



# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Posgrado en Ciencias Matemáticas

## Valuación, simulación y estimación en modelos de volatilidad estocástica

Tesis presentada para obtener el título de  
Maestría en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Karla Andreina Carrero Vera

Director de Tesis:

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla, Puebla.

7 de Junio de 2019

---



## Dedicatoria

Mi tesis la dedico con todo mi cariño a mi abuela Rosa y a mi abuelo Antonio que siempre me dieron su amor sin esperar nada y haber estado a mi lado apoyandome en todo lo que podían.

# Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todos los que formaron parte de la realización de este proyecto.

En primer lugar al Padre y a la Madre celestiales por haberme permitido terminar la meta de concluir mis estudios de maestría, porque sin ellos, nada es posible, Galatas 4:26.

Al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, asesor de tesis, por el apoyo durante el desarrollo del tema, por el tiempo dedicado a la elaboración y revisión.

A mis sinodales: , por sus contribuciones y correcciones al trabajo, además de su disponibilidad y deseo de ayudar.

A mi familia, por todo su apoyo. Gracias mamá, papá, abuelita, tios y primas.

A mis amigos: Rafael Azuaje, Anahi Zalazar, Juan José García, Anel Vázquez, Diana Piñango, Shaday Guerrero, Uvencio Gimenez y a Harry León por su apoyo en todo lo necesario y darme ánimo siempre que lo necesitaba.

Le agradezco a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado, por el apoyo para la conclusión de esta tesis dentro del programa IV. Investigación y Postgrado. Apoyar a los programas de postgrado para lograr su incorporación al Padrón Nacional de Calidad. Indicador establecido en el Plan de Desarrollo Institucional 2017-2021.

Una vez más, agradezco a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado, por el apoyo a través del proyecto VIEP con clave 100400077, debido a que se recibió el apoyo para la impresión de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por su apoyo al otorgarme una beca para realizar mis estudios de maestría, lo que hizo posible la elaboración de esta tesis.





# Introducción

Los mercados financieros presentan diversos riesgos por las fluctuaciones adversas en el precio de un activo y por la incertidumbre de si habrá o no una reforma fiscal que incluya un impuesto sobre las ganancias por la tenencia de un activo, que a su vez este sería un riesgo económico por los potenciales niveles que la tasa impositiva pudiera tomar, ver ([26]).

Ante los incesantes cambios en los mercados internacionales y nacionales se ha presentado una revolución en la administración del riesgo. Adicionalmente, el restrictivo ambiente regulatorio ha incentivado el desarrollo de nuevos métodos y modelos para la medición de riesgos financieros.

Una alternativa para reducir los riesgos financieros que sufren las empresas ocasionados por la inestabilidad económica son los instrumentos derivados, estos son contratos financieros que otorgan derechos y obligaciones para las partes que los celebran, un ejemplo son los contratos de opciones, las opciones son acuerdos que otorgan a su poseedor el derecho pero no la obligación de vender (o comprar) un número específico de acciones o fracción en un determinado tiempo.

Actualmente existe una gran cantidad de instrumentos financieros derivados, llamados así porque su precio se deriva o depende del precio de un activo subyacente, el cual puede ser oro, petróleo, acciones, una tasa de interés, un índice, y, en general, cualquier artículo al que se le pueda asignar un precio. Hoy en día, la negociación de valores derivados ha experimentado un extraordinario desarrollo y se negocian en grandes cantidades en todo el mundo. Las bolsas en donde se negocian y cotizan productos derivados proporcionan mayores alternativas de inversión y de cobertura con más y mejor información. Asimismo, un gran número de modelos de cobertura y fórmulas para la valuación se utilizan diariamente en la operación de estos mercados. La gran complejidad de los ne-

gocios ha promovido a través el desarrollo los derivados financieros como instrumento de cobertura ante los incesantes fluctuaciones en los precios del mercado. Es por ello que las instituciones financieras están fijando nuevos estándares para el control de riesgos que requieren de mejores modelos de valuación.

Entre los derivados que pueden considerarse básicos están las opciones. Por esta razón, el presente trabajo está orientado a valorar una opción, específicamente sobre acciones de la International Business Machines Corporation (IBM), ya que en los últimos años, esta compañía ha presentado novedosos avances tecnológicos como la **computación en la nube**, avances en **computación cuántica**, la cual procesa la información en cubits, unidades que amplían la capacidad de procesamiento, no como la computación tradicional que procesa información mediante unos y ceros (lenguaje binario) y la almacena en bits. Esto permitirá resolver los problemas matemáticos en los que se basa la protección de nuestros sistemas actuales. Las **criptoanclas o huellas digitales** a prueba de manipulaciones y el **blockchain o cadenas de bloques**, que son mecanismos de reconocimiento de entidades físicas, que en el caso de los medicamentos, por ejemplo, esto podría ayudar a evitar su falsificación. Esto permitirá garantizar la autenticidad de un producto desde su punto de origen hasta las manos del cliente, al tiempo que encuentran el camino para nuevas soluciones de seguridad, autenticidad e identificación. Entre otros avances que según la IBM cambiarán al mundo en 5 años, ver ([28]).

El objetivo principal de este trabajo es la aplicación de dos modelos de volatilidad estocástica para la valoración de las acciones de la compañía IBM. Este trabajo comprenderá una sección de preliminares y tres capítulos desarrollados de la siguiente forma.

En la sección de preliminares están algunos conceptos fundamentales de matemáticas financieras y herramientas de cálculo estocástico como ecuaciones diferenciales estocásticas, movimiento Browniano, movimiento Browniano geométrico y la fórmula de Ito para el desarrollo de los modelos de valuación de opciones.

En el primer capítulo, se proporcionan definiciones básicas de finanzas sobre teoría de derivados para la valuación de opciones.

En el segundo capítulo se presenta el modelo de valuación de opciones de Black-Scholes (B-S), el cual consiste en una fórmula cerrada para obtener el precio de una opción sobre una acción cuyo precio evoluciona en el tiempo denotado por  $S_t$  el cual se asume que

---

puede modelarse a través de un movimiento Browniano Geométrico (MBG). Otro supuesto sobre el que descansa este modelo es el de volatilidad constante de los precios de las acciones. El precio de la opción se puede establecer desde el inicio, conociendo el precio actual  $S(0)$ , el precio de ejercicio,  $K$ , el tiempo de vencimiento del contrato de opción,  $T$ , la volatilidad del precio del subyacente,  $\sigma$  y la tasa de interés libre de riesgo  $r$ .

En este capítulo presentamos la fórmula de valuación de opciones de (B-S) con el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales, lo cual se logra mediante la construcción de un portafolio formado por una cierta cantidad de un subyacente más cierta cantidad de una opción sobre el mismo subyacente. El contexto teórico de este enfoque es que las cantidades que lo conforman sean tales que se elimine el riesgo del portafolio. A partir de esto, se llega a una ecuación diferencial parcial, cuya solución es el precio teórico de una opción de compra europea y dicha solución es obtenida haciendo algunos cambios de variables y suponiendo la ecuación de difusión de calor inmersa en la ecuación de (B-S), con lo que se logra a partir del contexto teórico obtener la condición inicial de la ecuación de difusión de calor y entonces a partir de su solución generalizada, se obtiene el precio teórico de la opción europea de compra.

En vista que la realidad de los mercados financieros, la volatilidad de los precios de las acciones no son constantes, no se cumple en general el supuesto de (B-S), por lo que dicha fórmula no refleja correctamente los precios de las opciones. Por esta razón, estudiamos y aplicamos algunos modelos de volatilidad estocástica.

En el tercer capítulo se presentan y derivan dos modelos de valuación de opciones de volatilidad estocástica, el modelo de Hull-White y el modelo de Heston, ver ([26]). Estos modelos asumen que la volatilidad del activo subyacente es estocástica, más específicamente asumen que el activo y su volatilidad siguen procesos aleatorios posiblemente correlacionado, relajando el supuesto de volatilidad constante en el modelo de Black-Sholes.

Al final de cada capítulo se llevará a cabo la implementación del modelo presentado para la valuación de opciones europeas de compra con distintos plazos de vencimiento a través de cada uno de estos dos modelos y mediante simulación por Montecarlo. También se recogen y comparan los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>Índice general</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>XV</b>
1.0.1. Definición de opción en finanzas. . . . .	XV
1.0.2. Tipos de opciones . . . . .	XVI
1.0.3. Especificaciones en un contrato de opciones .	XVII
1.0.4. Prima del contrato de opción . . . . .	XVII
1.0.5. Estrategias básicas que puede adoptar el comprador de una opción de compra . . . . .	XVIII
1.0.6. Valor intrínseco de una opción europea . . . .	XIX
1.0.7. Factores que determinan el precio de una opción y su notación . . . . .	XXI
<b>2. Valuación de opciones con volatilidad constante</b>	<b>XXIII</b>
2.0.1. Supuestos básicos del modelo clásico de Black-Scholes . . . . .	XXIV
2.0.2. Dinámica del precio del activo subyacente . .	XXIV
2.0.3. Precio de una opción europea de compra . . .	XXVI
2.0.4. Modelo de Black-Scholes . . . . .	XXVII
2.0.5. Solución de la ecuación diferencial parcial del precio de una opción . . . . .	XXIX
2.0.6. Análisis de sensibilidad de la fórmula de Black-Scholes . . . . .	XXXVII
2.0.7. Estimación de la volatilidad . . . . .	XXXIX
2.0.8. Aplicación de la fórmula de Black-Scholes . . .	XL
2.1. Volatilidad implícita . . . . .	XLIII
2.1.1. Cálculo de la volatilidad implícita . . . . .	XLIV
2.1.2. Sonrisa de la volatilidad . . . . .	XLVII
<b>3. Valuación de opciones con volatilidad estocástica</b>	<b>LI</b>
3.1. Varianza como función conocida del tiempo . . . . .	LII
3.2. Modelo de Hull-White . . . . .	LIII

