0.5358
3	0.0988	0.4454
4	0.1126	0.3132
5	0.1320	0.1852
6	0.1611	0.0904
7	0.2098	0.0350
8	0.3073	0.0099
9	0.6000	0.0016

Esto es posible ya que estos parámetros no dependen del capital inicial ni del proceso de riqueza.

Etapa II. Realización del proceso de riqueza:
En esta etapa, el capital inicial se vuelve relevante, por lo tanto, las Tablas 3.10-3.13 exponen la evolución de los consumos óptimos relativos y absolutos, así como una trayectoria de (X_n) con un capital inicial igual a $\$100, \$500, \$750$ y $\$1,000$. Se observa un comportamiento decreciente del proceso de riqueza acompañado de un comportamiento creciente del consumo relativo lo que conduce a un comportamiento casi constante del consumo absoluto. De la misma manera, las Figuras 3.13-3.15 ilustran las mismas observaciones pero permiten comparar trayectorias de ζ_n, c_n y x_n.

Tabla 3.10: Evolución de consumos óptimos y procesos de riqueza con $x_0 = \$100$.

n	ζ_n	c	x
0	0.0983	9.83	100
1	0.1255	11.7312	93.4758
2	0.1511	13.2352	87.5927
3	0.1775	13.96	78.6576
4	0.2027	13.6610	67.3956
5	0.2397	14.0671	58.6864
6	0.2816	13.1728	46.7786
7	0.3303	12.5133	37.8847
8	0.4014	10.8936	27.1391
9	0.5199	7.2360	13.8624

Tabla 3.11: Evolución de consumos óptimos y procesos de riqueza con $x_0 = \$500$.

n	ζ_n	c	x
0	0.1114	55.7	500
1	0.1238	57.6066	465.3203
2	0.1375	59.1076	429.8738
3	0.1534	59.8102	389.8972
4	0.1729	59.8306	346.0417
5	0.1977	59.9246	303.1092
6	0.2313	59.0432	255.2670
7	0.2798	58.3780	208.6420
8	0.3586	56.7587	158.2786
9	0.5132	53.0666	103.4034

Tabla 3.12: Evolución de consumos óptimos y procesos de riqueza con $x_0 = \$750$.

n	ζ_n	c	x
0	0.1125	84.3540	750
1	0.1236	86.4267	699.1075
2	0.1363	87.6784	643.1950
3	0.1514	88.5565	584.8662
4	0.1701	89.1137	523.8820
5	0.1943	88.8879	457.4309
6	0.2274	87.9396	386.6705
7	0.2760	86.9309	314.9554
8	0.3556	84.4547	237.4793
9	0.5129	82.8244	161.4969

Tabla 3.13: Evolución de consumos óptimos y procesos de riqueza con $x_0 = \$1000$.

n	ζ_n	c	x
0	0.1144	114.4	1000
1	0.1233	114.6273	929.6625
2	0.1341	114.7768	855.9050
3	0.1476	114.8599	778.1837
4	0.1650	114.9040	696.3884
5	0.1881	114.8943	610.8150
6	0.2205	114.8113	520.6865
7	0.2691	114.7476	426.4125
8	0.3501	114.5821	327.2842
9	0.5122	114.2206	223.0001

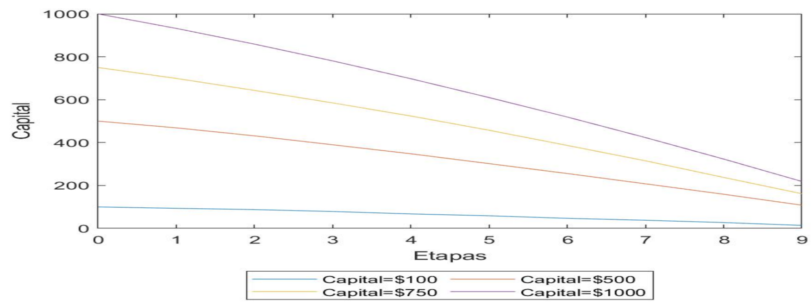

Figura 3.13: Evolución del capital.

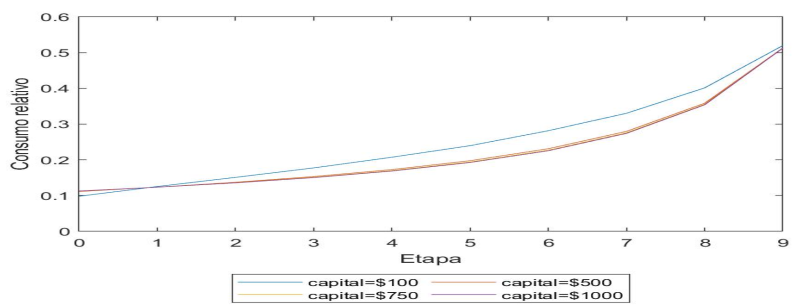

Figura 3.14: Evolución del consumo relativo.

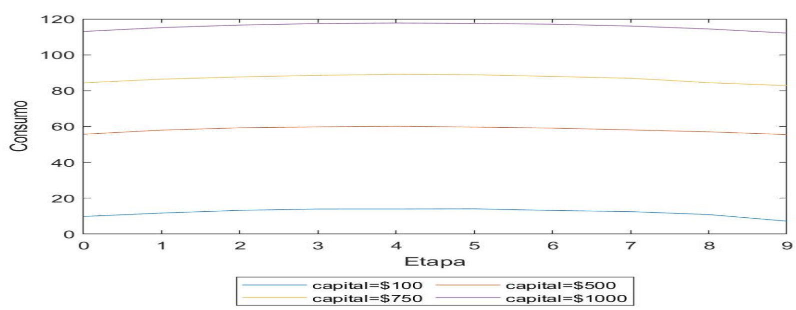

Figura 3.15: Evolución del consumo absoluto.

En la Figura 3.16 se observa la dinámica del consumo relativo al considerar diferentes valores de γ con los parámetros restantes fijos como antes. Observamos que prácticamente no se observa algún efecto en comparación con el consumo absoluto como se muestra en la Figura 3.17. Mientras que la dinámica del capital no muestra grandes cambios como se ilustra en la Figura 3.18.

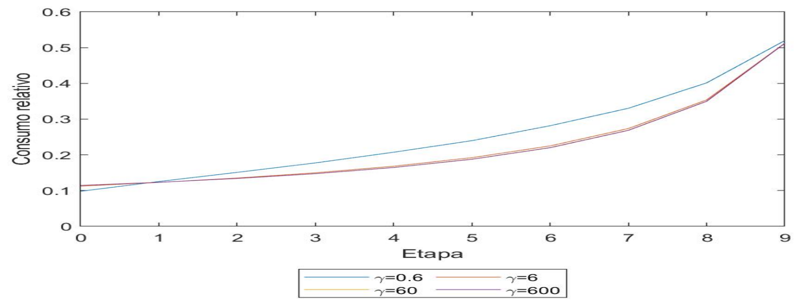

Figura 3.16: Evolución del consumo relativo con diferente γ.

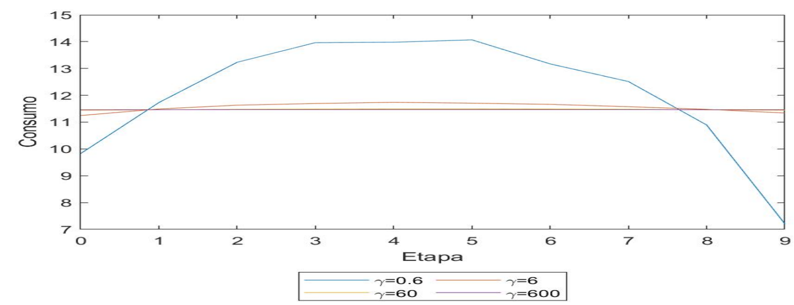

Figura 3.17: Evolución del consumo absoluto con diferente γ.

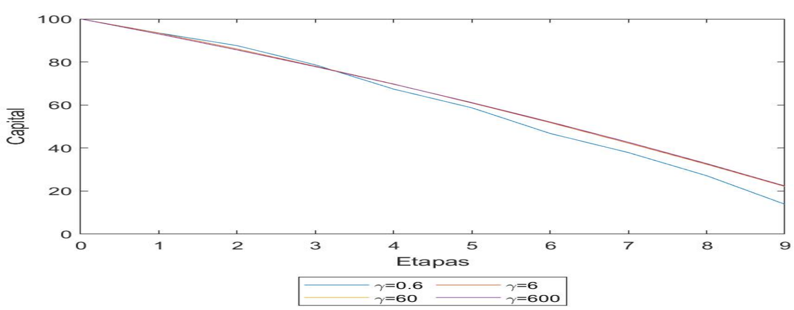

Figura 3.18: Evolución del capital con diferente γ.

En la Figura 3.19, se esquematiza el análisis de sensibilidad del consumo relativo óptimo con respecto a la tasa de interés. Se puede apreciar un desempeño creciente a medida que aumenta la tasa de interés, sin embargo la Figura 3.20 exhibe una forma similar en consumos óptimos absolutos que la Figura 3.15 exhibida. En adición, la ecuación (3.24) implica un comportamiento decreciente de las inversiones óptimas.

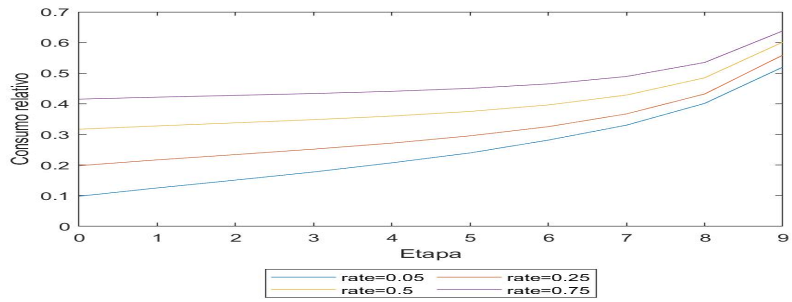

Figura 3.19: Evolución del consumo relativo con distintas tasas de interés.

