

Una aplicación del Método Monte Carlo a opciones financieras de tipo europeo

Mónica Aguirre Mastranzo

1 de junio de 2010

Índice general

Índice general	3
1. Introducción	5
2. Preliminares	7
2.1. Conceptos Básicos de Procesos Estocásticos	7
2.2. Movimiento Browniano	12
2.2.1. Notas Históricas	12
2.2.2. Construcción del Movimiento Browniano	13
2.2.3. Propiedades del Movimiento Browniano	16
2.3. Integral de Itô	17
2.3.1. Fórmula de Itô	30
2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	34
3. Método Monte-Carlo	41
3.1. Aplicación al Cálculo de Integrales	42
3.2. Estimación del error	45
3.3. Integración Múltiple	47
4. Valuación de opciones por Monte-Carlo	51
4.1. Conceptos Financieros	51
4.1.1. Tipos de Opciones	52
4.1.2. Estimación de la tendencia y volatilidad	53
4.2. Valuación de opciones.	54
4.2.1. Opción Call Europea	57
4.2.2. Opción Put Europea	63
4.2.3. Aplicación del Método Monte-Carlo a la valuación de opciones Europeas: Call y Put	64

5. Conclusiones	69
6. Apéndice	71
6.1. Apéndice 1: Procesos Estocásticos	71
6.1.1. Espacios L^p	71
6.1.2. Convergencia en L^p	73
6.2. Apéndice 2: Método Monte-Carlo	74
6.2.1. Ley de los Grandes Números	74
6.2.2. Integración Múltiple	74
6.3. Apéndice 3: Valuación de opciones por Monte-Carlo	74
6.3.1. Simulación del Movimiento Browniano	74
6.3.2. Método de Euler-Maruyama en EDE lineales	75
6.3.3. Opción Call Europea	76
6.3.4. Opción Put Europea	76
6.3.5. Aplicación del Método Monte-Carlo a la valuación de una opción Europea	77
Bibliografía	79

Capítulo 1

Introducción

En Finanzas los productos derivados tienen un gran impacto en las inversiones de hoy en día. Ejemplos de ellos son los futuros, forwards, opciones y swap, los cuales son el conjunto de instrumentos financieros, que requieren de algún valor de referencia, (véase [2]). De este conjunto de instrumentos financieros el tema a desarrollar es la valuación de opciones en el mercado financiero, sobre el cual existe una gran variedad de contratos de opciones: divisas, acciones, índices, futuros y exóticas. Opciones que otorgan el derecho de elegir entre opciones de compra ó de venta. En particular el tipo de opciones en el que se enfoca esta tesis es el de opciones europeas.

El objetivo central de esta tesis es presentar la solución del problema de valuación de opciones en mercados financieros propuesta por F. Black y M. Scholes en 1973 y es generalizada por R. Merton (1973). El problema de la valuación es analizado desde el punto de vista probabilístico así como desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales. Para valorar una opción desde un punto de vista probabilístico, este problema se reduce al cálculo de una esperanza de una función continua aplicada a un proceso estocástico. Generalmente no es fácil realizar los cálculos exactos para dicha esperanza, para ello es necesario emplear métodos numéricos. El método numérico en el que esta basado este trabajo es el método Monte-Carlo, el cual consiste en aproximar la esperanza por medio de la media muestral de una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El método Monte-Carlo inicialmente se utilizó para evaluar integrales múltiples definidas, hoy en día es un método de interés para en área de finanzas

e inferencia estadística. La herramienta que implementa Monte-Carlo es la simulación para la generación de números aleatorios en el intervalo en que se encuentra definida la integral.

El marco teórico de la valuación de opciones, esta basado en la teoría de probabilidad, procesos estocásticos, proceso de Wiener, cálculo de Itô, movimiento Browniano geométrico, ecuaciones diferenciales, cálculo diferencial e integral y la derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes etc., todo esto necesario para conocer el precio de las opciones europeas de compra y venta, lo cual permite garantizar la compra o venta del derivado al precio requerido por los inversionistas (véase [1],[6],[8],[13] y [14]).

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente forma:

En el segundo capítulo se presenta los conceptos generales de la teoría de procesos estocásticos, así mismo se esboza la construcción del Movimiento Browniano (MB). Además se incluyen algunas propiedades de dicho MB. En este mismo capítulo, se presenta el cálculo de Itô, la fórmula de Itô y ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el tercer capítulo se presenta la aplicación sobre el método numérico en el que se basa esta tesis es el Método Monte-Carlo, se explica el método para evaluar integrales definidas, también se incluyen algunos ejemplos en los cuales se usa Monte-Carlo, (véase [11],[9]).

En el cuarto capítulo se presenta, los conceptos financieros requeridos en esta tesis, que son necesarios para iniciar el análisis de la fórmula de Black-Scholes (véase [7]). Teniendo dichas fórmulas se muestran ejemplos, tomando datos históricos de la empresa IBM: en este mismo capítulo se aplica el método Monte-Carlo en el cálculo numérico de integrales, se da el algoritmo del método y se presentan ejemplos. En el quinto capítulo se presenta las conclusiones.

Al final de la tesis se anexan algunos programas que son utilizados en el transcurso de la misma, estos programas fueron realizados en Matlab y Mathematica, además se incluye algunos conceptos que se utilizaron.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Conceptos Básicos de Procesos Estocásticos

En el desarrollo de la tesis se considera un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Este modelo matemático es usado para describir el comportamiento de experimentos aleatorios y esta conformado por Ω espacio muestral, el cual contiene todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, el segundo elemento es una colección no vacía \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , con la estructura de σ -álgebra, a los elementos de \mathcal{F} se les llama *eventos* o *conjuntos medibles*. Finalmente, $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ es una función llamada *medida de probabilidad*, la cual cumple las siguientes propiedades:

- a) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.
- b) $P(A) \geq 0$, para cualquier $A \in \mathcal{F}$.
- c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, son ajenos dos a dos, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad (2.1)$$

En muchos casos se tiene la intervención de diferentes espacios de probabilidad para analizar un mismo experimento aleatorio, en esta situación es necesario definir un espacio común a ellos. Este nuevo espacio es conocido como espacio de probabilidad producto, el cual tiene la información de los

espacios básicos. Existen diferentes construcciones para determinar el espacio producto, en este caso se ilustrará la construcción para cuando se tiene una colección no numerable de espacios de probabilidad. La razón es debido a que en el transcurso del trabajo se usará procesos a tiempo continuo por ejemplo el Movimiento Browniano.

Definición 2.1.1 Sea $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ un espacio medible, para t sobre un conjunto de índices T . Sea $\prod_{t \in T} \Omega_t$ el conjunto de todas las funciones $\omega = (\omega(t), t \in T)$ tal que $\omega(t) \in \Omega_t$, para cada $t \in T$.

Definición 2.1.2 Si $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ y $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_{t_i}$, se define al cilindro con base B^n en (t_1, \dots, t_n) como:

$$B^n(t_1, \dots, t_n) = \{\omega \in \prod_{t \in T} \Omega_t : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in B^n\}.$$

y se dice que el cilindro es medible si y solo si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_{t_i}$.

Observación 2.1.3 Si para toda $\Omega_t = \Omega$, entonces el conjunto de todas las funciones de T sobre Ω es $\prod_{t \in T} \Omega_t = \Omega^T$.

Los cilindros medibles forman un álgebra, al igual que la unión finita de rectángulos medibles. La mínima σ -álgebra sobre los cilindros medibles es denotado por $\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$, y llamado la σ -álgebra producto de las \mathcal{F}_t .

Observación 2.1.4 Si $\Omega_t = S$ y $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ para todo $t \in T$, $\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$ es denotado por \mathcal{F}^T .

El objetivo es construir una medida de probabilidad en el espacio medible $(\Omega, \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t)$. El enfoque es el siguiente. Sea $v = \{t_1, \dots, t_n\}$ un subconjunto finito sobre T , donde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Supóngase que para cada v se tiene una medida de probabilidad P_v sobre $\prod_{i=1}^n \mathcal{F}_{t_i}$; $P_v(B)$ se representa como $P\{\omega \in \prod_{t \in T} \Omega_t : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in B\}$. La medida P_v debe satisfacer una propiedad de consistencia, para entender mejor este problema considérese el ejemplo siguiente.

Sea T el conjunto de enteros positivos, y $\Omega_t = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para cada $t \in T$. Supóngase que $P_{\{1,2,3,4,5\}}(B^5) = P(\omega : (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in B^5)$ para toda $B^5 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^5)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(\omega : (\omega_2, \omega_3) \in B^2) &= P(\omega : (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbb{R} \times B^2 \times \mathbb{R}^2) \\ &= P_{\{1,2,3,4,5\}}(\mathbb{R} \times B^2 \times \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

donde $B^2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Se espera que la familia consistente de medidas de probabilidad P_v determinará una única medida de probabilidad sobre $\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$.

Ahora se formalizan los resultados anteriores.

Sea $(\prod_{i=1}^n \Omega_{t_i}, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_{t_i})$ denotado por $(\Omega_v, \mathcal{F}_v)$ para $v = \{t_1, \dots, t_n\}$, donde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Si $u = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\}$ es un subconjunto no vacío de v y $y = (y(t_1), \dots, y(t_n)) \in \Omega_v$, la k -tupla $(y(t_{i_1}), \dots, y(t_{i_k}))$ denotado por y_u . Similarmente si $\omega = (\omega(t), t \in T) \in \prod_{t \in T} \Omega_t$, la notación ω_v es usada para $(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n))$. Si $B \in \mathcal{F}_v$ el cilindro medible debe ser escrito como $B(v)$.

Si P_v es la medida de probabilidad sobre \mathcal{F}_v , la proyección de P_v es la medida de probabilidad $\pi_u(P_v)$ sobre \mathcal{F}_u definida por

$$[\pi_u(P_v)] = P_v\{y \in \Omega_v : y_u \in B\},$$

donde $B \in \mathcal{F}_u$.

Similarmente, si Q es una medida de probabilidad sobre $\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$, la proyección de Q sobre \mathcal{F}_v esta definida por

$$[\pi_v(Q)](B) = Q\{\omega \in \prod_{t \in T} \Omega_t : \omega_v \in B\} = Q(B(v)),$$

donde $B \in \mathcal{F}_v$.

Teorema 2.1.5 (*Medida Producto*). Para cada t sobre un conjunto arbitrario de índices T , sea $\Omega_t = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Se asume que para cada subconjunto no vacío v finito de T , se da una medida de probabilidad P_v sobre \mathcal{F}_v . Se supone que P_v es consistente, es decir, $\pi_u(P_v) = P_u$ para cada $u \subset v$. Entonces existe una única medida de probabilidad $P \in \mathcal{F} = \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$, tal que

$$\pi_v(P) = P_v,$$

para todo v .

La demostración de este teorema puede consultarse en [1].

Una vez definido el teorema de medida producto, para una colección de espacios de probabilidad, se continuará definiendo el tipo de proceso estocástico en que se trabajará en el transcurso de la tesis.

Definición 2.1.6 Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y E un conjunto no vacío. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X(t) : \Omega \rightarrow E, t \in T\}$, indexadas por algún conjunto T . El conjunto E recibe el nombre de espacio de estados.

Un proceso estocástico puede clasificarse como en el siguiente diagrama

Tiempo	Estados
Discreto (T numerable)	Discreto (E numerable)
Continuo (T no numerable)	Continuo (E no numerable)

Tabla 1

De esta manera existen cuatro tipos de procesos estocásticos (tiempo discreto con espacio de estados discreto, tiempo continuo con espacio de estados continuo, tiempo discreto con espacio de estados continuo y tiempo continuo con espacio de estados discreto). En este capítulo se estudiará un proceso estocástico en tiempo continuo con espacio de estados continuo.

Sea $\{X(t), t \geq 0\}$, un proceso estocástico. Para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, se define

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A) = P\{(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

La medida de probabilidad $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ sobre \mathbb{R}^n , es llamada una distribución marginal de un proceso estocástico $X(t)$. Obsérvese que para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, y cualquier $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} P\{(X(t_1), \dots, X(t_{i-1}), X(t_{i+1}), \dots, X(t_n)) \in A_1 \times A_2\} \\ = P\{(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \in A_1 \times \mathbb{R} \times A_2\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{i-1})$ y $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$. Cuando $i = 1$, la ecuación (2.2) se convierte en

$$P\{(X(t_2), \dots, X(t_n)) \in A_2\} = P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in \mathbb{R} \times A_2\}.$$

Similarmente, cuando $i = n$, la ecuación (2.2) se convierte en

$$P\{(X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) \in A_1\} = P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in A_1 \times \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto, se tiene la igualdad

$$\mu_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(A_1 \times A_2) = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times \mathbb{R} \times A_2), \quad (2.3)$$

donde $1 \leq i \leq n$, por tanto la familia de distribuciones marginales de un proceso estocástico $X(t)$, satisface la relación (2.3).

Consecuentemente supóngase que para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, existe una medida de probabilidad $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ sobre \mathbb{R}^n . La familia de medidas de probabilidad

$$\{\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n} : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1, 2, \dots\},$$

se dice que satisface la condición de consistencia si la ecuación (2.3) se cumple para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{i-1})$, $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Observación 2.1.7 *La propiedad de consistencia en términos de la función de densidad, puede ser planteada de la forma siguiente:*

$$\int f_{t_1, \dots, t_i, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i = f_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (2.4)$$

y en términos de la distribución acumulada, puede ser planteada de la forma siguiente:

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_i, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

El teorema de extensión de Kolmogorov asegura la existencia de una medida de probabilidad sobre un espacio de funciones $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$, que corresponden a una familia consistente de medidas de probabilidad. En este caso el teorema se enuncia usando la familia de funciones de distribución (véase [14]).