3.2.1.	Precio de una opción europea de compra . . .	LIV
3.2.2.	Método de aproximación para el precio de la opción. . . . .	LV
3.2.3.	Aproximación del precio de una opción con series de Taylor . . . . .	LXV
3.2.4.	Aplicación y análisis de resultados . . . . .	LXIX
3.2.5.	Simulación por Monte Carlo . . . . .	LXXIII
3.3.	Modelo de Volatilidad Estocástica de Heston . . . .	LXXV
3.3.1.	Dinámica del modelo . . . . .	LXXV
3.3.2.	Ventajas del modelo . . . . .	LXXVII
3.3.3.	Ecuación diferencial del precio de una opción sobre una acción con volatilidad estocástica del modelo de Heston . . . . .	LXXVIII
3.3.4.	Supuesto sobre el premio al riesgo por vola- tilidad . . . . .	LXXXIII
3.3.5.	Especificación de las condiciones de frontera .	LXXXIII
3.3.6.	Precio de la opción de compra . . . . .	LXXXV
3.3.7.	Obteniendo las funciones características del modelo de Heston . . . . .	LXXXIX
3.3.8.	Solución de la Ecuación de Riccati en el mo- delo de Heston . . . . .	XCII
3.3.9.	Sensibilidad del modelo de Heston . . . . .	XCIV
3.3.10.	Aplicación y análisis de resultados . . . . .	XCVI
3.4.	Estimación de los parámetros . . . . .	CI
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>CIII</b>
4.1.	Cálculo estocástico . . . . .	CIV
4.1.1.	Matemáticas del interés compuesto . . . . .	CIV
4.2.	Procesos estocásticos . . . . .	CV
4.2.1.	Martingalas . . . . .	CV
4.2.2.	Proceso de Wiener . . . . .	CVI
4.3.	Cálculo estocástico . . . . .	CVII
4.3.1.	Integral de Ito . . . . .	CVII
4.3.2.	Proceso de Ito . . . . .	CIX
4.3.3.	Lema de Ito . . . . .	CXI
4.4.	Lema de Ito para dos variables conducidas por ecua- ciones diferenciales estocásticas . . . . .	CXII
<b>Referencias</b>		<b>CXII</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>CXIII</b>





# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo discutiremos el marco conceptual de las opciones financieras, con el objetivo de comprender su uso en las finanzas sobre las acciones y su proceso de valoración a través de los modelos de volatilidad estocástica.

Antes de mostrar el concepto de opción en finanzas, es importante destacar que este concepto no es exclusivo del campo de las finanzas. Al contrario, es muy utilizado diariamente y significa tener una posibilidad de aceptar o no una oferta pero no se está obligado.

### 1.0.1. Definición de opción en finanzas.

Una opción es un contrato estandarizado, y como en todo contrato, siempre hay una parte compradora y una parte vendedora. El comprador tendrá el derecho (oportunidad) de ejercer (comprar o vender) cierta cantidad de un activo al que llamaremos activo subyacente. Ese derecho permanecerá válido por un período de tiempo que es especificado previamente en el contrato al igual que el precio del activo subyacente. Por la adquisición de ese derecho, el comprador de la opción deberá pagar una prima. El derecho se puede ejercer o no según lo que le convenga al poseedor de la opción, sin embargo, el vendedor está obligado a cumplir con dicho contrato, y por adquirir esa obligación, recibirá la prima que pagará el comprador de la opción.

La lógica es exactamente la misma que cuando deseamos adquirir un producto. Al pagar por ese producto en la tienda, se tiene el derecho de llevárselo, mientras que el vendedor estará obligado a entregarlo, por ello recibirá una prima que sería el valor del pro-

ducto.

## 1.0.2. Tipos de opciones

Existen dos formas de clasificar las opciones, bien sea según el derecho que otorgan o en función del momento en que pueden ejercerse:

### Tipos de opciones según el derecho que otorgan:

#### 1 Opción de compra (call option):

Un contrato de opción de compra otorga a su comprador (poseedor de la opción) el derecho, pero no la obligación, de comprar algún activo subyacente, en un intervalo de tiempo predeterminado, y a un cierto precio preestablecido, mientras que otorga al vendedor de la opción, la obligación de vender el activo a ese precio en el momento que el comprador lo requiera.

#### 2 Opción de venta (put option):

Es un contrato por el cual el comprador de la opción adquiere el derecho de vender una cantidad de cierto activo subyacente, al precio fijado en el contrato en o hasta el vencimiento, y el vendedor adquiere la obligación de comprarlos a ese precio cuando el comprador de la opción así lo requiera.

Es evidente que el comprador y el vendedor de una opción tienen expectativas opuestas. Por ejemplo, para el caso de una opción de compra, el comprador estima un acrecentamiento en el precio del subyacente, así que desea asegurar la compra a un precio más bajo que el precio del mercado en el futuro, por esta razón deberá pagar una prima. Contrariamente, el vendedor de una opción de compra cree que el precio del mercado bajará en el futuro, por lo tanto piensa que el comprador no ejercerá, así que no estaría obligado a desprenderse del activo subyacente, con lo que saldría ganando el valor de la prima. Así, el vendedor puede obtener una ganancia máxima igual a la prima en el caso de que expire la opción sin ejercerse pero su pérdida es ilimitada en la medida que el precio del mercado supera al precio de ejercicio. En el caso de una opción de venta ocurre lo contrario.

**Tipos de opciones según el tiempo en que pueden ser ejercidas por el comprador, resaltan dos tipos de opciones:**

- **Opción europea:** Es un contrato en el que el comprador de la opción, puede ejercer (comprar o vender) el bien subyacente únicamente en la fecha de vencimiento establecida al inicio del contrato.
- **Opción americana:** Es un contrato en el que el comprador de la opción puede ejercer (comprar o vender) el bien subyacente durante el lapso de tiempo comprendido entre la emisión del contrato y la fecha de vencimiento.

### 1.0.3. Especificaciones en un contrato de opciones

En un contrato de opción se especifican cinco elementos:

1. Tipo de opción: opción de compra o de venta (americana o europea).
2. Activo subyacente: es el activo por el cual se hace el contrato de opción.
3. Cantidad del activo negociado: es la cantidad, en unidades, del activo subyacente que está estipulado que se puede comprar o vender por cada contrato de opción.
4. El tiempo hasta el vencimiento: es la fecha en que se vence el contrato.
5. Precio de ejercicio: Es el precio al que se podrá ejercer el contrato, es decir, el precio al que se podrá comprar o vender el activo subyacente, según la opción sea de compra o de venta. Es un aspecto muy relevante ya que determinará si es rentable ejercer la opción, es decir, si obtendremos beneficios o no.

### 1.0.4. Prima del contrato de opción

Este elemento no figura estipulado en el contrato y no es más que el precio de la opción. Actúa como un seguro para el vendedor de la opción, es decir, es la compensación al vendedor de la opción por el riesgo que asume, su valor que depende del precio del activo subyacente y que al tiempo de ejercicio ofrece como pago una cantidad denotada por  $C(t)$  para el caso de una opción de compra,  $P(t)$  para el caso de una opción de venta, dicha cantidad es un valor a determinar pues este varía según varios factores, uno de ellos es

el precio del activo subyacente, este a su vez varía según la oferta y la demanda del mismo. El cálculo del valor de la prima es el problema conocido como **valuación de opciones** (option pricing).

### Notación en opciones

- $S(t)$ : Precio de las acciones en el tiempo  $t$ .
- $K$ : Precio de ejercicio.
- $T$ : Fecha de ejercicio.
- $\sigma$ : La volatilidad del precio de las acciones (la volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente).
- $r$ : Tasa de interés libre de riesgo.
- $C(t)$ : Precio de una opción de compra al tiempo  $t$ .
- $P(t)$ : Precio de una opción de venta al tiempo  $t$ .

### Operaciones Básicas con Opciones

Acabamos de ver que según el derecho que otorgan hay dos tipos de opciones: Calls y Puts, y debido a que en cada contrato siempre interviene el comprador (o tomador de una posición larga) de la opción y el vendedor (o tomador de una posición corta) de la opción, entonces, sólo hay 4 tipos de posiciones con opciones:

1. Posición larga en una opción de compra.
2. Posición larga en una opción de venta.
3. Posición corta en una opción de compra.
4. Posición corta en una opción de venta.

#### 1.0.5. Estrategias básicas que puede adoptar el comprador de una opción de compra

La principal razón por la cual un inversionista usa opciones, es para asegurarse ante las variaciones indeseadas en el precio del bien subyacente sobre la cual se establece el contrato de opción.

Cuando un inversionista compra una opción de compra, está pensando que el activo subyacente aumentará su valor en el futuro, así, con la compra de opciones está fijando el precio del subyacente

a un precio por debajo de lo que espera que esté en el futuro. Con lo que lograría:

- Un mayor rendimiento de su inversión mediante un importante apalancamiento.
- Reducir el riesgo al asegurar el precio del activo en el contrato de opción.
- Aunque carezca de dinero para comprar acciones actualmente, puede optar por obtenerla más adelante y fijando su precio a través del pago adicional de la opción.
- Cubrir una venta en descubierto, es decir, asegurar la venta de un activo que aún no se posee, pero que se sabe que para la fecha de vencimiento del contrato si la tendrá.

### 1.0.6. Valor intrínseco de una opción europea

Es claro que si en la fecha de vencimiento  $T$  el precio de la acción  $S(T)$  es inferior al precio de ejercicio  $K$ , el titular de una opción de compra preferirá comprar las acciones subyacentes directamente en el mercado en vez de ejercer la opción, con lo que pagará una cantidad menor que  $K$  por cada acción. En otras palabras, sería irracional ejercer la opción. Por otra parte, si  $S(T) > K$ , el dueño de la opción podría ejercer su derecho, de hecho, podría vender las acciones inmediatamente, con lo que obtendría un beneficio neto instantáneo  $S(T) - K$ .

De aquí, llegamos a la siguiente expresión para el pago  $C(T, S(T))$  al vencimiento  $T$  de una opción de compra (europea):

$$C(T, S(T)) := \begin{cases} S(T) - K & \text{si } S(T) > K \\ 0 & \text{si } S(T) \leq K \end{cases}$$

o equivalentemente

$$C(T, S(T)) = (S(T) - K, 0)^+ = \max(S(T) - K, 0).$$

Para el caso de una opción Europea de venta

$$P(T, S(T)) = (K - S(T), 0)^+ = \max(K - S(T), 0).$$

### Put-Call Parity

Es una relación entre una opción Europea de compra  $C$  y una opción Europea de venta  $P$ , ambas con la misma fecha de vencimiento  $T$  y mismo precio de ejercicio  $K$ .

Significa que el precio de una opción de venta europea está determinada por el precio de una opción de compra europea con el misma fecha de vencimiento, mismo precio de ejercicio, mismo precio actual del activo subyacente y el valor descontado del precio de ejercicio.