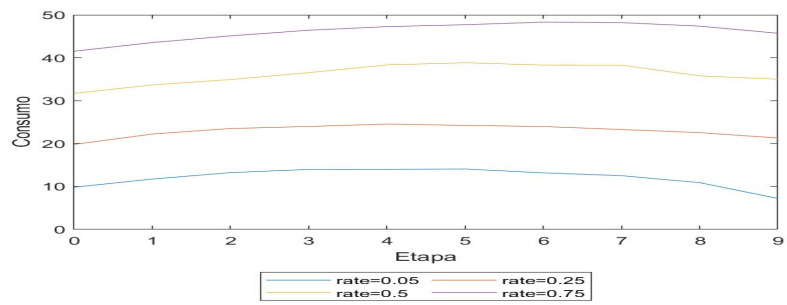

Figura 3.20: Evolución del consumo absoluto con distintas tasas de interés.

Además, la Figura 3.21 muestra un comportamiento cóncavo en la dinámica de la riqueza a medida que aumenta la tasa de interés, sin embargo, se puede comentar que; como es natural, la riqueza es mayor para valores más grandes de i.

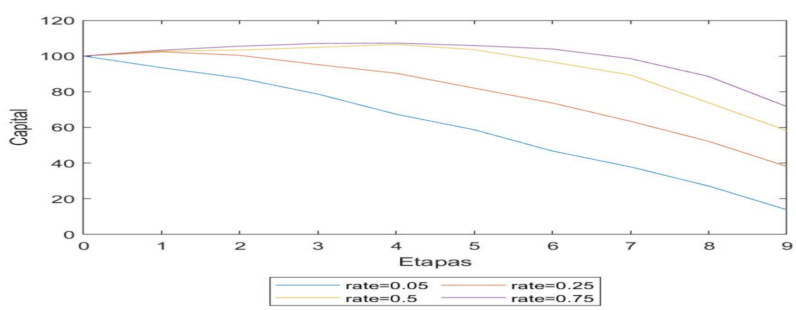

Figura 3.21: Evolución del capital con distintas tasas de interés.

Para realizar un análisis del tiempo de ejecución implementando la estrategia dictada en el Teorema 3.4, se tendrá en cuenta un capital inicial de $\$1,000,000$ con tasa de interés fija de 0.05 y un horizonte con distribución uniforme discreta. Por lo tanto, en la Tabla 3.13 se incrementa el soporte del horizonte aleatorio así como el valor del parámetro γ. En dicha Tabla, junto con la Figura 3.22 se observa que el valor de γ no tiene influencia en el tiempo de ejecución y que plantea una tasa de crecimiento lenta (por debajo de la función identidad) a medida que crece el valor máximo del horizonte aleatorio.

Tabla 3.14: Tiempo de ejecución cuando el capital inicial es $\$1 \times 10^6$ con tasa de interés $i = 0.05$.

N	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 3$	$\gamma = 6$	$\gamma = 60$	$\gamma = 600$
10	0.050062	0.048707	0.054327	0.051612	0.050601	0.053460
100	0.056088	0.054150	0.056277	0.055459	0.058522	0.055845
500	0.099138	0.076228	0.078427	0.076178	0.086510	0.076396
1000	0.100892	0.100931	0.102464	0.123535	0.101802	0.099619
5000	0.310558	0.309741	0.310388	0.310815	0.341130	0.333053
1×10^4	0.618441	0.615198	0.608787	0.637477	0.621824	0.642265
1×10^5	13.093003	13.232268	13.166819	13.687877	13.141081	13.313620
2×10^5	122.116643	119.764554	120.755948	118.576175	117.964425	121.325280
4×10^5	672.962272	672.426565	666.151385	672.633024	691.408851	664.868904
6×10^5	1748.292227	1664.120637	1661.067992	1674.360970	1736.790331	1655.110682
8×10^5	3088. 896357	3096.60148	3076.610124	3220.860891	3111.967192	3083.480288
1×10^6	4937.231332	4897.388811	4900.308728	5013.495808	4955.127375	4916.801511

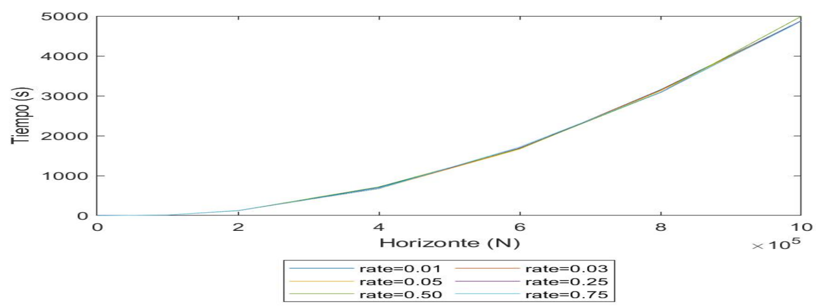

Figura 3.22: Tiempo de ejecución cuando el capital inicial es $\$1 \times 10^6$ con tasa de interés $i = 0.05$.

Del mismo modo, se volverá a considerar un horizonte discretamente uniforme, un capital inicial de $\$1,000,000$ pero ahora $\gamma = 0.3$ y la tasa de interés variará de 0.01 a 0.75. En este escenario, es posible observar en la Tabla 3.14; así como en la Figura 3.23, se tiene que la tasa de interés no tiene repercusión en el tiempo de ejecución y que sigue un alza moderada ya que el horizonte aleatorio posee mayor soporte.

Resumiendo, se puede ver que ni el valor del parámetro de la función de utilidad exponencial ni la tasa de interés tienen efecto sobre el tiempo de ejecución y que el tiempo de implementación crece más lento que el valor máximo del horizonte.

Tabla 3.15: Tiempo de ejecución cuando el capital inicial es 1×10^6 con $\gamma = 0.3$.

N	$i = 0.01$	$i = 0.03$	$i = 0.05$	$i = 0.25$	$i = 0.5$	$i = 0.75$
10	0.049272	0.052132	0.049465	0.049104	0.043670	0.049745
100	0.054473	0.055318	0.057688	0.057867	0.058372	0.055305
500	0.075573	0.077849	0.077799	0.076846	0.076383	0.075571
1000	0.103749	0.101913	0.102075	0.100861	0.103945	0.105100
5000	0.318598	0.309353	0.315017	0.322525	0.324265	0.331267
1×10^4	0.633060	0.664403	0.633980	0.633952	0.635405	0.659529
1×10^5	13.339490	13.377604	13.352550	13.475174	13.379248	13.599737
2×10^5	121.145216	122.143420	122.275267	122.301754	122.777018	126.004807
4×10^5	703.916410	673.852490	677.379424	681.878394	719.429588	678.465843
6×10^5	1667.068711	1678.713265	1664.557272	1692.602557	1678.639482	1716.213704
8×10^5	3152.006812	3139.287981	3125.031973	3083.342423	3087.633951	3092.678243
1×10^6	4883.265378	4877.692400	4873.482225	4885.997006	4992.816111	4870.649850

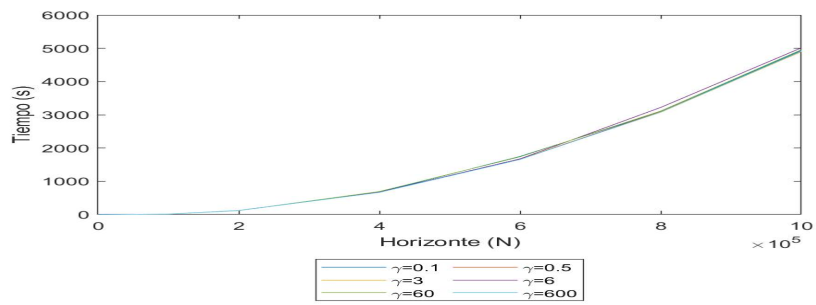

Figura 3.23: Tiempo de ejecución cuando el capital inicial es 1×10^6 con $\gamma = 0.3$.

3.4.4. Ejemplo numérico del Teorema 3.6

En esta parte se exhibirán los resultados de la subsección 3.2.1. Por lo que se considerarán dos activos riesgosos, es decir, $d = 2$, cuya distribución de los vectores aleatorios de riesgo relativo (R_n) se pueden aproximar a través de una distribución normal bivariante con parámetros μ_n y Σ_n. Así que v_n y a_n^* tienen la misma forma que (3.23) y(3.24) respectivamente.

Se considerará que los vectores aleatorios (R_n) son independientes e idénticamente distribuidos, con parámetros $\Sigma_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ y $\mu_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Además, se utilizarán los siguientes valores para $\gamma = 30$, $\gamma = 60$ y $\gamma = 7000$, cada uno para una determinada función de factor de descuento. Por otro lado, se considerará a la tasa de interés como una constante: $i_n = 0.05$. Finalmente, se establecerá que el horizonte aleatorio se comportará como una distribución Binomial con parámetros 10 y 0.5.

1. En primer lugar se aplicará el siguiente factor de descuento $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n x_n$, de nuevo se dividirá en dos etapas por conveniencia.

Etapa I. Antes de aplicar la dinámica del proceso de riqueza:

De nuevo, en esta etapa, se pueden encontrar los valores que corresponden a v_n y a_n^*. Cómo ya se ha mencionado antes, es posible encontrar valores constantes para

$$v_n = 0.9584 \ \text{ y } \ a_n^* = (0.0381, 0.0635)$$

y los valores de $b_n(x_n)$ y $k_n(x_n)$ que son observados en las Tablas 3.16 y 3.17, el parámetro k_n si depende del capital inicial y del proceso de riqueza. En comparación con el problema anterior donde se suponía que el factor de descuento era constante igual a uno.

Tabla 3.16: Valores de los $b_n(x_n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b_n(x)$	3.7001	4.01977	4.4206	4.9377	5.6291	6.5993	8.0575	10.4917	15.3659	30.0000

Tabla 3.17: Valores de los $k_n(x_n)$ que dependen de la riqueza inicial.

n	100	500	750	1000
0	4.7855	3.0282	1.5723	5.0663
1	92.9857	31.1449	13.6885	39.1551
2	6.8913	1.1980	0.4437	1.1236
3	0.6735	0.0592	0.0184	0.0411
4	0.0784	0.0034	0.0009	0.0017
5	0.0103	0.0002	0.0000	0.0001
6	0.0015	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Etapa II. Realización del proceso de riqueza:

Como se mencionó hace un momento, el capital inicial va a cobrar un gran valor, por lo que en la Tabla 3.18 esta revela una evolución del consumo óptimo el cuál tiene un comportamiento creciente. Además, se observa un comportamiento decreciente en el proceso de riqueza como se ve en la Tabla 3.19 con capital inicial de $\$100, \$500$, $\$750$ y $\$1,000$. De semejante modo, las Figuras 3.24 y 3.25 ejemplifican las mismas observaciones pero estas también permiten contrastar las trayectorias de c_n y x_n.