Teorema 2.1.8 *(Teorema de extensión de Kolmogorov). Sea $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ con $t_i \in T \subseteq \mathbb{R}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \geq 1$, una familia de funciones de distribución de dimensión finita, la cual satisface la condición de consistencia (2.4). Entonces existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un proceso aleatorio $X = \{\xi(t), t \geq 0\}$ tal que*

$$P\{\omega : \xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.5)$$

Obsérvese que la conclusión del teorema anterior garantiza la existencia de un espacio de probabilidad, lo cual es una consecuencia del teorema 2.1.2, la importancia del teorema de Kolmogorov es que garantiza la existencia de un proceso estocástico.

El siguiente teorema muestra una condición suficiente para ver que un proceso estocástico tiene una realización (versión) continua.

Teorema 2.1.9 (*Teorema de continuidad de Kolmogorov*). Sea $X = \{X(t), t \geq 0\}$, un proceso estocástico que satisface la siguiente condición:

$$E |X(t) - X(s)|^\alpha \leq K |t - s|^{1+\beta}, \quad \text{para todo } 0 \leq t, s \leq 1, \quad (2.6)$$

tal que para todo $T > 0$ existen constantes $\alpha, \beta, K > 0$, entonces X tiene una realización continua, esto es, existe Ω_0 tal que $P(\Omega_0) = 1$ y para cada $\omega \in \Omega_0$, $X(t, \omega)$ es una función continua de t .

2.2. Movimiento Browniano

En esta sección se trabajará con un proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados continuo llamado *Movimiento Browniano* (MB).

2.2.1. Notas Históricas

El proceso estocástico llamado Movimiento Browniano o proceso de Wiener es un modelo utilizado en diversas ramas de la ciencia y de gran importancia para las finanzas.

El Movimiento Browniano fue construido a principios del siglo XX y su nombre se atribuye al botánico inglés Robert Brown, que observó a través del microscopio que pequeñísimas partículas, originadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento riguroso e irregular.

En física, tanto Einstein como Smoluchowski utilizaron el Movimiento Browniano para describir el movimiento de una molécula al chocar con otras, esto quedo demostrado con rigor matemático en los años 60 para algunos modelos sencillos.

Antes de que el Movimiento Browniano se aplicara a trabajos en física, en el año de 1900 Louis Bachelier construyó y aplicó este proceso a las finanzas en su tesis doctoral. A pesar de que en su época su tesis fue poco comprendida y aceptada, gracias a estos trabajos Louis Bachelier es considerado hoy en día el precursor de las Finanzas Cuantitativas Modernas.

En 1923 el matemático Norbert Wiener, en sus trabajos entre 1920 y 1923 logra dar un modelo preciso y riguroso para las trayectorias de las partículas, siendo una función continua pero no diferenciable en ningún punto, como la presentada por Weierstrass. Es por esta razón que a menudo a este proceso también se le llama *Proceso de Wiener* y se denota por $\{W(t) : t \geq 0\}$.

Un aspecto teórico de interés en la teoría de procesos estocásticos es garantizar la existencia de este proceso. En particular para los procesos de interés de esta tesis se hará un bosquejo de su construcción.

2.2.2. Construcción del Movimiento Browniano

En esta sección se mostrará la existencia del Proceso de Wiener mediante el uso del teorema de extensión y de continuidad de Kolmogorov.

Para construir el Movimiento Browniano es necesario determinar una familia de distribuciones finitas que satisfacen algunas propiedades que a continuación se presentan.

Sean

$$\begin{aligned} U_1 &= W(t_1) \sim N(0, t_1) \\ U_2 &= W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1), \end{aligned}$$

donde $t_1 > 0$ y $t_2 - t_1 > 0$.

Usando el teorema de cambio de variable se obtiene la función de densidad conjunta para las variables $W(t_1)$ y $W(t_2)$,

$$\begin{aligned} f_{t_1, t_2}(u_1, u_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{t_1} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(u_2 - u_1)^2}{t_2 - t_1} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{t_1} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{t_2 - t_1} \right)}. \end{aligned}$$

En el caso de n variables se obtiene por inducción que la función de densidad conjunta está dada por

$$\begin{aligned} &f_{t_1, \dots, t_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{t_1} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right)}. \end{aligned}$$

Ahora, se verificará que las funciones anteriores satisfacen la propiedad de

consistencia (caso $n = 2$),

$$\begin{aligned}
\int f_{t_1, t_2}(x, y) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_1(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t_1} + \frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t_1} \right)} dx \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} \sqrt{t_1} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{t_2 - t_1} \right)} \\
&= f_{t_2}(y).
\end{aligned}$$

En general, para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \geq 1$.

Se demuestra por inducción que

$$\int f_{t_1, \dots, t_i, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) du_i = f_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n).$$

De esta forma la familia de distribuciones finitas cumple la condición de consistencia, con el uso del Teorema de Extensión de Kolmogorov, se puede asegurar que existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un proceso estocástico $X = \{U(t), t \geq 0\}$ tal que

$$P\{\omega : U(t_1) \leq u_1, \dots, U(t_n) \leq u_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n).$$

A continuación se probará que el proceso cumple con las propiedades que caracterizan al MB.

Se asume que $U(0) = 0$. Sea $0 \leq s \leq t \leq 1$, entonces

$$P\{U(t) - U(s) \leq a\} = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{s} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{t-s} \right)} du_1 du_2,$$

se hace el cambio de variables $x = u_1$, $y = u_2 - u_1$, el cual se obtiene

$$\begin{aligned} P\{U(t) - U(s) \leq a\} &= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s} + \frac{y^2}{t-s}\right)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{t-s}\right)}, \end{aligned}$$

así se cumple otra propiedad la cual establece que para $0 \leq s \leq t \leq 1$, se tiene que $U(t) - U(s)$ esta distribuida normalmente con media 0 y varianza $t - s$.

Para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \geq 1$, por argumentos similares al resultado anterior, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} &P\{U(t_1) \leq a_1, U(t_2) - U(t_1) \leq a_2, \dots, U(t_n) - U(t_{n-1}) \leq a_n\} \\ &= P\{U(t_1) \leq a_1\} P\{U(t_2) - U(t_1) \leq a_2\}, \dots, P\{U(t_n) - U(t_{n-1}) \leq a_n\}, \end{aligned}$$

esto implica que las variables aleatorias

$$U(t_1), U(t_2) - U(t_1), \dots, U(t_n) - U(t_{n-1}),$$

son independientes.

Usando el Teorema de continuidad de Kolmogorov, para $0 \leq s \leq t \leq 1$, se demuestra que existen constantes positivas α, β, k , tales que

$$E[|U(t) - U(s)|^\alpha] \leq k |t - s|^{1+\beta},$$

en particular para este proceso, se toman los valores de $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $k = 3$ y $U(t) - U(s) \sim N(0, t - s)$ por lo que se cumple la desigualdad. De esa manera el proceso estocástico $X = \{U(t), t \geq 0\}$ cumple la condición del teorema de continuidad. De esta forma existe una versión continua de $U(t)$: $X = \{W(t), t \geq 1\}$ la cual es llamada Movimiento Browniano o Proceso de Wiener. Así la definición formal del Movimiento Browniano es la siguiente:

Definición 2.2.1 *Un movimiento Browniano o proceso de Wiener es un proceso estocástico $\{W(t) : t \geq 0\}$, que cumple las propiedades siguientes:*

1. $W(0) = 0$ (con probabilidad 1).

2. Para $0 \leq s < t \leq T$, la variable aleatoria dada por el incremento $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$; por tanto también se puede afirmar que $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s}N(0, 1)$, donde $N(0, 1)$ denota una variable normalmente distribuida con media cero y varianza uno.
3. Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, los incrementos $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes.
4. Las trayectorias $t \longrightarrow W(t)$ son continuas.

2.2.3. Propiedades del Movimiento Browniano

Proposición 2.2.2 (a) $W(t)$ es un proceso de Markov.

(b) $\text{Cov}(W(t), W(s)) = \min\{s, t\}$.

(c) $E[W(s)^4] = 3s^2$, $s \geq 0$.

Demostración. (a) Sean $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$, y $w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1} \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
 & P(W(t_{n+1}) = w_{n+1} | W(t_1) = w_0, W(t_1) = w_1, \dots, W(t_n) = w_n) \\
 &= \frac{P(W(t_1) = w_0, W(t_1) = w_1, \dots, W(t_n) = w_n, W(t_{n+1}) = w_{n+1})}{P(W(t_1) = w_0, W(t_1) = w_1, \dots, W(t_n) = w_n)} \\
 &= \frac{P(W(t_0) = w_0, \dots, W(t_{n+1}) - W(t_n) = w_{n+1} - w_n)}{P(W(t_0) = w_0, \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}) = w_n - w_{n-1})} \\
 &= P(W(t_{n+1}) - W(t_n) = w_{n+1} - w_n).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & P(W(t_{n+1}) = w_{n+1} | W(t_n) = w_n) \\
 &= \frac{P(W(t_n) = w_n, W(t_{n+1}) = w_{n+1})}{P(W(t_n) = w_n)} \\
 &= \frac{P(W(t_n) - W(t_0) = w_n - w_0, W(t_{n+1}) - W(t_n) = w_{n+1} - w_n)}{P(W(t_n) - W(t_0) = w_n - w_0)} \\
 &= P(W(t_{n+1}) - W(t_n) = w_{n+1} - w_n).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $W(t)$ es un proceso de Markov.

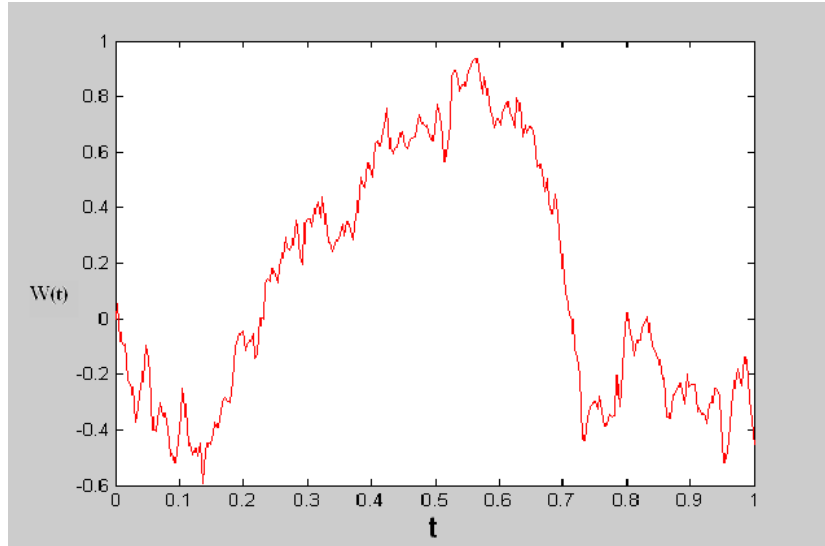
(b) Como $Cov(W(t), W(s)) = E[W(t)W(s)] - E[W(t)]E[W(s)]$ y ya que $E[W(t)W(s)] = \min\{s, t\}$ y $E[W(t)] = E[W(s)] = 0$, el resultado se sigue.

(c) Para la prueba de este resultado se usa la función generadora de momentos de una distribución normal

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

con media 0 y varianza s . Se halla el cuarto momento y evaluando en cero el resultado se sigue. ■

A continuación se muestra una simulación del movimiento Browniano realizada en Matlab, la cual consiste en hacer una discretización del intervalo $[0, 1]$ en N partes con $N \in \mathbb{N}$. Además de usar un generador de números aleatorios (*rand*), el cual produce números aleatorios independientes y distribuidos con una normal estándar. El programa detallado se muestra en Apéndice 3. En la Gráfica 2.1 muestra la simulación de una trayectoria Browniana con $N = 500$.



Gráfica 2.1

2.3. Integral de Itô

En esta sección el objetivo es definir la Integral de Itô de un proceso estocástico $\{f(t, \omega), 0 \leq t \leq T\}$ respecto del Movimiento Browniano, es

decir, una integral de la forma:

$$\int_0^T f(t, \omega) dB(t).$$

Para construir la integral de Itô, la idea principal es seguir tres pasos: en el paso 1 se define la integral estocástica para procesos estocásticos simples en $L^2(P \times dt)$, en el paso 2 se prueba un lema de aproximación, utilizando este lema y el paso 1, en el paso 3 se define la integral estocástica para un proceso estocástico general en $L^2(P \times dt)$.

Se considera como elementos iniciales un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , un MB $\{B(t) : 0 \leq t \leq T\}$ y una filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ que satisface las condiciones siguientes:

- a) Para cada $t \in [0, T]$, $B(t)$ es adaptado, es decir, la función $B(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{F}_t -medible.
- b) Para cualquier $s \leq t$, la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_s .

En el transcurso de la construcción se usará la notación siguiente.

Sea $L^2(P)$ al espacio vectorial de variables aleatorias X que son cuadrado integrables, es decir, que cumplen la condición

$$\|X\|_{L^2(P)} := (E |X|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

La función $X \mapsto \|X\|_{L^2(P)}$ define una norma en $L^2(P)$ y este espacio es completo respecto de esta norma.

En este trabajo se consideran procesos en el intervalo $[0, T]$ con $T \in \mathbb{R}$, también se denota por $L^2(P \times dt)$ al espacio de Banach de procesos $\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ definido por,

$$L^2(P \times dt) = \left\{ X(t) : \Omega \times L \rightarrow \mathbb{R} \mid \left(E \int_0^T |X(t)|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Paso 1: Integral para procesos simples en $L^2(P \times dt)$.

Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ una partición finita del intervalo $[0, T]$. Un proceso estocástico simple es un proceso de la forma

$$f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega) I_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde X_{i-1} es una variable aleatoria \mathcal{F}_{t_i} -medible y $E(X_{i-1}^2) < \infty$. La expresión $I_{[a,b)}(t)$ corresponde a la función indicadora del intervalo $[a, b)$. Es decir

$$I_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b) \\ 0, & t \notin [a, b) \end{cases}$$

en este caso se define la integral

$$I(f) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (2.7)$$

Además, se tiene el siguiente lema.

