20 de septiembre de 2010

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones entre individuos con reglas específicas y llevar a cabo procesos de decisión. Los fundamentos de la Teoría de Juegos fueron establecidos por John Von Neumann en 1928, y expuestos en el libro *Theory of games and economic behaviour* [13], que publicó junto a Oskar Morgenstern en 1944.

La Teoría de Juegos se encarga del estudio de estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos. En un juego, varios agentes buscan maximizar su utilidad eligiendo determinadas acciones. La mayoría de las situaciones estudiadas por la teoría de juegos implican conflictos de intereses y estrategias. De particular interés son las situaciones en las que se puede obtener un resultado mejor cuando los agentes cooperan entre sí, que cuando los agentes intentan maximizar sólo su utilidad.

Un caso particular son los juegos de suma cero los cuales describen una situación en la que la ganancia o pérdida de un jugador se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros jugadores, recibe este nombre ya que si se suma el total de las ganancias de los jugadores y se resta las pérdidas totales, el resultado es cero. Las estrategias óptimas para juegos de suma cero de dos jugadores suelen emplear estrategias minimax, una forma canónica de encontrar estas estrategias es el uso de programación lineal.

La programación lineal es un área de la teoría de optimización desarrollada desde la Segunda Guerra Mundial y es utilizada para encontrar el mínimo (o máximo) de una función lineal de varias variables sujetas a un conjunto de restricciones lineales. Un método de solución para los programas lineales fue propuesto por George Dantzig en 1940, llamado método simplex, el cual es usado eficazmente en problemas lineales que presentan varias variables y diversas restricciones lineales [4].

Por otro lado, la Teoría de Juegos es un área que actualmente ha sido empleada en diversas disciplinas, entre las cuales se encuentran: economía, ciencia política, biología y filosofía [10]. Sin embargo, economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en teoría de juegos. En economía los modelos de crecimiento económico son usados para optimizar sectores, los cuales poseen cierta cantidad de bienes con precios asignados de antemano [2]. Uno de los modelos más conocidos es el modelo input/output (insumo/producto).

Las tablas input/output son un instrumento estadístico por el que se divide la producción nacional entre los sectores que la han originado y los sectores que la han absorbido. La palabra inglesa output designa el producto que sale de una empresa o industria, mientras que los inputs son los factores o recursos que se requieren para realizar esa producción. Las tablas input/output nos muestran la producción total de cada sector productivo y cuál es el destino de esa producción: cuánto de lo producido lo adquiere el consumidor y cuánto es adquirido por cada uno de los demás sectores. Esta técnica de análisis fue desarrollada por el economista americano de origen ruso Wassily Leontief (1906-1999), que en el año 1973 obtuvo el premio Nobel de economía precisamente por haberlas ideado y desarrollado ([8], [12], [15]).

Además del modelo de Leontief, existe otro modelo de crecimiento económico muy conocido, el modelo de Von Neumann el cual fue propuesto en el año de 1945. Este modelo es de interés histórico porque en ese momento era el único modelo económico que podría ser usado para probar la existencia de puntos de equilibrio ([1], [3], [11]).

El propósito de esta tesis es realizar un análisis acerca de los conceptos básicos de la Teoría de Juegos de suma cero, y con base en estos hacer una aplicación a un modelo económico, el modelo input/output.

La tesis esta organizada de la forma siguiente: en el Capítulo 2 se dan las definiciones básicas de la Teoría de Juegos de suma cero como, el valor máximo y mínimo del juego, valor del juego, el punto silla en las estrategias puras con las cuales se obtendrán algunos resultados básicos, entre ellos el Teorema minimax de Von Neumann ([3], [14]). Posteriormente se analizarán las estrategias mixtas y juegos matriciales. La metodología usada para resolver estos juegos es programación lineal, con ella se determinarán las estrategias óptimas y el valor del juego.

En el Capítulo 3, se hará el análisis de un modelo de crecimiento económico, el modelo input/output ó modelo de Leontief, en el cual se dará un ejemplo de la economía mexicana con 18 sectores y se hará el desarrollo en base a esta teoría. También, se aplicarán las técnicas expuestas en el Capítulo 2 al modelo de crecimiento económico input/output de Von Neumann. Posteriormente se verá que una forma sencilla de resolverlo es usando la Teoría de Juegos. Finalmente se dará un ejemplo considerando 18 sectores de la economía mexicana del año 2003, en donde se aplicará la teoría desarrollada referente a Teoría de Juegos.

Capítulo 2

Juegos de suma cero

Un juego consiste en una serie de jugadores, un conjunto de estrategias (finitas) para cada jugador, y un pago (finito) que describe cuantitativamente los resultados de cada jugada del partido en función de la cantidad que cada jugador gana o pierde. Una estrategia para cada jugador describe lo que un jugador va a hacer en cada situación posible.

En este capítulo se darán definiciones básicas de los juegos de suma cero, se verán algunos ejemplos los cuales se resolverán de forma rápida con ayuda del programa MAPLE, se analizarán los juegos matriciales y por último se verán dos métodos sobre como formular un juego matricial a partir de un programa lineal en los cuales se desarrollarán dos ejemplos que se resolverán en MAPLE.

2.1. Preeliminares

El análisis de la Teoría de Juegos se realizará en este trabajo para dos jugadores, pero el desarrollo para n jugadores es similar. Se denotarán a los dos jugadores por los números romanos I y II. Se supondrá que el jugador I tiene una elección de n (n entero positivo) posibles estrategias y el jugador II tiene una elección de m (m entero positivo) posibles estrategias. El desarrollo del juego se describe de la forma siguiente, si el jugador I elige una estrategia, por ejemplo, la estrategia i, $i = 1, \ldots, n$, y el jugador II elige una estrategia j, $j = 1, \ldots, m$, entonces se lleva a cabo el juego y la recompensa a cada jugador se calcula.

En los juegos de suma cero el beneficio total para todos los jugadores del juego, en cada combinación de estrategias, siempre suma cero (en otras palabras, un jugador se beneficia solamente a expensas del otro), es decir si a_{ij} es la cantidad que recibe el jugador I, entonces II obtendrá $-a_{ij}$. Ambos jugadores quieren elegir estrategias que maximicen sus recompensas individuales. Ahora se tiene una colección de números $\{a_{ij}\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, lo cuales se podrán organizar en una matriz. A esa sucesión de números se le llamará la recompensa para el jugador I y la matriz es llamada la matriz del juego. En resumen se tiene:

Estrategias

$$JI : \{L_1, L_2, \dots, L_n\},$$

$$JII : \{U_1, U_2, \dots, U_m\}.$$

Matriz del juego

$$\begin{bmatrix} \mathbf{JI/JII} & \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \dots & \mathbf{U}_m \\ \mathbf{L}_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \mathbf{L}_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{L}_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{L}_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

En los juegos de suma cero cuando un jugador intenta maximizar su pago, a la vez está intentando minimizar el pago a su oponente.

Definición 2.1.1 *Una* estrategia pura *es aquélla en la cual no hay aleatorización en su implementación y/o selección.*

Cada jugador considera el peor resultado que puede conseguir con cada una de sus estrategias y después escoge la estrategia que le proporciona el mejor de los peores resultados.

Desde el punto de vista del jugador I para cada fila i, el jugador II selecciona la estrategia j^* que satisfaga

$$\min_{j \in \{1,\dots,m\}} a_{ij} = a_{ij^*}.$$

Así, el jugador I puede garantizar que por lo menos puede obtener:

$$\nu^- = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij},$$

donde, ν^- representa el Valor Mínimo del juego.

Ahora, se considera el punto de vista del jugador II, para cada columna j el jugador I selecciona la estrategia i^* que satisfaga:

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij} = a_{i^*j}.$$

El jugador II puede elegir por lo tanto su columna j tal que garantice una pérdida de no más de:

$$\nu^+ = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij},$$

ν^+ representa el Valor Máximo del juego.

De aquí ν^- representa la cantidad menor que el jugador I puede garantizar recibir y ν^+ representa la cantidad mayor que el jugador II puede garantizar perder. Esta descripción deja en claro que se debe tener que

$$\nu^- \leq \nu^+.$$

A continuación se verificará éste resultado. Para alguna columna j se sabe que para cualquier fila fija i, $\min_{j\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij} \leq a_{ij}$, tomando máximos de ambos lados sobre las filas, se obtiene que

$$\nu^- = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij} \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij}.$$

Esto es cierto para cualquier columna $j \in \{1,\ldots,m\}$. El lado izquierdo es un número independiente de la fila y la columna que se elija.

Además se tiene que $\nu^- \leq \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij} = \nu^+$, con lo cual se concluye que $\nu^- \leq \nu^+$.

Definición 2.1.2 *Se define el* valor del juego *como el valor común a* ν^+ *y* ν^-*, es decir,*

$$\nu^+ = \nu^- := \nu.$$

De esta manera la estrategia óptima es una pareja (i^*, j^*) tal que:

$$\nu = a_{i^*j^*}.$$

Definición 2.1.3 *La pareja (i^*, j^*) es un* punto silla *en las estrategias puras del juego, si*

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Proposición 2.1.4 *Un punto silla existe si y solo si $\nu^+ = \nu^-$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Se sabe que

$$\nu^- \leq \nu^+,$$

de esta manera sólo es necesario probar que

$$\nu^+ \leq \nu^-.$$

Como

$$\nu^+ = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*},$$

$$\nu^- = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij} \geq \min_j a_{i^*j},$$

se tiene que

$$\nu^+ \leq \max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j} \leq \nu^-.$$

De lo cual se deduce que

$$\nu^+ \leq \nu^-,$$

de esta forma

$$\nu^+ = \nu^-.$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis

$$\nu^+ = \nu^- = a_{i^*j^*}$$

$$\nu^+ = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij} = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij} = \nu^- = a_{i^*j^*},$$

es decir,

$$\nu^- = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij},$$

y

$$\nu^+ = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \min_{j \in \{1,\ldots,m\}} a_{ij}.$$

Entonces

$$a_{ij^*} \leq \max_i a_{ij^*} = \nu^+ = a_{i^*j^*},$$

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}. \tag{2.1}$$

Por otro lado,

$$a_{i^*j^*} = \nu^- = \min_{j \in \{1,\ldots,m\}} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} a_{ij} \leq \min_{j \in \{1,\ldots,m\}} a_{i^*j} \leq a_{i^*j},$$

$$a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}. \tag{2.2}$$

Por (2.1) y (2.2) se concluye que (i^*, j^*) es un punto silla. ■

En la práctica el cálculo de ν^+ y ν^- se puede llevar a cabo de forma computacional. En particular, en este trabajo se ha usado el software MAPLE (ver [7]).

A continuación se presentan dos ejemplos particulares, pero las órdenes de MAPLE pueden ser modificadas para permitir cualquier otro juego matricial.