Tabla 3.18: Evolución de los consumos óptimos c_n.

n	100	500	750	1000
0	10.9729	56.5975	85.2009	113.8219
1	11.0974	56.7730	85.3926	114.0216
2	11.0674	56.7942	85.4317	114.0718
3	11.2397	57.0293	85.6800	114.3228
4	11.4068	57.2459	85.9093	114.5702
5	11.5684	57.4616	86.1423	114.8062
6	11.7135	57.6575	86.3577	115.0334
7	11.8582	57.8458	86.5686	115.2459
8	12.0053	58.0295	86.7893	115.4616
9	12.1612	58.2406	87.0272	115.6955

Tabla 3.19: Evolución del capital y procesos de riqueza con x_n.

n	100	500	750	1000
0	100	500	750	1000
1	93.5418	465.6288	698.1181	930.6
2	86.6050	429.3303	643.4270	857.4
3	79.3187	391.2359	585.9668	780.6
4	71.5421	350.9546	525.3340	699.6
5	63.2204	308.4763	461.4985	614.4
6	54.2633	263.5827	394.1686	524.6
7	44.7270	216.2347	323.2490	430.1
8	34.5812	166.3292	248.6025	330.6
9	23.7963	113.8106	170.0258	226.0

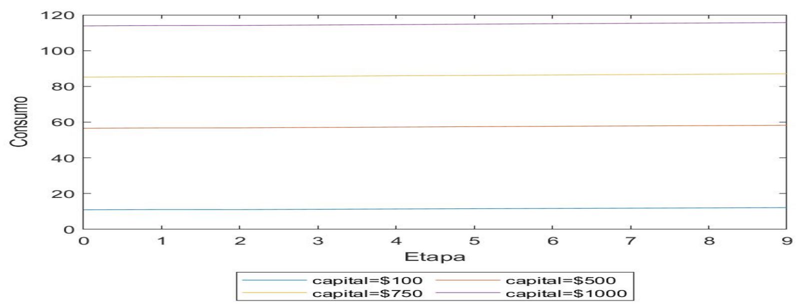

Figura 3.24: Evolución del consumo.

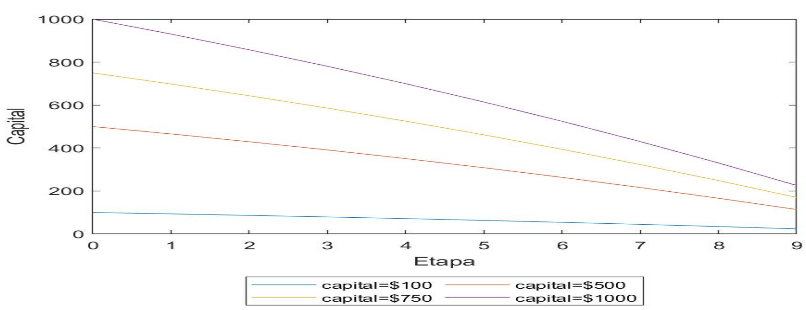

Figura 3.25: Evolución del capital.

La Figura 3.26 revela la dinámica del consumo al considerar diferentes valores de γ. Se observa que se comporta como en el ejemplo anterior, su pendiente disminuye a medida que aumenta el valor de γ, mientras que el valor del capital se comporta casi de la misma manera sin verse demasiado afectado por el cambio del parámetro γ, como se ilustra en la Figura 3.27.

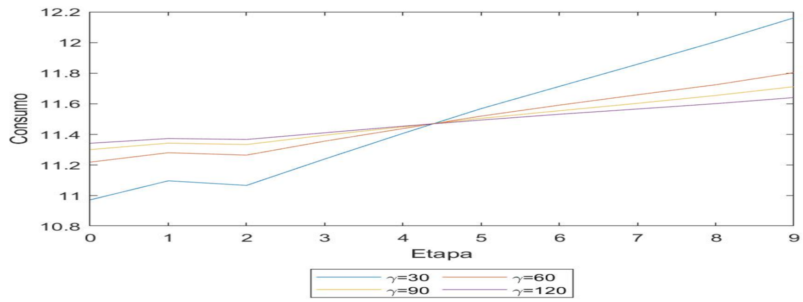

Figura 3.26: Evolución del consumo con diferente γ.

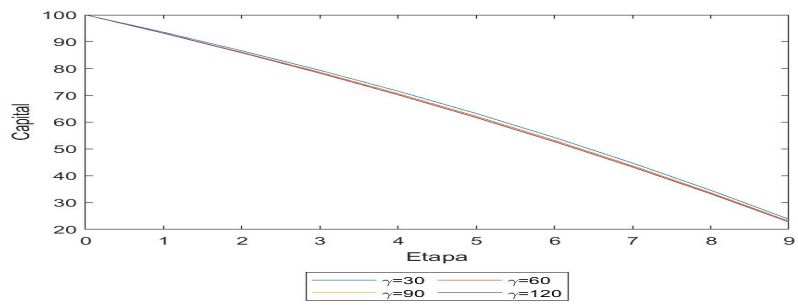

Figura 3.27: Evolución del capital con diferente γ.

En la Figura 3.28 se esquematiza el consumo con respecto a diferentes tipos de interés. Se observa un comportamiento similar que aumenta a medida que se incrementa el tipo de interés constante, mientras que la Figura 3.29 muestra que el capital tiende a disminuir, pero de la misma manera, no cambia mucho al tener diferentes tipos de interés.

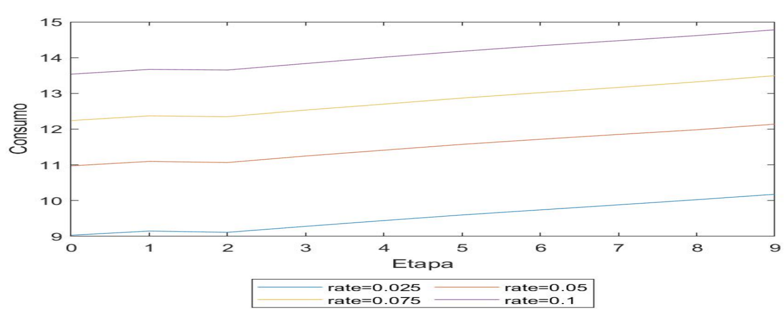

Figura 3.28: Evolución del consumo con tasa de interés distinta.

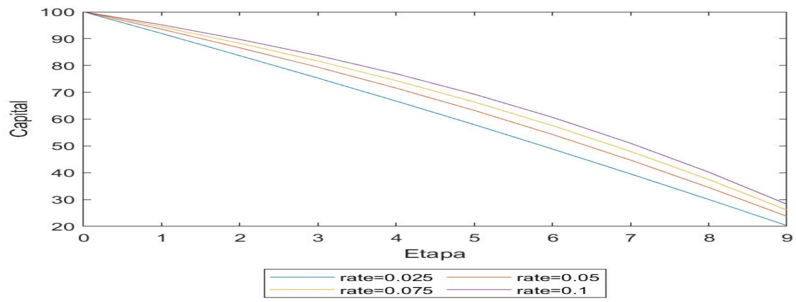

Figura 3.29: Evolución del capital con tasa de interés distinta.

2. Ahora, se verá el siguiente factor de descuento: $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n \exp(c_n - x_n)$. De igual forma, el ejemplo se dividirá nuevamente en dos etapas:

   Etapa I. Antes de aplicar la dinámica del proceso de riqueza:

   Así se tendrá que en dicha etapa, se podrán encontrar los valores correspondientes para v_n y a_n^*.

$$v_n = 0.9788 \text{ y } a_n^* = (0.0190, 0.0317)$$

   y cuyos valores de b_n y k_n son observados en la Tabla 3.20. Se tendrá que estos parámetros no dependen del capital inicial ni del proceso de riqueza.

Tabla 3.20: Valores de $b_n(x_n)$ y $k_n(x_n)$.

n	b_n	k_n
0	9.8005	0.0143
1	10.2037	0.8555
2	10.7567	0.2513
3	11.5298	0.0982
4	12.6405	0.0477
5	14.2993	0.0280
6	16.9271	0.0196
7	21.5040	0.0163
8	30.9677	0.0159
9	60.0000	0.0167

   Etapa II. Realización del proceso de riqueza:

   Por lo que en esta paso, el capital inicial adquiere un gran significado, así que la Tabla 3.21 expone la evolución de los consumos óptimos con capital inicial igual a \$100, \$500, \$750 y \$1.000. La Tabla 3.22 muestra un comportamiento decreciente en el proceso de riqueza. De igual forma, las Figuras 3.30 y 3.31 ilustran las trayectorias de c_n y x_n.

Tabla 3.21: Evolución de los consumos óptimos c_n.

n	100	500	750	1000
0	15.8632	79.2125	118.8059	158.3992
1	14.4611	72.2097	108.2901	144.3794
2	13.1618	65.9757	98.9748	131.9868
3	12.1184	60.6313	90.9547	121.2810
4	11.2099	56.0288	84.0439	112.0500
5	10.4475	52.1147	78.1720	104.2163
6	9.8030	48.8743	73.2969	97.7255
7	9.2970	46.2804	69.4013	92.5283
8	8.9019	44.3272	66.4406	88.6040
9	8.5957	43.0069	64.4578	85.9469

Tabla 3.22: Evolución de la riqueza con el capital inicial x_n.

n	100	500	750	1000
0	100	500	750	1000
1	88.3325	441.8777	662.7670	883.7
2	77.6069	388.1649	582.2074	776.3
3	67.6882	338.2905	507.4325	676.6
4	58.3457	291.5787	437.3658	583.1
5	49.5506	247.3308	371.0157	494.6
6	41.0694	205.0128	307.4905	410.0
7	32.8893	163.9813	245.9363	327.9
8	24.7894	123.6324	185.3328	247.2
9	16.6314	83.3031	124.8641	166.5

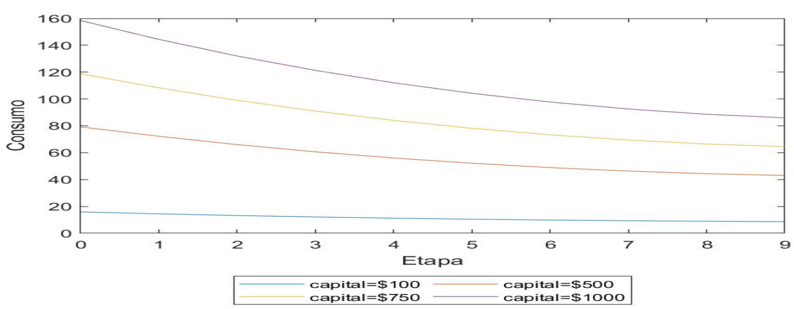

Figura 3.30: Evolución del consumo.