Lema 2.3.1 *Supóngase que $I(f)$ se encuentra definida por la relación (2.7). Entonces $EI(f) = 0$ y*

$$E(|I(f)|^2) = \int_a^b E(|f(t)|^2) dt. \quad (2.8)$$

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq n$ en la ecuación (2.7),

$$\begin{aligned} E[X_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))] &= E\{E[X_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{X_{i-1}E[B(t_i) - B(t_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{X_{i-1}E[B(t_i) - B(t_{i-1})]\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

por tanto, $EI(f) = 0$. Además, se tiene que

$$|I(f)|^2 = \sum_{i,j=1}^n X_{i-1}X_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})).$$

para $i \neq j$, es decir, si $i < j$,

$$\begin{aligned} &E\{X_{i-1}X_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))\} \\ &= E\{E[X_{i-1}X_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} \\ &= E\{X_{i-1}X_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))E[B(t_j) - B(t_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

de lo cual se tiene que $E[B(t_j) - B(t_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}] = E[B(t_j) - B(t_{j-1})] = 0$, por otra parte, para $i = j$, se obtiene que

$$\begin{aligned} E[X_{i-1}^2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] &= E\{E[X_{i-1}^2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{X_{i-1}^2 E[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2]\} \\ &= E\{X_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})\} \\ &= (t_i - t_{i-1})E(X_{i-1}^2). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$E(|I(f)|^2) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})E(X_{i-1}^2).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b E(|f(t)|^2)dt &= \int_a^b E \left[\sum_{i=1}^n X_{i-1} I_{[t_{i-1}, t_i]}(t) \right]^2 dt \\ &= \int_a^b E \left[\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 I_{[t_{i-1}, t_i]}(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n E[X_{i-1}^2 I_{[t_{i-1}, t_i]}(t)] dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n I_{[t_{i-1}, t_i]}(t) E[X_{i-1}^2] dt \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_{i-1}^2] \int_a^b I_{[t_{i-1}, t_i]}(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_{i-1}^2] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) E[X_{i-1}^2]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.8) es válida. ■

Paso 2: Lema de Aproximación

Como ya se mostró en el paso 1, que está definida la integral estocástica para procesos simples, ahora toca probar en este lema la existencia de una

sucesión procesos simples en $L^2(P \times dt)$, para que más posteriormente se pueda definir la integral estocástica para un proceso estocástico general en $L^2(P \times dt)$.

Lema 2.3.2 *Supóngase $f \in L^2(P \times dt)$ entonces existe una sucesión $\{f_n(t) : n \geq 1\}$ de procesos simples en $L^2(P \times dt)$, tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E\{|f_n(t) - f(t)|^2\} dt = 0.$$

Demostración. Caso 1: f continua en $T \in \mathbb{R}$.

Sea $A_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$, una partición del intervalo $[a, b] \subset T$. Se define $f_n(t, \omega) = f(t_{i-1}, \omega)$, $t_{i-1} < t \leq t_i$, entonces $\{f_n(t, \omega)\}$ es una sucesión de procesos estocásticos adaptados simples. Por la continuidad de f se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow s} E\{|f(t, \omega) - f(s, \omega)|^2\} = 0,$$

lo cual implica que para cada $t \in [a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2\} = 0. \quad (2.10)$$

Además, usando la desigualdad

$$|\alpha - \beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2), \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

se tiene

$$\begin{aligned} |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2 &\leq 2(|f(t, \omega)|^2 + |f_n(t, \omega)|^2) \\ E(|f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2) &\leq 2(E(|f(t, \omega)|^2) + E(|f_n(t, \omega)|^2)) \\ &\leq 2\left(\sup_{a \leq t \leq b} E|f(t, \omega)|^2 + \sup_{a \leq t \leq b} E|f_n(t, \omega)|^2\right) \\ &= 4 \sup_{a \leq s \leq b} E|f(s, \omega)|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

por las ecuaciones (2.10) y (2.11), se puede aplicar el teorema de convergencia dominada, así se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E|f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2 dt = 0.$$

Caso 2: f acotada. Sea

$$g_n(t, \omega) = \int_0^{n(t-a)} e^T f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) dT.$$

donde $n \geq 1$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$.

Obsérvese que se cumplen las siguientes proposiciones: g_n es adaptada a $\{\mathcal{F}_t\}$, y $g_n \in L^2(P \times dt)$

$$\begin{aligned} \int_a^b E[|g_n|^2] dt &= \int_a^b E \left| \int_0^{n(t-a)} e^T f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) dT \right|^2 dt \\ &\leq \int_a^b \left(E \int_0^{n(t-a)} e^{-2t} \left| f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right|^2 dT \right) dt \\ &\leq k \int_a^b \left(E \int_0^{n(t-a)} e^{-2t} dT \right) dt < +\infty, \end{aligned}$$

$\{g_n\}$ son continuas para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u &= t - \frac{T}{n}, du = \frac{-dT}{n}, \\ g_n(t, \omega) &= \int_a^t e^{-(t-u)n} f(u, \omega) n du, \end{aligned}$$

cuando $t_m \rightarrow t$ se tiene que

$$\begin{aligned} g_n(t_m, \omega) &= \int_a^{t_m} e^{-(t_m-u)n} f(u, \omega) n du \\ &= \int_{\mathbb{R}} I_{[a, t_m]} e^{-(t_m-u)n} f(u, \omega) n du, \end{aligned}$$

haciendo diferencias

$$\begin{aligned} f(t, \omega) - g_n(t, \omega) &= f(t, \omega) - \int_0^{n(t-a)} e^{-T} f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) dT \\ &= f(t, \omega) \int_0^{+\infty} e^{-T} - \int_0^{n(t-a)} e^{-T} f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) dT \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-T} \left(f(t, \omega) - f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right) dT, \end{aligned}$$

donde $f(t)$ es cero para $t < a$.

$$\begin{aligned} |f(t, \omega) - g_n(t, \omega)|^2 &= \left| \int_0^{+\infty} \left(f(t, \omega) - f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right) \right| e^{-T} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \left(f(t, \omega) - f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right) \right|^2 e^{-T} dt, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|g_n - f\|_{L^2(P \times dt)} &= \int_a^b E |f(t, \omega) - g_n(t, \omega)|^2 dt \\ &\leq \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} E \left| f(t, \omega) - f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right|^2 e^{-T} dT \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-T} \left(E \int_a^b \left| f(t, \omega) - f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right|^2 dt \right) dT, \end{aligned}$$

como f es acotada

$$\int_a^b \left| f(t, \omega) - f\left(t - \frac{T}{n}, \omega\right) \right|^2 dt \rightarrow 0,$$

entonces

$$\int_a^b E |f(t, \omega) - g_n(t, \omega)|^2 dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

como los $\{g_n\}$ son continuas por el caso anterior, existe $\{f_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} \|f_n - g_n\|_{L^2(P \times dt)} &\longrightarrow 0, \\ \int_a^b E \{|f(t, \omega) - g_n(t, \omega)|^2\} dt &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f_n - f\|_{L^2(P \times dt)} = \|f_n - g_n - f + g_n\| \\ &\leq \|f_n - g_n\| + \|g_n - f\|, \end{aligned}$$

entonces por (1) y por (2)

$$\|f_n - f\|_{L^2(P \times dt)} = \int_a^b E |f_n - f|^2 dt \longrightarrow 0.$$

Caso 3: Caso general $f \in L^2(P \times dt)$

Sea $f \in L^2(P \times dt)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$g_n(t, \omega) = \begin{cases} f(t, \omega) & |f(t, \omega)| \leq n \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

por el teorema de convergencia dominada,

$$\int_a^b E(|f(t) - g_n(t)|^2) dt \longrightarrow 0,$$

por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ se aplica el caso 2 y existe una $\{f_n\}$ tal que,

$$\|f_n - g_n\|_{L^2(P \times dt)} \leq \frac{1}{n},$$

entonces

$$\|f_n - f\|_{L^2(P \times dt)} \leq \|f_n - g_n\| + \|g_n - f\|,$$

de esta forma

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0.$$

■

Paso 3. Integral Estocástica para $f \in L^2(P \times dt)$.

Ahora se usará el paso 1 y paso 2 para definir la integral estocástica,

$$\int_a^b f(t) dB(t), \quad f \in L^2(P \times dt).$$

Por el Lema de Aproximación existe una sucesión $\{f_n\}$ de procesos simples tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(P \times dt)} = 0.$$

Para cada n , $I(f_n)$ esta definida por el paso 1. Entonces

$$\begin{aligned} \|I(f_n) - I(f_m)\|_{L^2(P)} &= E(|I(f_n) - I(f_m)|^2) \\ &= \int_a^b E|f_n - f_m|^2 dt \\ &= \|f_n - f_m\|_{L^2(P \times dt)}, \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, en la relación anterior,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} E(|I(f_n) - I(f_m)|^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| + \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0, \end{aligned}$$

así

$$E(|I(f_n) - I(f_m)|^2) \rightarrow 0,$$

de lo cual, se concluye que $\{I(f_n)\}$ es una sucesión de Cauchy (véase Apéndice 1) y como $L^2(P)$ es un espacio métrico completo, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \in L^2(P),$$

por lo cual se define a la integral de Itô de f , como

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

La integral de Itô satisface las siguientes proposiciones.

(a) $I(\alpha(X + Y)) = \alpha I(X) + \alpha I(Y).$

(b) $E[I(X)] = 0.$

(c) $\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}.$

(d) Sean $X, Y \in L^2(P \times dt)$

$$E \left[\int_a^b X(t) dB(t) \int_a^b Y(t) dB(t) \right] = \int_a^b E[X(t)Y(t)] dt.$$

Demostración. (a) Se tiene que

$$I(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n) \text{ y } I(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(Y_n).$$

Por definición de la integral se tiene que

$$\begin{aligned} I(\alpha(X + Y)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha(X_n + Y_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha I(X_n + Y_n) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n + Y_n) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n) + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} I(Y_n) \\ &= \alpha I(X) + \alpha I(Y). \end{aligned}$$

(c) Si ΔB_k denota la diferencia $B(t_{k+1}) - B(t_k)$ y $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ entonces

$$\begin{aligned}
\|I(X)\|_{L^2(P)} &= E \left(\left| \sum_{k=0}^{n-1} X_k (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \right|^2 \right) \\
&= E \left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 \Delta B_k^2 \right) \\
&= E \left(\sum_{k=0}^{n-1} (X_k)^2 (\Delta t_k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E(X_k)^2 \Delta t_k \\
&= E \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) \\
&= \|X\|.
\end{aligned}$$

Esta propiedad es llamada *Isometría de Itô*.

(d) Sean $X, Y \in L^2(P \times dt)$ por demostrar que

$$E \left[\int_a^b X(t) dB(t) \int_a^b Y(t) dB(t) \right] = \int_a^b E[X(t)Y(t)] dt.$$

Usando (c) y desarrollando ambos extremos de la identidad se tiene que

$$\begin{aligned}
\|I(X + Y)\| &= \|X + Y\| \\
\|I(X) + I(Y)\|_{L^2(P)} &= \|X + Y\|_{L^2(P \times dt)} \\
E(I(X)^2 + 2I(X)I(Y) + I(Y)^2) &= \int_a^b E(X^2 + 2XY + Y^2) dt \\
E(I(X)^2) + 2E(I(X)I(Y)) + E(I(Y)^2) &= \int_a^b E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) dt \\
\|I(X)\|^2 + 2E(I(X)I(Y)) + \|I(Y)\|^2 &= \|X\|^2 + 2 \int_a^b E(XY) dt + \|Y\|^2 \\
E[I(X)I(Y)] &= \int_a^b E(XY) dt
\end{aligned}$$

$$E \left[\int_a^b X(t)dB(t) \int_a^b Y(t)dB(t) \right] = \int_a^b E[X(t)Y(t)]dt.$$

■

Ejemplo 2.3.3 *En este ejemplo se calcula la integral estocástica.*

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2}(B(b)^2 - B(a)^2) - \frac{1}{2}(b - a) \quad (2.12)$$

Sea $f(t) = B(t)$ y se aplica el Paso 1, además por el lema de aproximación sea $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$, se define:

$$f_n(t) = B(t_{i-1}), t_{i-1} < t \leq t_i,$$

entonces

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} I(f_n),$$

donde,

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

$$R_n = \sum_{i=1}^n B(t_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2, \quad (2.13)$$

Se probará que la variación cuadrática tiende a $b - a$, cuando $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$ tiende a 0. Note que:

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a,$$

y

$$\begin{aligned}\Phi_n &= \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1}),\end{aligned}$$

donde,

$$X_i = (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1}),$$

entonces,

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 &= \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] \left[\sum_{j=1}^n X_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j.\end{aligned}$$

Se sabe que, $E(X_i X_j) = 0$, si $i \neq j$, y $E(B(t) - B(s))^4 = 3|t - s|^2$.

Entonces,

$$\begin{aligned}E[X_i^2] &= E(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4 - 2(t_i - t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= E(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4 - 2(t_i - t_{i-1})E(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 3(t_i - t_{i-1})^2 - 2(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 2(t_i - t_{i-1})^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}E\Phi_n^2 &= \sum_{i=1}^n E[X_i^2] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 2 \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = 2 \|\Delta_n\| |b - a|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_n + L_n &= \sum_{i=1}^n (B(t_i) + B(t_{i-1}))(B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))) \\
&= \sum_{i=1}^n (B(t_i)^2 - B(t_{i-1})^2) \\
&= (B(t_1)^2 - B(t_0)^2) + (B(t_2)^2 - B(t_1)^2) + \cdots + \\
&\quad (B(t_{n-1})^2 - B(t_{n-2})^2) + (B(t_n)^2 - B(t_{n-1})^2) \\
&= B(t_n)^2 - B(t_0)^2 \\
&= B(b)^2 - B(a)^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Sumando (2.13) y (2.14), se tiene que

$$R_n = \frac{1}{2} \left\{ B(b)^2 - B(a)^2 + \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \right\}.$$

Restando (2.14) de (2.13) se obtiene

$$R_n + L_n - (R_n + L_n) = 2L_n = B(b)^2 - B(a)^2 - \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2,$$

es decir,

$$L_n = \frac{1}{2} \left\{ B(b)^2 - B(a)^2 - \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \right\}.$$

Por otro lado,

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n),$$

$$\begin{aligned}
I(f_n) &= \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&= L_n,
\end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{2} \{ B(b)^2 - B(a)^2 - (b - a) \}.$$

2.3.1. Fórmula de Itô

Se requiere una regla para diferenciar expresiones de la forma $f(B(t))$, donde f es una función diferenciable. Si $B(t)$ es diferenciable entonces la regla de la cadena ordinaria estaría dada por:

$$\frac{d}{dt}f(B(t)) = f'(B(t))B'(t).$$

La cual en notación diferencial debería ser escrito de la forma siguiente

$$\begin{aligned} df(B(t)) &= f'(B(t))B'(t)dt \\ &= f'(B(t))dB(t), \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \int_0^t f'(B(u))dB(u).$$

La fórmula anterior para la integral de Itô no es válida, para observar este hecho considere el siguiente ejemplo: $f(x) = x^2$,

$$B(b)^2 - B(a)^2 = \int_a^b 2B(t)dB(t),$$

entonces

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2} \{B(b)^2 - B(a)^2\},$$

y por el ejemplo (2.12) se puede observar que no es válida la fórmula anterior para la integral de Itô.