Consideremos dos portafolios:

- $A$  : Una opción de compra más una cantidad en efectivo  $Ke^{-rT}$ .
- $B$  : Una opción de venta más una unidad del activo subyacente, en este caso, una acción.

En la fecha de vencimiento, los valores de estos portafolios son:

- $A$  :  $\max(S(T) - K, 0) + Ke^{-rT} = \max(S(T), K)$ .
- $B$  :  $\max(K - S(T), 0) + S(0) = \max(S(T), K)$ .

Así, las carteras siempre dan el mismo resultado,

$$C(T) + Ke^{-rT} = P(T) + S(0) \quad (1.1)$$

Esta relación es la put-call parity, también conocida como *ecuación fundamental de las opciones europeas*. Nótese que fue derivado sin suposiciones sobre el comportamiento de la acción.

Debido a esta relación, si podemos resolver un procedimiento para la valoración una opción europea de compra, automáticamente obtenemos un procedimiento para valorar un opción europea de venta, y viceversa.

El argumento de (1.1) puede hacerse más preciso a través del principio de no arbitraje. Si  $A$  valía más que  $B$  en el tiempo 0, entonces sería posible vender  $A$  (es decir, vender la opción de compra y pedir prestado el efectivo) y comprar  $B$  (es decir, comprar una opción de venta y una acción). Esto nos trae un beneficio instantáneo de  $A - B$  (el pago de  $B$  compensa exactamente el de  $A$  al vencimiento). Tal beneficio instantáneo viola el principio de no arbitraje. Un argumento similar aplica si  $B$  vale más que  $A$  en el tiempo cero.

### 1.0.7. Factores que determinan el precio de una opción y su notación

A continuación se hace mención de cada uno de estos factores y simultáneamente mostraremos la relación de cada uno de estos con el precio la opción cuando los demás están fijos, más adelante comprobaremos este razonamiento de forma analítica.

- **El precio de ejercicio,  $K$ .** Mientras más alto es  $K$ , menor debe ser la opción de compra y mayor debe ser la opción de venta.
- **El tiempo hasta el vencimiento,  $T$ .** Mientras mayor es el plazo de vigencia la opción, el titular de la opción habrá tenido mas tiempo de analizar el comportamiento del activo y podrá establecer si le conviene ejercer en el momento establecido o no. Por lo tanto, mayor será el precio de las opciones, tanto de compra como de venta.
- **El precio actual del activo subyacente:** Cuanto más alto es su precio en el momento de establecer el contrato, mayor debe ser el valor de la opción de compra ya que se incrementa la diferencia entre el valor del activo subyacente y el precio del ejercicio, es decir la ganancia que se obtiene al comprar. Ocurre lo contrario para una opción de venta.
- **La volatilidad del precio de las acciones,  $\sigma$ :** La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Los incrementos en la volatilidad del precio del bien subyacente siempre tienen el efecto de que aumenta el precio de las opciones porque aumentan la posibilidad de que el precio del bien subyacente rebase el precio de ejercicio o decaiga muy por debajo del precio de ejercicio, provocando que las opciones sean ejercidas.
- **La tasa de interés libre de riesgo,  $r$ .** Es el valor del dinero en el tiempo, es decir, es el beneficio que se obtiene al realizar una inversión en entidades con perfecta solvencia (que no hay riesgo). A medida que la tasa de interés libre de riesgo se incrementa, el precio de las opciones de compra aumenta y el precio de las opciones de venta disminuye, esto ocurre debido a que la tasa esperada de crecimiento en el precio de las acciones tiende a subir.
- **Los pagos de dividendos en efectivo durante la vida de la opción,** también alteran el precio de las opciones. En relación a las opciones sobre acciones, si se espera que la acción reparta altos dividendos, el valor de la opción de compra

disminuye y el valor de la opción de venta aumenta. Esto debido a que el precio del subyacente desciende en el mercado en una cantidad similar al pago de dividendos. Los dividendos en efectivo afectan de forma significativa el precio de una acción, reduciéndolo en la misma cuantía que el dividendo, por eso como el pago de dividendos influye sobre el precio del subyacente se tiene en cuenta a la hora de calcular el precio de las opciones.

## Capítulo 2

# Valuación de opciones con volatilidad constante

A partir de este momento se considerará el problema de valuación de opciones. Se abordará el modelo de Black–Scholes en este capítulo, el cual es un modelo para valorar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos y cuyo precio del activo subyacente es modelado por el movimiento Browniano Geométrico. Esta ecuación diferencial fue hallada y resuelta por Black y Scholes (1973). El modelo fue obtenido haciendo uso de las técnicas de análisis de cálculo estocástico, también llamado cálculo de Ito. Tal expresión es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, cuya solución depende de las condiciones iniciales y de frontera que proporciona el valor teórico de una opción Call o Put europea.

El valor de una opción es obtenida basándose en cierta información: el precio de ejercicio de la opción, el precio del subyacente,  $S(0, w)$ , la tasa de interés libre de riesgo,  $r$ , la volatilidad de las acciones y el tiempo hasta que la opción expire,  $T$ . Si, además, el subyacente paga dividendos durante la vida de la opción, entonces los pagos de dividendos esperados también juegan un papel muy importante en la valoración. Si bien todos estos parámetros se pueden explicar fácilmente a alguien con solo un poco de conocimiento de finanzas y matemáticas, la fórmula de Black-Scholes requiere conocimiento de la teoría de la probabilidad solo para comprender cómo usarla. Ahora, si queremos llegar más allá de simplemente entender cómo usar la fórmula e intentar entender de dónde viene y por qué tiene algo que ver con el valor de una opción, enton-

ces tenemos que trabajar un poco más. Este es el objetivo de este capítulo.

### 2.0.1. Supuestos básicos del modelo clásico de Black-Scholes

- El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- El precio del activo subyacente es conducido por el movimiento Browniano Geométrico.
- La volatilidad del precio del activo se mantiene constante a través del tiempo.
- Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas
- El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad.
- No hay costos de transacción (comisiones e impuestos)
- El mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos.
- Existe un mercado libre de crédito, un sistema bancario en que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.
- Los mercados están en equilibrio, es decir, no existe oportunidad de arbitraje.
- La información es simétrica, es decir, todos los agentes comparten exactamente la misma información.

El modelo se puede extender sin mayores complicaciones para incorporar dividendos y parámetros dependientes del tiempo.

### 2.0.2. Dinámica del precio del activo subyacente

Ahora presentaremos un modelo que describa la dinámica del precio de una acción en tiempo continuo. Consideremos un movimiento Browniano  $\{W_t, t \in [0, T]\}$  definido en un espacio de probabilidad con su filtración aumentada  $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, P)$ . Se supone que  $S(t)$ , el precio del activo subyacente al tiempo  $t$  es conducido por un movimiento Browniano Geométrico

$$dS(t, w) = \mu S(t, w)dt + \sigma S(t, w)dW(t, w). \quad (2.1)$$

Su solución será un proceso estocástico  $\{S(t), t \geq 0\}$  con trayectorias continuas y adaptado a la filtración  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ .

Vamos a describir cada uno de los componentes de la ecuación (2.1):

- $\mu \in R$ : es el parámetro de tendencia y representa el rendimiento medio esperado.
- $\sigma > 0$ : es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo.
- $dW(t, w)$ : Modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente.

Recordemos por ser  $W(t, w)$  un movimiento Browniano, entonces los incrementos  $dW(t, w)$  satisfacen lo siguiente

- $dW(t, w) \sim N(0, dt)$ .
- $E[dW(t, w)] = 0$ .
- $Var[dW(t, w)] = E[(dW(t, w))^2] = dt$ .

La solución de la ecuación estocástica

$$dS(t, w) = \mu S(t, w)dt + \sigma S(t, w)dW(t, w)$$

es

$$S(t, w) = S(0, w) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t, w)\right]. \quad (2.2)$$

Dicha expresión es invertible, en el sentido que se puede despejar  $W_t$ , además, conlleva a que,

$$\ln(S(t, w)) \sim N\left[\ln(S(0, w)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right].$$

Si dividimos la ecuación (2.2) entre  $S(0, w)$  y aplicamos logaritmo, obtenemos la forma log-normal

$$\ln\left(\frac{S(t, w)}{S(0, w)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t, w), \quad (2.3)$$

lo que muestra que el comportamiento del rendimiento de las acciones es lognormal.

Es de notar que

$$\ln \left( \frac{S(t, w)}{S(0, w)} \right) \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right], \quad (2.4)$$

ya que

$$W(t, w) \sim N[0, t], \quad E[W(t, w)] = 0 \text{ y} \\ \text{Var}[\sigma W(t, w)] = \sigma^2 \text{Var}[W(t, w)] = \sigma^2 t.$$

De la ecuación (2.2) y por las propiedades del valor esperado, se puede obtener que el valor esperado de  $S(t, w)$  es

$$E[S(t, w)] = S(0, w) \exp\left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\}.$$

Por otra parte, tomando en cuenta que

$$E[W(t, w)] = 0 \text{ y que } E[W^2(t, w)] = \text{Var}[W(t, w)] = t,$$

obtenemos que

$$\text{Var}[S(t, w)] = S^2(0, w) \exp\left\{ 2 \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} [\exp\{\sigma^2 t\} - 1].$$

### 2.0.3. Precio de una opción europea de compra

Para una mejor comprensión de lo citado anteriormente, considérese una opción europea de compra, un call sobre un subyacente cuyo precio evoluciona de acuerdo a un movimiento geométrico Browniano. Recordemos que el valor, o precio de una opción europea de compra debe ser función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato:

Consideremos una opción cuyo precio en el tiempo  $t$  se puede escribir como

$$C(t, w) = C(t, S(t, w)),$$

donde  $S(t, w)$  es el precio de una acción que sigue una ecuación diferencial estocástica  $dS(t, w) = \mu S(t, w)dt + \sigma S(t, w)dW(t, w)$ , es decir,  $\mu(t, S(t, w))$  y  $\sigma(t, S(t, w))$  constantes. Por el lema de Ito indicado en el apéndice, la ecuación diferencial del precio de la opción es

$$\begin{aligned} dC &= C_t dt + C_S dS + \frac{1}{2} C_{SS} dS^2 \\ &= C_t dt + C_S (\mu S(t, w) dt + \sigma S(t, w) dW(t, w)) + \frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S^2 dt \\ &= (C_t + C_S \mu S + \frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S^2) dt + C_S \sigma S dW. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que si el precio de una opción de compra es una función del precio de las acciones que sigue un movimiento Browniano Geométrico, entonces el precio de las opciones sigue un movimiento Browniano Geométrico.

$$dC = \mu_C C dt + \sigma_C C dW, \quad (2.5)$$

donde

- $\mu_C C = (C_t + C_S \mu S + \frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S^2)$ .
- $\sigma_C C = C_S \sigma S$ .