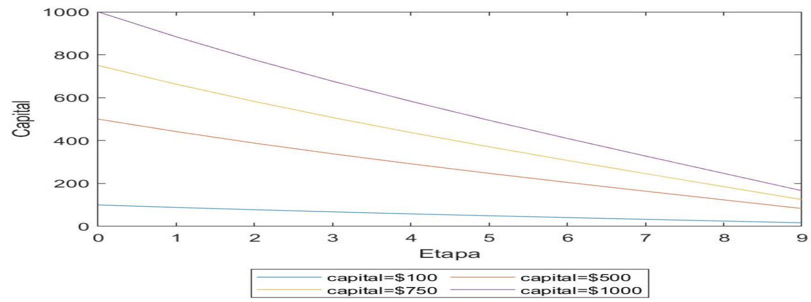

Figura 3.31: Evolución del capital.

De nuevo, la Figura 3.32 ejemplifica la dinámica del consumo al considerar distintos valores de γ. Se puede observar que la pendiente prácticamente disminuye de tal manera que cuanto mayor es el valor de γ el consumo se comporta como una función constante. También se puede observar que en la Figura 3.33 el proceso de la riqueza con diferentes valores de γ no difiere demasiado, por lo tanto, tiene un comportamiento casi inmutable.

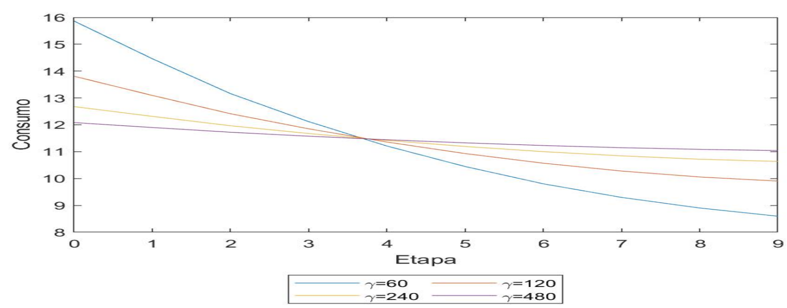

Figura 3.32: Evolución del consumo con diferente γ.

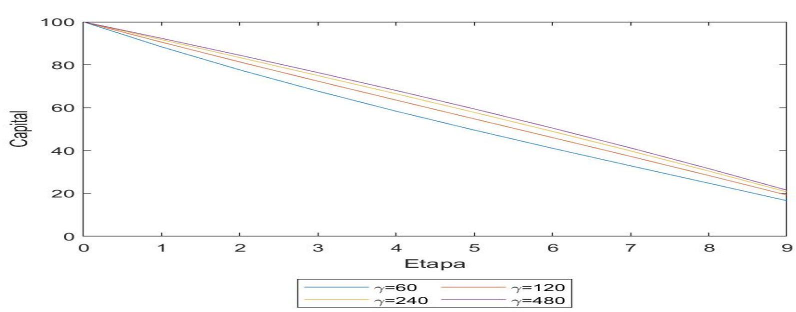

Figura 3.33: Evolución del capital con diferente γ.

En la Figura 3.34 se esquematiza el consumo con respecto a la tasa de interés. Se puede ver que tiene un comportamiento decreciente a medida que aumenta la tasa de interés. La Figura 3.35 muestra el comportamiento de la dinámica de la riqueza a medida que aumenta el tipo de interés, se observa que no difiere cuando esta tiene diferentes tasa de interés.

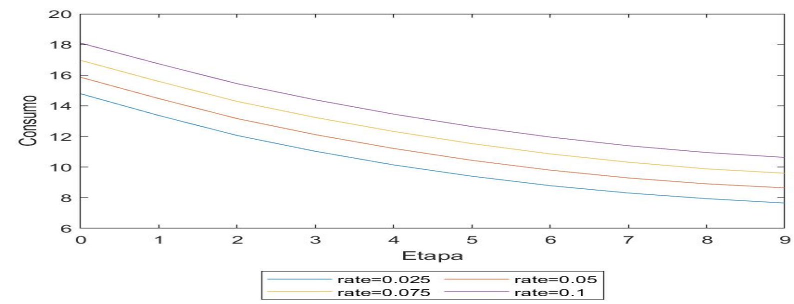

Figura 3.34: Evolución del consumo con distinta tasa de interés.

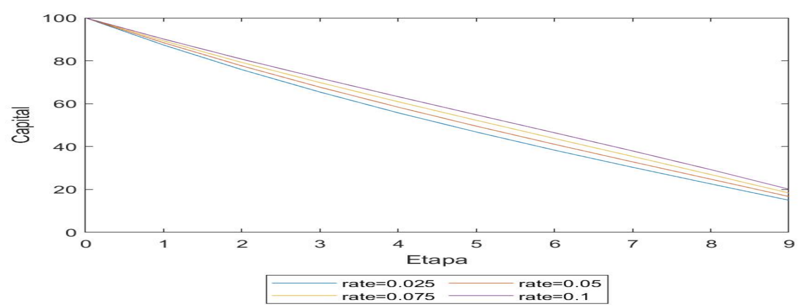

Figura 3.35: Evolución del capital con distinta tasa de interés.

3. Ahora, se aplicará el siguiente factor de descuento: $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n x_n \exp(-c_n)$, De igual forma se dividirá en dos etapas el problema para mayor comodidad.

   Etapa I. Antes de aplicar la dinámica del proceso de riqueza:

   En esta parte, se pueden encontrar los valores correspondientes a v_n y a_n^*:

$$v_n = 0.9937 \ \text{ y } \ a_n^* = (0.0127, 0.0254)$$

   y los valores para $b_n(x_n)$ y $k_n(x_n)$, estos serán observados en las Tablas 3.23 y 3.24. En comparación con el factor de descuento anterior, el parámetro de k_n sí depende del proceso de riqueza.

Tabla 3.23: Valores de los $b_n(x_n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b_n(x)$	7.9190	8.5438	9.3299	10.3464	11.7085	13.6236	16.5066	21.3253	30.9836	60.0000

Tabla 3.24: Valores de los $k_n(x_n)$ que dependen de la riqueza inicial.

n	100	500	750	1000
0	0.2969	2.4024	0.1312	4.3779
1	5.8772	23.9190	1.0948	32.2316
2	0.4261	0.8593	0.0329	0.8515
3	0.0406	0.0398	0.0013	0.0289
4	0.0046	0.0022	0.0001	0.0011
5	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
6	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Etapa II. Realización del proceso de riqueza:

Como se ha estado mencionando anteriormente, en esta parte el capital inicial cobra un gran significado, la Tabla 3.25 manifiesta la evolución del consumo óptimo, se observa que tiene un comportamiento casi constante. Además, se observa un comportamiento decreciente de el proceso de riqueza como se ve en la Tabla 3.26 cuyo capital inicial es igual a $\$100, \$500$, $\$750$ y $\$1,000$. De la misma forma, las Figuras 3.36 y 3.37 muestran las mismas observaciones pero permiten analizar las trayectorias de c_n y x_n.

Tabla 3.25: Evolución de los consumos óptimos c_n.

n	100	500	750	1000
0	12.2724	61.6265	92.5444	123.3687
1	12.1041	60.6526	91.0537	121.3732
2	11.8599	59.6156	89.5082	119.3327
3	11.7196	58.6981	88.0880	117.4239
4	11.5738	57.7828	86.6775	115.5375
5	11.4224	56.8745	85.2812	113.6700
6	11.2607	55.9650	83.8901	111.8196
7	11.0908	55.0536	82.5021	109.9788
8	10.9057	54.1318	81.1096	108.1429
9	10.6897	53.1846	79.6834	106.2874

Tabla 3.26: Evolución de la riqueza con capital inicial x_n.

n	100	500	750	1000
0	100	500	750	1000
1	92.1259	460.3011	690.3438	920.5
2	84.0278	419.6339	629.2662	839.1
3	75.7720	378.0336	566.7584	755.7
4	67.2647	335.3065	502.6079	670.2
5	58.4911	291.4180	436.7490	582.4
6	49.4243	246.2703	369.0477	492.2
7	40.0814	199.8189	299.4223	399.4
8	30.4527	152.0041	227.7848	303.9
9	20.5425	102.7866	154.0351	205.6

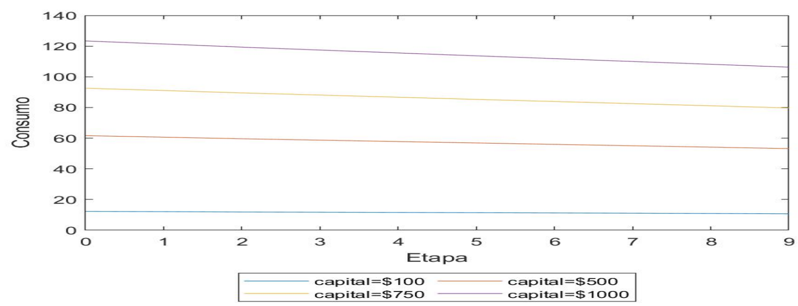

Figura 3.36: Evolución del consumo.

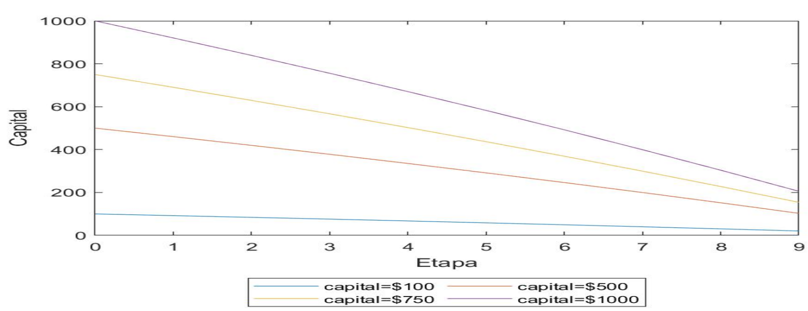

Figura 3.37: Evolución del capital.