Para el cálculo de Itô, la regla de la cadena presenta la forma siguiente:

$$f(B(b)) - f(B(a)) = \int_a^b f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(B(t))dt,$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si $b = t$, en la fórmula anterior

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s))ds, \quad (2.15)$$

para $a \in \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$.

Ejemplo 2.3.4 Sea $f(x) = x^2$, se aplica la fórmula de Itô en su forma simple (2.15).

$$\begin{aligned} B(b)^2 - B(a)^2 &= \int_a^b 2B(s)dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^b 2ds \\ &= \int_a^b 2B(s)dB(s) + (b - a), \end{aligned}$$

entonces

$$\int_a^b B(s)dB(s) = \frac{1}{2} \{B(b)^2 - B(a)^2 - (b - a)\}.$$

Teorema 2.3.5 Sea $f \in L^2$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s))ds,$$

$t \in [0, T] \subseteq \mathbb{R}$ (T fija).

Demostración. Usando el teorema de Taylor aplicado a f en $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

donde el residuo está dado por

$$R(x) = \int_{x_0}^x f''(\theta)(x - \theta)d\theta,$$

equivalentemente, haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{\theta - x_0}{x - x_0},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_0^1 f''(x_0 + u(x))(x - x_0 - u(x - x_0))(x - x_0)du \\ &= \int_0^1 (1 - u)f''(x_0 + u(x - x_0))(x - x_0)^2 du. \end{aligned}$$

Sea $\Delta = \{t_0 = 0, \dots, t_n = t\}$ una partición de $[0, t]$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \{f(B(t_k)) - f(B(t_{k-1}))\} = f(B(t_n)) - f(B(t_0)),$$

por otro lado, usando (2.15) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{f(B(t_k)) - f(B(t_{k-1}))\} &= \sum_{k=1}^n \{f'(B(t_{k-1}))(B(t_k) - B(t_{k-1})) \\ &\quad + \int_0^1 (1-u)f''(B(t_{k-1}) + u(B(t_k) \\ &\quad - B(t_{k-1}))) (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 du\}. \end{aligned}$$

Sea $\Delta B(k) = B(t_k) - B(t_{k-1})$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{f(B(t_k)) - f(B(t_{k-1}))\} &= \sum_{k=1}^n f'(B(t_{k-1}))\Delta B(k) + \\ &\quad \int_0^1 (1-u)f''(B(t_{k-1}) + u\Delta B(k)(\Delta B(k))^2 du, \end{aligned}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(B(t)) - f(B(0)) &= \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \int_0^1 (1-u) \int_0^t f''(B(s))dsdu \\ &= \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \left(\int_0^t f'(B(s))ds \right) \left(\int_0^1 (1-u)du \right) \\ &= \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f'(B(s))ds. \end{aligned}$$

■

Observación 2.3.6 Si $f : [0, t] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con derivadas parciales continuas:

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

en este caso la fórmula de Itô tiene la forma siguiente:

$$f(t, B(t)) - f(0, B(0)) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B(s))dB(s) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds.$$

Teorema 2.3.7 Si $\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso de Itô como el definido en (2.15) y $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función con las características siguen-

tes: $f(\cdot, X) \in C'$ y $f(t, \cdot) \in C^2$. Entonces

$$Y(t) = f(t, X(t)), \quad t \geq 0,$$

es también un proceso de Itô y satisface la siguiente ecuación estocástica.

$$dY(t) = f_t(t, X(t))dt + f_X(t, X(t))d(X(t)) + \frac{1}{2}f_{XX}(t, X(t))d(X(t))^2.$$

Forma Integral

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f_X(s, X(s))\sigma(s, X(s))dW(s) + \int_0^t [f_t(s, X(s)) \\ &\quad + f_s(s, X(s))b(s, X(s)) + \frac{1}{2}f_{XX}(s, X(s))\sigma(s, X(s))^2]ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \\ d(X(t))^2 &= (b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t))^2, \\ &= \sigma(t, X(t))^2dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dY(t) &= f_t(t, X(t))dt + f_X(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{XX}(t, X(t))d(X(t))^2 \\ &= f_t(t, X(t))dt + f_X(t, X(t))[b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{XX}(t, X(t))\sigma(t, X(t))^2dt \\ &= f_t(t, X(t))dt + f_X(t, X(t))b(t, X(t))dt + f_X(t, X(t))\sigma(t, X(t))dW(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{XX}(t, X(t))\sigma(t, X(t))^2dt \\ &= [f_t(t, X(t)) + f_X(t, X(t))b(t, X(t)) + \frac{1}{2}f_{XX}(t, X(t))\sigma(t, X(t))^2]dt \\ &\quad + f_X(t, X(t))\sigma(t, X(t))dW(t) \end{aligned}$$

$$Y(t) = f(t, X(t)).$$

2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) son de gran importancia en las áreas aplicadas como biología, química y finanzas entre otras. Las EDE son usadas en la práctica para describir el movimiento de un sistema en función del tiempo, por ejemplo el cambio de capital en una inversión riesgosa. En esta sección se estudian métodos para simular EDE numéricamente mediante el método de Euler-Maruyama, para ecuaciones ordinarias deterministas. En particular se analiza la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano exponencial, la cual es usada en el modelo de Black-Scholes para modelar el movimiento del precio de un bien en el mercado de valores. En este caso se usa el método de Euler-Maruyama para simular a la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano exponencial.

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $B(t)$ el movimiento Browniano estándar con filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}$, entonces las ecuaciones diferenciales estocásticas son de la forma siguiente:

$$d(X(t)) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t), \quad (2.16)$$

definida para $t \in [0, T]$, donde $X(t)$ es algún proceso estocástico, donde $\mu(t, X(t)) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el coeficiente de tendencia y $\sigma(t, X(t)) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión.

La condición inicial es alguna variable aleatoria $X(0)$, \mathcal{F}_t -medible e independiente del proceso Browniano $B(t)$. Entonces las ecuaciones diferenciales estocásticas se interpretan mediante la ecuación siguiente:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(s). \quad (2.17)$$

Si los coeficientes de tendencia y de difusión satisfacen:

1. La condición de Lipschitz

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq k|x - y|^2.$$

2. La condición de crecimiento:

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq k(1 + |x|^2),$$

para alguna $k > 0$, entonces existe un proceso estocástico $X(t)$ adaptado, continuo y uniformemente acotado en el espacio $L^2(P)$, esto es:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E[X_t^2] < \infty,$$

además es único y es solución de (2.16) (véase [6]).

Estos resultados no establecen la forma de encontrar la solución de una ecuación estocástica dada, por tal motivo la fórmula de Itô es útil para hacer estos cálculos.

Este resultado establece que si $X(t)$ es un proceso de Itô dado por (2.16) y $f(t, x)$ es una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en x , entonces el proceso $Y(t) = f(t, X(t))$ es también un proceso de Itô y satisface la ecuación

$$dY(t) = f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2, \quad (2.18)$$

la aplicación de la ecuación anterior (2.18) hace uso de la siguiente tabla de *multiplicación de McKean*, que toma al proceso $X(t) = B(t)$.

\times	dt	$dB(t)$
dt	0	0
$dB(t)$	0	dt

Tabla 2

Ejemplo 2.4.1 *En este ejemplo se desea calcular la siguiente integral usando la ecuación (2.18).*

$$\int_0^t s dB(s) = tB(t) - \int_0^t B(s)ds.$$

Sea $X(t) = B(t)$ y la función $f(t, x) = tx$ entonces usando (2.18) se obtiene

$$d(f(t, B(t))) = f_t(t, B(t))dt + f_x(t, B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B(t))(dB(t))^2,$$

donde,

$$\begin{aligned} f_t(t, X(t)) &= x, \\ f_x(t, X(t)) &= t, \end{aligned}$$

$$f_{xx}(t, X(t)) = 0,$$

por lo cual, se tiene que

$$d(f(t, B(t))) = B(t)dt + tdB(t),$$

integrando:

$$\begin{aligned} f(t, B(t)) &= \int_0^t B(s)ds + \int_0^t sdB(s) \\ tB(t) &= \int_0^t B(s)ds + \int_0^t sdB(s), \end{aligned}$$

realizando un despeje a la ecuación se obtiene el resultado deseado

$$\int_0^t sdB(s) = tB(t) - \int_0^t B(s)ds.$$

Ejemplo 2.4.2 (*Movimiento Browniano Geométrico (MBE)*) Supóngase que el proceso $X(t)$ sigue una ley de movimiento dada por la ecuación estocástica

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad (2.19)$$

con condición inicial $X(0) = x_0 > 0$, donde μ y $\sigma > 0$ son constantes. El uso de esta ecuación es útil en finanzas para modelar el precio de algunos bienes que oscilan en los mercados financieros. Es posible resolver la ecuación (2.19) usando el método de igualación de coeficientes, para ello es necesario encontrar la función $f(t, B(t)) = X(t)$ que satisfaga las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 1. \mu f(t, x) &= f_t(t, x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, x) \\ 2. \sigma f(t, x) &= f_x(t, x) \end{aligned}$$

De la segunda ecuación diferencial se tiene que $\sigma f(t, x) = f_x(t, x)$ entonces $\frac{\partial f(t, x)}{f(t, x)} = \sigma \partial x$, al integrar se obtiene

$$\ln(f(t, x)) = \sigma x + f(t).$$

Por lo tanto, al resolver la segunda ecuación diferencial se obtiene

$$f(t, x) = e^{\sigma x + f(t)},$$

al sustituir el resultado anterior en la primera ecuación diferencial se tiene que:

$$\mu = \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2},$$

entonces $\frac{df(t)}{dt} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, esto es $f(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ por lo tanto:

$$X(t) = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)}.$$

Proceso conocido como movimiento Browniano Geométrico y también se le conoce como movimiento Browniano Exponencial.

El método de Euler-Maruyama

Una Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) de la forma

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad X(0) = X(0), \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde f y g son funciones y la condición inicial $X(0)$ es una variable aleatoria. Esta ecuación puede ser descrita en forma integral como:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.20)$$

se desea discretizar la ecuación (2.20) en i subintervalos, es decir se tiene que

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X(s))ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(X(s))dW(s). \quad (2.21)$$

El método de Euler Maruyama utiliza la siguiente aproximación para las integrales de la forma $\int_a^b f(x)dx$.

Sea f una función continua en un intervalo, por definición se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta_i x, \quad (2.22)$$

donde se considera la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, con $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, de esta forma la aproximación para la integral es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta_i x, \quad (2.23)$$

tomando un $\Delta_i x$ suficientemente pequeño, $f(x_{i-1}) \approx f(x_0)$. Por otro lado se tiene que el término

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta_i x &\approx f(x_0) \sum_{i=1}^n \Delta_i x \\ &= f(x_0) [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})] \\ &= f(x_0)(x_n - x_0) \\ &= f(x_0)(b - a). \end{aligned}$$

Este análisis puede extenderse también a integrales estocásticas, en particular para las integrales de la ecuación (2.21), si se supone una partición uniforme en la que $b - a = t_i - t_{j-1} = \Delta t$, en la cual se usa la aproximación anterior, así que la ecuación (2.21) se reescribe de la siguiente manera

$$X_i = X_{i-1} + f(X_{i-1})\Delta t + g(X_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})). \quad (2.24)$$

Ahora al aplicar el método de Euler Maruyama para la ecuación diferencial

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad (2.25)$$

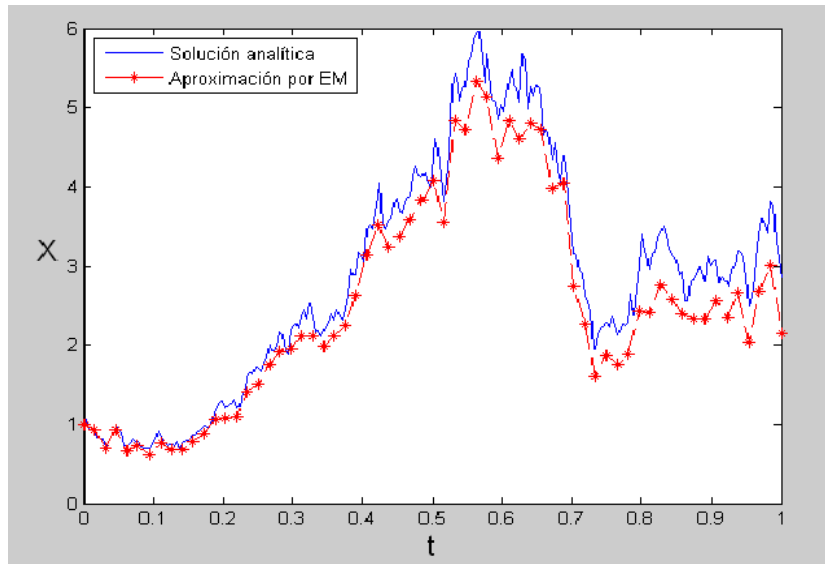
donde μ y σ son constantes reales; además $f(X) = \mu X$ y $g(X) = \sigma X$, la solución analítica de la EDE esta dada por

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \quad (2.26)$$

Lo que sigue es simular la trayectoria Browniana discreta sobre el intervalo $[0, 1]$, con $\Delta t = 2^{-8}$ y se evalúa en la solución (2.26), esta trayectoria se visualiza en la gráfica que aparece en la Gráfica 2.2. Al aplicar el método de EM se toma $\delta t = R\Delta t$ con $R = 4$. El método requiere el incremento $W(t_i) - W(t_{i-1})$, el cual esta dado por,

$$W(t_i) - W(t_{i-1}) = W(iR\Delta t) - W((i-1)R\Delta t) = \sum_{j=iR-R+1}^{iR} dW(j).$$

Se muestra a continuación la simulación gráfica de método Euler Maruyama para la solución de la ecuación diferencial (2.25) con $X(0) = 1$, $\mu = -0.00171337$ y $\sigma = 0.38595$. El programa detallado se encuentra en el Apéndice 3.