Ejemplo 2.1.5 *Considere la siguiente matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

para determinar el valor máximo y mínimo del juego matricial asociado a la matriz anterior, se usarán las siguientes órdenes del software MAPLE.

```
> with(LinearAlgebra);
> A := Matrix([[.5, .6, .8], [.4, .5, .9], [.2, .7, .5]]);
> rows := 3; cols := 3;
> vu := min(seq(max(seq(A[i, j], i = 1 .. rows)), j = 1 .. cols));
> vl := max(seq(min(seq(A[i, j], j = 1 .. cols)), i = 1 .. rows));
```

De lo cual se obtiene que $\nu^- = 0.5$ *y* $\nu^+ = 0.5$*, lo cual muestra que hay un punto silla en las estrategias puras.*

Ejemplo 2.1.6 *Ahora se tiene la siguiente matriz*

$$\begin{bmatrix} 0.30 & 0.25 & 0.20 \\ 0.26 & 0.33 & 0.28 \\ 0.28 & 0.30 & 0.33 \end{bmatrix}$$

con las mismas órdenes del ejemplo anterior se obtiene que $\nu^- = 0.28$ *y* $\nu^+ = 0.30$*. De lo cual se concluye que no hay un punto silla en las estrategias puras. Las órdenes usadas son las siguientes:*

> with(LinearAlgebra);

> A := Matrix([[.30, .25, .20], [.26, .33, .28], [.28, .30, .33]]); > rows := 3; cols := 3;

> vu := min(seq(max(seq(A[i, j], i = 1 .. rows)), j = 1 .. cols));

> vl := max(seq(min(seq(A[i, j], j = 1 .. cols)), i = 1 .. rows));

La definición del punto silla se puede dar en términos de funciones definidas en espacios euclidianos, como a continuación se observa.

Definición 2.1.7 *Sean* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $D \subseteq \mathbb{R}^m$ *(cerrados y acotados). Sea* $f : C \times D \to \mathbb{R}$ *una función continua.*

a) Un punto silla (x^*, y^*) satisface que

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y),$$

para todo $x \in C, y \in D$.

b) Se define el valor máximo y mínimo para el juego, definido por la función f (llamado juego continuo), por

$$\nu^+ = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y),$$

$$\nu^- = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y).$$

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la Teoría de Juegos de suma cero y es extremadamente usado en muchas ramas de las matemáticas.

Teorema 2.1.8 *(Von Neumann) Sea $f : C \times D \to \mathbb{R}$ una función continua, sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $D \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos no vacíos, convexos, cerrados y acotados. Supóngase que $x \longmapsto f(x, y)$ es cóncava y $y \longmapsto f(x, y)$ es convexa. Entonces*

$$\nu^+ = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y) = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y) = \nu^-.$$

es decir, existe un punto silla.

Demostración. Se consideran los siguientes conjuntos para $x \in C$ y $y \in D$

$$B_x = \left\{ y^0 \in D \mid f(x, y^0) = \min_{y \in D} f(x, y) \right\},$$

$$A_y = \left\{ x^0 \in C \mid f(x^0, y) = \max_{x \in C} f(x, y) \right\},$$

Primero se demostrará que los conjuntos B_x y A_y son conjuntos no vacíos, cerrados y convexos.

Observemos que para cada $x \in C$, existe $y^0 \in B_x$, debido a que la función f es continua y el conjunto D es cerrado y acotado (compacto) entonces f alcanza su mínimo y^0, lo cual implica que B_x es no vacío. Análogamente para el conjunto A_y.

Cerradura: Para demostrar que B_x es cerrado se verá que si $\{y_n\} \subset B_x$ tal que $y_n \to y^0$ entonces $y^0 \in B_x$. Como para cada n, $y_n \in B_x$ entonces

$$f(x, y_n) = \min_{y \in D} f(x, y),$$

para todo $n \geq 1$, cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} f(x, y_n) = \min_{y \in D} f(x, y)$$

$$f(x, y^0) = \min_{y \in D} f(x, y)$$

Así, $y^0 \in B_x$, análogamente se demuestra la cerradura para el conjunto A_y.

Convexidad: Para probar que A_y es convexo sean $x_1^0, x_2^0 \in A_y$, y $\lambda \in [0, 1]$. Se debe demostrar que $\lambda x_1^0 + (1 - \lambda) x_2^0 \in A_y$. Como $x_1^0, x_2^0 \in A_y$ se tiene que

$$f(x_1^0, y) = \max_{x \in C} f(x, y),$$

y

$$f(x_2^0, y) = \max_{x \in C} f(x, y).$$

Por hipótesis se tiene que C es convexo, lo cual implica que, $\lambda x_1^0 + (1-\lambda) x_2^0 \in C$ entonces

$$f(\lambda x_1^0 + (1-\lambda) x_2^0, y) \leq f(x_1^0, y) = \max_{x \in C} f(x, y), \tag{2.3}$$

y

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1^0 + (1-\lambda) x_2^0, y) &\geq \lambda f(x_1^0, y) + (1-\lambda) f(x_2^0, y) \\ &= \max_{x \in C} f(x, y), \end{aligned} \tag{2.4}$$

de (2.3) y (2.4) se obtiene que

$$f(\lambda x_1^0 + (1-\lambda) x_2^0, y) = \max_{x \in C} f(x, y) \in A_y,$$

se concluye que

$$\lambda x_1^0 + (1-\lambda) x_2^0 \in A_y.$$

Similarmente se demuestra la convexidad para el conjunto B_x.

Considérese la función siguiente

$$g : C \times D \to A_y \times B_x$$

la multifunción g satisface la propiedad de semicontinuidad superior, requerida por el teorema de Kakutani (ver [5]).

A continuación se demuestra que la multifunción $g(x, y) = A_y \times B_x$ es no vacía, cerrada y convexa:

Se demostrará que $A_y \times B_x$ es cerrado, es decir, si $(x_n, y_n) \in A_y \times B_x$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ entonces $(x, y) \in A_y \times B_x$.

Como $x_n \in A_y$, $y_n \in B_x$ entonces $x \in A_y$, $y \in B_x$, por tanto $(x, y) \in A_y \times B_x$ por definición de producto cartesiano.

Para probar que $A_y \times B_x$ es convexo, se necesita mostrar que si (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in A_y \times B_x$, $\lambda \in [0, 1]$ entonces $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in A_y \times B_x$.

Se tiene que x_1, $x_2 \in A_y$, y_1, $y_2 \in B_x$. Por ser A_y convexo

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A_y, \tag{2.5}$$

y como B_x es convexo

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in B_x, \tag{2.6}$$

de (2.5) y (2.6) se obtiene que:

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in A_y \times B_x \ .$$

Por el teorema de Kakutani, existe $(x^*, y^*) \in C \times D$ tal que

$$(x^*, y^*) \in g(x^*, y^*) = A_{y^*} \times B_{x^*} \ ,$$

es decir, $x^* \in A_{y^*}$, $y^* \in B_{x^*}$. Si $x^* \in A_{y^*}$

$$f(x^*, y^*) = \max_{x \in C} f(x, y^*),$$

y si $y^* \in B_{x^*}$

$$f(x^*, y^*) = \min_{y \in D} f(x^*, y).$$

Así:

$$\begin{aligned} \nu^+ &= \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y) \leq \max_{x \in C} f(x, y^*) \\ &= f(x^*, y^*) \\ &= \min_{y \in D} f(x^*, y) \\ &\leq \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y) = \nu^-, \end{aligned}$$

de esta forma

$$\nu^+ \leq \nu^-.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\nu^- \leq \nu^+,$$

por lo tanto,

$$\nu^- = \nu^+ = f(x^*, y^*).$$

■

2.2. Estrategias Mixtas

En los juegos sin punto silla, si un jugador descubre la estrategia elegida por el otro, este último puede salir perjudicado. Por ello, lo ideal es mantener la elección de las estrategias a seguir, fuera del alcance del oponente. Una forma de conseguir esto consiste en seleccionar las estrategias al azar. Es decir, mezclar las estrategias de acuerdo con alguna distribución de probabilidad en el conjunto de las estrategias puras del jugador.

Definición 2.2.1 *Una* estrategia mixta *para un jugador es una distribución de probabilidad en el conjunto de sus estrategias puras, para el jugador I es un vector $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ con las características siguientes:*

a)
$$0 \leq x_i \leq 1$$

b)
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

donde $x_i \equiv P_I$(el jugador I selecciona la estrategia i), $i = 1, 2, ..., n$. Análogamente para el jugador II, en este caso $y_j \equiv P_{II}$(el jugador II selecciona la estrategia j), $j = 1, 2, ..., m$.

Se denotará el conjunto de estrategias mixtas con k componentes por

$$S_k \equiv \left\{ (z_1, z_2, \ldots z_k) \middle| z_i \geq 0, i = 1, 2 \ldots, k, \sum_{i=1}^{k} z_i = 1 \right\}.$$

En esta terminología una estrategia mixta para el jugador I es algún elemento $X \in S_n$ y para el jugador II algún elemento $Y \in S_m$. Ahora, si el jugador usa estrategias mixtas el pago puede ser calculado sólo en el sentido esperado. En forma más precisa:

Definición 2.2.2 *Dada una elección de la estrategia mixta $X \in S_n$ para el jugador I y $Y \in S_m$ para el jugador II , elegidas independientemente, el pago esperado para el jugador I es*

$$\begin{aligned} E(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \Pr(I \text{ elija } i \text{ y } II \text{ elija } j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} P_I(I \text{ elija } i) P_{II}(II \text{ elija } j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = XAY^T, \end{aligned}$$

en un juego de suma cero el pago esperado para el jugador II sería $-E(X, Y)$.

Definición 2.2.3 *El pago mínimo y máximo del juego para estrategias mixtas están dados por*

$$\nu^+ = \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} E(X,Y)$$

$$\nu^- = \max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} E(X,Y).$$

Definición 2.2.4 *Un* punto silla *en una estrategia mixta es una pareja* (X^*, Y^*) *que satisface*

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y),$$

para todo $X \in S_n$, $Y \in S_m$.

Teorema 2.2.5 *Si* $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ *entonces* $\nu^+ = \nu^-$.

Demostración. La prueba de este resultado se basa en el teorema 2.1.8, en este caso se identifican sus componentes de la forma siguiente:

$$f(X,Y) = E(X,Y),$$

$C = S_n$ y $D = S_m$.

Entonces se tendrá que demostrar que $f(X,Y) = E(X,Y)$ es una función continua, también que $C = S_n$ y $D = S_m$ son conjuntos convexos, cerrados y acotados, y finalmente que $X \longmapsto f(X,Y)$ es cóncava y $Y \longmapsto f(X,Y)$ es convexa.

Claramente puede observarse que la función de pago $E(X,Y)$ es continua, ya que es una forma bilineal.

Ahora se prueba que $C = S_n$ es un conjunto convexo, es decir, se tiene que demostrar que $\lambda X + (1-\lambda)Y \in S_n$, con $\lambda \in [0,1]$, X y $Y \in S_n$. Equivalentemente, es necesario probar que $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = 1$.