Notemos que los parámetros del proceso de Ito del precio de una opción de compra son más complejos que los del precio de las acciones.

#### 2.0.4. Modelo de Black-Scholes

El objetivo de esta sección es obtener la ecuación en derivadas parciales estocástica de Black-Scholes, el cual es el resultado más trascendental en la valuación de opciones, la solución de la misma es el precio de una opción europea.

Con el fin de obtener la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes que debe satisfacer  $C_t$ , vamos a construir un portafolios formado por únicamente tres activos: una cantidad  $N_1(t)$  de acciones, una cantidad  $N_2(t)$  de opciones y un bono que producen una tasa sin riesgo al vencimiento en que se invertirá  $Q(t)$  unidades monetarias. El valor nominal del portafolio al tiempo  $t$  es

$$P(t) = N_1(t)S(t) + N_2(t)C(t) + Q(t).$$

Podemos obtener el cambio en el valor del portafolio

$$\begin{aligned} dP &= N_1(dS) + N_2(dc) + dQ \\ &= N_1S(\mu dt + \sigma dW(t, w)) + N_2(\mu_C dt + \sigma_C dW(t, w)) + rQ dt. \end{aligned}$$

Denotemos por  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  la fracción de lo invertido en la acción, la opción y en el bono sin riesgo, con  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ , es decir, que todos los fondos disponibles se invierten en algún activo y la estrategia dinámica permanece en todo momento.

Tomemos  $w_1 = \frac{N_1 S}{P}$ ,  $w_2 = \frac{N_2 C}{P}$  y  $w_3 = \frac{Q}{P} = 1 - w_1 - w_2$ . Obtenemos así que

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{P} &= w_1(\mu dt + \sigma dW(t, w)) + w_2(\mu_C dt + \sigma_C dW(t, w)) + w_3 r dt \\
&= w_1(\mu dt + \sigma dW(t, w)) + w_2(\mu_C dt + \sigma_C dW(t, w)) \\
&\quad + (1 - w_1 - w_2)r dt \\
&= (w_1\mu + w_2\mu_C + (1 - w_1 - w_2)r)dt + (w_1\sigma + w_2\sigma_C)dW(t, w).
\end{aligned}$$

La idea es escoger a  $w_1$  y a  $w_2$  para diversificar el riesgo en todo momento  $t > 0$ , es decir, para eliminar el riesgo de mercado del portafolio, se debe considerar a  $w_1$  y a  $w_2$  tales que

$$\text{Var}\left(\frac{dP}{P}\right) = 0.$$

Esto se cumple si  $w_1\sigma + w_2\sigma_C = 0$ , lo que implica que debe cumplirse que

$$\frac{w_1}{w_2} = -\frac{\sigma_C}{\sigma}. \quad (2.6)$$

Como la cartera no tiene riesgo, se espera que gane la tasa de rendimiento sin riesgo, ver [26] :

$$E\left[\frac{dP}{P}\right] = r(t)dt.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
(w_1\mu + w_2\mu_C + (1 - w_1 - w_2)r(t))dt &= r(t)dt \\
w_1(\mu - r(t)) &= w_2(\mu_C - r(t)) \\
\frac{w_1}{w_2}(\mu - r(t)) &= -(\mu_C - r(t)).
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.6)

$$\begin{aligned}
-\frac{\sigma_C}{\sigma}(\mu - r(t)) &= -(\mu_C - r(t)) \\
\frac{\mu - r(t)}{\sigma} &= \frac{\mu_C - r(t)}{\sigma_C}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Esta última ecuación dice que la tasa de rendimiento por unidad de tiempo debe ser igual para ambos activos. Lo cual describe un concepto de equilibrio económico en este problema.

De no ser así, habría oportunidad de arbitraje hasta que se cumpla la igualdad. Además, notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\mu - r(t)}{\sigma} &= \frac{C\mu_C - Cr(t)}{\sigma_C C} \\ &= \frac{(C_t + C_S\mu S + \frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2 S^2) - Cr}{C_S\sigma S},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mu - r(t) = \frac{C_t + C_S\mu S + \frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2 S^2 - Cr}{C_S S}. \quad (2.8)$$

Reorganizando los términos, obtenemos la ecuación diferencial parcial lineal parabólica

$$\frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2 S^2 + r(t)C_S S - Cr + C_t = 0. \quad (2.9)$$

Esta última ecuación es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes del precio de una opción.

### 2.0.5. Solución de la ecuación diferencial parcial del precio de una opción

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (2.9), se debe tener en cuenta que las condiciones de frontera propias de la naturaleza del derivado financiero que se esté analizando para así proporcionar el valor del instrumento. En el caso de una opción Call europea con precio de ejercicio  $K$  y madurez  $T$ , las condiciones de frontera son las siguientes:

$$C(t, 0) = 0 \quad \text{y} \quad C(T, S(T)) = \max(0, S(T) - K).$$

Dada estas condiciones, la solución de dicha ecuación diferencial caracteriza el precio de una opción europea de compra sobre  $S(T)$ .

Es necesario considerar algunos cambios de variables convenientes. Sean

$$x = x(t, S(T)) \quad y = y(t, S(T)).$$

La idea es determinar dos funciones  $f(t)$  y  $g(x, y)$  tales que

$$C(t, S(t)) = f(t)g(x, y).$$

Vamos a calcular  $C_t$ ,  $C_S$  y  $C_{SS}$  para sustituir en la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} C_t &= f'(t)g(x, y) + f(t)\left[\frac{dg}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dt}\right] \\ C_S &= f(t)\left[\frac{dg}{dx}\frac{dx}{dS} + \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dS}\right] \\ C_{SS} &= f(t)\left[\left(\left(\frac{dg}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right) + \left(\frac{dx}{dS}\right)\left(\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dS}\right) + \left(\frac{d^2g}{dxdy}\right)\left(\frac{dy}{dS}\right)\right)\right)\right. \\ &\quad \left.+ \left(\left(\frac{dg}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dS^2}\right) + \left(\frac{dy}{dS}\right)\left(\left(\frac{d^2g}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dS}\right) + \left(\frac{d^2g}{dydx}\right)\left(\frac{dx}{dS}\right)\right)\right)\right]. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.9) y asumiendo que  $f \neq 0$ , dividimos entre  $f$  y obtenemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{f'(t)}{f(t)} - r\right)g(x, y) + \left[\left(\frac{dg}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dg}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\left[\left(\left(\frac{dg}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right) + \left(\frac{dx}{dS}\right)\left(\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dS}\right) + \left(\frac{d^2g}{dxdy}\right)\left(\frac{dy}{dS}\right)\right)\right)\right] \\ &+ \left[\left(\left(\frac{dg}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dS^2}\right) + \left(\frac{dy}{dS}\right)\left(\left(\frac{d^2g}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dS}\right) + \left(\frac{d^2g}{dydx}\right)\left(\frac{dx}{dS}\right)\right)\right)\right] \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$+ rS(t)f(t)\left[\frac{dg}{dx}\frac{dx}{dS} + \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dS}\right] = 0. \quad (2.12)$$

De aquí, obtenemos que

$$f'(t) = rf(t)$$

la solución de la ecuación diferencial junto con su condición inicial es

$$f(t) = e^{-r(T-t)}, \quad f(T) = 1.$$

Es por ello que la función  $f(t)$  representa el valor presente en  $t$  de una unidad monetaria en  $T$ .

Consideremos

$$y = (t, S(t)) = B(T-t), \quad y(T) = 0 \quad (2.13)$$

donde  $B$  es una constante por determinar. Observemos que

$$\frac{dy}{dt} = -B \quad (2.14)$$

y

$$\frac{dy}{dS} = \frac{d^2y}{dS^2} = 0. \quad (2.15)$$

Así, de la ecuación (2.11) se obtiene que

$$0 = \left( \frac{dg}{dx} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) - \left( \frac{dg}{dy} \right) B + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \left[ \left( \frac{dg}{dx} \right) \left( \frac{d^2x}{dS^2} \right) + \left( \frac{dx}{dS} \right)^2 \left( \frac{d^2g}{dx^2} \right) \right]$$

Si además suponemos que

$$\frac{dg}{dy} = \frac{d^2g}{dx^2}, \quad (2.16)$$

la cual es la ecuación diferencial parcial de calor y con ese supuesto, reescribimos nuevamente la ecuación (2.11) como:

$$\frac{d^2g}{dx^2} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \left( \frac{dx}{dS} \right)^2 - B \right] + \frac{dg}{dx} \left[ \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \frac{d^2x}{dS^2} + \frac{dx}{dS} rS(t) \right] \quad (2.17)$$

Si ahora suponemos que

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \left( \frac{dx}{dS} \right)^2 = B \quad (2.18)$$

se obtiene que

$$\frac{dg}{dx} \left[ \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \frac{d^2x}{dS^2} + \frac{dx}{dS} rS(t) \right] = 0. \quad (2.19)$$

Se puede denotar sin problema alguno a  $B = A^2$ , lo cual es muy conveniente para obtener la ecuación  $x(t, S(t))$  y reducir mas aún la ecuación (2.19), esto es,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \left( \frac{dx}{dS} \right)^2 = A^2 \Rightarrow \frac{dx}{dS} = \sqrt{\frac{2A^2}{\sigma^2 S^2(t)}} = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma S(t)} \quad (2.20)$$

de donde,

$$\begin{aligned}
x = \int dx &= \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \int \frac{dS}{S(t)} = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} (\ln(S(t)) - \ln(K)) + D(t) \\
&= \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + D(t).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde  $-\ln(S(t))$  es la constante de integración y  $D(t)$  una función por determinar.