Gráfica 2.2

En esta sección se mostró la parte del cálculo estocástico que es necesario para continuar el desarrollo de la tesis, ya que es la base teórica en la cual se fundamenta la fórmula de Black-Scholes, resultado importante que considera el supuesto de que el precio subyacente sigue el proceso general de Itô. Por lo que a continuación se desarrolla el método Monte-Carlo, el cual es necesario ya que constituye una herramienta muy útil que simplificará varios cálculos, en particular para la valuación de opciones.

Capítulo 3

Método Monte-Carlo

El método Monte-Carlo es un procedimiento no determinístico que es usado para aproximar integrales definidas, para las cuales es difícil hallar su valor exacto. Dicho método data de la década de 1940 (véase [11],[3]) y se utilizó inicialmente para evaluar integrales múltiples definidas en física matemática. Hoy en día hay un resurgimiento de interés de este método, en particular en finanzas y en inferencia estadística (véase [11]). Una herramienta para implementar el método Monte Carlo es la simulación matemática. La simulación es usada para generar números aleatorios en el intervalo sobre el cual se encuentra definida la integral y de esta manera aproximar la integral mediante una suma. En general, la simulación puede ser apropiada cuando existe un problema que es muy difícil de resolver.

Dado que las simulaciones proporcionan una estimación de un parámetro de interés, siempre existe un error que constituye una parte importante en el análisis. En particular en la sección 3.2 se presentará un análisis del error de estimación.

A continuación, se proporciona una descripción del método Monte Carlo. Supóngase que se desea calcular la siguiente integral

$$I = \int_0^{\infty} x f(x) dx.$$

Usando las herramientas de teoría de probabilidades se puede identificar a la integral anterior con la esperanza de una variable aleatoria, X , no negativa y con densidad f ,

$$I = E_f[X].$$

Por la Ley de los Grandes Números (véase apéndice 2), se tiene que un buen estimador de I es la media aritmética de una muestra finita de variables aleatorias (X_1, X_2, \dots, X_n) , independientes, con función de densidad común f , es decir,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

entonces para cualquier $\epsilon > 0$,

$$P \{ |E[X] - \bar{X}| > \epsilon \} \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto se tiene que

$$\hat{I} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \approx I.$$

Además, \hat{I} es un estimador insesgado de I , es decir la $E[\hat{I}] = I$, la varianza de \hat{I} esta dada por

$$Var(\hat{I}) = \frac{Var_f(X)}{M},$$

y la desviación estándar de la muestra del estadístico I es

$$\sigma_f(\hat{I}) = \frac{\sigma_f(I)}{\sqrt{M}}.$$

3.1. Aplicación al Cálculo de Integrales

En esta sección se hará uso del método Monte-Carlo para el cálculo de integrales, para el cual se transformará cualquier integral sobre un intervalo $[a, b]$.

Sea G es una función continua, su valor esperado se puede estimar de la forma siguiente

$$\int_0^1 G(x) dx \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(X_i).$$

Para transformar cualquier integral sobre un intervalo $[a, b]$ a una integral sobre un intervalo $[0, 1]$ se hace el siguiente cambio de variable $x = a + (b-a)u$

con $dx = (b - a)du$ entonces

$$\int_a^b G(x)dx = (b - a) \int_a^b G(a + (b - a)u)du \approx \frac{(b - a)}{M} \sum_{i=1}^M G(a + (b - a)u_i),$$

con u_i variables aleatorias uniformes en el intervalo $[0, 1]$.

Similarmente, si se requiere evaluar la integral siguiente:

$$\int_0^\infty G(x)dx,$$

se debe aplicar la sustitución $u = \frac{1}{x+1}$, y se obtiene la identidad

$$\int_0^\infty G(x)dx = \int_0^1 h(u)du,$$

donde

$$h(u) = \frac{G\left(\frac{1}{u} - 1\right)}{u^2}.$$

A continuación se presentan algunos ejemplos donde se ilustra la metodología estudiada.

Ejemplo 3.1.1 *Considérese $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2.5}^{2.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$. Se usará MC para aproximar la integral, para ello se transforma el intervalo de integración al intervalo $[0, 1]$, mediante el cambio de variable*

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\ &= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{\frac{-(2.5u)^2}{2}} du \\ &\approx \frac{5}{M\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^M e^{\frac{-(2.5u_i)^2}{2}} = 1.14923 \end{aligned}$$

con una muestra de tamaño $M = 100$, el resultado no es bueno si se compara con el valor exacto de dicha integral, valor exacto 0.987581, pero si se incrementa la muestra M se observa que el valor se aproxima al valor exacto.

M	Aprox. Monte Carlo
100	1.14923
1000	0.994719
10000	0.986143
100000	0.987636

Tabla 3

El método Monte-Carlo es un método probabilístico en el cual el problema depende del tamaño de la muestra, este método es aplicable para el cálculo de integrales probabilísticas y determinísticas, estas últimas son para las integrales que no sean tan fáciles de calcular. A continuación se ejemplifican algunos de ellos.

Ejemplo 3.1.2 En este ejemplo se quiere calcular la siguiente integral

$$I = \int_{-2}^2 e^{x^2+x} dx.$$

se transforma la integral al intervalo $[0, 1]$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^2 e^{x^2+x} dx \\ &= 4 \int_0^1 e^{4u^2+2u} du \\ &\approx \frac{4}{M} \sum_{i=1}^M e^{4u_i^2+2u_i} = 76.3774 \end{aligned}$$

con una muestra de tamaño $M = 100$. Valor exacto 89.574.

M	Aprox. Monte Carlo
100	76.3774
1000	86.6964
10000	86.1813
100000	88.1156

Tabla 4

la mejor aproximación al valor exato es cuando M es muy grande.

Ejemplo 3.1.3 En este ejemplo se muestra el cálculo de la integral sobre intervalo $[0, \infty)$

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

se transforma la integral al intervalo $[0, 1]$, haciendo el cambio de variable siguiente

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{e^{-\frac{(1-u)^2}{2u^2}}}{u^2} du \\ &\approx - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{1-u_i}{u_i})^2}}{u_i^2}, \end{aligned}$$

los resultados que se obtiene al utilizar diferentes tamaños de muestra de M

M	Aprox. Monte Carlo
100	1 . 14746
1000	1 . 21902
10000	1 . 23868
100000	1 . 25245

Tabla 5

comparando los diferentes resultados que se obtiene utilizando Monte Carlo con el valor exacto de la integral 1 . 25331, se observa que la mejor aproximación es cuando el tamaño de la muestra es grande.

Para ver como se relaciona el error que se obtiene al elegir un tamaño M de la muestra, se verá lo siguiente.

3.2. Estimación del error

El teorema del Límite Central permite estimar el error que se comete al usar Monte-Carlo para estimar la integral. Sea

$$\begin{aligned} I &= E[G(X)], \\ \hat{I}_M &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i), \end{aligned}$$

entonces σ es la desviación estándar de $G(x)$, se tiene que $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ es la desviación estándar de \tilde{I}_M , por lo tanto

$$P\left(\left|I - \hat{I}_M\right| < \frac{k\sigma}{\sqrt{M}}\right) \approx P(|Z_M| < k) = 2\Phi(k),$$

donde $Z_M = \frac{(I - \tilde{I})}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}}$, $\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ y k se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo si se desea que la probabilidad sea 0.95 se selecciona $k = 1.96$. Así que el error que se comete al usar el método Monte-Carlo es aproximadamente $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$. Este resultado permite estimar un intervalo de confianza de $\alpha\%$. Para esto se selecciona k de tal manera que $\Phi(k) = \frac{\alpha}{2}$. De esta forma, con probabilidad α se puede asegurar que el valor exacto de la integral I está en el intervalo

$$\left[\hat{I} - \frac{k\sigma}{\sqrt{M}}, \hat{I} + \frac{k\sigma}{\sqrt{M}}\right].$$

El método Monte-Carlo converge lentamente por lo que no es competitivo con otros métodos para el cálculo de integrales en una variable, pero para el cálculo de integrales múltiples se vuelve un método muy eficiente (véase [12]).

Ejemplo 3.2.1 Para el ejemplo 3.1.1, en base a lo anterior, se calcula el error de estimación que se obtiene al usar Monte-Carlo, mas aún se muestra el intervalo de confianza en la que se puede asegurar entre que valores se encuentra el valor exacto de la integral. Se desea que la probabilidad sea $\alpha = 0.95$ así que se selecciona a $k = 1.96$ así que el error que se comete al usar Monte-Carlo es de

$$error = \frac{\sigma}{\sqrt{M}},$$

con diferentes valores de M se tiene

M	100	1000	10000	100000
$\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$	0,095	0,0300	0,0095	0,00300

Tabla 6

obsérvese que para valores grandes de M el error estándar se hace muy pequeño. Teniendo el valor del error de estimación, esto permite obtener el

intervalo de confianza de $\alpha\%$. Para ello se selecciona k de tal forma que $\Phi(k) = \frac{\alpha}{2}$. De esta manera podemos asegurar que con probabilidad α el valor de la integral exacta se encuentra dentro del intervalo de confianza

$$\left[\hat{I} - \frac{k\sigma}{\sqrt{M}}, \hat{I} + \frac{k\sigma}{\sqrt{M}} \right],$$

usando los diferentes valores de M se tiene los siguientes intervalos de confianza

M	$\left[\hat{I} - \frac{k\sigma}{\sqrt{M}}, \hat{I} + \frac{k\sigma}{\sqrt{M}} \right]$
100	(0.96303, 1.33543)
1000	(0.93591, 1.05351)
10000	(0.96752, 1.004763)
100000	(0.98175, 0.99351)

Tabla 7

Por lo que el ejemplo anterior muestra que una ventaja del uso del método Monte-Carlo es que se puede ver el valor exacto entre que valores se encuentra.

3.3. Integración Múltiple

En esta sección se mostrará la integración múltiple usando método Monte-Carlo. El uso de números aleatorios para la aproximación de integrales, comienza hacer útil para aproximar integrales de dimensiones altas. Supóngase que G es una función de dimensión n , y se quiere calcular

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 G(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

La clave que usa Monte-Carlo para estimar el valor de I , radica en el hecho de que I puede ser expresado mediante la esperanza siguiente:

$$I = E[G(U_1, U_2, \dots, U_m)],$$

donde U_1, U_2, \dots, U_m son variables aleatorias independientes, que se distribuyen de manera uniforme en $(0, 1)$. Por lo que si se genera k conjuntos independientes, cada uno consiste de m variables aleatorias independientes distribuidas

uniformemente.

$$\begin{array}{c} U_1^1, \dots, U_m^1 \\ U_1^2, \dots, U_m^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_1^k, \dots, U_m^k \end{array}$$

entonces las variables aleatorias $G(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i)$, para $i = 1, 2, \dots, k$, son independientes e idénticamente distribuidas con media I , usando nuevamente la ley de los grandes números para estimar I , es decir,

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n G(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i).$$

Ejemplo 3.3.1 Una aplicación para integrales múltiples es el cálculo aproximado del valor de π . Se recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2 , y por lo tanto π está dado por el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbb{I}_{\{x^2+y^2 < 1\}}(x, y) dx dy.$$

Si X y Y son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d), uniformes en $(-1, 1)$, ambas con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2}$, entonces su densidad conjunta será:

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{4}.$$

Si $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$, entonces

$$X = 2U_1 - 1 \quad Y = 2U_2 - 1,$$

verifican $X, Y \sim U(-1, 1)$ y se define

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

entonces

$$E[I] = P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4},$$

por lo tanto se estima $\frac{\pi}{4}$ mediante la generación de un gran número de pares de números aleatorios u_1, u_2 , y la estimación $\frac{\pi}{4}$, por la fracción de parejas para los que

$$(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \leq 1,$$

la estimación de π mediante la generación de números aleatorios, se realizó generando números de pares aleatorios y se utilizó el programa Mathematica para desarrollar la estimación de lo cual se obtuvo algunos resultados numéricos con distintos valores de M . La siguiente tabla muestra la aproximación de π .

M	100	1000	10000	100000
Valor π	3.04	3.108	3.1412	3.144

Tabla 8

el programa detallado se encuentra en el Apéndice 2.

Capítulo 4

Valuación de opciones por Monte-Carlo

Un problema que frecuentemente se encuentra en finanzas es el cálculo de instrumentos financieros cuyos rendimientos son aleatorios. Por ejemplo las inversiones en la bolsa o los derivados, cuyos rendimientos dependen del comportamiento de una acción o bien. La valuación de estos instrumentos se reduce al cálculo de una esperanza de una función continua de una variable aleatoria.

4.1. Conceptos Financieros

En esta sección se inicia definiendo algunos conceptos financieros, los cuales se usarán posteriormente. En particular, este trabajo se enfoca a opciones financieras.