Sean X, $Y \in S_n$, por la definición 2.2.1

$$0 \leq x_i \leq 1, \tag{2.7}$$

y

$$0 \leq y_i \leq 1, \tag{2.8}$$

también se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \tag{2.9}$$

Por (2.7), (2.8) y como $\lambda \in [0,1]$, se tiene

$$0 \leq \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \leq 1,$$

luego por (2.9)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + (1-\lambda) y_i) \\ = \; & \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda + (1-\lambda) = 1, \end{aligned}$$

de esta manera se tiene que $\lambda X + (1-\lambda) Y \in S_n$, con lo cual se concluye que $C = S_n$ es un conjunto convexo. De forma análoga se demuestra que $D = S_m$ es convexo.

Para ver que $D = S_m$ es cerrado se demostrará que si $\left\{y^k\right\} \subset S_m$ tal que $y^k \to y \in \mathbb{R}^n$ entonces $y \in S_m$.

Como $y^n \in S_m$, para todo $n \geq 1$ con

$$y^n = (y_1^n, y_2^n, \ldots, y_m^n) \to (y_1, y_2, \ldots, y_m) = y,$$

$$0 \leq y_j^n \leq 1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^n = 1,$$

para todo $j = 1, 2 \ldots, m$. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ en las relaciones anteriores se tiene que

$$0 \leq y_j \leq 1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1.$$

Por lo tanto, $y \in S_m$. De forma análoga se prueba que $C = S_n$ es cerrado.

Ahora se probará que $C = S_n$ es acotado, por la definición 2.2.1 se tiene que

$$S_n \equiv \left\{ (x_1, x_2, \ldots x_n) \middle| 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2 \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\} \subseteq [0,1]^n$$

donde $[0,1]^n = [0,1] \times \ldots \times [0,1]$, por lo tanto S_n está acotado. De manera análoga se prueba para $D = S_m$.

Finalmente, se demuestra que $X \longmapsto f(X,Y) = E(X,Y)$ es cóncava es decir, que $f(\lambda X + (1-\lambda)\overline{X}, Y) \geq \lambda f(X,Y) + (1-\lambda) f(\overline{X}, Y)$ y $Y \longmapsto f(X,Y) = E(X,Y)$ es convexa, ésto significa que $f(X, \lambda Y + (1-\lambda)\overline{Y}) \leq \lambda f(X,Y) + (1-\lambda) f(X, \overline{Y})$.

Entonces, como

$$f(X,Y) = E(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
& f(X\lambda + (1-\lambda)\overline{X}, Y) \\
= \; & f(\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (1-\lambda)(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n), (y_1, y_2, \ldots, y_m)) \\
= \; & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\overline{x}_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)\overline{x}_2, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda)\overline{x}_n, (y_1, y_2, \ldots y_m)) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\lambda x_i + (1-\lambda)\overline{x}_i\right] a_{ij} y_j \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda x_i a_{ij} y_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\overline{x}_i a_{ij} y_j \\
= \; & \lambda f(X,Y) + (1-\lambda) f(\overline{X}, Y).
\end{aligned}$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema 2.1.7 se concluye que $\nu^+ = \nu^-$.
■

Observación 2.2.6 *El valor del juego es denotado por* $\nu(A) = \nu^+ = \nu^- = X^* A Y^{*T}$, *donde* (X^*, Y^*) *es un punto silla.*

Definición 2.2.7 *Suponga que el jugador I selecciona una estrategia pura*

$$JI \rightarrow i,$$

(donde la notación anterior, significa que el jugador I usa la estrategia pura i) $1 \leq i \leq n$. Si el jugador II usa la estrategia mixta $Y \in S_m$, i.e.

$$JII \to Y.$$

Entonces el pago generado se define por

$$E\left[i, Y\right] = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j := A_i Y^T,$$

donde $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})$. Similarmente, si el jugador II decide usar la estrategia pura j $(1 \leq j \leq m)$ y el jugador I una estrategia aleatorizada se tiene que el pago generado es

$$E\left[X, j\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} := X A_j.$$

donde $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^T$.

Lema 2.2.8 *Sea $r \in \mathbb{R}$ y $X \in S_n$, si*

$$E[X, j] \geq r,$$

para todo $j \in \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ entonces

$$E[X, Y] \geq r,$$

para todo $Y \in S_m$.

Demostración. Por la definición 2.2.7 se tiene que

$$E\left[X, j\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij},$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq r,$$

para todo $j \in \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \geq r y_j,$$

al sumar sobre j se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \geq r \sum_{j=1}^{m} y_j = r.$$

De esta manera se obtiene que

$$E\left[X,Y\right] \geq r.$$

■

Teorema 2.2.9 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ con valor del juego $\nu\left(A\right)$. Sean $r \in \mathbb{R}$, $X^* \in S_n$ y $Y^* \in S_m$. Entonces*

(a) Si $r \leq E\left(X^*, j\right)$ para toda j entonces $r \leq \nu\left(A\right)$.

(b) Si $r \geq E\left(i, Y^*\right)$ para todo i entonces $r \geq \nu\left(A\right)$.

(c) Si $E\left(i, Y^*\right) \leq r \leq E\left(X^*, j\right)$ para todo i, j entonces $r = \nu\left(A\right)$ y $r = E(X^*, Y^*)$, además (X^*, Y^*) es un punto silla.

(d) Una estrategia X^* para el jugador I es óptima si y sólo si $\nu\left(A\right) = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X^*, j)$. Una estrategia Y^* para el jugador II es óptima si y sólo si $\nu\left(A\right) = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} E\left(i, Y^*\right)$.

Demostración.

(a) Se supondrá que

$$r \leq E\left(X^*, j\right) = X^* A_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^* a_{ij},$$

para toda $j = 1, 2, \ldots, m$. Sea $Y^0 = (y_j) \in S_m$ una estrategia mixta óptima para el jugador II. Multiplicando en ambos lados por y_j y sumando sobre j se obtiene que

$$r = \sum_{j=1}^{m} y_j r \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i^* a_{ij} y_j = X^* A Y^{0T} = E(X^*, Y^0) \leq \nu\left(A\right),$$

de esta forma resulta que

$$r \leq \nu\left(A\right).$$

(b) Similarmente al (a) se supondrá que

$$r \geq E\left(i, Y^{*}\right) = A_{i} Y^{*T} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{j}^{*},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $X^{0} = (x_{i}) \in S_{n}$ una estrategia mixta óptima para el jugador I. Multiplicando en ambos lados por x_{i} y sumando sobre i se obtiene que

$$r = \sum_{i=1}^{n} x_{i} r \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{i} a_{ij} y_{j}^{*} = X^{0} A Y^{*T} = E(X^{0}, Y^{*}) \geq \nu\left(A\right),$$

de esta forma resulta que

$$r \geq \nu\left(A\right).$$

(c) En este caso se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{j}^{*} \leq r \leq \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{*} a_{ij},$$

entonces

$$E(X^{*}, Y^{*}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i}^{*} a_{ij} y_{j}^{*} \leq \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{*} r = r \tag{2.10}$$

y

$$E(X^{*}, Y^{*}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i}^{*} a_{ij} y_{j}^{*} \geq \sum_{j=1}^{m} y_{j}^{*} r = r. \tag{2.11}$$

Por (2.10) y (2.11)

$$r = E(X^{*}, Y^{*}).$$

Ahora se tiene que

$$E(i, Y^{*}) \leq E(X^{*}, Y^{*}) \leq E(X^{*}, j),$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y para toda $j = 1, 2, \ldots, m$. Se tomará cualquier estrategia $X \in S_{n}$ y $Y \in S_{m}$ y usando el Lema 2.2.8, se obtiene que

$$E(X, Y^{*}) \leq E(X^{*}, Y^{*}) \leq E(X^{*}, Y),$$

de esta forma (X^{*}, Y^{*}) es un punto silla y $\nu(A) = E(X^{*}, Y^{*}) = r$.

(d) $\Rightarrow$) Primero se demostrará la siguiente identidad

$$\min_{Y\in S_m} E(X,Y) = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j),$$

para algún $X \in S_n$ fijo, ya que cada estrategia pura es también una estrategia mixta. Se tiene que

$$\min_{Y\in S_m} E(X,Y) \leq \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j). \tag{2.12}$$

Sea

$$a = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j).$$

Entonces

$$0 \leq \min_{Y\in S_m} \sum_{j=1}^{m} (E(X,j) - a)\, y_j = \min_{Y\in S_m} E(X,Y) - a,$$

En consecuencia se tiene que

$$\min_{Y\in S_m} E(X,Y) \geq a, \tag{2.13}$$

de (2.12) y (2.13) se concluye que

$$\min_{Y\in S_m} E(X,Y) = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j).$$

Usando la definición de $\nu(A)$, se tiene que

$$\nu(A) = \max_{X\in S_n} \min_{Y\in S_m} E(X,Y) = \max_{X\in S_n} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j).$$

Si X^* es óptima para el jugador I, entonces

$$\nu(A) = \max_{X\in S_n} \min_{Y\in S_m} E(X,Y) \leq \min_{Y\in S_m} E(X^*,Y) = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X^*,j),$$

por lo tanto

$$\nu(A) \leq \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X^*,j). \tag{2.14}$$

Luego

$$\nu(A) = \max_{X\in S_n} \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j) \geq \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X,j),$$

en particular

$$\nu(A) \geq \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X^*, j), \tag{2.15}$$

de (2.14) y (2.15) se tiene que

$$\nu(A) = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X^*, j).$$

$\Leftarrow$) Por otro lado, si

$$\nu(A) \leq \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} E(X^*, j),$$

entonces

$$\nu(A) \leq E(X^*, j),$$

para toda columna $j \in \{1, \ldots, m\}$, y por lo tanto

$$\nu(A) \leq E(X^*, Y),$$

para todo $Y \in S_m$, debido al Lema 2.2.8. De esta forma se tiene que X^* es óptima para el jugador I. Análogamente para el jugador II.

■

Propiedades de las estrategias óptimas (2.16)

1. Si r es cualquier número real tal que $E(i, Y) \leq r \leq E(X, j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, donde X es una estrategia para el jugador I y Y es una estrategia para el jugador II, entonces $r = \nu(A)$ y (X, Y) es un punto silla.

2. Si X es una estrategia para el jugador I y $\nu(A) \leq E(X, j)$, $j = 1, \ldots, n$, entonces X es óptima para el jugador I. Si Y es una estrategia para el jugador II y $\nu(A) \geq E(i, Y)$, $i = 1, \ldots, m$, entonces Y es óptima para el jugador II.

3. Si Y es óptima para el jugador II y $y_j > 0$, entonces $E(X, j) = \nu(A)$ para cualquier estrategia X óptima mixta para el jugador I. Similarmente, si X es óptima para el jugador I y $x_i > 0$, entonces $E(i, Y) = \nu(A)$ para cualquier Y óptima para el jugador II.