Sustituyendo (2.18) en (2.19), obtenemos que

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t) \frac{d^2x}{dS^2} + \frac{dx}{dS} rS(t) = 0. \tag{2.22}$$

Usando  $x$  de la ecuación (2.21), obtenemos  $D(t)$  a partir de la ecuación (2.22)

$$D'(t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2(t)} \right) \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \sigma^2 S^2(t) + \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \left( \frac{1}{S(t)} \right) rS(t) = 0,$$

de donde

$$D'(t) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \sigma^2 + \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} r = 0,$$

por lo tanto

$$D'(t) = -\frac{\sqrt{2}A}{\sigma} r + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \sigma^2 \tag{2.23}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right). \tag{2.24}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, y puesto que es una función que depende del tiempo, se establece la solución junto con su condición inicial,

$$D(t) = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t). \tag{2.25}$$

Ahora, sustituyendo  $D(t)$  en (2.21), obtenemos que

$$x(t, S(t)) = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \left[ \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right] \tag{2.26}$$

y

$$x(T, S(t)) = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right).$$

Observemos que  $x(T, S(t))$  implica que  $\frac{x(T, S(t))\sigma}{A\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)$ , de donde

$$S(t) = Ke^{\left(\frac{x(T, S(t))\sigma}{A\sqrt{2}}\right)}.$$

El resultado de sustituir las condiciones iniciales  $f(T) = 1$ ,  $y(T) = 0$  y  $x(T, S(t))$  en  $C(T, S(t))$  es

$$\begin{aligned} C(T, S(t)) &= f(T)G(x(T, S(t)), y(T, S(t))) \\ &= g\left(\frac{\sqrt{2}A}{\sigma} \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right), 0\right) \\ &= \max(S(t) - K, 0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Así, el valor intrínseco de la opción en términos de  $f(t)$  y  $g(x, y)$ ,

$$C(T, S(t)) = \begin{cases} K(e^{\left(\frac{x(T, S(t))\sigma}{A\sqrt{2}}\right)} - 1), & \text{si } x(T, S(t)) \geq 0, \\ 0, & \text{si } x(T, S(t)) < 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Ya que  $S(t) > K \Rightarrow e^{\left(\frac{x(T, S(t))\sigma}{A\sqrt{2}}\right)} > 1 \Rightarrow x(T, S(t)) > 0$ .

Entonces  $C(T, S(t))$  representa el valor intrínseco de la opción, es decir, el pago de la opción en la fecha de vencimiento.

La ecuación diferencial parcial de calor (2.16) junto con su condición inicial  $g_0(x)$ ,

$$\frac{dg}{dy} = \frac{d^2g}{dx^2} \quad g = g(x, y) \quad -\infty < x < \infty \quad y > 0$$

y

$$g_0(x) := \begin{cases} K(e^{\left(\frac{x(T, S(t))\sigma}{A\sqrt{2}}\right)} - 1), & \text{si } x(T, S(t)) \geq 0. \\ 0, & \text{si } x(T, S(t)) < 0. \end{cases}$$

tiene como solución

$$g(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) e^{-\frac{(h-x)^2}{4y}} dh. \quad (2.29)$$

Ahora considere el siguiente cambio de variable,

$$v = \frac{h-x}{\sqrt{2y}},$$

el cual implica que

$$h = v\sqrt{2y} + x \quad \text{y a su vez implica que} \quad dh = \sqrt{2y}dv.$$

Además, considerando la condición inicial  $g_0(h) \equiv 0$  para  $h \leq 0$ , reescribimos a  $g(x, y)$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty g_0(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-x}{\sqrt{2y}}\right)^2} dh \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y}}}^\infty g_0(x + \sqrt{2y}v) e^{-\frac{1}{2}v^2} dv. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Al evaluar  $g_0(x)$  para  $x \leq 0$  en la ecuación (2.0.5), se puede escribir la integral anterior como

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty g_0(x) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-x}{\sqrt{2y}}\right)^2} dh \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y}}}^\infty g_0(x + \sqrt{2y}v) e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y}}}^\infty K[e^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}(x+\sqrt{2y}v)} - 1] e^{-\frac{1}{2}v^2} dv. \quad (2.32)$$

Al sustituir  $x$  y  $y$  en el límite inferior de integración en el exponente del integrando la ecuación de  $g(x, y)$ , obtenemos los siguientes cambios

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\sqrt{2y}} &= -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left[ \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{T-t} \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma S(t) \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \frac{K}{S(t)} \frac{1}{K}} \right) \right] \\ &= -\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma}{A\sqrt{2}(X - \sqrt{2}yv)} &= \frac{\sigma}{A\sqrt{2}} \left[ \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left( \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right) \right. \\
 &+ \left. \left( \sqrt{2}\sqrt{T-t} \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma S(t) \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \frac{K}{S(t)} \frac{1}{K} \right) v \right] \\
 &= \frac{\sigma}{A\sqrt{2}} \left[ \frac{\sigma}{A\sqrt{2}} \left( \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right) \right. \\
 &+ \left. \left( \sqrt{2}\sqrt{T-t} \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma S(t) \sigma \frac{K}{S(t)} \frac{1}{K} \right) v \right] \\
 &= \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sqrt{T-t}\sigma v.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

De aquí y haciendo  $L = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}$ , reescribimos la ecuación (2.32) como

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_L^\infty e^{\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sqrt{T-t}\sigma v\}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\
 &- \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_L^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv
 \end{aligned}$$

A partir de esta observación se establecen los cambios correspondientes en los límites de integración, es decir,

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sqrt{T-t}\sigma v\}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\
 &- \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.
 \end{aligned}$$

Recordemos que  $C(t, S(t)) = f(t)g(x, y)$ , donde  $f(t) = e^{-r(T-t)}$ , por lo tanto, de la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned}
 C(t, S(t)) &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{\{(-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sqrt{T-t}\sigma v\}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\
 &- \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.
 \end{aligned}$$

Al factorizar el cuadrado del argumento de la exponencial en el integrando, se tiene

$$\begin{aligned}
C(t, S(t)) &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{\{-\frac{1}{2}(v-\sigma\sqrt{T-t}v)^2\}} dv \\
&- \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.
\end{aligned}$$

Ahora consideremos para el primer sumando de esta última ecuación el cambio de variable  $\epsilon = v - \sigma\sqrt{T-t}$  y escribamos  $C(t, C_t)$  en términos de este cambio:

$$\begin{aligned}
C(t, S(t)) &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
&- \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.
\end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
C(t, S(t)) &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
&- \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^L e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.
\end{aligned}$$

Hemos llegado a la famosa fórmula de Black-Scholes. La podemos escribir de forma más compacta:

$$C(t, S(t)) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{r(T-t)}\Phi(d_2) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
t &< T \\
d_1 &= \frac{\text{Log}(\frac{S_0}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\text{Log}(\frac{S_0}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\
\Phi(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

La fórmula (2.35), representa el precio teórico de una opción de compra europea y dicho precio es la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes cuando la condición inicial es su

valor intrínseco.

A su vez, el precio de una opción put europea es

$$P(0) = -S(0, w)N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

La fórmula de Black-Scholes deja clara su dependencia con respecto a los parámetros  $(T, X, \sigma, r, s)$ .

### 2.0.6. Análisis de sensibilidad de la fórmula de Black-Sholes

En esta sección, analizaremos el cambio en el valor de la opción al alterar sólo una de las variables y mantener el resto de las variables fijas. Es aquí cuando nos referimos a las letras griegas, las cuales son indicadores que nos dan información acerca del cambio que presenta el precio de la opción cuando alguna de las variables de las que depende varía, por lo tanto, son parámetros de sensibilidad de las opciones.

Habíamos adelantado en la sección (1.0.7), un análisis intuitivo sobre los factores que afectan el precio de una opción call europea. De ello, podemos decir que la fórmula de B-S es una función creciente respecto a a la fecha de vencimiento  $T$ , respecto a la volatilidad  $\sigma$ , respecto a la tasa de interés libre de riesgo  $t$ , respecto al precio del subyacente  $S$  y es una función decreciente con respecto al precio de ejercicio  $K$ . Es decir, al aumentar la fecha de vencimiento, el precio del subyacente, si hay mayor volatilidad o si la tasa de interés libre de riesgo, entonces el precio de la opción call europea aumenta. Mientras que si el precio de ejercicio aumenta entonces el precio de la opción disminuye, Como veremos en la siguiente proposición.

Si  $C$  denota el precio de una opción call europea, entonces se cumplen:

$$\frac{dC}{dT} > 0, \quad \frac{dC}{dS} > 0, \quad \frac{dC}{d\sigma^2} > 0, \quad \frac{dC}{dr} > 0, \quad \frac{dC}{dK} < 0, \quad (2.37)$$

**Demostración.** El precio de una opción europea de compra es

$$C(0) = S_0e^{rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

donde

$$\begin{aligned}
d_2 &= \frac{\text{Log}\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_1 &= d_2 + \sigma\sqrt{T} = \frac{\text{Log}\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.
\end{aligned}
\tag{2.38}$$

Probemos que  $\frac{dC}{dT} > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dT} &= S_0 \frac{dN(d_1)}{dT} - K[e^{-rT} \frac{dN(d_2)}{dT} - re^{-rT} N(d_2)] \\
&= S_0 \frac{dN(d_1)}{dT} - Ke^{-rT} \left[ \frac{dN(d_2)}{dT} - rN(d_2) \right].
\end{aligned}$$

Por la regla de Leibniz se tiene que

$$\frac{dN(d_i)}{dT} = N'(d_i) \frac{dd_i}{dT}, \text{ para } i = 1, 2,$$

donde

$$\frac{dd_1}{dT} = \frac{2r + \sigma^2}{4\sigma\sqrt{T}}$$

y

$$\frac{dd_2}{dT} = \frac{2r - \sigma^2}{4\sigma\sqrt{T}}.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\frac{dC}{dT} = S_0 N'(d_1) \frac{dd_1}{dT} - Ke^{-rT} \left[ N'(d_2) \frac{dd_2}{dT} - rN(d_2) \right].$$

Además, observemos que

$$\frac{dd_2}{dT} = \frac{dd_1}{dT} - \frac{\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dT} &= \frac{dd_1}{dT} [S_0 N'(d_1) - Ke^{-rT} N'(d_2)] + \\
&\quad + \frac{Ke^{-rT} N'(d_2) \sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}} + rN(d_2) Ke^{-rT} \\
&= S_0 \frac{dd_1}{dT} [N'(d_1) - \frac{K}{S_0} e^{-rT} N'(d_2)] \\
&\quad + \frac{Ke^{-rT} N'(d_2) \sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}} + rN(d_2) Ke^{-rT}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{Ke^{-rT}N'(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}} > 0 \quad y \quad rN(d_2)Ke^{-rT} > 0.$$

Vamos a probar que

$$N'(d_1) - N'(d_2)\frac{K}{S_0}e^{-rT} = 0, \quad (2.39)$$

dicha ecuación se conoce como la ecuación fundamental de las griegas del modelo de Black-Scholes.