La Figura 3.38 esquematiza la dinámica del consumo al valorar distintos valores de γ. Se puede ver que se comporta como en el ejemplo anterior, su pendiente disminuye a medida que aumenta el valor de γ, mientras que el valor del capital se comporta casi de la misma manera sin verse demasiado afectado por el cambio del parámetro γ, como se ilustra en la Figura 3.39.

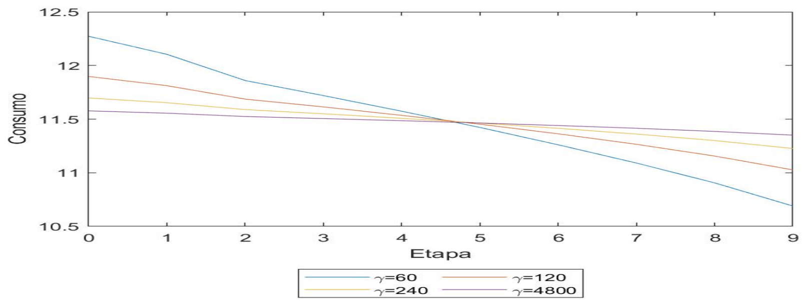

Figura 3.38: Evolución del consumo con diferente γ.

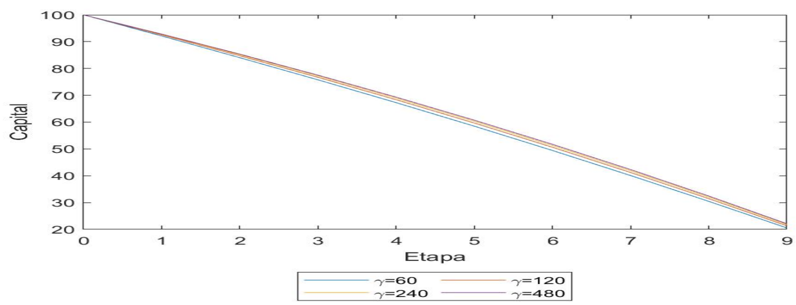

Figura 3.39: Evolución del capital con diferente γ.

En la Figura 3.40 se esboza el consumo con respecto a varios tipos de tasa de interés. Se observa un comportamiento similar a medida que se incrementa la tasa de interés, en la Figura 3.41 se observa que el capital tiende a disminuir, pero en la misma manera, no cambia mucho al tener varios tipos de tasa de interés.

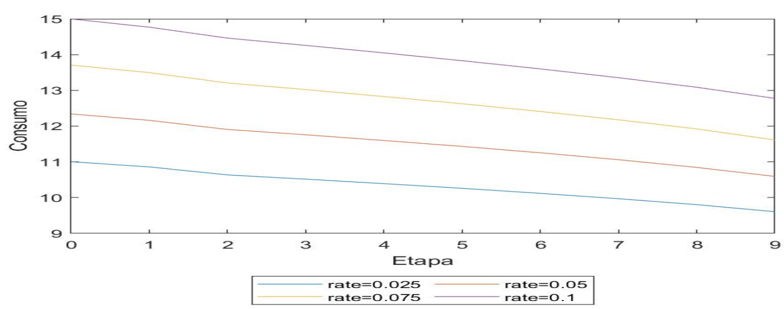

Figura 3.40: Evolución del consumo con diferente tasa de interés.

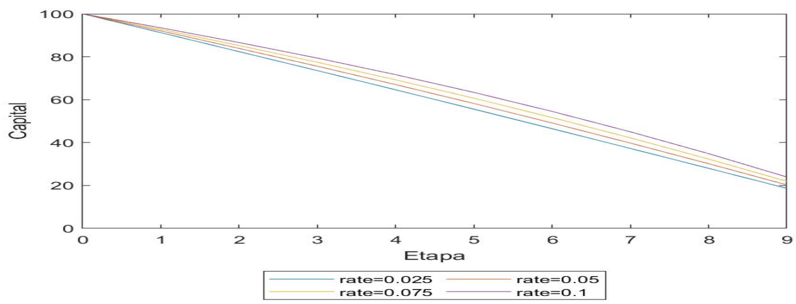

Figura 3.41: Evolución del capital con diferente tasa de interés.

4. Finalmente, se verá el factor de descuento: $\tilde{\alpha}_n(x_n, c_n, a_n) = \hat{\alpha}_n \exp(-x_n c_n)$, De igual manera se dividirá en dos etapas para mayor comodidad.

   Etapa I. Antes de aplicar la dinámica del proceso de riqueza:

   En esta parte como en los ejemplos anteriores, se pueden encontrar los valores que corresponden a v_n y a_n^*:

$$v_n = 0.9999 \text{ y } a_n^* = (0.001088, 0.002177)$$

   y los valores de $b_n(x_n)$ y $k_n(x_n)$ son monitoriados en las Tablas 3.27 y 3.28. Aquí, dichos valores dependen del proceso de riqueza y del consumo por etapa obtenido.

Tabla 3.27: Valores de los $b_n(x_n)$ que dependen de la riqueza inicial.

n	100	500	750	1000
0	880.3	942.1	975.7	1005.6
1	955.8	1021.7	1058.1	1090.8
2	1050.5	1121.1	1160.8	1197.0
3	1172.4	1248.7	1292.4	1332.8
4	1335.2	1418.2	1466.7	1512.2
5	1563.2	1654.2	1708.4	1760.3
6	1905.3	2005.1	2066.1	2125.8
7	2474.7	2582.5	2650.5	2718.6
8	3610.5	3714.8	3783.1	3853.9
9	7000	7000	7000	7000

Tabla 3.28: Valores de los $k_n(x_n)$ que dependen de la riqueza inicial.

n	100	500	750	1000
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
1	0.0045	0.0043	0.0042	0.0040
2	0.0011	0.0010	0.0010	0.0009
3	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003
4	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
5	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Etapa II. Realización del proceso de riqueza:

De nuevo en esta etapa, el capital inicial cobra una gran consideración, como se ha estado mencionado anteriormente, por lo que la Tabla 3.29 presenta la evolución del consumo óptimo, se observa que tiene un comportamiento decreciente. El proceso de riqueza como se ve en la Tabla 3.30 tiende a un comportamiento decreciente con capital inicial $\$100, \$500$, $\$750$ y $\$1,000$. De manera semejante, las Figuras 3.42 y 3.43 ilustran las mismas observaciones pero permiten verificar las trayectorias de c_n y x_n.

Tabla 3.29: Evolución del consumo óptimo c_n.

n	100	500	750	1000
0	11.8141	66.0395	105.6208	149.6403
1	11.7474	64.1734	101.1101	141.0124
2	11.6774	62.3076	96.7248	132.8791
3	11.6052	60.4319	92.4291	125.1323
4	11.5291	58.5302	88.1803	117.6644
5	11.4483	56.5826	83.9286	110.3634
6	11.3614	54.5623	79.6112	103.1018
7	11.2667	52.4330	75.1460	95.7233
8	11.1624	50.1530	70.4356	88.0399
9	11.0510	47.7569	65.5100	80.0141

Tabla 3.30: Evolución de la riqueza con capital inicial x_n.

n	100	500	750	1000
0	100	500	750	1000
1	92.5953	455.6586	676.5983	892.9
2	84.8904	411.0595	604.2627	789.5
3	76.8736	366.1896	532.9149	689.4
4	68.5320	321.0456	462.5101	592.5
5	59.8531	275.6413	393.0465	498.6
6	50.8250	230.0117	324.5739	407.6
7	41.4369	184.2218	257.2108	319.7
8	31.6788	138.3782	191.1682	235.2
9	21.5423	92.6366	126.7694	154.5

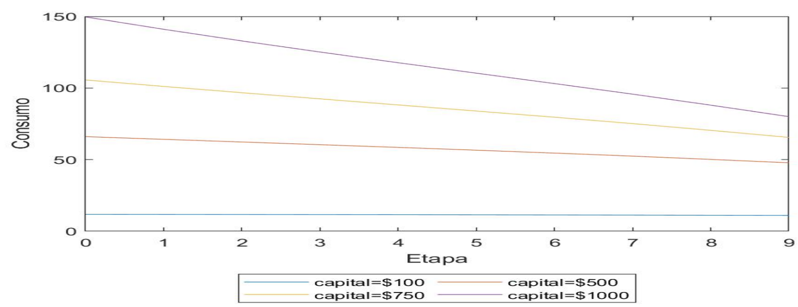

Figura 3.42: Evolución del consumo.

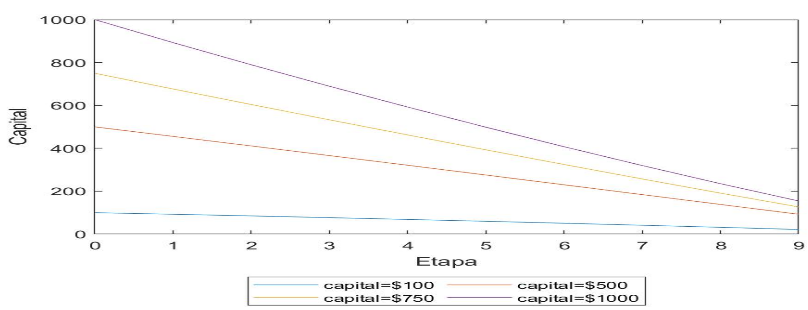

Figura 3.43: Evolución del capital.

La Figura 3.44 revela la dinámica del consumo al considerar varios tipos de valores de γ. También se puede observar que tiene un comportamiento decreciente a medida que aumenta el valor de γ, mientras que el valor del capital se comporta casi de la misma manera sin verse demasiado afectado por el cambio del parámetro γ, como se ilustra en la Figura 3.45.

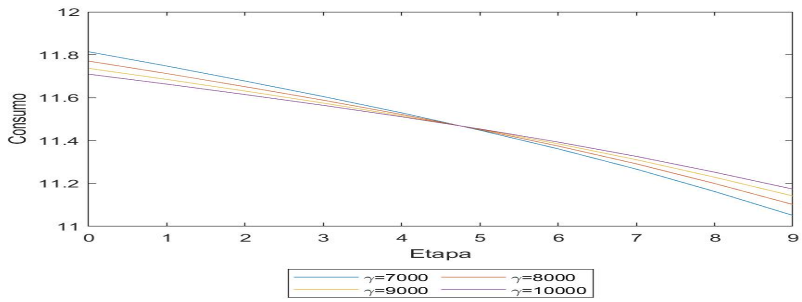

Figura 3.44: Evolución del consumo con diferente γ.