4. Si X es cualquier estrategia óptima para el jugador I y $E(X,j) > \nu(A)$ para cualquier columna j, entonces para cualquier estrategia óptima Y para el jugador II, se tendrá que $y_j = 0$. Similarmente, si Y es cualquier estrategia óptima para el jugador II y $E(i,Y) < \nu(A)$, entonces cualquier estrategia óptima X para el jugador I, se tendrá que $x_i = 0$.

5. Si cualquier estrategia óptima Y para el jugador II, $y_j = 0$, entonces existe una estrategia óptima X para el jugador I tal que $E(X,j) > \nu(A)$. Si cualquier estrategia óptima X para el jugador I, $x_i = 0$, entonces existe una estrategia óptima Y para el jugador II tal que $E(i,Y) < \nu(A)$.

Cada jugador tiene exactamente dos estrategias, por lo que la matriz y las estrategias son

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\text{Jugador I: } X = (x, 1-x),$$

$$\text{Jugador II: } Y = (y, 1-y).$$

Para cualquier estrategia mixta se tiene que

$$E(X,Y) = XAY^T,$$

sustituyendo se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} E(X,Y) &= (x, 1-x) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} \\ &= xy(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + x(a_{12} - a_{22}) + y(a_{21} - a_{22}) + a_{22}. \end{aligned}$$

A continuación se escribirá un teorema que dará la solución a este juego.

Teorema 2.2.10 *En un juego* 2×2 *con matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

supóngase que no hay estrategias puras óptimas. Sean

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},$$

y

$$y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},$$

entonces $X^* = (x^*, 1 - x^*)$, $Y^* = (y^*, 1 - y^*)$ *son estrategias mixtas óptimas para los jugadores* I *y* II *respectivamente. Además, el valor del juego es:*

$$\nu(A) = E(X^*, Y^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Observación 2.2.11

1. *La hipótesis principal que se necesita para poder utilizar las fórmulas del teorema anterior es que el juego no tenga punto silla puro. Si existe el punto silla puro, se puede encontrar directamente, de acuerdo a la siguiente relación* $\nu^+ = \nu^-$. *Una regla para usar las fórmulas anteriores es verificar que* $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0$, *pero como se supone que no hay estrategias puras óptimas, entonces la condición se cumple. En otras palabras, no es difícil comprobar que, si* $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$, *entonces* $\nu^+ = \nu^-$ *y eso contradice la suposición del teorema.*

2. *En su forma matricial las estrategias mixtas del teorema 2.2.10 se pueden escribir de la siguiente manera:*

$$X^* = \frac{(1\ 1)A^*}{(1\ 1)A^*\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}},$$

y

$$Y^* = \frac{A^*\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{(1\ 1)A^*\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}},$$

$$\nu(A) = \frac{\det(A)}{(1\ 1)A^*\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}},$$

donde

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

y

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Recordar que se tendrá que asegurar que la matriz no tiene estrategias puras óptimas. En el caso de que $det(A) = 0$, *el valor del juego es cero.*

Ejemplo 2.2.12 *En un juego con matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

primero se calculan los valores ν^+ y ν^- en las estrategias puras, se tiene que

$$\nu^+ = 1 < \nu^- = 2,$$

lo cual significa que no hay un punto silla en las estrategias puras, entonces se pueden ocupar las fórmulas del teorema 2.2.10 con las cuales se obtienen las siguientes estrategias mixtas

$$X^* = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right), \ Y^* = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right),$$

y el valor del juego

$$\nu(A) = \frac{3}{2}.$$

2.3. Juegos con matriz invertible

En esta sección se resolverá juegos matriciales en los cuales la matriz es cuadrada de dimensión n e invertible, es decir, A^{-1} existe y satisface $A^{-1}A = AA^{-1} = I_{n\times n}$.

Supóngase que el jugador I tiene una estrategia óptima que es completamente mixta, es decir, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, donde $x_i > 0$, para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. De esta forma el jugador I juega cada fila con probabilidad positiva, lo cual implica por (2.16), propiedad 3 que cada estrategia óptima Y para el jugador II, debe cumplir que

$$E(i, Y) = A_i Y^T = \nu(A), \tag{2.17}$$

para cada fila $i = 1, 2, \ldots, n$.

El jugador I jugará en contra de cualquier fila que le dé el valor del juego. Se tiene que $J_n = (1\ 1\ \ldots 1)$ es el vector fila con todas sus entradas iguales a 1, de esta forma (2.17) se podrá escribir como

$$AY^T = \nu(A) J_n^T = \begin{bmatrix} \nu(A) \\ \vdots \\ \nu(A) \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Si $\nu(A) = 0$, $AY^T = 0J_n^T = 0$, el cual es un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Como A es invertible, el sistema tiene una y sólo una solución $Y = A^{-1}0 = 0$, lo cual es imposible ya que Y es una estrategia (las componentes deben sumar 1). Lo cual implica que el valor del juego no puede ser cero, y se obtendrá al multiplicar en ambos lados de (2.18) por A^{-1}, la siguiente ecuación

$$A^{-1}AY^T = Y^T = \nu(A)A^{-1}J_n^T.$$

Si se conociera $\nu(A)$ se podría obtener el valor de Y. La pieza adicional de información que se tiene es que los componentes de Y suman 1 (es decir, $\sum_{j=1}^{n} y_j = J_nY^T = 1$). Así que

$$J_nY^T = 1 = \nu(A)J_nA^{-1}J_n^T,$$

por lo tanto,

$$\nu(A) = \frac{1}{J_nA^{-1}J_n^T},$$

y entonces

$$Y^T = \frac{A^{-1}J_n^T}{J_nA^{-1}J_n^T}.$$

Se ha encontrado el único candidato para la estrategia óptima para el jugador II suponiendo que cada componente de X es mayor que 0. Sin embargo, si resulta que esta fórmula para Y tiene al menos un $y_j < 0$, algo tendría que estar mal. Pero, si resulta que $y_j \geq 0$ para cada componente, se encontrará un X óptimo para el jugador I por el mismo método. De lo cual se obtiene que

$$X = \frac{J_nA^{-1}}{J_nA^{-1}J_n^T}.$$

Este método funciona si las fórmulas obtenidas para X y Y terminan satisfaciendo la condición de que son estrategias.

Lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 *Supóngase que*

1. $A_{n\times n}$ *tiene una inversa* A^{-1}.

2. $J_nA^{-1}J_n^T \neq 0$.

3. $\nu(A) \neq 0$.

Sea $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, *y*

$$\nu = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T}, Y^T = \frac{A^{-1} J_n^T}{J_n A^{-1} J_n^T}, X = \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T}.$$

Si $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *y* $y_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *se tiene que* $\nu = \nu(A)$ *es el valor del juego con matriz* A *y* (X, Y) *es un punto silla en las estrategias mixtas.*

Demostración. Se mostrará que (X, Y) es un punto silla y ν es el valor del juego asumiendo que $x_i \geq 0$, $y_j \geq 0$. Sea $Y' \in S_n$ cualquier estrategia mixta y sea X dada por la fórmula

$$X = \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T}.$$

Entonces, ya que $J_n Y'^T = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} E(X, Y') &= XAY'^T = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n A^{-1} A Y'^T \\ &= \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} J_n Y'^T \\ &= \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T} = \nu. \end{aligned}$$

Similarmente para algún $X' \in S_n$, $E(X', Y) = \nu$, de esta forma se tiene que $E(X', Y') = \nu$. Se concluye que (X, Y) es un punto silla y ν es el valor del juego por el teorema 2.2.9 c). ■

A fin de garantizar que el valor de un juego no es cero, se puede sumar una constante a cada elemento de la matriz del juego, de tal forma que sea lo suficientemente grande para lograr que todas las entradas de la matriz sean positivas. En este caso el valor del juego nuevo no podrá ser cero. Además se tiene que $\nu(A + bI_{n\times n}) = \nu(A) + b$, donde b es un número real. La validez de esta identidad es debido a que

$$\nu^+(A) = \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{a_{ij}\},$$

$$\begin{aligned}
\nu^{+}(A+bI_{n\times n}) &= \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{a_{ij}+b\} \\
&= \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{a_{ij}\}+b \right) \\
&= \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} (a_{ij})+b \\
&= \nu^{+}(A)+b.
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $\nu^{-}(A+bI_{n\times n})=\nu^{-}(A)+b$, por lo tanto, $\nu(A+bI_{n\times n})=\nu(A)+b$. Sumando la constante a todos los elementos de A las probabilidades de usar cualquier fila o columna no cambiarán.

Ejemplo 2.3.2 *Se tiene la siguiente matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

esta matriz tiene entradas positivas y negativas, por lo que es posible que el valor del juego sea cero. La matriz asociada al juego no tiene inversa porque el determinante de A es cero. Entonces se sumará una constante a todas las entradas de la matriz asociada al juego para hacer que la nueva matriz asociada al juego sea invertible. Como la entrada negativa más grande es -4, se sumará la constante 5 de lo cual se obtiene que:

$$A+5=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se verá que con los comandos del programa MAPLE es posible calcular el valor del juego y las estrategias mixtas de forma rápida, es claro que estos cálculos se pueden hacer usando las fórmulas del teorema anterior.

```
> restart; with(LinearAlgebra);
> A := Matrix([[0, 1, -2], [1, -2, 3], [-2, 3, -4]]);
> Determinant(A);
> A := MatrixAdd(ConstantMatrix(5, 3, 3), A);
> Determinant(A);
> B := 1/A;
```

> J := Vector[row]([1, 1, 1]);
> J.B. Transpose(J);
> v := 1/ (J.B.Transpose(J));
> X := v(J. B);*
> Y := v(B. Transpose(J));*

Con lo cual resultó que $\nu = 5$ *y las estrategias óptimas mixtas son* $X = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $Y = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. *Entonces el valor del juego original se obtiene restando la constante que se sumó en un principio, de lo cual se tiene que* $\nu = 0$.

2.4. Uso de la programación lineal en teoría de juegos

Desde que George B. Dantzig desarrolló el método simplex en 1947, la programación lineal se ha utilizado extensamente en el área militar, industrial, gubernamental y de planificación urbana, entre otras. Los matemáticos y economistas que trabajan en la Teoría de Juegos una vez que tuvieron conocimiento acerca del Algoritmo Simplex, reconocieron su relación con la Teoría de Juegos. Después de todo, un juego consiste en minimizar y maximizar funciones lineales con objetos lineales. Así, se desarrolló un método para formular un juego matricial como un programa lineal de modo que el Algoritmo Simplex podría aplicarse.

La programación lineal es un procedimiento matemático mediante el cual se resuelve un problema , formulado a través de funciones lineales sujetas a una serie de restricciones que se expresarán mediante un sistema de inecuaciones lineales, optimizando una función objetivo, también lineal.

Asociado con cada problema de programación lineal se tiene otro problema de programación lineal llamado el problema dual. El programa lineal dual posee muchas propiedades importantes relativas al programa lineal original.

Supóngase que el programa lineal primal está dado de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{c}\mathbf{x},$$

sujeto a

$$\mathbf{x}A \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0,$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $A_{n\times m}$ es una matriz de $n \times m$, y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

El problema principal busca minimizar una función lineal objetivo, $z(\mathbf{x}) = \mathbf{cx}$, sobre un conjunto de restricciones ($\mathbf{x}A \geq \mathbf{b}$) también lineales.