Para ello, debemos tener en cuenta lo siguiente

$$d_1^2 - d_2^2 = 2\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + 2rT \quad y \quad \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2 - d_2^2}.$$

Así, se tiene que

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{K}{S_0}e^{-rT}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} N'(d_1) - N'(d_2)\frac{K}{S_0}e^{-rT} &= N'(d_1) - N'(d_2)\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Es decir,

$$N'(d_1) - N'(d_2)\frac{K}{S_0}e^{-rT} = 0. \quad (2.41)$$

Por lo tanto

$$\frac{dC}{dT} > 0.$$

Las demás se prueban de forma similar.

■

### 2.0.7. Estimación de la volatilidad

De las 5 variables en la fórmula de Black-Scholes, la única que es desconocida al momento de valorar una opción es la volatilidad. Obtener una buena estimación de la volatilidad es crucial para valorar una opción. Para especificar la volatilidad, un enfoque habitual

y natural es utilizar un registro de los movimientos del precio de las acciones y estimarla como la desviación típica de los logaritmos de los rendimientos de la acción subyacente. El precio de las acciones se suele observar en intervalos fijos de tiempo (por ejemplo, cada día, cada semana, o cada mes).

Recordemos la ecuación (2.4), la varianza de los logaritmos de las rentabilidades es  $\sigma_t^2$ , donde  $t$  es el tiempo de duración del intervalo de tiempo en años. La variable,  $S^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}$ , es por lo tanto una estimación de  $\sigma^2$ . De ello puede estimarse como  $\hat{\sigma}^2$ , donde  $\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{t}$ .

Suponiendo que hay 252 días de negociación al año,  $t = \frac{1}{252}$ .

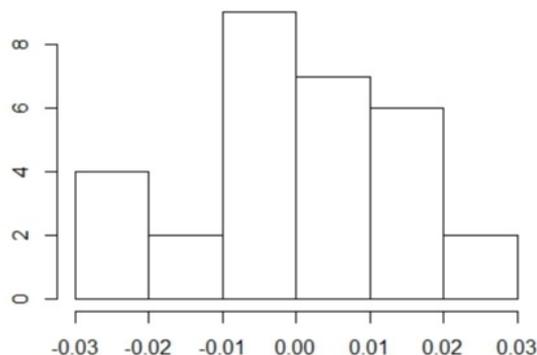
### 2.0.8. Aplicación de la fórmula de Black-Scholes

La intención de esta sección es exhibir una aplicación de la fórmula (B-S) para la valuación de una opción europea de compra sobre 1000 acciones de la IBM, además, comprobar lo expuesto relacionado a la sensibilidad de esta fórmula respecto a cada uno de sus parámetros. Los datos se escogieron para el periodo 2 de marzo al 16 de abril del año 2018 y el contrato de opción establece que se pretende comprar 1000 de dichas acciones y cuyas cantidades a considerar son:

Para este ejemplo, las cantidades a considerar son:

- $S_0 = 157.89$  precio actual( 16 de abril).
- $T = 30/365$  tiempo de vigencia del contrato pero anualizado.
- $K = \$153$  precio de ejercicio.
- $r = 7.68\%$  tasa de interés libre de riesgo a tres meses.
- $\sigma = 0.003755159$ . Esta fue obtenida como se explicó en la sección anterior, la varianza muestral de los logaritmos de las rentabilidades de los precios de la acción.

Previamente, se debe comprobar que los datos formados por los logaritmos de las rentabilidades siguen una distribución normal por que es una implicación del supuesto de (B-S) sobre el proceso que siguen los precios. En el Gráfico 1 se muestra el histograma de las rentabilidades y se observa que tiene cierto parecido al histograma de los datos de una distribución normal.



**Gráfico 1:** Tabla de frecuencia de la serie  $\ln(\frac{S_{\Delta t}}{S_t})$ .

Usaremos además el software R, el cual dispone básicamente de 6 pruebas de normalidad, Shapiro Wilk, Anderson Darling, Cramér-von Mises, Kolmogorov Smirnov, Pearson y Shapiro - Francia. Recordemos que en todas las pruebas de normalidad se plantean las hipótesis como sigue:

- $H_0$ : La muestra proviene de una distribución normal.
- $H_1$ : La muestra no proviene de una distribución normal.

El nivel de significancia que se trabajará es  $\alpha = 0.05$

Criterio de Decisión:

- Si  $p < \alpha$ . Se rechaza  $H_0$
- Si  $p \geq \alpha$ . No se puede rechazar  $H_0$

Utilizando el software en R para realizar el test de normalidad de Shapiro Wilk, el  $p$ -valor arrojado fue  $p = 0.8169$ , por lo que no podemos rechazar la hipótesis nula, así que podemos proceder con el análisis.

Ahora podemos sustituir los parámetros de la fórmula de (B-S) para obtener el precio de una opción europea sobre 1000 acciones de la IBM. Pero es necesario hacer las siguientes observaciones:

- Las cantidades  $S_0$ ,  $K$  y  $C$  se miden en la misma moneda de referencia.
- $T$  se mide en años. Es por eso que se utilizó  $T = 30/365$ .
- El precio que se ha determinado de la opción call europea es sólo para una acción, si el contrato es de  $N$  acciones, entonces el precio total se obtiene multiplicando  $N$  por el precio de la opción call europea de una acción.

Conseguimos primeramente los valores

- $d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = 2742.069$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 2742.068$

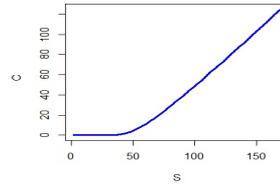
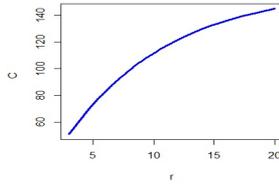
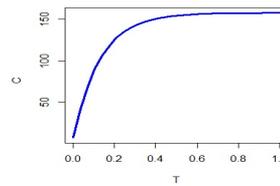
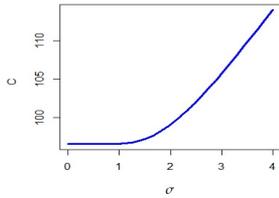
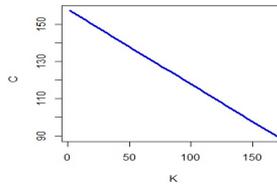
Por lo tanto, el precio de la opción para una acción es

$$C = S_0N(d_1) - Kexp\{-r(T)\}N(d_2) = \$96.58907.$$

Así, el precio de la opción para 1000 acciones es \$96589.07.

Ahora bien, vamos a comprobar que la fórmula de B-S para el precio de esta opción de compra europea es creciente respecto de  $r, S, T$  y de  $\sigma$  pero decreciente respecto de  $K$  tal y como lo muestran las ecuaciones en (2.37).

Con el fin de observar de forma tangible y de comprobar en la práctica lo que sucede con el precio de la opción europea de compra cuando varían los valores de solo una de las variables en la fórmula de Black-Scholes, mostraremos el gráfico de los precios la opción para el contrato establecido en esta sección al variar una variable dejando las demás fijas.

Sensibilidad respecto a  $r$       Sensibilidad respecto a  $S$ Sensibilidad respecto a  $\sigma$       Sensibilidad respecto a  $T$ Sensibilidad respecto a  $K$ 

El comportamiento de estas 5 gráficas muestra claramente que los precios de una opción europea de compra está en acuerdo con (2.37).

## 2.1. Volatilidad implícita

Sabemos muy bien que el estudio de los mercados financieros tiene como objetivo principal minimizar riesgos de pérdidas y maximizar los rendimientos de las inversiones. En las últimas décadas ha sido de gran interés por parte de investigadores matemáticos enfocarse principalmente en la valuación de derivados financieros, en modelos de tasas de interés y en el manejo del riesgo, en éste último enfoque, la variable o parámetro más importante es la volatilidad.

Muchas opciones se comercializan en el mercado y, por lo tanto,

tienen un precio ver ([26]). El precio de dicha opción se llama precio de mercado. Entonces, si la opción tiene un precio de mercado, podemos preguntar: ¿Qué volatilidad tendríamos que conectar a la fórmula Black-Scholes (junto con los otros parámetros) para obtener el precio de mercado? Dicho de otra manera, ¿qué volatilidad hace que el valor de Black-Scholes concuerde con el precio del mercado?. La volatilidad que responde a esta pregunta se denomina volatilidad implícita del stock para la opción dada.

Entonces, el concepto de volatilidad implícita nace de despejar la volatilidad de la fórmula de Black-Scholes partiendo de un precio de la opción ya conocido en el mercado. Este enfoque alternativo para inferir sobre la volatilidad de un activo determinado consiste en examinar los precios de las opciones financieras ya negociadas de cierto activo, para así determinar justamente el valor de  $\sigma$  que al ser sustituido en la fórmula de Black-Scholes, da como resultado el precio de la opción que ya fué observado en el mercado. Dicho de otra manera, se procede al revés, y dados precios de opciones observables en los mercados, se determina la volatilidad implícita con la fórmula de Black-Scholes.

### 2.1.1. Cálculo de la volatilidad implícita

No hay una fórmula general para la volatilidad implícita ([26]). Es decir, dado un precio de opción  $C$  en una acción  $S(t)$ , no existe una fórmula simple para producir la volatilidad implícita de  $S(t)$  con respecto a un precio  $C$  de una opción. Pero, si conocemos el precio de cierre de una opción de cierto día, así como  $r$ ,  $K$ ,  $S$  y  $T$ , podemos determinar la volatilidad que asumió el mercado para ese día.

Podríamos pensar en invertir la fórmula de Black-Scholes para  $\sigma$ . Desafortunadamente, esto no es posible, no podemos despejar explícitamente el valor en función de los otros parámetros, por lo tanto, la fórmula de B-S no permite que tengamos una solución analítica. Esto se debe a que los componentes de la fórmula de Black-Scholes son bastante complicados, especialmente la función de distribución normal acumulativa. Tales fórmulas complicadas a menudo no se invierten fácilmente, y se deben buscar otros métodos para obtener lo contrario. Por esta razón, si queremos calcular la volatilidad implícita de una opción, tenemos que utilizar un método numérico, por ejemplo, el método de Newton-Raphson o algún otro método iterativo, de modo que cada vez que se repite el método nos acercamos a la respuesta final, obteniendo así una aproximación de

$\sigma$ .