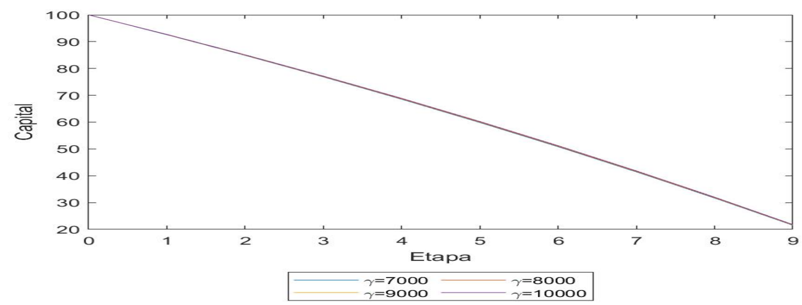

Figura 3.45: Evolución del capital con diferente γ.

En la Figura 3.46 se bosqueja el consumo con respecto a diferentes tasas de interés. Se observa un comportamiento casi similar en tanto que se incrementa el tipo de interés constante, mientras que la Figura 3.47 evidencia que el capital tiende a disminuir, pero de la misma manera, no cambia mucho al tener diferentes tipos de tasa de interés.

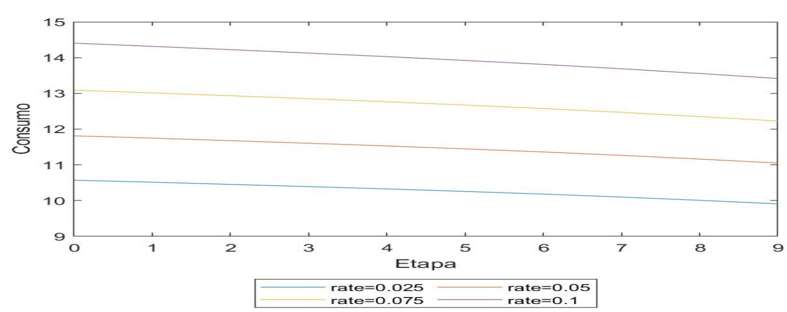

Figura 3.46: Evolucón del consumo con distinta tasa de interés.

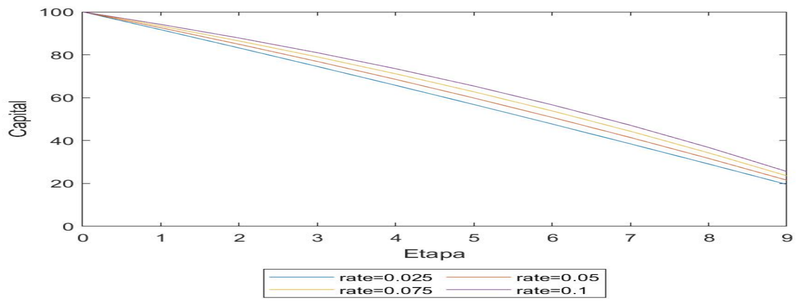

Figura 3.47: Evolución del capital con distinta tasa de interés.

Capítulo 4

Conclusiones

El trabajo presentado, está relacionado con la teoría de los procesos de decisión de Markov (PDM). Al principio se presentaron resultados necesarios para el desarrollo de esta tesis. Al igual se proporcionan las referencias para justificar los resultados principales presentados a lo largo de dicho trabajo. En el cual se trataron problemas a tiempo discreto, con horizonte aleatorio y no solo eso si no que además tiene un factor de descuento que varía conforme pasa el tiempo. El criterio de rendimiento que se utilizó para evaluar la calidad de las políticas admisibles fue la recompensa total esperada descontada.

Una de las principales razones de la ciencia de datos es ayudar a que se tomen mejores decisiones. Los procesos de decisión de Markov proporcionan un sistema útil para crear e implementar un proceso de toma de decisiones con varios escenarios posibles donde los resultados son en parte al azar. Por lo que dichos PDM pueden ayudar a hacer predicciones para el futuro, basándose en datos actuales, pasados y probables condiciones futuras. Los PDM tienen muchas aplicaciones en el mundo real especialmente en Economía como lo hemos visto.

Los PDM son importantes ya que aparecen con bastante frecuencia en la práctica. Debido a que utilizan herramientas matemáticas para su solución, se verificaron condiciones necesarias para la obtención de la solución óptima de los problemas propuestos a través la teoría contemplada. Además, se proponen cálculos numéricos para corroborar dicha teoría.

En este trabajo se estudió el problema de consumo e inversión a través de un proceso de decisión de Markov con horizonte aleatorio con soporte finito. En este marco, el consumo y la inversión óptimos se obtuvieron mediante un enfoque de programación dinámica evaluando los consumos a través de una función de utilidad exponencial. Además, se utilizaron las funciones de utilidad potencia y logaritmo para el mismo problema.

Por lo que, el problema de consumo e inversión se discutió de forma más general, considerando además un factor de descuento que varía conforme pasa el tiempo, esto es importante debido a la depreciación del dinero en el tiempo, para este problema se proponen cuatro factores de descuento para los cuáles se encontró la solución óptima.

Finalmente, se abordó el problema de rastreo de índice, el cual trata de igualar el rendimiento de un determinado índice. En otras palabras, se siguen los incrementos y descensos del índice lo más cerca posible, este problema se trabajó mediante un PDM pero con horizonte aleatorio y que tiene un soporte finito. Además, se obtuvo la solución óptima para este problema.

Por lo que a lo largo de este trabajo se obtuvo lo siguiente:

- La política óptima para el problema de consumo e inversión con horizonte aleatorio y que tiene soporte finito.

- La política óptima para el problema de consumo e inversión con factor de descuento que varía con el tiempo y tiene horizonte aleatorio con soporte finito.
- La política óptima para el problema de rastreo de índice con horizonte aleatorio y que tiene soporte finito.
- Ejemplos numéricos que ayudan a contrastar lo obtenido a lo largo de este trabajo.

Las soluciones óptimas obtenidas fueron encontradas de forma exacta.

A continuación se enlistan las presentaciones y publicaciones hechas durante el tiempo realizado de este trabajo:

- Se hizo una contribución al libro de Matemáticas y sus aplicaciones 17 de la FCFM-BUAP, con el trabajo titulado *Rastreo de Índice con horizonte aleatorio y soporte finito.*
- Se presentó en el congreso de Hidalgo del 2021 por la Academia Journals el trabajo titulado *El problema de consumo e inversión a través de un proceso de decisión de Markov con factor de descuento variable y que tiene horizonte aleatorio.*
- Se publicó el artículo en la revista Advances in Operations Research el trabajo titulado *A consumption and Investment Problem via a Markov Decision Processes Approach with Random Horizon.*
- Se presentó en el congreso de Cd. de México del 2022 por la Academia Journals el trabajo titulado *El problema de consumo e inversión utilizando una función de utilidad potencia a través de un proceso de decisión de Markov con horizonte aleatorio y soporte finito.*
- Se envío un segundo artículo a la revista Applied Mathematical Finance, titulado *An optimal consumption and investment strategy via Markov Decision Processes with Time-Varying discount factors and random horizon.*

Finalmente, se enlistan los posibles trabajos a futuro:

- Que parámetros son los más adecuados para obtener el mayor rendimiento en cuanto al problema de consumo e inversión.
- Estudiar el problema de rastreo de Índice, bajo un factor de descuento que varíe con el tiempo y dependa del estado y la acción.
- Tratar de atender el problema de la dimensionalidad al tener espacios de grandes dimensiones, en particular el problema de Consumo e Inversión, cuando se tiene una gran cantidad de activos y un horizonte aleatorio con soporte no finito.
- Resolver los problemas propuesto mediante un Proceso de decisión de Markov parcialmente observable con horizonte aleatorio y factor descuento variable en el tiempo que depende del estado y la acción.
- Implementar en los problemas propuestos la teoría estocástica difusa, si es posible encontrar una caracterización para la solución de dichos problemas.

Los programas de la parte de Implementación se pueden descargar en la siguiente liga:

`https://drive.google.com/drive/folders/11abk44Wt9IbEdZUt2gJT_lfRYWhiwpGp?usp=sharing`

Apéndice A

Herramientas de Análisis

A.1. Funciones semicontinuas

Con el fin de probar la existencia de políticas óptimas, las funciones semicontinuas superiores son importantes. Para la siguiente definición y propiedades se supondrá que M es un espacio métrico. Por lo que se usará la notación $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición A.1. *Una función $v : M \to \bar{\mathbb{R}}$ es llamada semicontinua superior si para cualquier sucesión $(x_n) \subset M$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$ que posee*

$$\limsup_{n\to\infty} v(x_n) \leq v(x).$$

Una función $v : M \to \bar{\mathbb{R}}$ es llamada semicontinua inferior si $-v$ es semicontinua superior.

Teorema A.1. *Sea M es un compacto. Si $v : M \to \bar{\mathbb{R}}$ es semicontinua superior entonces la función v alcanza su supremo.*

Demostración. Ver [6]. ■

Si $v : M \to \bar{\mathbb{R}}$ es semicontinua superior y $v(x) < \infty$ para cualquier $x \in M$, entonces v es acotada en cada subconjunto compacto de M y alcanza su supremo finito. El próximo Lema resume algunas propiedades de funciones semicontinuas [7], [46]. Note que las funciones semicontinua son también funciones de Baire y la parte (a) es también llamado Teorema de Baire en funciones semicontinuas.

Lema A.1. *Sea $v : M \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función.*

(a) v es semicontinua superior si y solo si $\{x \in M | v(x) \geq \alpha\}$ es cerrado para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. v es semicontinua superior si y solo si $\{x \in M | v(x) < \alpha\}$ es abierto para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) v es semicontinua superior y acotada superiormente si y solo si existe una sucesión (v_n) de funciones acotadas y continuas tal que $v_n \downarrow v$.

(c) Sea $v_i : M \to \bar{\mathbb{R}}$ es semicontinua superior para cualquier $i \in I$ $(Iarbitrario)$, entonces $\inf_{i\in I} v_i$ es semicontinua superior.

(d) Si v es semicontinua superior y M' es un espacio métrico y $w : M' \to M$ es continua, entonces $v \circ w$ es semicontinua superior.