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\text{Maximizar } w = \mathbf{yb}^T,$$

sujeto a

$$A\mathbf{y}^T \leq \mathbf{c}^T, \ \mathbf{y} \geq 0.$$

Un resultado importante de programación lineal, es el llamado teorema de la dualidad ([3], [4]), el cual establece que si se resuelve el problema primal obteniendo el objetivo óptimo $z = z^*$ y resolviendo el dual obteniendo a su vez el óptimo $w = w^*$, entonces $z^* = w^*$, en la formulación de la teoría de juegos este teorema dirá que los valores de los objetivos dual y primal darán el valor del juego.

A continuación se analizarán dos métodos sobre como formular un juego matricial a partir de un programa lineal.

Primer método. Sea A la matriz del juego, se supondrá que $a_{ij} > 0$ en caso contrario se sumará una constante lo suficientemente grande a la matriz A. Como se vió en la Sección 2.3 el sumar una constante no cambia las estrategias. De esta forma se supone que el valor del juego $\nu = \nu(A) > 0$. El pago para el jugador I puede ser expresado de la forma siguiente:

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = \mathbf{x}A_j, \tag{2.19}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $j = 1, \ldots, m$. Como

$$\mathbf{x}A_j = E(X, j) \geq E(X^*, Y^*) = \nu,$$

se tiene que

$$\mathbf{x}A_j \geq \nu,$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

y, $0 \leq x_i \leq 1$. Sean

$$p_i = \frac{x_i}{\nu},$$

$1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)\,.$$

Como $\nu > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{\nu}.$$

Por lo tanto, maximizar ν es equivalente a minimizar $\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{\nu}$, con el cual se obtiene la función objetivo. Para las restricciones, se dividirán las igualdades de (2.19) por ν y se cambiarán a las nuevas variables, y así se obtendrá el conjunto de restricciones:

$$\frac{x_1}{\nu}a_{1j} + \ldots + \frac{x_n}{\nu}a_{nj} = p_1 a_{1j} + \ldots + p_n a_{nj} \geq 1,$$

para todo $j = 1, \ldots, m$.

Lo anterior se resumirá en el siguiente programa lineal.

$$\text{Programa para el jugador } I = \begin{cases} \text{Minimizar } z_1 = \mathbf{p}J_n^T = \sum_{i=1}^{n} p_i, \\ \qquad J_n = (1, 1, \ldots, 1) \\ \text{Sujeto a: } \mathbf{p}A \geq J_{n,} \qquad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

donde $\mathbf{0}$ $=(0, 0, \ldots, 0)^T$.

Una vez resuelto el programa para el jugador I, se tendrá la solución óptima $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ que minimice la función objetivo $z_I = \mathbf{p}J_n^T$, la cual dará la función objetivo mínima z_I^*. De esta forma se tiene que la estrategia X óptima para el jugador I y el valor del juego son:

$$v(A) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{1}{z_I^*} \text{ y } x_i = p_i\ \nu(A),$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Recordar también que si se suma una constante a la matriz para asegurar que $\nu(A) > 0$, entonces se tendrá que restar la misma constante para obtener el valor del juego original.

Ahora se resolverá el problema para el jugador II. El jugador II tiene las estrategias mixtas $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,$$

y, $0 \leq y_j \leq 1$, en este caso se tiene que

$$E(i, Y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = y_1 a_{i1} + \ldots + y_m a_{im} \leq \nu,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Sea

$$q_j = \frac{y_j}{\nu},$$

$1 \leq j \leq m$. Si $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, se puede reformular el problema para el jugador II como el problema estándar de la programación lineal.

$$\text{Programa para el jugador } II = \begin{cases} \text{Maximizar } z_{II} = \mathbf{q} J_m^T, \\ J_m = (1, 1, \ldots, 1), \\ \text{Sujeto a: } A\mathbf{q}^T \leq J_m^T, \quad \mathbf{q} \geq 0. \end{cases}$$

El problema del jugador II es dual al del jugador I, se tendrá la solución óptima $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ que maximice la función objetivo $z_{II} = \mathbf{q} J_m^T$ y el valor objetivo z_{II}^*. Se tiene que la estrategia Y óptima para el jugador II y el valor del juego son:

$$v(A) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} q_j} = \frac{1}{z_{II}^*} \text{ y } y_j = q_j \ \nu(A).$$

Ejemplo 2.4.1 *Se usará el primer método de la programación lineal y se encontrará una solución del juego con matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

es posible que el valor del juego sea cero ya que hay entradas negativas, se empezará por hacer las entradas de la matriz positivas sumando la constante 5 entonces se tiene que:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Para el jugador I se tiene las estrategias mixtas $X = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$, las cuales se encontrarán con el programa lineal. Sea $p_i = \frac{x_i}{\nu}$, el programa del jugador I es:

$$\text{Programa para el jugador } I = \begin{cases} \text{Minimizar } z_I = p_1 + p_2 + p_3 \\ \text{Sujeto a:} \\ 3p_1 + 7p_2 + 5p_3 \geq 1 \\ 6p_1 + 2p_2 + 7p_3 \geq 1 \\ 5p_1 + 4p_2 + 2p_3 \geq 1 \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Después de encontrar los valores para p_1, p_2 *y* p_3 *(ver (2.20)) , se fijará*

$$\nu = \frac{1}{z_I^*} = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3},$$

y entonces $\nu(A) = \nu - 5$ *es el valor del juego original con matriz* A, *y* ν *es el valor del juego con matriz* A'. *Entonces* $x_i = \nu(A)p_i$ *dará la estrategia óptima para el jugador* I.

Para el jugador II *se tienen las estrategias mixtas* $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{3} y_j = 1$, *las cuales se encontrarán con el programa lineal. Sea* $q_j = \frac{y_j}{\nu}$, *de esta forma el programa para el jugador* II *es:*

$$\text{Programa para el jugador } II = \begin{cases} \text{Maximizar } z_{II} = q_1 + q_2 + q_3 \\ \text{Sujeto a:} \\ 3q_1 + 6q_2 + 5q_3 \leq 1 \\ 7q_1 + 2q_2 + 4q_3 \leq 1 \\ 5q_1 + 7q_2 + 2q_3 \leq 1 \\ q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Después de haber creado el programa lineal para cada jugador, se resolverá el programa lineal con el método simplex del programa MAPLE. Para el jugador I *se usarán los siguientes comandos de MAPLE*

> with(simplex);

*> cnsts := {3*p[1]+7*p[2]+5*p[3] >= 1, 6*p[1]+2*p[2]+7*p[3] >= 1, 5*p[1]+4*p[2]+2*p[3] >= 1};*

> obj := p[1]+p[2]+p[3];

> minimize(obj, cnsts, NONNEGATIVE);

MAPLE da la siguiente solución para este programa

$$p_1 = \frac{7}{53}, p_2 = \frac{13}{159}, p_3 = \frac{1}{159} \text{ y } p_1 + p_2 + p_3 = \frac{35}{159}. \tag{2.20}$$

Se tiene que el valor del juego es

$$\nu = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} \Rightarrow \nu(A') = \frac{159}{35}.$$

Por lo tanto, la estrategia mixta óptima para el jugador I, sabiendo que $x_i = p_i\nu(A)$, es $X^* = (\frac{21}{35}, \frac{13}{35}, \frac{1}{35})$, y el valor del juego original es $\nu(A) = \frac{159}{35} - 5 = -\frac{16}{35}$.

Ahora se resolverá el programa para el jugador II. Usando los comandos de MAPLE

> with(simplex);

*> cnsts := {3*q[1]+6*q[2]+5*q[3] <= 1, 7*q[1]+2*q[2]+4*q[3] <= 1, 5*q[1]+7*q[2]+2*q[3] <= 1};*

> obj := q[1]+q[2]+q[3]

> maximize(obj, cnsts, NONNEGATIVE)

MAPLE da la solución

$$q_1 = \frac{13}{159}, p_2 = \frac{10}{159}, p_3 = \frac{4}{23} \text{ y } q_1 + q_2 + q_3 = \frac{35}{159}.$$

Se tiene otra vez que el valor del juego es

$$\frac{35}{159} = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu(A') = \frac{159}{35}.$$

De aquí la estrategia óptima para el jugador II es $Y^* = \frac{159}{35}(\frac{13}{159}, \frac{10}{159}, \frac{4}{23}) = (\frac{13}{35}, \frac{10}{35}, \frac{12}{35})$, y el valor del juego original es $\nu(A) = \frac{159}{35} - 5 = -\frac{16}{35}$.

Segundo método: En este método no es necesario hacer las transformaciones que se hicieron en el primer método con el fin de convertir un juego a un problema de programación lineal. En este método se dará una forma más simple y directa de resolver el problema.

Se sabe que el jugador I quiere elegir una estrategia mixta $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ con el fin de

$$\text{Maximizar } \nu$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^* = X^*A_j = E(X^*, j) \geq \nu,$$

para todo $j = 1, \ldots, m$, y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1,$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

El jugador I quiere obtener el mayor valor posible de ν tal que el pago esperado en contra de cualquier columna para el jugador II sea al menos ν. Por lo tanto, si se encuentra una solución del programa sujeto a las restricciones, este nos dará como resultado las estrategias óptimas para el jugador I y el valor del juego. Similarmente, el jugador II quiere elegir una estrategia $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ con el fin de

$$\text{Minimizar } \nu$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* = A_i Y^{*T} = E(i, Y^*) \leq \nu,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, y

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* = 1,$$

$y_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

La solución de este problema dual de programación lineal dará la estrategia óptima para el jugador II y el mismo valor del juego que se encontró para el jugador I. Se podrán resolver estos programas directamente sin necesidad de cambiar a nuevas variables. Dado que no se tiene que dividir por ν en la transformación, no es necesario asegurar que $\nu > 0$, y por lo tanto no es necesario sumar una constante a la matriz A. Esta formulación es mucho más fácil de hacer en MAPLE.

Ejemplo 2.4.2 *El siguiente ejemplo se resolverá usando el segundo método de la programación lineal con la siguiente matriz antisimétrica:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con las siguiente órdenes en MAPLE se encontrará el valor del juego y las estrategias óptimas para el jugador I y II.

```
> with(LinearAlgebra); with(simplex);
> A := Matrix([[0, -1, 1], [1, 0, -1], [-1, 1, 0]]);
> X := Vector(3, symbol = x);
```

```
> B := Transpose(X). A;
> cnstx := {seq(B[i] >= v, i = 1 .. 3), add(x[i], i = 1 .. 3) = 1};
> maximize(v, cnstx, NONNEGATIVE);
> Y := <y[1], y[2], y[3]>;
> B := A. Y;
> cnsty := {seq(B[j] <= v, j = 1 .. 3), add(y[j], j = 1 .. 3) = 1};
> minimize(v, cnsty, NONNEGATIVE);
```

Como A es antisimétrica se sabe de antemano que el valor del juego es cero. MAPLE da las siguientes soluciones para las estrategias mixtas:

$$X^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = Y^*,$$

y se puede observar que las estrategias son las mismas para ambos jugadores.