Un algoritmo simple para determinar la volatilidad implícita consiste en lo siguiente:

El proceso deberá calcular un valor de volatilidad de prueba aproximándolo sucesivamente mediante suposiciones cada vez mejores. Pero debemos saber cuándo detenernos, porque el procedimiento en sí nunca arroja la respuesta correcta. Por el contrario, solo produce una respuesta que es lo suficientemente cerca. Por ejemplo, si calculamos que la volatilidad implícita es 20.5234 por ciento, ¿importa si la volatilidad implícita correcta es 20.5235 por ciento? Esta es una pregunta subjetiva que debe ser respondida dentro del contexto del escenario de fijación de precios en particular.

El lugar más obvio para parar es cuando tenemos una volatilidad que produce un precio Black-Scholes exactamente igual al precio de mercado. También podemos tener un "error de tolerancia" preestablecida que nos dice qué tan cerca queremos llegar a la respuesta real.

La idea, es ver cual precio resultante de la opción es lo más parecido al que se paga en el mercado. Entonces, para cada uno de estos precios, se calcula su diferencia con el observado en el mercado con el objetivo de encontrar una diferencia igual a cero.

Algoritmo:

- PASO 1: Partir de una volatilidad implícita  $\sigma_1$  más alta que la volatilidad implícita real. Para asegurarnos de ello, evaluamos en la fórmula de B-S en  $\sigma_1$  junto con los valores conocidos de los otros 4 parámetros, si el valor resultante es mayor que el precio de la opción del mercado, entonces  $\sigma_1$  es mayor que la volatilidad implícita real (ya que la función para calcular la prima es una función creciente de la volatilidad).
- PASO 2: Ahora tenemos que hacer que nuestra próxima volatilidad más baja  $\sigma_0$ . Para esto, hacemos  $\sigma_0 = 0.000001$ .
- PASO 3: Inicializamos una variable  $D = 99999$ . La cual iremos actualizando y nos servirá para ir comparando la diferencia entre el precio real del mercado y el precio de la prima según la fórmula de B-S evaluada en una volatilidad de prueba. La idea es obtener una diferencia igual a cero. La volatilidad que haga que esa diferencia sea cero, será la volatilidad

implícita real.

- PASO 4: Inicializamos una variable  $i = 0$ . También se irá actualizando en una unidad mayor a la anterior. Esta es necesaria para contabilizar el número de iteraciones necesarias hasta obtener el cero de la diferencia antes mencionada, de forma que mientras el  $i$  sea menor que un número muy grande establecido, se siga realizando el proceso.
- PASO 5: Las variables de entrada serán  $T, r, K, S(0), C$  y  $Tol$ , donde  $C$  es el precio de la opción observado en el mercado con un tiempo de vencimiento  $T$ , tasa de interés libre de riesgo  $r$ , precio de ejercicio  $K$  y con  $S(0)$  el precio de la acción el día de emisión del contrato. Por otra parte,  $Tol$  sería la tolerancia de error para la diferencia de  $C$  el precio de B-S evaluado en la volatilidad de prueba. Podríamos estar satisfechos de obtener un error menor que 0.000001.
- PASO 6: Iterar el siguiente proceso:
  - Mientras  $|D| > Tol$  y  $i < 20000$ .
  - Establecemos  $\sigma_2 = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2}$  como volatilidad de prueba
  - Actualizar  $D$  como la diferencia del precio del mercado de la opción y el precio obtenido de la fórmula de B-S en la volatilidad de prueba.
    - Si  $D > 0.000001$ 
      - ◇ Hacer  $\sigma_0 = \sigma_2$
    - Si  $D < -0.000001$ 
      - ◇ Hacer  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

**Ejemplo:** Recordemos que habíamos calculado el precio de una opción a partir de los siguientes valores de los parámetros de la fórmula B-S:

$S_0 = 157.89$ ,  $K = 153$ ,  $T = 30/252$ ,  $r = 7.683$  y  $\sigma^2 = 0.003755159$ .  
Con lo que obtuvimos un valor para la prima  $C = 96.58907$ .

Ahora asumiendo que hemos observado el precio del mercado para la opción, el cual supongamos que es  $C = 96.58907$  en conjunto con los mismos valores para los 4 primeros parámetros  $S_0 = 157.89$ ,  $K = 153$ ,  $T = 30/252$  y  $r = 7.683$  utilizados con los que se obtuvo dicha prima. A través de el algoritmo anterior, queremos determinar el valor de la volatilidad implícita.

El valor de la volatilidad de partida por encima de la volatilidad real que tomamos fué  $\sigma_1 = 10$ . Fueron necesarias 9 iteraciones

hasta obtener una volatilidad implícita tal que el precio de la opción evaluada en ella, estuviese muy cerca del precio de la opción observado en el mercado con un margen de error de 0.000001. En la tabla 1 se muestra la evolución de este proceso.

Iteracion	Volatilidad de prueba	Volatilidad máxima	Volatilidad mínima	Diferencia
1	5	10	1e-06	-25.71636
2	2.500001	2.500001	1e-06	-5.514959
3	1.250001	1.250001	1e-06	-0.20721391
4	0.6250009	0.6250009	1e-06	-2.220807e-05
5	0.312501	0.6250009	0.312501	3.073246e-06
6	0.468751	0.6250009	0.468751	3.066913e-06
7	0.5468759	0.6250009	0.5468759	2.156787e-06
8	0.5859384	0.5859384	0.5468759	-2.541945e-06
9	0.5664072			7.033086e-07

Cuadro 2.1: Calculo de volatilidad implícita

Obteniéndose así que  $\sigma = 0.5859384$  en el primer valor mas cercano a la volatilidad real tal que  $C \simeq BS(\sigma)$  con un margen de error de 0.000001. Esto se puede ver en el Cuadro 2.2.

Esta sería la técnica para construir la sonrisa de volatilidad aplicando este algoritmo a una serie de precios en el mercado para las acciones con mismos parámetros excepto variando el precio de ejercicio. Así obtener distintas volatilidades.

### 2.1.2. Sonrisa de la volatilidad

Ya sabemos que cualquier opción tiene una volatilidad implícita asociada, entonces podemos preguntarnos: ¿Son iguales todas las volatilidades implícitas (para todas las opciones enumeradas) en la misma acción subyacente?.

Respecto a la variable volatilidad hay cientos de artículos y libros que describen, o tratan de describir el comportamiento de la volatilidad ver ([19]- [24]). Desafortunadamente, la práctica de efectuar los diversos procedimientos teóricos o prácticos para determinar la volatilidad con base en precios observados en el mercado, han dado como resultado que la volatilidad es variable, de hecho, una opción en el mismo subyacente con un precio de ejercicio o vencimiento diferente puede tener una volatilidad implícita diferente.

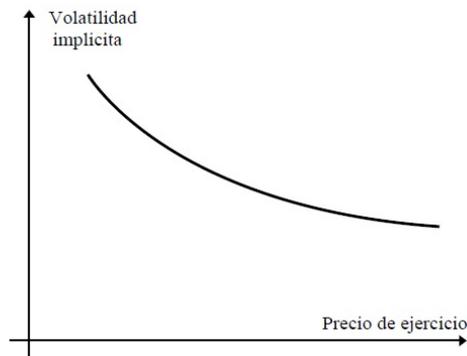
En particular, su gráfica tiene forma de U con respecto al precio de ejercicio. La relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio se le llama *curva sonrisa* o *sonrisa de la volatilidad*. Esto quiere decir que una acción o índice no tiene una volatilidad implícita, sino que tiene muchas opciones para cada opción en el activo.

### Estructura de la volatilidad implícita

La estructura de la volatilidad implícita se puede dividir en dos componentes:

- **Sonrisa de volatilidad:** Es la forma en que la volatilidad implícita (de una acción o índice) varía con el precio de ejercicio para opciones de vencimiento fijo.
- **Estructura temporal de la volatilidad:** Describe la forma en que la volatilidad implícita en el dinero varía con el tiempo hasta el vencimiento.

En la volatilidad implícita sobre precios de las acciones, es frecuente observar que la volatilidad del precio de las acciones tiende a aumentar cuando los precios disminuyen para opciones fuera de dinero y tiende a disminuir cuando los precios aumentan, [véase el Gráfico 7].



**Gráfico 7:** Curva sonrisa de volatilidad.

Esto se llama sesgo negativo. Queremos examinar las implicaciones de esto para el precio de las opciones.

Dada la evidencia empírica existente en contra del supuesto de volatilidad constante de la fórmula de Black-Scholes, los investigadores en matemáticas financieras han tratado de proponer modelos alternativos que traten de incorporar el efecto de la curva sonrisa.

Recordemos que en igualdad de condiciones, los valores de Black-Scholes aumentan a medida que la volatilidad del subyacente aumenta. Dicho de otra forma, las opciones de negociación con volatilidades implícitas más altas son más caras. Entonces, a medida que los precios de ejercicio disminuyen, los precios de las opciones aumentan en relación con una sonrisa plana. Por lo tanto, las opciones de venta fuera del dinero son más caras de lo que Black-Scholes predice. Por el contrario, a medida que aumentan los precios de ejercicio, los valores de las opciones disminuyen (en relación con una sonrisa plana) debido a la menor volatilidad. Eventualmente, los precios caen por debajo del nivel dado por la volatilidad histórica. En conclusión, las opciones de compra dentro del dinero son menos costosas de lo que Black-Scholes predice.

Dados estos hechos, surgen tres hipótesis básicas y opuestas con respecto a Black-Scholes:

- El mercado está equivocado y Black-Scholes tiene razón.
- El mercado está bien y Black-Scholes está equivocado.
- Ambos están equivocados.

Digamos que el mercado es correcto significa que no hay oportunidades de arbitraje. Si este es el caso, entonces la existencia de la sonrisa de volatilidad indica que la volatilidad del precio de las acciones no es constante y nos interesaría saber cuál es la explicación teórica correcta para el sesgo de volatilidad, y si es posible construir un modelo que lo explique.

La hipótesis más obvia con respecto a la volatilidad es que la volatilidad en sí misma es aleatoria. Las teorías de movimientos de precios de acciones en las que la volatilidad es aleatoria se conocen como modelos de volatilidad estocástica. Esto significa que tomamos como hipótesis que a medida que evoluciona el precio de una acción, la volatilidad de la acción cambia aleatoriamente. Esto será discutido en el próximo capítulo.