(e) *v es continua si y solo si v es semicontinua superior e inferior.*

Demostración. Ver [6]. ■

En lo que sigue se asumirá que $b : M \to \mathbb{R}_+$ es una función medible y $\mathbb{B}_b^+ := \{v \in M(E) | v^+(x) \leq cb(x) \text{ para algún } c \in \mathbb{R}_+\}$.

Lema A.2. *Sea (v_n) y (δ_n) es una sucesión de funciones con $v_n : M \to \mathbb{R}$ y $\delta_n : M \to \mathbb{R}_+$. Se supondrá que $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0$ para cualquier $x \in M$ y*

$$v_n(x) \leq v_m(x) + \delta_m(x), \;\; x \in M, \;\; n \geq m$$

es decir, (v_n) es débilmente decreciente. Entonces se cumple:

(a) *El $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ existe.*

(b) *Si $v_n \in \mathbb{B}_b^+$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 \in \mathbb{B}_b^+$, entonces $v \in \mathbb{B}_b^+$.*

(c) *Si v_n y δ_n es semicontinua superior para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces v es semicontinua superior.*

Demostración. Ver [6]. ■

Ahora sea (A_n) una sucesión con $A_n \subset M$. Entonces se definirá por

$$\begin{aligned} LsA_n \;\; := \;\; & \{a \in M | a \text{ es un punto de acumulación de una sucesión } (a_n) \text{ con } a_n \in A_n \\ & \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

el llamado límite superior de la sucesión (A_n). El siguiente Teorema muestra que bajo algunas suposiciones de continuidad y compactación es posible intercambiar el límite y el supremo de una sucesión de funciones.

Teorema A.2. *Sea M es un compacto y sea (v_n) es una sucesión de funciones semicontinuas superiores $v_n : M \to \mathbb{R}$. Además, existe una sucesión $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$ con $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ y*

$$v_n(a) \leq v_m(a) + \delta_m, \;\; a \in M, \;\; n \geq m.$$

Entonces el límite $v_\infty := \lim v_n$ existe y v_∞ es semicontinua superior.

(a) *Sea $A_n := \{a \in M | v_n(a) = \sup_{x\in M} v_n(x)\}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n = \infty$. Entonces*

$$\emptyset \neq LsA_n \subset A_\infty.$$

(b) *Se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a\in M} v_n(a) = \sup_{a\in M} \lim_{n\to\infty} v_n(a) = \sup_{a\in M} v_\infty(a).$$

Demostración. Ver [6]. ■

El intercambio del límite y supremo es fácil cuando la sucesión de funciones es débilmente creciente.

Teorema A.3. *Sea (v_n) es una sucesión de funciones $v_n : M \to \mathbb{R}$ y $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$ con $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ tal que*

$$v_n(a) \geq v_m(a) - \delta_m, \;\; a \in M, \;\; n \geq m.$$

Entonces el límite $v_\infty := \lim v_n$ existe y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a\in M} v_n(a) = \sup_{a\in M} \lim_{n\to\infty} v_n(a) = \sup_{a\in M} v_\infty(a).$$

Demostración. Ver [6]. ■

Apéndice B

Herramientas de probabilidad

B.1. Teoría de probabilidad

A continuación se supondrá que todas las variables aleatorias están definidas en un espacio completo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El siguiente resultado clásico es acerca del intercambio de la esperanza y el límite.

- **(Convergencia Monótona)** Se supondrá que (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \uparrow X$, $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$-c.s. para cualquier n y la variable aleatoria Y satisface $\mathbb{E}(Y) > -\infty$. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$
- **(Convergencia Dominada)** Se supondrá que (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \to X$, $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$-c.s. para cualquier n y la variable aleatoria Y satisface $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$
- **(Lema de Fatuo)** Se supondrá que (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$-c.s. para cualquier n y la variable aleatoria Y satisface $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Entonces
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n).$$

B.2. Procesos estocásticos

A continuación se darán algunas propiedades de los procesos de Markov a tiempo discreto.

Definición B.1. *Una familia de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en un espacio medible $(E, \mathfrak{E})$ es llamado un proceso estocástico (a tiempo discreto).*

Definición B.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad.*

(a) Una sucesión de σ-álgebras $(\mathcal{F}_n)$ es llamada una filtración si $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.

(b) *Un proceso estocástico* (X_n) *en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es llamado* $(\mathcal{F}_n)$*-adaptado si* X_n *es* $\mathcal{F}_n$ *medible para cualquier* n.

Si $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, \dots, X_n)$, es decir, $\mathcal{F}_n$ es la más pequeña σ-álgebra tal que las variables aleatorias $X_0, \dots, X_n$ son medibles con respecto a $\mathcal{F}_n$, entonces $(\mathcal{F}_n)$ es llamada la filtración natural de (X_n). En este caso (X_n) es trivialmente adaptado a $(\mathcal{F}_n)$. Además, si una variable aleatoria Y es $\mathcal{F}_n^X$-medible entonces existe una función medible $h : E^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $Y = h(X_0, \dots, X_n)$ $\mathbb{P}$-c.s.

A continuación se presentará la definición de kérnel estocástico.

Definición B.3. *Una función* $Q : \mathfrak{E} \times E \to [0, 1]$ *con las dos propiedades*

(i) $B \to Q(\cdot|x)$ *es una medida de probabilidad para cualquier* $x \in E$,

(ii) $x \to Q(B|\cdot)$ *es medible para cualquier* $B \in \mathfrak{E}$,

es llamado un kérnel (transición) estocástico.

La segunda propiedad implica que cuando $v : E \times E \to \mathbb{R}$ es medible, entonces

$$x \mapsto \int v(x, x')Q(dx'|x)$$

es de nuevo medible siempre que la integral exista.

Definición B.4. *Un proceso estocástico* (X_n) *es llamado un proceso de Markov (a tiempo discreto), si existe una sucesión de kérneles estocásticos* (Q_n) *tal que*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n^X) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n) = Q_n(B|X_n).$$

Si (Q_n) no depende de n entonces el proceso es llamado *proceso de Markov estacionario (o homogéneo)*. La primera igualdad es llamada*propiedad de Markov*.

Un proceso estocástico (X_n) es un proceso de Markov si y sólo si existe variables aleatorias independientes $Z_1, Z_2, \dots$ con valores en un espacio medible $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z})$ y funciones medibles $T_n : E \times \mathcal{Z} \to E$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tal que X_0 es dada y

$$X_{n+1} = T_n(X_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si el espacio de estados E del proceso de Markov estacionario (X_n) es finito o contable, el kérnel de transición es representado por una matriz estocástica $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$, i.e. $p_{ij} \geq 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$ para cualquier $i \in E$ y se cumple

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = p_{ij}.$$

En este caso también llamaremos a (X_n) una cadena de Markov.

Teorema B.1. *Teorema de Ionescu-Tulcea. Sea* v *es una medida de probabilidad en* E *y* (Q_n) *una sucesión de kérneles estocásticos. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\mathbb{P}_v$ *en* E^∞ *tal que*

$$\mathbb{P}_v(B_0 \times \ldots \times B_N \times E \times \ldots) = \int_{B_0} \ldots \int_{B_N} Q_{N-1}(dx_N|x_{N-1}) \ldots Q_0(dx_1|x_0)v(dx_0)$$

para cada conjunto rectángulo medible $B_0 \times \ldots \times B_N \in E^{N+1}$.

Demostración. Ver [6] y [5]. ∎

Bibliografía

[1] Arindam G. and Biswajit S., "Economically independent reverse logistics of customer-centric closed-loop supply chain for herbal medicines and biofuel". Elsevier, https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.129977. Vol. 334, pp. 129977, 2022.

[2] Arindam G. "Fractile criterion iterative-interactive optimisation process for multi-objective stochastic linear programming problems in fuzzy environment". International Journal of Mathematics in Operational Research, https://doi.org/10.1504/IJMOR.2021.113588. Vol. 18, Num. 3, pp. 289 – 309, 2021.

[3] Arindam G and Tapan K. R., "Multi-objective optimization of cost-effective and customer-centric closed-loop supply chain management model in T-environment". Soft Computing, https://doi.org/10.1007/s00500-019-04289-5. Vol. 24, 2020.

[4] Arrow, K. J., "The theory of risk aversion. Aspects of the Theory of Risk Bearing". Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio. Reprinted in: Essays in the Theory of Risk Bearing. Chicago: Markham, ISBN 978-0841020016. 1965.

[5] Ash R. B. and Doléans-Dade C. A., "Probability and Measure Theory". Academic Press Elsevier, San Diego, ISBN0120652021, 2005.

[6] Bäuerle N. and Rieder U., "Markov Decision Processes with Aplications to Finance". Springer Verlag, ISBN9783642183232, 2001.

[7] Bertsekas D. P. and Shreve S. E., "Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case". Athena Scientific, ISBN1886529035, 1978.

[8] Bouakiz M. and Sobel M. J., "Inventory Control with an Exponential utility Criterion". Operations Research, https://doi.org/10.1287/opre.40.3.603. Vol. 40, Num. 3, pp. 603 – 608, 1992.

[9] Biswajit S., Arunava M., Mitali S., Bikash K. D. and Gargi R., "Two-echelon supply chain model with manufacturing quality improvement and setup cost reduction". Journal of Industrial & Management Optimization, Doi: 10.3934/jimo.2016063. Vol. 13, Num. 2, pp. 1085 – 1104, 2017.

[10] Bodnar T., Parolya N., and Schmid W., "On the exact solution of the multi-period portfolio choice problem for an exponential utility under return predictability". European Journal of Operational Research, https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.04.039. Vol. 246, Num. 2, pp. 528 – 542, 2015.

[11] Bodnar T., Ivasiuk D., Parolya N. and Schmid W., "Mean-variance efficiency of optimal power and logarithmic utility portfolios". Math Finan Econ., https://doi.org/10.1007/s11579-020-00270-1. Vol. 14, pp. 675 – 698, 2020.

[12] Buckle, Michael J., “The UK Financial System”. Manchester University Press. Fourth Edition, ISBN 9780719067723, 2018

[13] Carmon Y. and Shwartz A., “Markov decision processes with exponentially representable discounting”. Oper. Res., DOI:10.1016/j.orl.2008.10.005. Vol. 37, pp. 51 – 55, 2009.

[14] Carpin S. , Chow Y. and Pavone M., “Risk aversion in finite Markov Decision Processes using total cost criteria and average value at risk”. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), doi:10.1109/ICRA.2016.7487152, pp. 335 – 342, 2016.