Capítulo 3

El modelo de insumo/producto

El modelo de insumo/producto (también conocido como input/output), desarrollado por Wassily Leontief en 1936 estudia la relación de dependencia entre los sectores productivos en los que se considera dividida la economía de un determinado país o territorio ([8] [12], [15]).

A grandes rasgos, la economía en su conjunto se divide en el sector productor y en el sector consumidor; el sector productor, a su vez se divide en un gran número de industrias (sectores) en el cual se supone que cada sector produce un producto homogéneo.

El punto de partida para la elaboración de un análisis de insumo/producto es la formulación de una tabla cuyas componentes muestran, ya sea cuantitativamente o en términos de valor, de que manera se distribuye la producción total de un sector (o sectores) en forma de producción intermedia (es decir, como materia prima) y a los usuarios finales.

El objetivo del modelo es permitir a los economistas predecir los niveles de producción futuros de cada sector a fin de satisfacer las demandas futuras para diversos productos. Tal predicción se complica porque un cambio en la demanda de un producto de un sector puede modificar los niveles de producción de otros sectores.

En este capítulo se hará un desarrollo del modelo de Leontief el cual permitirá analizar la economía mexicana del año 2003, considerando sólo 18 sectores, también, se desarrollará el modelo input/output de Von Neumann, y se verá que el problema planteado por Neumann es más sencillo de resolver usando teoría de juegos, sin la necesidad de usar teoremas cuyo estudio es más complicado. Para finalizar este capítulo se retomará el ejemplo de los 18 sectores de la economía mexicana, para el cual se encontrarán las variables deseadas por medio del modelo Von Neumann.

3.1. Modelo de Leontief

El análisis de insumo/producto tiene implícita una teoría de la producción donde los componentes de la demanda final se asumen como datos conocidos, por lo cual los supuestos que soportan esta teoría están basados en la naturaleza de la producción. Los supuestos básicos son:

1. Es posible dividir las actividades productivas de un sistema económico en sectores, cuya interdependencia se expresa de manera objetiva a través de funciones lineales de insumos de forma tal que al variar los niveles de producción, los insumos requeridos varían en el mismo sentido y proporción, es decir, existen rendimientos constantes de escala.

2. Los coeficientes de insumo/producto se asumen fijos, es decir, no existe sustitución de insumos en el proceso productivo ni apertura de nuevas actividades, por lo que se considera que no existe cambio tecnológico significativo.

3. Cada sector se especializa en la producción de un solo bien, para el cual existe un proceso de producción único.

Se puede expresar la tabla insumo/producto con n sectores de la manera siguiente:

	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\ldots$	$\mathbf{S_j}$	$\ldots$	$\mathbf{S_n}$	**DF**	**VBP**
$\mathbf{S_1}$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\ldots$	x_{1j}	$\ldots$	x_{1n}	Y_1	X_1
$\mathbf{S_2}$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\ldots$	x_{2j}	$\ldots$	x_{2n}	Y_2	X_2
$\mathbf{S_3}$	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\ldots$	x_{3j}	$\ldots$	x_{3n}	Y_3	X_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{S_i}$	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$	x_{in}	Y_i	X_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{S_n}$	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$\ldots$	x_{nj}	$\ldots$	x_{nn}	Y_n	X_n
VBP	X_1	X_2	X_3	$\ldots$	X_i	$\ldots$	X_n		

Donde el Valor Bruto de la Producción (VBP) es $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$; $i = 1, \ldots, n$.

Cada elemento x_{ij} dentro del cuerpo de la tabla representa en valor monetario, las ventas que las empresas del sector i $(i = 1, \ldots, n)$ han efectuado a otras empresas del sector j $(j = 1, \ldots, n)$.

Podemos observar que:

$x_{ij},\ i \neq j,$ representa las compras de un sector con respecto a otro distinto.

$x_{ij},\ i = j,$ representa las compras de un sector con respecto al mismo sector.

$Y_n =$ Demanda final (DF) del sector i $(i = 1, \ldots, n)$.

La columna de la demanda final no corresponde a un sector, en ella aparecen los consumos: compras de los consumidores finales (que no se encuadran en ningún sector productivo), inversiones (es la parte de la producción del período que se acumula para los siguientes), exportaciones, etc.

Si se representa la tabla como un sistema de ecuaciones, dado que las ventas de cada sector sumadas a la demanda final coinciden con el valor bruto de la producción, se tiene que:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1n} + Y_1 &= X_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2n} + Y_2 &= X_2 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + \ldots + x_{3n} + Y_3 &= X_3 \\
&\vdots \\
x_{n1} + x_{n2} + x_{n3} + \ldots + x_{nn} + Y_n &= X_n.
\end{aligned}$$

Las columnas de la tabla de insumo/producto representan la estructura de costos de cada sector. Si se divide el valor de cada insumo por el valor bruto de la producción correspondiente (el total de la columna), se obtienen los coeficientes técnicos (que registran la necesidad de insumos de cada sector para producir una unidad del producto que dicho sector produce):

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

donde i indica el sector que vende y j el que produce. Es decir, se divide cada coeficiente de una columna por el total de la misma.

Como $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$, entonces $x_{ij} = a_{ij} X_j$. Usando esto, se puede reescribir el sistema de ecuaciones de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1 &= X_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n + Y_2 &= X_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{3n}X_n + Y_3 &= X_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n &= X_n.
\end{aligned}$$

Sean,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Donde A representa la matriz de coeficientes técnicos, X es un vector columna del VBP, Y es un vector columna de la demanda final. De ésta manera el sistema, expresado en forma matricial, queda:

$$X = AX + Y. \tag{3.1}$$

Para medir las necesidades de producción de cada sector ante un cambio de la demanda final (la matriz Y) se opera algebraicamente con las matrices [9] a partir de la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned} X &= AX + Y \\ IX - AX &= Y \end{aligned}$$

$$(I - A)X = Y. \tag{3.2}$$

Si despejamos X de (3.2) se obtiene:

$$X = (I - A)^{-1}Y, \tag{3.3}$$

donde I es la matriz identidad, $I - A$ es denominada la matriz de Leontief, y $(I - A)^{-1}$ se le llama matriz de coeficientes totales, también llamada de requerimientos directos e indirectos. Una de las características de ésta matriz es que toda entrada es mayor o igual que cero y mayor o igual a la unidad sobre la diagonal. La explicación desde el punto de vista económico, es que, en el primer caso, como no puede haber producción negativa, todo debe ser positivo, y cero cuando no existe interdependencia alguna con los demás sectores y en el segundo caso, toda entrada en la diagonal de la matriz debe ser mayor a la unidad, debido a que debe producir una unidad de demanda final a parte de fabricar los insumos necesarios que satisfagan directa o indirectamente la producción de esa unidad, y es igual a uno, cuando no existe ninguna relación intersectorial, más que consigo misma.

Es evidente que la matriz $(I-A)^{-1}$ es la llave de la solución del problema de producción, por lo que resulta interesante conocer bajo qué condiciones existe esta matriz inversa, la respuesta la da el siguiente teorema, el cual puede ser consultado en [6]:

Teorema 3.1.1 *(Existencia de la inversa de la matriz de Leontief) Sea A la matriz de coeficientes técnicos (matriz de consumo) de una economía y Y la matriz columna de demanda final.*

i) Si ambas A y Y tienen coeficientes no negativos y

ii) Si la suma de las entradas de cada columna en A es menor que uno, entonces existe la matriz $(I-A)^{-1}$.

Utilizando la ecuación (3.3) a partir de una variación de la demanda final Y^*, se obtiene un nuevo vector de producción X^* de esta forma se puede construir la nueva tabla

$$X^* = (I-A)^{-1}Y^*.$$

En este paso se tiene la hipótesis principal del modelo de Leontief la cual dice que la matriz de coeficientes técnicos A es siempre la misma, aunque cambie la demanda final Y. También la matriz de requerimientos directos e indirectos $(I-A)^{-1}$ es la misma, ya que sólo depende de A.

En la práctica, estas matrices varían por distintos motivos (adelantos tecnológicos, aparición de nuevos sectores o desaparición de otros, etc.) y suelen ser re-calculadas cada cierto tiempo.

3.2. Ejemplo 1

Ejemplo 3.2.1 *Supóngase que la economía mexicana consiste de solo 18 sectores, y que la demanda de todos los agentes se agrupa en un solo rubro, el modelo general de insumo/producto (Matriz de insumo/producto del año 2003, veáse la matriz 1 del apéndice). En este ejemplo se hará el análisis del modelo de Leontief para la economía de México en el año 2003, el primer paso consiste en determinar los coeficientes técnicos de la demanda intermedia:*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

la matriz de coeficientes técnicos como puede obeservarse en la matriz 2 del apéndice, es la representación que permite medir la productividad de cada sector, si las entradas en una columna de una industria particular suma menos que uno, la industria es productiva, de lo contrario no lo es.

En segundo lugar, se resuelve la matriz de Leontief $(I - A)$ *(veáse la matriz 3 del apéndice), es decir, se resta la matriz de coeficientes técnicos que en el primer paso se obtuvo de la matriz identidad.*

A continuación se obtiene la inversa de la matriz de Leontief (veáse matriz 4 del apéndice), también conocida como la matriz de requerimientos directos e indirectos y se puede observar que toda entrada es mayor que cero y las entradas de la diagonal son mayores que 1.