Un *derivado* es un contrato que depende de alguna manera del precio de uno o más activos subyacentes. En finanzas, una *opción* es un derivado, es decir, es un contrato estandarizado en el cual el comprador, mediante el pago de la *prima*, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender el bien subyacente al precio pactado K , en un tiempo determinado T (fecha de expiración o fecha de ejecución) y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido. El comprador puede ejercer dicho derecho, según se haya acordado en el contrato respectivo.

A su vez para que el contrato sea justo para las dos partes, quien compra

la opción le paga a quien le suscribe una prima que le permitirá cubrirse contra futuras pérdidas, debidas a factores al cambio de precio del activo subyacente durante la vigencia de la opción. En particular la prima que se paga al adquirir la opción es equivalente al valor de la opción en el tiempo $t = 0$.

Precio subyacente es el precio actual del bien subyacente en el mercado. El cambio en el precio del bien subyacente en el mercado tiene influencia marcada en el precio de las opciones debido a que el flujo de efectivo depende directamente de la diferencia entre el precio subyacente y el precio pactado en los contratos.

Tasa de interés libre de riesgo es el rendimiento que proporciona alguna inversión ausente de riesgo. En México, los poseedores de Certificados de la Tesorería (CETE) tienen una inversión libre de riesgo porque el gobierno ampara y da garantía del título a los poseedores.

4.1.1. Tipos de Opciones

Opciones vainilla. Estas son el tipo de opciones básicas, más comunes en el mercado, en las que dependen del tipo de derecho que se den, y son del tipo *call* y *put*.

- *Opción Europea*, esta opción se ejerce sólo en la fecha de vencimiento.
- *Opción Americana*, este tipo de opciones pueden ejercerse en cualquier instante del periodo hábil comprendido entre el momento de negociar el contrato y la fecha de vencimiento.

Opciones exóticas. Estas opciones tienen características especiales que son mucho más complejas que las vainilla. En muchos casos, para la valuación se emplea la generación de números aleatorios, en base al método Monte-Carlo.

- *Opción asiática*, el cálculo del pago (payoff) depende de la media del valor del subyacente en un periodo determinado.
- *Opción con barrera*, estas pierden valor si el activo supera o baja de valor.
- *Opción Lookback*, su payoff depende del máximo o mínimo valor que haya tomado el subyacente.

- Otras: *peroni, Himalaya, binarias, Bermuda, etc.*

4.1.2. Estimación de la tendencia y volatilidad

La tendencia es la dirección en la cual se mueven los activos subyacentes, la causa por la cual existe esta tendencia es el equilibrio entre la compra y venta del activo. Es importante saber que los activos no se mueven en línea recta.

La *Volatilidad subyacente* representa el rango posible de movimientos en el precio subyacente, que posee para experimentar cambios dentro de cierto periodo. Estadísticamente es la dispersión del movimiento en el precio subyacente. Es una variable estocástica, por lo que no es posible predecir su comportamiento.

La tendencia y la volatilidad dependen del activo subyacente, para hallar la estimación de estas, se toma una muestra de los datos históricos de los precios diarios al cierre de los más recientes 90 hasta 180 días, esta muestra parece ser razonable.

El precio relativo se calcula mediante:

$$P_r = \frac{S_{i+1}}{S_i}. \quad (4.1)$$

El rendimiento diario es el logaritmo natural del precio relativo, por lo cual:

$$x_i = \ln(P_r) = \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right). \quad (4.2)$$

La media muestral de la variable aleatoria X está dada por:

$$\mu = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.3)$$

haciendo la sustitución de (4.2) en (4.3) se tiene la estimación de

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right). \quad (4.4)$$

La estimación insesgada de la varianza muestral de la variable X está dada por:

$$\text{var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2, \quad (4.5)$$

sustituyendo (4.2) y (4.4) en (4.5) se obtiene:

$$\sigma^2 = \text{var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right) - \mu \right)^2, \quad (4.6)$$

entonces la estimación de la volatilidad histórica es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right) - \mu \right)^2 \right]}, \quad (4.7)$$

Lo que se vio anteriormente fueron los conceptos básicos financieros en los cuales se tomará en particular las opciones Europeas tipo call y put, así que en adelante en ésta tesis se usarán los conceptos definidos.

4.2. Valuación de opciones.

Sea $S(t)$ el precio del activo en el tiempo $t \in [0, T]$ y K el precio de ejecución. El payoff es la función de pago, la cual representa la ganancia que obtiene, quien adquiere la opción, y ésta depende del valor del activo subyacente. El payoff para una opción Europea call es una función $V : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida como

$$V(S(t), t) = \max\{S(t) - K, 0\},$$

y para el caso de una opción Europea put,

$$V(S(t), t) = \max\{K - S(t), 0\}.$$

La primera formulación rigurosa y solución del problema de la valuación de una opción fue lograda por Black, Scholes y Merton (véase [7]).

Supóngase que el precio de la opción en el tiempo t puede escribirse como

$$V(S(t), t) = F(S(t), t), \quad (4.8)$$

$F \in C^2$. $S(t)$ es el precio del activo al tiempo t del bien subyacente B , donde

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu dt + \sigma dW, \\ dS(t) &= \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$S(0) = S_0, \text{ dado.}$$

Se considera un inversionista que construye un portafolio con tres activos subyacentes A, B y C un activo no riesgoso. Supóngase que C gana la tasa competitiva de rendimiento libre de riesgo $r(t)$. De esta manera el valor nominal del portafolio es

$$P(t) = S(t) \cdot N_1(t) + V(t) \cdot N_2(t) + Q(t),$$

donde $N_1(t)$ denota el número de acciones de B , $N_2(t)$ el número de acciones de A , y $Q(t)$ es el número de dinero invertido en el activo sin riesgo.

Por el lema de Itô ([6]) y usando (4.8) y (4.9), se obtiene

$$\begin{aligned} dV &= F_t dt + F_S dS(t) + \frac{1}{2} F_{SS} (dS(t))^2 \\ &= F_t dt + F_S (\mu S(t) dt + \sigma S(t) dW) + \frac{1}{2} F_{SS} [\mu S(t) dt + \sigma S(t) dW]^2 \\ &= F_t dt + F_S \mu S(t) dt + F_S \sigma S(t) dW \\ &\quad + \frac{1}{2} F_{SS} [\mu^2 S(t)^2 dt^2 + 2\mu\sigma S(t)^2 dt dW + \sigma^2 S(t)^2 dW^2] \\ &= F_t dt + F_S \mu S(t) dt + F_S \sigma S(t) dW + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma^2 S(t)^2 dt \\ &= \left(F_t + F_S \mu S(t) + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma^2 S(t)^2 \right) dt + F_S \sigma S(t) dW. \end{aligned}$$

El cambio en el valor nominal se obtiene derivando P , y suponiendo que $dN_1(t) = dN_2(t) = 0$, (condición de equilibrio propuesta por Black) más precisamente

$$dP = N_1(t) dS(t) + N_2(t) dV(t) + dQ(t). \quad (4.10)$$

Se puede escribir la ecuación (4.10) como sigue

$$\begin{aligned} dP &= N_1(t) [\mu S(t) dt + \sigma S(t) dW] \\ &\quad + N_2(t) \left[\left(F_t + F_S \mu S(t) + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma^2 S(t)^2 \right) dt + F_S \sigma S(t) dW \right] + rQ(t) dt \\ &= N_1(t) \mu S(t) dt + N_2(t) \left[F_t + F_S \mu S(t) + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma^2 S(t)^2 \right] dt \\ &\quad + (N_1(t) + N_2(t) F_S) \sigma S(t) dW + rQ(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[N_1(t)\mu S(t) + rQ(t) + N_2(t) \left[F_t + F_S\mu S(t) + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S(t)^2 \right] \right] dt \\
&\quad + (N_1(t) + N_2(t)F_S) \sigma S(t) dW. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

La condición de equilibrio

$$N_1(t) + N_2(t)F_S = 0 \quad \text{Var} \frac{dP}{P} = 0,$$

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

como

$$\begin{aligned}
P(t) &= S(t) \cdot N_1(t) + V(t) \cdot N_2(t) + Q(t) \\
&= -N_2(t)F_S S(t) + N_2(t) \cdot V(t) + Q(t) \\
&= N_2(t)(V(t) - F_S S(t)) + Q(t). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Por otro lado, sustituyendo la condición de equilibrio en (4.11), se obtiene

que

$$dP = rQdt + N_2(t) \left(F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S(t)^2 \right) dt.$$

La condición de equilibrio se puede escribir de la forma siguiente: si $N_2(t) = 1$,

$$\frac{dp}{P} = rdt,$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\frac{(F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S(t)^2)dt}{-F_S S(t) + V(t)} = rdt, \\
&\left(F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S(t)^2 \right) dt = rdt(-F_S S(t) + V(t)), \\
&\left(F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S(t)^2 \right) dt = rdt(-F_S S(t) + V(t)), \\
&F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S(t)^2 - r(V(t) - F_S S(t)) = 0. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

4.2.1. Opción Call Europea

Para el caso de una **opción Call Europea**, es decir, que sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento T , con un precio de ejercicio K . Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} F(S(t) = 0, t) &= 0, \\ F(S(t), t = T) &= \max\{S(t) - K, 0\}. \end{aligned}$$

Lo siguiente es hallar la solución de la ecuación (4.13), para ello se desea encontrar una función G que satisfaga lo siguiente

$$G_{XX} = G_Y.$$

De esta manera supóngase que

$$F(S(t), t) = e^{-rT} G(X, Y), \quad (4.14)$$

donde

$$X = X(S, t), \quad Y = Y(S, t) \quad T = T(t) = t^* - t,$$

derivando F se tiene que

$$F_S = e^{-rT} [G_X X_S + G_Y Y_S], \quad (4.15)$$

$$F_t = e^{-rT} [G_X X_t + G_Y Y_t] + rG(X, Y)e^{-rT}, \quad (4.16)$$

$$F_{SS} = e^{-rT} \left[\begin{aligned} &G_{XX} X_S^2 + G_{XY} X_S Y_S + G_{YY} Y_S^2 \\ &+ G_Y Y_{SS} + G_X X_{SS} + G_{YX} X_S Y_S \end{aligned} \right]. \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.15), (4.16) y (4.17) en la ecuación (4.13) se tiene que

$$\begin{aligned} &e^{-rT} [G_X X_t + G_Y Y_t] + rG(X, Y)e^{-rT} + rSe^{-rT} (G_X X_S + G_Y Y_S) \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 e^{-rT} \left[\begin{aligned} &G_{XX} X_S^2 + G_{XY} X_S Y_S \\ &+ G_{YY} Y_S^2 + G_Y Y_{SS} + G_X X_{SS} + G_{YX} X_S Y_S \end{aligned} \right] = 0, \end{aligned}$$

desarrollando la expresión

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 X_S^2 G_{XX} + \sigma^2 S^2 X_S Y_S G_{XY} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 Y_S^2 G_{YY} \\ &+ \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 X_{SS} + rS X_S + X_t \right] G_X + \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 Y_{SS} + rS Y_S + Y_t \right] G_Y = 0, \end{aligned}$$

Si $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 X_S^2 = 1$ y $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Y_{SS} + rSY_S + Y_t = 1$ entonces

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 X_S^2 - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Y_{SS} + rSY_S + Y_t \right) = 0,$$

$$\sigma^2 S^2 X_S Y_S = 0,$$

entonces

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Y_S^2 = 0,$$

por lo cual

$$Y_S = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 X_{SS} + rSX_S + X_t = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 X_S^2 + Y_t = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 X_{SS} + rSX_S + X_t = 0.$$

Sea

$$X(S, t) = \beta \ln(S) + \gamma T,$$

donde β y γ son constantes por determinar

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\beta^2}{S^2} - Y_t = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(-\frac{\beta}{S^2} \right) + rS \frac{\beta}{S} - \gamma = 0.$$

Si $\beta = 1$ se tiene que $Y_t = \frac{1}{2}\sigma^2$ entonces $Y = \frac{1}{2}\sigma^2 t \Big|_0^T$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 + r - \gamma = 0,$$

$$Y = \frac{1}{2}\sigma^2 T, \tag{4.18}$$

lo cual implica que

$$\gamma = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right).$$

Por lo tanto

$$X(S, t) = \ln S + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \quad (4.19)$$

se sabe que la condición de frontera está definida de la siguiente manera

$$F(S, t^* = t) = \max \{ S(t^*) - K, 0 \},$$

haciendo uso de (4.19) y evaluando en $t^* = t$ se obtiene que

$$X = X(S, t^* = t) = \ln S + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t^* - t^*),$$

entonces

$$X = \ln S,$$

en la ecuación (4.18) se hace la evaluación $t^* = t$

$$Y = Y(S, t^* = t) = \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto la ecuación (4.14) se escribe de la siguiente forma usando la sustitución correspondiente

$$F(S, t^*) = G(X, 0),$$

$$G(X, 0) = \max \{ e^X - K, 0 \}.$$

Para hallar la solución de G se usará del método de separación de variables. El objetivo de este método es llevar la Ecuación Homogénea de Segundo Orden de tipo parabólico a una del siguiente tipo:

$$G_{XX} + G_{YY} = 0,$$

$$G_{XX} - G_{YY} = 0,$$

$$G_{XX} - G_Y = 0.$$

Se supone que G es una función separable, es decir,

$$G(X, Y) = H(X) \cdot M(Y), \quad (4.20)$$

el sistema con la constante de separación es

$$G_{XX} = G_Y,$$

$$G_X = H'(X)M(Y),$$

$$G_{XX} = H''(X)M(Y),$$

$$G_Y = H(X)M'(Y),$$

$$\frac{H''(X)M(Y)}{H(X) \cdot M(Y)} = \frac{H(X)M'(Y)}{H(X) \cdot M(Y)},$$

entonces

$$\frac{H''(X)}{H(X)} = \frac{M'(Y)}{M(Y)} = k,$$

de la ecuación anterior se deducen las siguientes ecuaciones con su respectiva solución

$$H''(X) - kH(X) = 0 \quad \text{entonces} \quad H(X) = Ae^{-i\lambda X}$$

$$M'(Y) - kM(Y) = 0 \quad \text{entonces} \quad M(Y) = Be^{-\lambda^2 Y}$$

La solución es

$$G(X, Y) = AB e^{-i\lambda X - \lambda^2 Y},$$

$$G(X, Y) = C e^{i\lambda X - \lambda^2 Y}.$$

Utilizando el principio de superposición

$$\hat{G}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\lambda X - \lambda^2 Y} d\lambda. \quad (4.21)$$