[15] Chung K. J. and Sobel M. J., “Discounted MDP’s: distribution functions and exponential utility maximization”. SIAM Journal Control and Optimization, DOI:10.1137/0325004. Vol. 25, Num. 1, pp. 49 – 62, 1987.

[16] Cruz-Suárez H., Ilhuicatzi-Roldán R. and Montes-de-Oca R., “Markov Decision Processes on Borel Spaces with Total Cost and Random Horizon”. Journal of Optimization Theory and Applications, https://doi.org/10.1007/s10957-012-0262-8. Vol. 162, Num. 1, pp. 329 – 346, 2012.

[17] Della Vecchia E., Di Marco S. and Vidal F., “Dynamic programming for variable discounted Markov decision problems”. In: Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa (43JAIIO) XII Simposio Argentino de Investigación Operativa (SIO), Buenos Aires, http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/41704, pp. 50 – 62, 2014.

[18] Fabozzi F. J., and Lucas D. J., “Handbook of Finance, Financial Markets and Instruments”. Wiley Edición, ISBN978-0470078143, Volume 1, 2008.

[19] Feinberg E. and Shwartz A., “Constrained dynamic programming with two discount factors: applications and an algorithm”. IEEE Trans. Automat Control, DOI:10.1109/9.751365 Vol. 44, pp. 628 – 631, 1999.

[20] Feinberg E. and Shwartz A., “Markov decision models with weighted discounted criteria”. Math. Oper. Res. DOI:10.1287/moor.19.1.152, Vol. 19, pp. 152 – 168, 1994.

[21] Fudenberg D. and Tirole J., “Game Theory”. Cambridge, MA: The MIT Press, ISBN-13:978-0262061414. 1er edición, 1991.

[22] García Y. H. & González-Hernández J., “Discrete-time Markov control process with recursive discounted rates”. Kybernetika, DOI:10.14736/kyb-2016-3-0403, Vol. 52, pp. 403 – 426, 2016

[23] Gerber h. U. and Pafumi G., “Utility functions: from risk theory to finance”. North American Actuarial Journal, https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595728. Vol. 2, number 3, pp. 74 – 91, 1998.

[24] González-Hernández J., López-Martínez R., and Minjarez-Sosa J. A., “Adaptive policies for stochastic systems under a randomized discounted criterion”. Bol. Soc. Mat. Mex. Vol.14, pp. 149 – 163, 2008.

[25] González-Hernández J., López-Martínez R., and Minjarez-Sosa J. A., “Approximation, estimation and control of stochastic systems under a randomized discounted cost criterion”. Kybernetika, http://eudml.org/doc/37698. Vol. 45, pp. 737 – 754, 2009.

[26] González-Hernández J., López-Martínez R., Minjarez-Sosa J. A. and Gabriel-Arguelles J. A., "Constrained Markov control processes with randomized discounted cost criteria: occupation measures and external points". Risk and Decision Analysis, https://doi.org/10.3233/RDA-2012-0063. Vol. 4, pp. 163 – 176, 2013.

[27] González-Hernández J., López-Martínez R., Minjarez-Sosa J. A. and Gabriel-Arguelles J. A., "Constrained Markov control processes with randomized discounted rate: infinite linear programming approach". Optimal Control Appl. Methods, https://doi.org/10.1002/oca.2089. Vol.35, pp. 575 – 591, 2014.

[28] González-Hernández J., López-Martínez R. and Pérez-Hernández J. R., "Markov control processes with randomized discounted cost". Math. Methods Oper. Res., https://doi.org/10.1007/s00186-006-0092-2. Vol. 65, pp. 27 – 44, 2007.

[29] Guo X., Hernández-del-Valle A. and Hernández-Lerma O., "First passage problems for nonstationary discrete-time stochastic control systems". Eur. J. Control, DOI:10.3166/ejc.18.528-538, Vol. 18, pp. 528 – 538, 2012.

[30] Heilbroner R. L. and Milberg W., "The Making of Economic Society". The Pearson Series in Economics, Prentice Hall, ISBN-13:978-0136080695. 13th Edition, 2011.

[31] Hernández-Lerma O. and Laserre J. B., "Discrete-Time Markov Control Processes: Basic OPtimality Criteria". Springer-Verlag, ISBN9781461268840, 1996.

[32] Hernández-Lerma O. and Laserre J. B.,"Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes". Springer-Verlag, ISBN9781461205616, 1999.

[33] Hinderer K., "Foundations of Non-Sationary Dynamic Programming With Discrete-Time Parameter". Springer Verlag, ISBN9783540049562, 1970.

[34] Iida T. and Mori M., "Markov Deecision Processes with Random Horizon". Journal of the Operations Research, https://doi.org/10.15807/jorsj.39.592. Vol. 39, pp. 592 – 603, 1996.

[35] Ilhuicatzi-Roldán R., Cruz-Suárez H., and Chavéz-Rodríguez S., "Markov Decision Processes with Time-Varying Discount Factors and Random Horizon". Kybernetika, DOI: 10.14736/kyb-2017-1-0082. Vol. 53, pp.82 – 98, 2017.

[36] Jarrow R. A., "Continuous-Time Asset Pricing Theory". Springer Finance. Softcover reprint of the original, ISBN-13:978-3030085490. 1st. edition, 2018.

[37] Jappelli T. and Pistaferri L. "Complete Markets". The Economics of Consumption: Theory and Evidence. New York, online edn, Oxford Academic, https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199383146.003.0003. pp.46 – 64, 2017.

[38] Laurits R. C., Jorgenson D. W. and Lau L. J., "Transcendental Logarithmic Utility Functions". Published By: American Economic Association. The American Economic Review, https://www.jstor.org/stable/1804840. Vol. 65, Numb. 3, pp. 367 – 383, 1975.

[39] Madura J., "Mercados e instituciones financieras". Thomson Learning, México. South Western/Cengage Learning, ISBN-13:978-0-324-56822-6. 8ta. edición, 2008.

[40] Minjares Sosa J. A., "Markov Control Models with unknown random state-actiondependent discounted factors", DOI:10.1007/s11750-015-0360-5, Num. 23, pp. 743 – 772, 2015.

[41] Navarro González F.J. and Villacampa Y. “A Foundation for Logarithmic Utility Function of Money”, Mathematics, https://doi.org/10.3390/math9060665. Vol. 9, Num. 665, pp. 1 – 8, 2021.

[42] Neumann V. and Morgenstern O., “Theory of games and economic behavior”. Princeton University Press, Princeton, NJ, ISBN9780691130613, 2007.

[43] Nika Z. and Rásony M., “Log-Optimal Portfolios with Memory Effect”. Applied Mathematical Finance, http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3210285. Vol. 25, pp. 557 – 585, 2018.

[44] Paredes Pérez O., Vázquez Guevara V. H. and Cruz Suárez H., “A consumption and Investment Problem via a Markov Decision Processes Approach with Random Horizon”. Advances in Operations Research, Doi.org/10.1155/2022/3184610, Vol. 2022, Article ID 3184610, 13 pages, 2022.

[45] Pentikousis K., Blume O., Calvo R. A. and Papavassiliou S., “Mobile Networks and Management”. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering, Springer, ISBN-13:978-3642118166. 2009.

[46] Puterman M. L.. “Markov decision processes. Discrete stochastic dynamic programming”. Wiley-Interscience: Wiley Series in Probability and Statistics, ISBN9780471727828, 2005.

[47] Saha A., “Expo-power utility: A ‘flexible’ form for absolute and relative risk aversion”. American Journal of Agricultural Economics, https://doi.org/10.2307/1243978. Vol.75, Num. 4, pp. 905 – 913, 1993.

[48] Sarantsev A., “Optimal portafolio with power utility of absolute and relative wealth”. Statistics & Probability Letters, https://doi.org/10.1016/j.spl.2021.109225. Vol. 179, pp. 109225, 2021.

[49] Vázquez-Guevara V. , Cruz-Suárez H. and Velasco-Luna F., “Optimal assignment of sellers in a store with a random number of clients via the armed bandit model”. RAIRO-Oper.Res., https://doi.org/10.1051/ro/2017015. Volume 51, Num. 4, pp. 1119 – 1132, 2017.

[50] Wei Q. and Guo X., “Markov decision processes with state-dependent discounted factors and unbounded rewards/costs”. Oper. Res. Lett., DOI:10.1016/j.orl.2011.06.014, Vol. 39, pp. 369 – 374, 2011.

[51] Wei Q. and Guo X., “Semi-Markov decision processes with variance minimization criterion”. AOR, DOI:10.1007/s10288-014-0267-2, Vol. 13, pp. 59 – 79, 2015.

[52] Wu X. and Guo X., “First passage optimality and variance minimisation of Markov decision processes with varying discounted factors”. J. Appl. Probab., DOI:10.1017/s0021900200012560, Vol. 52, pp. 441 – 456, 2015.

[53] Wu X., Zou X., and Guo X., “First passage Markov decision processes with constraints and varying discount factors”. Front. Math. China, DOI:10.1007/s11464-015-0479-6, Vol. 10, pp. 1005 – 1023, 2015.

[54] Wu X. and Zhang J., “An application to the finite approximation of the first passage models for discrete-time Markov decision processes with varying discount factors”. In:Proc. 11th World Congress on Intelligent Control and Automation, DOI:10.1109/wcica.2014.7052984, pp. 1745 – 1748, 2015.

[55] Wu X. and Zhang J., "Finite approximation of the first passage models for discrete-time Markov decision processes with varying discounted factors". Discrete Event Dyn. Syst., DOI:10.1007/s10626-014-0209-3, Vol. 26, pp. 669 – 683, 2016.

[56] Ye L. and Guo X.., " Continuous-time Markov decision processes with state-dependent discount factors". Acta Appl. Math., DOI:10.1007/s10440-012-9669-3, Vol. 121, pp. 5 – 27, 2012.

[57] Yoshinobu K., Masami K. and Masami Y., "Discounted Markov Decision Processes with Utility Constraints". Computers and Mathematics with applications, Elsevier, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.11.013. Vol. 51, pp. 279 – 284, 2006.

[58] Zhang Y., "Continuous-Time Markov Decision Processes with Exponential Utility". SIAM Journal on Control and Optimization, https://doi.org/10.1137/16M1086261. Vol. 55, Num. 4, pp. 2636 – 2660, 2017.