Se comprueban los resultados del modelo de producción $X = (I - A)^{-1}Y$, *de lo cual resulta el siguiente vector:*

$$X = \begin{bmatrix} 423187220.1 \\ 541047666.5 \\ 227218893.6 \\ 966230662.4 \\ 3999781837 \\ 1445491996 \\ 808140018.6 \\ 17117222.54 \\ 302711504.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 298684033.2 \\ 876400789.5 \\ 374616283.1 \\ 41274257.34 \\ 168280731.6 \\ 412402869.1 \\ 39904835.07 \\ 273737941.4 \\ 271983976.1 \end{bmatrix}.$$

Como puede observarse los resultados del modelo de producción son muy cercanos a lo establecido en la tabla inicial, las diferencias se deben principalmente a los problemas de redondeo. De esta forma, si la demanda final, en vez de ser

$$Y = \begin{bmatrix} 158905279 \\ 235540129 \\ 85163278 \\ 887257188 \\ 1605345533 \\ 929600787 \\ 596959367 \\ 8584217 \\ 169717880 \\ 111983348 \\ 673168314 \\ 110189483 \\ 0 \\ 23965976 \\ 410347890 \\ 39487725 \\ 244482929 \\ 204364802 \end{bmatrix}$$

fuera

$$Y^* = \begin{bmatrix} 364575607 \\ 551210457 \\ 109833606 \\ 972927516 \\ 1921015861 \\ 1195271115 \\ 982629695 \\ 21254545 \\ 355388208 \\ 197653676 \\ 898838642 \\ 235859811 \\ 15670328 \\ 49636304 \\ 626018218 \\ 85158053 \\ 460153257 \\ 520035130 \end{bmatrix}.$$

Se podrá calcular el nuevo valor bruto de la producción total X^* haciendo,

$$X^* = (I - A)^{-1} Y^*,$$

como ya se había mencionado anteriormente, la matriz $(I - A)^{-1}$ es la misma, el resultado de este cálculo es:

$$X^* = \begin{bmatrix} 722306236.4 \\ 944615347 \\ 312930135.8 \\ 1065547981 \\ 5125144455 \\ 1896680112 \\ 1277248914 \\ 33799667.61 \\ 562237317.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 479121211.4 \\ 1200719558 \\ 619342358 \\ 82397541.78 \\ 266993319 \\ 629251796.4 \\ 85905660.22 \\ 502162870.2 \\ 618912398.3 \end{bmatrix}.$$

Ya que se tienen los nuevos valores brutos de la producción X_j^*, $(j = 1, \ldots, n)$, se puede armar la nueva tabla, conociendo que

$$a_{ij}^* = \frac{x_{ij}^*}{X_j^*},$$

como la matriz de coeficientes técnicos $A = a_{ij}$ no varía, se tiene que, $a_{ij} = a_{ij}^*$ entonces $x_{ij}^* = a_{ij}^* X_j^*$, la nueva matriz de insumo/producto (veáse la matriz 5 del apéndice), indica cuanto es lo que debe producir cada sector ante un cambio de la demanda final.

3.3. Modelo de Von Neumann

El análisis de la tabla de insumo/producto (también conocida como input/output), fue desarrollada como el instrumento de interpretación de las interdependencias de los diversos sectores de la economía. Es decir, en el análisis de insumo/producto consideramos cualquier sistema económico como un conjunto de sectores mutuamente interrelacionados. Se considera que todo sector recibe materias primas (insumos) de los demás sectores del sistema y que, a su vez, proporciona su producción a los demás sectores en calidad de materia prima. Fundamentalmente se trata de un análisis general del equilibrio estático de las condiciones tecnológicas de la producción total de una economía, durante el periodo de tiempo en cuestión.

En esta sección se presentará una aplicación de la Teoría de Juegos para un modelo de crecimiento económico input/output, también, conocido como el Modelo de Von Neumann, el cual está relacionado en gran medida con el sector de producción.

Supóngase que en cierta economía se cuenta con $n \geq 1$ bienes (o servicios) en donde a cada uno de ellos se les asigna un precio: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. De esta forma el vector de precios queda determinado por

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Se supondrá que los precios unitarios son no negativos

$$p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n,$$

además de ser precios normalizados, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Cada proceso de producción se lleva a cabo gracias a $m \geq 1$ actividades. Sea

$$\mathbf{y}^T = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T.$$

donde $\mathbf{y}$ es el vector de cantidades en donde la componente $\mathbf{y}_j$ denota el nivel de actividad sobre el cual opera el j-ésimo proceso de producción. Esos niveles de actividad son positivos o cero

$$y_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

y estan normalizados

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j = 1.$$

Supóngase que se trata de una economía con rendimientos constantes en el que las entradas y salidas dependen linealmente de los niveles de actividad. En otras palabras, la economía esta descrita por un par de matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

En donde el coeficiente a_{ij} de la matriz A representa la cantidad de bienes $(i = 1, 2, \ldots, n)$ utilizados por el proceso $j = 1, 2, \ldots, m$, y es tal que $a_{ij}\mathbf{y}_j \geq 0$, mientras que el coeficiente b_{ij} de la matriz B representa la cantidad de bienes $(i = 1, 2, \ldots, n)$ producidos por el proceso j tal que $b_{ij}\mathbf{y}_j \geq 0$.

Supóngase que cada fila y cada columna de las matrices A y B tienen al menos un elemento positivo. Lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 0, j = 1, 2, \ldots, m \ \text{ y } \ \sum_{j=1}^{m} b_{ij} > 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

El significado económico es que cada proceso requiere al menos un bien, y cada bien es producido por al menos un proceso. Se asumirá, también, que $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij} \geq 0$ para todos lo elementos de las matrices A y B.

Considerése el bien i, su consumo total es

$$\left(A\mathbf{y}^T\right)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j,$$

y su producción total es

$$\left(B\mathbf{y}^T\right)_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j.$$

Supongáse que el proceso de producción se lleva a cabo durante un período de tiempo. Por lo que se supone que el consumo del bien i al final del período de producción es menor a la producción de ese bien al inicio del período

$$A\left(\mathbf{y}^T\right)^1 \leq B\left(\mathbf{y}^T\right)^0. \tag{3.4}$$

Se dirá que hay un crecimiento equilibrado si los niveles de actividad aumentan al mismo ritmo, en otras palabras, si existe ρ_g tal que

$$\left(\mathbf{y}^T\right)^1 = (1+\rho_g)\left(\mathbf{y}^T\right)^0. \tag{3.5}$$

Si existe tal ρ_g se le llamará la tasa de rendimiento. Las condiciones (3.4) y (3.5) implican que $\mathbf{y}^0$ es una solución de las desigualdades

$$(1+\rho_g)A\left(\mathbf{y}^T\right)^0 \leq B\left(\mathbf{y}^T\right)^0. \tag{3.6}$$

El problema ahora es encontrar los precios de tal forma que el valor de los outputs al inicio del período no exceda al valor de las entradas al final del período

$$A\mathbf{p}^1 \geq B\mathbf{p}^0. \tag{3.7}$$

Supongáse que el precio $\mathbf{p}^1$ esta relacionado con el precio $\mathbf{p}^0$ por

$$\mathbf{p}^0 = \frac{1}{1+\rho_r}\mathbf{p}^1, \text{ donde } \rho_r = \frac{\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0}{\mathbf{p}^0}. \tag{3.8}$$

En donde ρ_r es interpretada como la tasa de interés.

Las condiciones (3.7) y (3.8) implican que $\mathbf{p}^0$ es la solución de las desigualdades

$$(1+\rho_r)A\mathbf{p}^0 \geq B\mathbf{p}^0.$$

En resumen las condiciones del modelo input/output en forma matricial pueden expresarse como:

1. $B\mathbf{y}^T \geq \rho_g A\mathbf{y}^T$.
2. $\mathbf{p}(\rho_g A - B)\mathbf{y}^T = 0$.
3. $\rho_r \mathbf{p}A \geq \mathbf{p}B$.
4. $\mathbf{p}(\rho_r A - B)\mathbf{y}^T = 0$.
5. $\mathbf{p}B\mathbf{y}^T > 0$.

La condición 1 dice que los mercados de bienes están balanceados, es decir, la producción de un período es suficiente para cubrir los insumos para el siguiente. La condición 2 es conocida como la regla de precios competitivos, la cual dice que si hay exceso de producción de un bien (sobreproducción de un bien) éste llega a ser un bien libre y su precio será cero. La condición 3 considera que en un período dado es imposible para un consumidor usar más de un bien de lo que fue producido en el período anterior, y que en situación de equilibrio no pueden haber ganancias por encima del promedio de la tasa de interés. La condición 4, también llamada regla de la eficiencia dice que si un proceso produce ganancia negativa (funciona con pérdidas), éste no será usado, y su nivel de actividad será cero. Finalmente, la condición 5 indica que $\mathbf{p}_i b_{ij}\ \mathbf{y}_j^T > 0$ para al menos un i y j ya que la economía debe producir al menos un bien con un precio positivo y con nivel de actividad positiva.

La pregunta es si existen vectores $\mathbf{p}$, $\mathbf{y}$ y factores de crecimiento ρ_r, ρ_g de modo que se satisfacen estas cinco condiciones. Fácilmente se podrá llegar a algunas conclusiones en relación con los supuestos del modelo.

Lema 3.3.1 *Para una economía que cumpla los supuestos del modelo input/output, debe ser cierto que el factor de rendimiento debe ser el mismo que la tasa de interés, es decir,* $\rho_g = \rho_r$.

Demostración. Usando las condiciones 1-5, se tiene que

$$\mathbf{p}(\rho_g A - B)\mathbf{y}^T = 0 \Rightarrow \rho_g \mathbf{p}A\mathbf{y}^T = \mathbf{p}B\mathbf{y}^T > 0 \tag{3.9}$$

y

$$\mathbf{p}(\rho_r A - B)\mathbf{y}^T = 0 \Rightarrow \rho_r \mathbf{p}A\mathbf{y}^T = \mathbf{p}B\mathbf{y}^T, \tag{3.10}$$

de (3.9) y (3.10) se obtiene que

$$\rho_g \mathbf{p}A\mathbf{y}^T = \rho_r \mathbf{p}A\mathbf{y}^T > 0,$$

ya que este resultado es estrictamente positivo, dividiendo por $\mathbf{p}A\mathbf{y}^T$ a ambos lados de la igualdad se concluye que $\rho_g = \rho_r$. ■

Considerando el Lema 1, a partir de ahora solo se escribirá $\rho = \rho_g = \rho_r$. Entonces, de las condiciones 1-5, se tendrán las desigualdades

$$\mathbf{p}(\rho A - B) \geq 0 \geq (\rho A - B)\mathbf{y}^T. \tag{3.11}$$

Además,

$$\mathbf{p}(\rho A - B)\mathbf{y}^T = 0 = \mathbf{p}(\rho A - B)\mathbf{y}^T. \tag{3.12}$$

Se utilizará la noción de punto silla, como criterio de optimización, y se verá que es posible encontrar $\mathbf{y}^T$, $\mathbf{p}$ y un escalar ρ tales que las desigualdades (3.11) y (3.12) se satisfacen. Aquí es donde entra la teoría de juegos. Considérese el juego de suma cero de dos personas con matriz $\rho A - B$. Este juego tiene un valor usando estrategias mixtas denotado por $\nu(\rho A - B)$, así como un punto silla en las estrategias mixtas, es decir, (X^*, Y^*), satisfaciendo la condición del punto silla.

$$X(\rho A - B)Y^* \leq \nu(\rho A - B) \leq X^*(\rho A - B)Y,$$

para todo $X \in S_n$, $Y \in S_m$.

Estas estrategias dependerán también de ρ. El enfoque ahora está sobre la constante $\rho > 0$. Para resolver el problema input/output usando la teoría de juegos es necesario que exista una constante $\rho = \rho_0$, tal que $\nu(\rho_0 A - B) = 0$, ya que de esta forma se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$X(\rho_0 A - B)Y^* \leq 0 \leq X^*(\rho_0 A - B)Y,$$

para todo $X \in S_n$, $Y \in S_m$.