Si $Y = 0$

$$f(X) = \hat{G}(X, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\lambda X} d\lambda,$$

entonces

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du,$$

sustituyendo en (4.21) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{G}(X, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\lambda u} du e^{i\lambda X - \lambda^2 Y} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-[i\lambda(u-X) + \lambda^2 Y]} du d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[i\lambda(u-X) + \lambda^2 Y]} d\lambda \right] du. \end{aligned}$$

Haciendo una factorización se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{G}(X, Y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(u-X)^2}{4Y}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Y}} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(u-X)^2}{4Y}} du,\end{aligned}$$

de lo cual se tiene que

$$f(u) = G(u, 0) = \max \{e^u - K, 0\} = e^u - K.$$

Si $e^u - K > 0$ entonces $u < \ln K$, haciendo la sustitución se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{G}(X, Y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Y}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^u - K) e^{-\frac{(u-X)^2}{4Y}} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Y}} \int_{\ln K}^{\infty} e^{u-\frac{(u-X)^2}{4Y}} du - \frac{K}{2\sqrt{\pi Y}} \int_{\ln K}^{\infty} e^{-\frac{(u-X)^2}{4Y}} du,\end{aligned}$$

simplificando se encuentra que,

$$\begin{aligned}F(S, t) &= e^{-rT} G(X, t) \\ &= S\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (4.22)\end{aligned}$$

El modelo de Black-Scholes para el precio de una opción es una función que depende de cinco variables: T tiempo de ejecución, S el precio del activo; σ^2 la tasa de variación instantánea en el precio de las acciones, K el precio de ejecución, y r la tasa de interés libre de riesgo, a diferencia de las otras variables la varianza debe ser estimada. A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran la ecuación (4.22).

Ejemplo 4.2.1 *A continuación se presenta un ejemplo en el cual se usará la solución de la ecuación de Black Scholes, para ello se usarán los valores de las acciones de IBM, en el periodo del 01/01/09 al 05/07/09. El 1 de Enero del 2009 el precio de la acción IBM fue \$86.62 (dólares). Se desea estimar el valor de la opción call con fecha de ejecución el 5 de Julio de 2009, con un precio de ejercicio \$87.00. La tasa de interés libre de riesgo es estimado usando los resultados de un periodo de un año, la subasta muestra una tasa de interés de 7.995% para US. Existen diferentes maneras de*

estimar la varianza, para ello se aplicará la fórmula (4.7), en este ejemplo se calcula la varianza usando los precios del activo al cierre del día durante el periodo del 1 de Enero 2009 al 5 de Julio del 2009 de una opción IBM con un precio de ejercicio de \$87.00 para solucionar una estimación de la varianza. Más específico una investigación numérica se utiliza para aproximar la desviación estándar en la fórmula de Black-Scholes con parámetros: precio de la acción $S = 86.62$, precio de ejercicio $K = 87$, tiempo de ejecución $T = 126/365 = 0.345$, tasa de interés $r = 0.08$. La desviación estándar aproximada es $\sigma = 0.02$. Usando (4.22) se hace los cálculos correspondientes y se obtiene que

$$\begin{aligned}
 F &= (86.62)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{86.62}{87}\right) + \left(0.08 + \frac{1}{2}(0.02)^2\right)(0.345)}{0.02\sqrt{0.345}}\right) \\
 &\quad - (87)e^{-(0.08)(0.345)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{86.62}{87}\right) + \left(0.08 - \frac{1}{2}(0.02)^2\right)(0.345)}{0.02\sqrt{0.345}}\right) \\
 &= (86.62)\Phi(1.98271) - (87)e^{-(0.08)(0.345)}\Phi(1.97097) \\
 &= (86.62)(0.9763) - (87)e^{-(0.08)(0.345)}(0.9756) \\
 &= 1.99741.
 \end{aligned}$$

De esta manera el precio de la opción call es de \$1.99741. Los cálculos se realizaron en el lenguaje Matlab, (véase Apéndice 3).

Ejemplo 4.2.2 En este ejemplo, se usarán los valores de las acciones de Microsoft Corporation, en un periodo de 90 días, el cual abarca del 12/10/09 al 12/02/10. Se desea estimar el valor de la opción call, el precio de la opción fue de 25.72 dólares, la fecha de ejecución fue 12 de febrero de 2010, con un precio de ejercicio 26.25 dólares. La tasa de interés libre de riesgo es estimado usando los resultados de un periodo de 13 semanas, la subasta muestra una tasa de interés de 0.7% para US. La desviación estándar se estima tomando los datos históricos de los valores de las acciones en el periodo de 90 días. Por tanto resumiendo los datos: precio de la acción $S = 25.72$, precio de ejecución $K = 26.25$, tiempo de ejecución $T = 0.246$, tasa de interés libre de riesgo $r = 0.7$, desviación estándar aproximada $\sigma = 0.01$ usando la

ecuación (4.22) se hacen los cálculos correspondientes y se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 F &= (25.72)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{25.72}{26.25}\right) + \left(0.7 + \frac{1}{2}(0.01)^2\right)(0.246)}{0.01\sqrt{0.246}}\right) \\
 &\quad - (26.25)e^{-(0.7)(0.246)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{25.72}{26.25}\right) + \left(0.7 - \frac{1}{2}(0.01)^2\right)(0.246)}{0.01\sqrt{0.246}}\right) \\
 &= (25.72)\Phi(30.6089) - (26.25)e^{-(0.7)(0.246)}\Phi(30.6039) \\
 &= (25.72)(1) - (26.25)e^{-(0.7)(0.246)}(1) \\
 &= 3.6225.
 \end{aligned}$$

De esta manera el precio de la opción call es de 3.6225 dólares.

4.2.2. Opción Put Europea

Para el caso de una **opción Put Europea**, las condiciones de frontera cambian a

$$F(S(t) = 0, t) = 0,$$

$$F(S(t), t = T) = \max\{K - S(t), 0\},$$

y de manera análoga como se hizo en una opción call, se halla la solución y se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 F(S, t) &= e^{-rT}G(X, t) \\
 &= Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - S\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.3 Para visualizar la valuación de una opción Europea tipo put, se tomaron la información de la empresa INTEL Corporation en un periodo de 90 días, con precio de la acción de $S = 20.40$ dólares, en el periodo del 12/Octubre/2009 al 12/Febrero/2010 tomando a $T = 0.246$, con precio de ejercicio de $K = 22$ dólares, la desviación estándar aproximada es de $\sigma = 0.01$, y tasa de interés libre de riesgo $r = 0.04$. Con esta información

y usando (4.23) se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 F &= (22)e^{-(0.07)(0.246)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{20.40}{22}\right) + \left(0.04 - \frac{1}{2}(0.01)^2\right)(0.246)}{0.01\sqrt{0.246}}\right) \\
 &\quad - (20.40)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{20.40}{22}\right) + \left(0.04 + \frac{1}{2}(0.01)^2\right)(0.246)}{0.01\sqrt{0.345}}\right) \\
 &= (22)e^{-(0.07)(0.246)}\Phi(-13.2374) - (20.40)\Phi(-13.2423) \\
 &= 1.3846.
 \end{aligned}$$

De esta manera el valor de la opción tipo put es 1.3846 dólares.

Ejemplo 4.2.4 Un ejemplo más para estimar el valor de una opción Europea tipo put, se consideran los siguientes datos: $S = 80$, $K = 82$, $T = 0.345$, $r = 0.07$ y $\sigma = 0.12$. De esta manera el valor del put es de

$$\begin{aligned}
 F &= (82)e^{-(0.07)(0.345)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{80}{82}\right) + \left(0.07 - \frac{1}{2}(0.12)^2\right)(0.345)}{0.12\sqrt{0.345}}\right) \\
 &\quad - (80)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{80}{82}\right) + \left(0.07 + \frac{1}{2}(0.12)^2\right)(0.345)}{0.12\sqrt{0.345}}\right) \\
 &= (82)e^{-(0.07)(0.345)}\Phi(0.728202) - (80)\Phi(0.657718) \\
 &= (82)(0.976139)(0.766755) - (80)(0.7446403) \\
 &= 2.2714.
 \end{aligned}$$

4.2.3. Aplicación del Método Monte-Carlo a la valuación de opciones Europeas: Call y Put

Para el caso de Opciones Europeas Call, el uso del Método Monte-Carlo, como se ha mencionado en secciones anteriores, es de gran ayuda para el cálculo de integrales, en esta sección es una herramienta importante para el cálculo de la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= E[\max\{S(t) - k\}] \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_{z_0}^{\infty} \left[S(t)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+z\sigma\sqrt{T-t}} - k \right] \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

aplicando el Método Monte-Carlo se tiene que

$$E[\max\{S(t) - k\}] \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max\{S_i(t) - k\},$$

es decir

$$E[\max\{S(t) - k\}] \approx \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{i=1}^M \left(S(t) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+z_i\sigma\sqrt{T-t}} - k \right), \quad (4.25)$$

con z_i una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno. Para generar cada z_i , existen métodos numéricos para la generación de variables aleatorias normales estándar, en este caso se utiliza una función `NormalDistribution` en Mathematica, pero existen diferentes funciones que generan, por mencionar alguna, en Maple dicha función es `STDNORM()`. En el siguiente apartado se expone el algoritmo para generar la aproximación de (4.25) y un intervalo de confianza de 95 %.

Algoritmo de Monte-Carlo para valorar una opción

Para hallar el valor de una opción al tiempo $t = 0$, es decir $V(0)$, dado $S(0)$, k , r , σ y T se realiza lo siguiente.

1. Se inicializan las variables $S_1 = S_2 = 0$ y se calcula la expresión $e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+z_i\sigma\sqrt{T-t}}$ con z_i una normal con media 0 y varianza 1.
2. Para cada trayectoria i , con $i = 1, 2, \dots, M$, se realizan los pasos siguientes:

a) Se genera una variable aleatoria z_i normal estándar y se calcula:

$$Xa_i = S(0) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+z_i\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$Xb_i = S(0) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)-z_i\sigma\sqrt{T-t}}.$$

b) Se calcula $\frac{\max\{Xa_i - k, 0\} + \max\{Xb_i - k, 0\}}{2}$ y el promedio de

3. Se calcula $e^{-r(T-t)} \frac{S_1}{M}$.

4. Se determina el intervalo de confianza del 95 %.

A continuación se presentan algunos ejemplos en los cuales se dan resultados numéricos para la valuación de opciones call y put, utilizando el algoritmo de Monte-Carlo para distintos valores de M . La estimación de Monte-Carlo del precio de una opción Europea call y put es simulado en el software Mathematica, el programa detallado del algoritmo se encuentra en el Apéndice(3).

Ejemplo 4.2.5 *Los valores utilizados en este ejemplo son $S = 86.62$, $K = 87$, $T = 0.345$, $r = 0.08$ y $\sigma = 0.02$. El valor estimado usando la solución de la ecuación de Black-Scholes (4.22) del call es de 1.99741. Los siguientes resultados muestran los valores que se obtienen usando Monte-Carlo para distintos valores de M .*

M	Call	Lím. Inferior	Lím. Superior	error estándar
100	2.02337	1.99536	2.05137	0.0142898
1000	2.00188	1.99777	2.006	0.00209824
10000	1.99865	1.99754	1.99977	0.000567178
100000	1.99889	1.99851	1.99927	0.00019202

Tabla 9

la tabla muestra la estimación del valor de la opción europea call.

Ejemplo 4.2.6 *Tomando la información del ejemplo (4.2.2), precio de la acción $S = 25.72$, precio de ejecución $K = 26.25$, tiempo de ejecución $T = 0.246$, tasa de interés libre de riesgo $r = 0.07$, desviación estándar aproximada $\sigma = 0.01$. Usando método Monte-Carlo para este ejemplo se tienen los siguientes resultados:*

M	Call	Lím. Inferior	Lím. Superior	error estándar
100	3.62241	3.62235	3.62246	0.0000280064
1000	3.62245	3.62242	3.62247	0.0000129852
10000	3.62247	3.62246	3.62247	1.41835×10^{-6}
100000	3.62247	3.62247	3.62247	4.49183×10^{-7}

Tabla 10

Se observa que entre mayor es el número de M , se aproxima más al valor del call que se cálculo en el ejemplo (4.2.2), el cual fue 3.6225.

Ejemplo 4.2.7 Para el caso de un put con los datos: $S = 80$, $K = 82$, $T = 0.345$, $r = 0.07$ y $\sigma = 0.12$. El valor exacto del put es 2.2714. Así que la siguiente tabla muestra las estimaciones del valor de la opción put, que se obtienen con Monte-Carlo para diferentes valores de M .

M	Put	Lím. Inferior	Lím. Superior	error estándar
100	2.26074	1.9807	2.54077	0.142876
1000	2.37468	2.27564	2.47371	0.0505264
10000	2.28556	2.25522	2.31591	0.0154836
100000	2.27568	2.26594	2.28542	0.00497

Tabla 11

Ejemplo 4.2.8 Nuevamente con la información del ejemplo (4.2.3), se desea estimar el valor de la opción Europea put, usando Monte-Carlo, para ello se tiene estos datos: precio de la acción de $S = 20.40$ dólares, tomando a $T = 0.246$, con precio de ejercicio de $K = 22$ dólares, la desviación estándar aproximada es de $\sigma = 0.01$, y tasa de interés libre de riesgo $r = 0.04$. En el ejemplo (4.2.3) el put que se obtuvo fue de 1.3846 dólares. Ahora en este ejemplo se obtienen los siguientes resultados con diferentes valores de M :

M	Put	Lím. Inferior	Lím. Superior	error estándar
100	1.38455	1.38446	1.38463	0.00004152
1000	1.38457	1.38455	1.38459	0.0000111561
10000	1.38458	1.38457	1.38459	3.50158×10^{-6}
100000	1.38458	1.38458	1.38459	1.10857×10^{-6}

Tabla 12

Capítulo 5

Conclusiones

En la presente tesis se desarrolló la teoría necesaria para valorar opciones financieras, se contempló en el primer capítulo el estudio de conceptos básicos de la teoría de probabilidad, así como algunos resultados importantes sobre procesos estocásticos. Después se hizo un bosquejo de la construcción del movimiento Browniano y se analizó algunas propiedades de este proceso. En el mismo capítulo se definió la integral de Itô y se ejemplificó esta fórmula en algunos casos particulares. Finalmente, se presentó un breve estudio de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, en particular, se hizo una simulación del movimiento browniano geométrico por medio del método de Euler-Maruyama.