En particular, para cada fila y columna $E(i, Y^*) \leq 0 \leq E(X^*, j)$, ó en forma matricial,

$$(\rho_0 A - B)Y^* \leq 0 \leq X^*(\rho_0 A - B).$$

Lo cual es lo mismo que (3.11) con $\mathbf{p}$ sustituída por X^* y $\mathbf{y}^T$ sustituída por Y^*. Además, $\nu(\rho_0 A - B) = 0 = X^*(\rho_0 A - B)Y^*$, lo cual es lo mismo que (3.12) con $\mathbf{p}$ sustituída por X^* y $\mathbf{y}^T$ sustituída por Y^*. A continuación se escribirá la segunda conclusión.

Lema 3.3.2 *Existe una constante ρ_0 (la cual es única si $a_{ij} + b_{ij} > 0$) y los vectores de precio $(\mathbf{p})$ e intensidad $(\mathbf{y})$ son tales que $\mathbf{p}B\mathbf{y}^T > 0$,*

$$\mathbf{p}(\rho A - B) \geq 0 \geq (\rho A - B)\mathbf{y}^T$$

y

$$\mathbf{p}(\rho A - B) = 0 = \mathbf{p}(\rho A - B)\mathbf{y}^T.$$

En otras palabras existe $\rho_0 > 0$ tal que $\nu(\rho_0 A - B) = 0$, hay un punto silla $(\mathbf{y}^T_{\rho_0}, \mathbf{p}_{\rho_0})$, y el punto silla satisface $\mathbf{p}_{\rho_0} B \mathbf{y}^T_{\rho_0} > 0$.

Demostración. Se demostrará que en realidad existe ρ_0 satisfaciendo $\nu(\rho_0 A - B) = 0$. Se tiene que, si $f(\rho) = \nu(\rho A - B) = 0$ entonces $f(0) = \nu(-B)$. Sea (X, Y) la estrategia óptima para el juego con matriz $-B$. Entonces

$$\nu(-B) = \min_j E_B(X, j) = \min_j \sum_{i=1}^{n} (-b_{ij}) x_i < 0.$$

Dado que al menos un $b_{ij} > 0$, al menos un x_i será positivo. Ya que cada fila de A tiene al menos un elemento a_{ij} estrictamente positivo, siempre es posible encontrar $\rho > 0$ suficientemente grande tal que $f(\rho) > 0$. Además, $f(\rho)$ es una función continua, por el teorema del valor intermedio existe $\rho_0 > 0$ tal que $f(\rho_0) = 0$. ■

La conclusión de este desarrollo es que bajo las suposiciones del modelo, hay un conjunto de precios de equilibrio, los niveles de actividad, y la tasa de rendimiento que coincide con la tasa de interés, los cuales permiten la expansión de la economía.

En esta tesis se mostró que una forma sencilla de resolver el problema planteado en el Modelo de Von Neumann es usando teoría de juegos. También es posible analizar el modelo usando teoremas de punto fijo, pero en este caso resulta más complicado su desarrollo (ver [1]).

Ejemplo 3.3.3 *Considere las matrices input/output*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se usará MAPLE para encontrar $\rho_0 > 0$ tal que $\nu(\rho_0 A - B) = 0$ y las estrategias mixtas óptimas. Notése que $a_{ij} + b_{ij} > 0$, por lo tanto, existe un *sólo* $\rho_0 > 0$ *el cual cumple las condiciones. Los comandos que se usarán son los siguientes*

```
> with(LinearAlgebra);
value:=proc(A,rows,cols)
local X,Y,B,C,cnstx,cnsty,vI,vII,vu,v1;
X:=Vector(rows,symbol=x): Y:=Vector(cols,symbol=y):
B:=Transpose(X).A;
C:=A.Y;
cnsty:={seq(C[j]<=vII,j=1..rows),add(y[j],j=1..cols)=1}:
cnstx:={seq(B[i]>=vI,i=1..cols),add(x[i],i=1..rows)=1}:
with(simplex):
vu:=maximize(vI,cnstx,NONNEGATIVE);
vl:=minimize(vII,cnsty,NONNEGATIVE);
print(vu,vl);
end proc;
>A := a->Matrix([[a-1, 5*a-2, 2*a-2], [-2, 2*a-1, 3*a-1]]);
>B1 := a-> A(a);
>Value(B1(1), 2, 3);
```

Eventualmente se llegó a la conclusión de que cuando $a = 1$*, se obtiene:* $\nu(B1(1), 2, 3) = \nu(aA - B) = 0$*, y por lo tanto,* $\rho_0 = 1$*. Las estrategias óptimas que resultan en MAPLE son* $\mathbf{p} = X = (1, 0)$ *y* $\mathbf{y} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$*.*

3.4. Ejemplo 2

Ejemplo 3.4.1 *El siguiente ejemplo es un caso con algunos datos reales en el cual se considerarán las matrices input/output (veáse las matrices 7 y 8 del apéndice) de la economía mexicana del año 2003, información proporcionada por INEGI , se usarán los comandos del programa MAPLE para encontrar a* $\rho > 0$ *tal que* $\nu(\rho A - B) = 0$ *y las estrategias mixtas óptimas.*

En este ejemplo se utilizaron los mismos comandos del Ejemplo 3.3.3, y probando con distintos valores de ρ *se obtuvo un valor cercano al cero para* $\nu(\rho A - B)$*, como la matriz es de dimensiones muy grandes existen errores en el programa MAPLE, entonces una aproximación aceptable para* ρ*, tal que se cumpla la suposición de que* $\nu(\rho A - B) = 0$ *es que* $\rho = 1.5$ *con lo cual se obtiene,* $\nu(\rho A - B) = 0.0190486$*. Finalmente, MAPLE obtuvo las siguientes estrategias mixtas:*

$\mathbf{p} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.39602132, 0, 0.603978670, 0, 0, 0, 0)$ *y*

$\mathbf{y} = (0.3192180889, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.6807819111, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$*, los cuales denotan el vector de precios y niveles de actividad, respectivamente.*

El valor obtenido de $\rho = 1.5$ es la tasa de rendimiento, la cual coincide con la tasa de interés, cuyo valor indica que se tendrá un equilibrio para los sectores considerados en el año 2003 y en consecuencia un crecimiento económico del País. En trabajos futuros se planea hacer un análisis considerando la totalidad de los sectores que intervienen en la economía mexicana y de ésta manera tener una mejor aproximación a la tasa de rendimiento real.

Capítulo 4

Conclusiones

En el trabajo de Tesis se analizaron varios conceptos de la teoría de juegos de suma cero, se demostró el Teorema Minimax de Von Neumann, el cual fue de mucha ayuda para resolver otro teorema similar a éste, pero para estrategias mixtas, se dedujeron fórmulas para encontrar el valor del juego y las estrategias óptimas. También se estudió un método más sencillo para resolver juegos matriciales usando Programación Lineal, la cual se analizó en el Capítulo 2 y se desarrollaron algunos ejemplos los cuales fueron resueltos a través del programa MAPLE.

Como se mencionó anteriormente la teoría de juegos tiene muchas aplicaciones en diferentes disciplinas, de las cuales sobresale la Economía, por esta razón se trabajó con un modelo económico, el modelo input/output. Inicialmente se hizo un análisis de este modelo en su forma clásica usando la metodología propuesta por Leontief, después se analizó este mismo modelo con la teoría de juegos. El modelo en este contexto es conocido como modelo de Von Neumann, en este caso se usaron los conceptos descritos en el Capítulo 2 y se demostró que el problema planteado por Von Neumann es sencillo de resolver en base a la Teoría de Juegos. Finalmente se ejemplificaron estos modelos considerando 18 sectores de la economía mexicana en el año 2003. El primero de ellos se desarrolló mediante la teoría del modelo de Leontief, en el primer paso se calculó la matriz de coeficientes técnicos con la cual se observó que todos los sectores eran productivos, ya que la suma de cada columna por sector fue menor que uno. Después se calculó la matriz de Leontief, para posteriormente determinar la matriz de coeficientes directos e indirectos. Como el problema principal del cual se deriva el modelo de Leontief es saber cuánto debe producir cada sector ante un cambio de la demanda final, se propusó un vector de demanda final diferente al establecido en la tabla original y se encontró el nuevo vector de producción, con este último se obtuvieron las nuevas entradas de la matriz de insumo/producto que representa lo que cada sector debe producir, si la demanda cambiara. El segundo ejemplo fue desarrollado usando la Teoría de Juegos y en este caso se analizó un posible escenario en donde se determinó una tasa de rendimiento ρ, la cual bajo los supuestos del modelo debe coincidir con la tasa de interés. La conclusión de este ejemplo fue que el valor de la tasa de rendimiento de 1.5 hace que los 18 sectores considerados presenten un equilibrio, para encontrar este valor fue necesario realizar un programa en MAPLE.

En trabajos futuros se planea:

1.- Continuar trabajando en temas referentes a teoría de juegos, ahora enfocados a juegos dinámicos.

2.- Con respecto al problema estudiado en este trabajo de tesis se tiene pensado considerar las matrices input/output con la totalidad de los sectores que intervienen en la economía mexicana y de este modo tener una mejor aproximación de la tasa de rendimiento.

Capítulo 5

Apéndice

3.2. Ejemplo1

1. Matriz de insumo/producto
2. Matriz de coeficientes técnicos
3. Matriz de Leontief
4. Matriz de requerimientos directos e indirectos
5. Matriz nueva

3.4. Ejemplo 2

6. Matriz input
7. Matriz output

Bibliografía

[1] J.P Aubin, Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis. Springer (1998).

[2] R.J. Aumann, Handbook of Game Theory with economic applications. Elsevier (2002).

[3] E. N. Barron, Game Theory: An Introduction. John Wiley & Sons, Inc., Publication (2008).

[4] Mockhtar S. Bazaraa, Programación Lineal y Flujo en Redes. Limusa (1991).

[5] I. Ekeland, J.P Aubin, Applied Nonlinear Analysis. John Wiley & Sons, Inc., Publication(1984).

[6] Julia García Cabello, Algebra lineal sus aplicaciones en economía, ingenierías y otras ciencias. Delta (2006).

[7] Enic Kamerich, A guide to Maple. Springer (1999).

[8] Christian Emmanuel Laguna Reyes, recuperado el 20 de Enero del 2010 en http://www.eco.unc.edu.ar/ief/miembros/archivos/prof_oviedo

[9] Serge Lang, Introduction to Linear Algebra. Springer (1986).

[10] Davis Morton D., Introducción a la teoría de juegos. Alianza (1998).

[11] Jesús Gerardo Navarro C., Von Neumann y la existencia del equilibrio general, Revista Venezolana de Análisis de Conyuntura, Vol. 3, No. 1, pp. 212-219, (1997).

[12] Jorge Mauricio Oviedo, recuperado el 1 de Febrero del 2010 en www.eco.unc.edu.ar/ief/...oviedo/oviedo_matriz_de_insumo.pdf.

[13] John Von Neumann, Theory of games and economic behaviour. Princenton (1953).

[14] James N. Webb, Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution. Springer (2007).

[15] Recuperado el 1 de Febrero del 2010 en http://www.materias.fi.uba.ar//7106/Guias0502C/EEA %20MipConceptosBasicos.pdf.