En el tercer capítulo se presentó una herramienta muy importante de la tesis, el método Monte Carlo (MC). MC es un método no determinístico o estadístico numérico, que proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos basado en la generación de números aleatorios. En la tesis fue usado para aproximar una esperanza por medio de la media muestral de una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

En el cuarto capítulo se analizó la solución analítica de la ecuación diferencial de Black-Scholes para la valuación de opciones financieras, en particular se trabajó con opciones Europeas: call y put. Se mostraron algunos ejemplos en los cuales se utilizó la solución de Black-Scholes para los datos obtenidos de la empresa IBM, dicha solución muestra el precio de la opción call y put. También se aplicó el método Monte-Carlo en la valuación de las opciones en los ejemplos mencionados.

Para un trabajo posterior se deja la valuación de opciones Exóticas, dentro

de estas se puede hacer el análisis para las opciones Asiáticas: call y put, en este caso la función de pago (payoff) depende del promedio del precio del activo subyacente, así como dejar fijo el precio de ejercicio, análogamente se deja fijo el precio del activo y se hace depender del promedio del precio de ejercicio.

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Apéndice 1: Procesos Estocásticos

6.1.1. Espacios L^p

Sea (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de medida. Se define la siguiente clase de funciones:

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \int |u(x)|^p d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

Observación 6.1.1 L^p , $p \geq 1$ denota el espacio de variables aleatorias con p -ésimo momento finito es decir,

$$E[u(x)^p] < +\infty.$$

En L^p se define para $u \in L^p$,

$$\|u(x)\|_p := \left(\int |u(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty).$$

Se muestra que $\|\cdot\|_p$ es una seminorma, ya que cumple las condiciones de seminorma no-negativa, homogeneidad y desigualdad triangular para mostrar que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado, se requieren los siguientes lemas, para tal demostración puede consultarse en [13].

Lema 6.1.2 (*Desigualdad de Young*). Sean $p, q \in (1, +\infty)$ tales que: p, q son conjugados, es decir,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

entonces

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}, \quad A, B \geq 0.$$

Lema 6.1.3 (*Desigualdad de Hölder*). Sean $u \in L^p$, $v \in L^q$, tal que $p, q \in (1, +\infty)$ y son conjugados. Entonces $uv \in L^r$ y

$$\int |u(x)v(x)| d\mu(x) \leq \|u(x)\|_p \cdot \|v(x)\|_q.$$

Corolario 6.1.4 (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*). Sean $u \in L^2$, $v \in L^2$, entonces $u, v \in L^2$ y

$$\begin{aligned} \int |u(x)v(x)| d\mu(x) &\leq \|u(x)\|_2 \cdot \|v(x)\|_2 \\ &= \left(\int |u(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |v(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lema 6.1.5 (*Desigualdad de Mikowski*). Sean $u, v \in L^p$, $p \in [1, +\infty)$. Entonces

- a) $u + v \in L^p$.
- b) $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

Observación 6.1.6 L^p es un espacio vectorial $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in L^p$.

$$\int |\alpha u + \beta v|^p d\mu \leq |\alpha|^p \int |u|^p d\mu + |\beta|^p \int |v|^p d\mu < +\infty.$$

Para renombrar que $\|\cdot\|_p$ no es norma, se induce en L^p una relación de equivalencia de la forma siguiente

$$u \sim v \text{ si y solo si } \{u \neq v\} \subseteq N_\mu,$$

donde N_μ es conjunto nulo ($\mu(N_\mu) = 0$), de esta manera se define el espacio cociente

$$\mathcal{L}^p = L^p / \sim,$$

en el cual $[u] \in \mathcal{L}^p$ y para cada $[u] = \{v \mid u \sim v\}$.

Se definen

1. $[u] + [v] = [u + v]$.
2. $[ku] = k[u]$.
3. $\|[u]\|_p = \inf \left\{ \|w\|_p : w \sim u \right\} = \|u\|_p$.

De esta manera $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado.

6.1.2. Convergencia en L^p

Sea $\{u_n\} \subset \mathcal{L}^p$ se dice que $u_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} u$, (u_n converge a u en \mathcal{L}^p). Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_p = 0,$$

se recuerda que

$$\|u_n - u\|_p = \left(\int |u_n(x) - u(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty).$$

Observación 6.1.7 Si una sucesión $\{u_n\}$ es convergente a un límite u , u es único casi seguramente.

Observación 6.1.8 Si $\{u_n\} \subset \mathcal{L}^p$ tal que

a) $u_n(x) \rightarrow u(x)$, para cada $x \in X$.

b) $|u_n| \leq g$, $g \in \mathcal{L}^p$.

entonces

$$\left(\int |u_n - u|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

Lema 6.1.9 Si $u_n \rightarrow u$ en \mathcal{L}^p entonces $\{u_n\}$ es de Cauchy.

Lema 6.1.10 Si $\{u_n\} \subset \mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty)$ y $u_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} u_i \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_p.$$

Teorema 6.1.11 Si $\{u_i\} \subset \mathcal{L}^p$ es de Cauchy entonces $\{u_i\}$ es convergente en \mathcal{L}^p .

Finalmente se concluye que \mathcal{L}^p es un espacio completo.

6.2. Apéndice 2: Método Monte-Carlo

6.2.1. Ley de los Grandes Números

Teorema 6.2.1 (*Ley de los grandes números*). Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ . Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$,

$$P \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \epsilon \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

6.2.2. Integración Múltiple

El siguiente programa fue simulado haciendo uso del lenguaje Mathematica, en el cual se aproxima el valor de π , mediante la generación de números aleatorios. Random es una función que genera números aleatorios uniformes.

```

n = 1000; s = 0;
For[i = 1, i ≤ n, i ++, U1_i = Random[]]
For[i = 1, i ≤ n, i ++, U2_i = Random[]]
For[i = 1, i ≤ n, i ++,
  If[(2U1_i - 1)^2 + (2U2_i - 1)^2 ≤ 1, s = s + 1]]
Table[{U1_i, U2_i}, {i, 1, n}]
For[i = 1, i ≤ n, i ++,
  Print[(2U1_i - 1)^2 + (2U2_i - 1)^2]]
Print["π ", 4 s / n]
El resultado que se obtiene π ≈ 3.148

```

6.3. Apéndice 3: Valuación de opciones por Monte-Carlo

6.3.1. Simulación del Movimiento Browniano

La simulación del movimiento Browniano fue realizada en Matlab, la cual consiste en discretizar el intervalo $[0, 1]$ en N partes con $N \in \mathbb{N}$, se utiliza un generador de números aleatorios *randn* el cual produce números aleatorios independientes y distribuidos normalmente con media 0 y varianza 1. Para la forma de repetir el experimento es crear un conjunto de valores iniciales para

6.3. APÉNDICE 3: VALUACIÓN DE OPCIONES POR MONTE-CARLO75

el generador aleatorio el cual es `randn('state', n)`, los números que genera `randn` son multiplicados por \sqrt{dt} y son usados en los incrementos del ciclo `for`, para crear la cadena W .

```
randn('state',n)           %Conjunto de estados de rand
T=1; dt=T/N;
dW=zeros(1,N);            %Cadenas preasignadas
W=zeros(1,N);             %Para eficiencia
dW(1)=sqrt(dt)*randn;
W(1)=dW(1);
for j = 2:N
    dW(j)=sqrt(dt)*randn;   %Incremento general
    W(j)=W(j-1)+dW(j);
end
plot([0:dt:T],[0,W], 'r-')  %Gráfica W contra t
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotación',0)
```

6.3.2. Método de Euler-Maruyama en EDE lineales

La ecuación diferencial estocástica $dX = \mu X dt + \sigma X dW$, $X(0) = 1$, $\mu = 2$, $\sigma = 1$;

la trayectoria Browniana se hace mediante la discretización del intervalo $[0, 1]$, donde $dt = 2^{-8}$. La simulación fue realizada en el programa Matlab y se muestra a continuación:

```
randn('state',100)
mu=-.00171337; sigma=0.38595; Xzero=1;
T=1; N=2^8; dt=1/N;
dW=sqrt(dt)*randn(1,N); %Incrementos Brownianos
W=cumsum(dW);           %Trayectoria Browniana discreta
Xtrue = Xzero*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*W);
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue], 'b-'), hold on
R=4; Dt=R*dt; L=N/R;   %EM L pasos de tamaño DT = R*dt
Xem=zeros(1,L);        %Preasignados para eficiencia
Xtemp=Xzero;
for j = 1:L
    Winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
    Xtemp=Xtemp+Dt*mu*Xtemp + sigma*Xtemp*Winc;
    Xem(j)=Xtemp;
```

```

end
plot([0:Dt:T],[Xzero,Xem], 'r-*'), hold off
xlabel('t', 'FontSize', 16)
ylabel('X', 'FontSize', 16, 'Rotation', 0, 'HorizontalAlignment', 'right')
legend('Solución analítica', 'Aproximación por EM', 2)
emerr = abs(Xem(end)-Xtrue(end))

```

6.3.3. Opción Call Europea

El siguiente programa calcula el valor de una opción europea tipo call, considerando la fórmula de Black-Scholes. Matlab tiene una función *erf* que evalúa la función de error

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds.$$

```

S = 86.62; E = 87; T = 0.345;
r = 0.08; sigma = 0.02;
d1 = (log(S/E) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T));
d2 = d1 - sigma * sqrt(T);
N1 = 0.5 * (1 + erf(d1/sqrt(2)));
N2 = 0.5 * (1 + erf(d2/sqrt(2)));
value = S * N1 - E * exp(-r * T) * N2;
disp('Option value is'), disp(value)

```

El resultado que se genera es 1.9975.

6.3.4. Opción Put Europea

```

S = 86.62; E = 87; T = 0.345; r = 0.08; sigma = 0.02;
d1 = (log(S/E) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T));
d2 = d1 - sigma * sqrt(T);
N1 = 0.5 * (1 + erf(-d1/sqrt(2)));
N2 = 0.5 * (1 + erf(-d2/sqrt(2)));
value = E * exp(-r * T) * N2 - S * N1;
disp('Option value is'), disp(value)

```

El resultado que se genera es 2.2714.

6.3.5. Aplicación del Método Monte-Carlo a la valoración de una opción Europea

El procedimiento que se hace en el siguiente programa para una opción europea tipo call, genera m payoffs, donde x_0 es el precio del activo actual en el tiempo t y te es el tiempo de ejercicio de la opción.

```

m = 100; te = 126/252; t = 76/252; σ = 0,2; r = 0,05; k = 85; x0 = 100;
m1 = (r - 0,5 σ²)(te - t);
m2 = σ Sqrt[te - t];
disc = Exp[-r * (te - t)];
s1 = s2 = 0;
ndist = NormalDistribution[0, 1];
For[j = 1, j ≤ m, j ++, z = Random[ndist]; xa = x0 * Exp[m1 + m2 * z];
  xb = x0 * Exp[m1 - m2 * z]; payoffa = Max[xa - k, 0];
  payoffb = Max[xb - k, 0];
  payoff = (payoffa + payoffb)/2;
  s1 = s1 + payoff;
  s2 = s2 + payoff * payoff]
call = disc * s1/m;
std = disc * Sqrt[(s2 - s1²/m)/m/(m - 1)];
Print[call=" ", call]
Print[error estándar=" ", std]
Print[call - 1.96 * std, _, call + 1.96 * std]
```

Lo que se genera el programa

$$\text{call} = 15.9091,$$

$$\text{error estándar} = 0.0743838,$$

$$\text{intervalo de confianza } 95\% = (15.7633, 16.0549).$$

Bibliografía

- [1] R. B. Ash and Doléans-Dade C. A. Probability and Measure Theory. Academic Press Elsevier, San Diego, 2005.
- [2] J. A. Climent Hernández. Valuación de opciones. Vínculos Matemáticos No. 38. 2005, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [3] P. Glasserman. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer, 2004.
- [4] D. J. Higham. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. SIAM Review, Vol. 43, No. 3, 2001.
- [5] D. J. Higham. NineWays to Implement the Binomial Method for Option Valuation in MATLAB. SIAM Review, Vol. 44, No. 4, 2002.
- [6] H. Kuo, Introduction to Stochastic Integration. Springer Science-Business Media, Inc. 2006.
- [7] A. G. Malliaris. Itô's calculus in finance decision making. SIAM Review, Vol. 25. No. 4, 1983.
- [8] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag Heidelberg New York, Fifth Edition, 2000.
- [9] S. M. Ross. Simulation. Elsevier Academic Press, 2006.
- [10] S. M. Ross. An Introduction Mathematical Finance. Cambridge University Press, 1999.
- [11] R. Y. Rubinstein. Simulation and the Monte Carlo Method, with applications in finance and MCMC. John Wiley&Sons, Ltd, 2007.

- [12] P. Saavedra Barrera, V. H. Ibarra Mercado, El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.
- [13] R. L. Schilling. Measures, Integrals and Martingales. Cambridge University 2005.
- [14] Shiryaev, Albert Nikolaevich. Probability
- [15] I. M. Sóbol. Método de Monte-Carlo. Mir Moscú, segunda edición, 1983.