## Capítulo 3

# Valuación de opciones con volatilidad estocástica

El modelo de valoración de opciones de Black-Scholes (1973) ha sido muy utilizado y a pesar del éxito que ha alcanzado, se ha documentado su tendencia a valorar opciones muy dentro o muy fuera de dinero de forma equivocada. Esta inconsistencia se conoce como "sonrisa de volatilidad". Esto se debe a la hipótesis poco realista del modelo de (B-S), según la cual el precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico con volatilidad constante.

Es por ello que la volatilidad en los rendimientos de un activo financiero es una variable fundamental en el modelo de (B-S) para estimar el valor de una opción financiera. Su importancia reside en su capacidad para explicar y fundamentar la magnitud e incidencia temporal de las variaciones en el precio de la opción ante variaciones en el precio en el subyacente.

Con el fin de obtener mejores estimaciones de los precios de las opciones, han surgido los modelos de Volatilidad Estocástica. Estos modelos permiten explicar de forma consistente por qué opciones con diferentes precios de ejercicios y fechas de vencimientos tienen distintas volatilidades implícitas calculadas con el modelo (B-S), lo que se conoce como la sonrisa de volatilidad. Por lo tanto, permiten valorar las opciones de forma más eficiente.

En este enfoque la volatilidad cambia en el tiempo de acuer-

do con un proceso estocástico, usualmente especificado mediante una ecuación diferencial estocástica que acompaña la dinámica del precio del activo subyacente. Es decir, los modelos de volatilidad estocástica presentan dos factores estocásticos, uno para describir al activo subyacente y otro para la volatilidad de sus precios. Estos modelos descansan en supuestos más realistas que los del modelo de (B-S) el cual supone una volatilidad constante, por lo que refleja sólo una pequeña parte de la complejidad de los mercados de derivados. Por ello, los modelos de valuación de opciones con volatilidad estocástica han resultado ser más apropiados. La evidencia empírica muestra que estos modelos que consideran a la volatilidad como estocástica, proporcionan estimaciones más precisas, a diferencia del modelo clásico de (B-S).

En este capítulo vamos a desarrollar el objetivo principal de nuestro trabajo: Los Modelos de Volatilidad Estocástica. Más específicamente, se presenta el modelo desarrollado por Hull-White en el año 1987 y el modelo de Heston en el año 1993 los cuales describiremos detalladamente.

### 3.1. Varianza como función conocida del tiempo

Como bien sabemos, la volatilidad del precio de las acciones no es constante ni observable en el tiempo. Supongamos que esta es una función del tiempo conocida  $\sigma_t$ .

Si asumimos además que el precio del subyacente sigue una distribución log-normal, entonces el proceso neutral al riesgo que conduce al precio de las acciones es,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dU_t, \quad (3.1)$$

lo que implica que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)(T - t) + \sigma_t \sqrt{T - t} \xi\right\}, \quad (3.2)$$

donde  $\xi$  es una variable aleatoria normal estándar, el proceso  $(U_t)_{t \in [0, T]}$  es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada  $(\Omega^U, F^U, (F_t^U)_{t \in [0, T]}, P^U)$ .

Así, la fórmula de (B-S) será modificada, el parámetro de varianza se sustituye por la varianza promedio,

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(u) du.$$

Desafortunadamente, por lo general la volatilidad es una función del tiempo desconocida. Así, la alternativa más idónea es modelarla como un proceso estocástico como veremos en la siguiente sección.

## 3.2. Modelo de Hull-White

En esta sección se presenta una metodología para valorar una opción sobre una acción con volatilidad estocástica desarrollada por Hull-White en el año 1987. Consiste en una fórmula que contempla una serie de Taylor hasta términos de tercer orden, siendo esta una aproximación para la prima.

El modelo se basa en asumir que la varianza del precio de las acciones sigue un movimiento Browniano Geométrico, que el precio del subyacente tiene una distribución log-normal y que no hay correlación entre el precio del subyacente y la volatilidad del mismo. Esto es que cumpla las siguientes tres condiciones,

■

$$d\sigma_t^2 = \alpha\sigma_t^2 dt + \beta\sigma_t^2 dW_t, \quad (3.3)$$

donde el proceso  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada

$$(\Omega^W, F^W, (F_t^W)_{t \in [0, T]}, P^W).$$

■

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma_t S(t) dU(t). \quad (3.4)$$

■

$$Cov(dU_t, dW_t) = 0. \quad (3.5)$$

De forma análoga en que se obtuvo (2.2) de la ecuación (2.1), la varianza en cualquier instante  $u \geq t$  está dada por la solución de la ecuación (3.3), esto es

$$\sigma_u^2 = \sigma_t^2 e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})(u-t) + \beta(\sqrt{u-t})\xi}, \quad (3.6)$$

donde  $\xi \sim N(0, 1)$ .

Se define así la varianza estocástica promedio

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_t^2 e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})(u-t) + \beta(\sqrt{u-t})\xi} du.$$

Tomando  $y = u - t$ , tenemos que

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} e^{\beta\sqrt{y}\xi} dy. \quad (3.7)$$

Obsérvese que no es fácil de calcular esta integral. Para estimar la volatilidad, algunos autores han empleado métodos basándose en la simulación de Montecarlo.

### 3.2.1. Precio de una opción europea de compra

Sea  $F_t = F_t^U \otimes F_t^W$  la filtración dada por la  $\sigma$ -álgebra producto de las filtraciones aumentadas  $F_t^U$  y  $F_t^W$ . En un mundo neutral al riesgo, el precio de una opción europea de compra con volatilidad  $\sigma_t^2$ , satisface

$$c(t, S(t), \sigma_t^2) = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - K, 0) | S(t), \sigma_t^2]. \quad (3.8)$$

Sea  $f(S_T | S(t), \sigma_t^2)$  la función de densidad de  $S_T$  condicionada a  $S(t)$  y a  $\sigma_t^2$ . Entonces

$$c(t, S(t), \sigma_t^2) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) f(S_T | S(t), \sigma_t^2) dS_T. \quad (3.9)$$

Además, sean  $g$  la densidad de  $S_T$  condicionada a  $S(t)$  y a  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$  y  $h$  la densidad de  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$  condicionada a  $\sigma_t^2$ .

Observemos primero que con algún abuso de notación,

$$f(S_T | S(t), \sigma_t^2) = \int_0^\infty g(S_T | S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en la ecuación (3.9) y agrupando constantes respecto de  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} c(t, S(t), \sigma_t^2) &= \int_0^\infty \left[ e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T | S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2) dS_T \right] \\ &\quad \times h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \\ &= \int_0^\infty C_{BS}(t, S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $C_{BS}(t, S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2)$  es el precio de (B-S) con varianza  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$ .

La última igualdad se obtiene a partir de que  $Cov(dU_t, dW_t) = 0$ , ya que esto implica que la distribución condicional de  $\ln(\frac{S_T}{S(t)})$ , dado  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$  es una Normal con media  $(r - \frac{\bar{\sigma}_{t,T}^2}{2})(T - t)$  y varianza  $\bar{\sigma}_{t,T}^2(T - t)$ .

A través de la ecuación (3.11), Hull-White han demostrado que cuando la volatilidad es estocástica, pero no está correlacionada con el precio de la acción, el precio de una opción de compra europea es la fórmula de Black-Scholes integrada sobre la distribución de la varianza promedio durante la vida de la opción.

Recordemos así que

$$C_{BS}(t, S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S(t)}{K}) - (r + \frac{\bar{\sigma}_{t,T}^2}{2})(T - t)}{\bar{\sigma}_{t,T}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{\sigma}_{t,T}^2(T - t)}.$$
(3.12)

### 3.2.2. Método de aproximación para el precio de la opción.

En la ecuación (3.11), denotaremos a  $C_{BS}(t, S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2)$  por  $C_{BS}(\bar{\sigma}_{t,T}^2)$  y sustituyendolo por su desarrollo de Taylor alrededor de  $\hat{\sigma}_{t,T}^2 := E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \int_0^\infty \bar{\sigma}_{t,T}^2 h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2$ , procedemos de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
c(t, S(t), \sigma_t^2) &= \int_0^\infty C_{BS}(t, S(t), \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \\
&= \int_0^\infty \left[ C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{\delta C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{\delta^3 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^3 + \dots \right] h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \\
&= C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2) \int_0^\infty h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \\
&\quad + \frac{\delta C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)} \left[ \int_0^\infty \bar{\sigma}_{t,T}^2 h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \right. \\
&\quad \left. - \hat{\sigma}_{t,T}^2 \int_0^\infty h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} \int_0^\infty (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^2 h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\delta^3 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} \int_0^\infty (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^3 h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 + \dots \\
&= C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} Var[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\delta^3 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} Sesgo[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] + \dots
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Hemos obtenido que el precio de una opción europea de compra en términos de las derivadas parciales del precio de (B-S) evaluadas en  $\hat{\sigma}_{t,T}^2$ ,

$$\begin{aligned}
c(t, S(t), \sigma_t^2) &= C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} Var[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\delta^3 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} Sesgo[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] + \dots
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De acuerdo con esta última ecuación, debemos calcular  $\hat{\sigma}_{t,T}^2 = E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2]$ ,  $Var[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2]$  y  $Sesgo[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2]$ . De la ecuación (3.7), tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{t,T}^2 &= E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] \\
&= E \left[ \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} e^{\beta\sqrt{y}\xi} dy \right] \\
&= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} E \left[ e^{\beta\sqrt{y}\xi} \right] dy \\
&= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} \left[ \int_0^{T-t} e^{\beta\sqrt{y}\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right] dy \\
&= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} \left[ \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\xi^2 - 2\beta\sqrt{y}\xi + \beta^2 y}{2}\right) + \frac{\beta^2 y}{2}} d\xi \right] dy \\
&= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} \left[ e^{\frac{\beta^2 y}{2}} \int_0^{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi - \beta\sqrt{y})^2}{2}} d\xi \right] dy \\
&= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} e^{\frac{\beta^2 y}{2}} dy \\
&= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{\alpha y} dy \\
&= \sigma_t^2 \left( \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha(T-t)} \right). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Supongamos que  $\alpha = 0$  o muy pequeña, aplicando *L'Hôpital* obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha(T-t)} \right) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{(T-t)e^{\alpha(T-t)}}{(T-t)} \right) \\
&= 1. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso se tiene que

$$\hat{\sigma}_{t,T}^2 = E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma^2. \tag{3.17}$$

Ahora calculemos  $Var[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2]$ .

$$\begin{aligned}
Var[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= E[(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^2 | \sigma_t^2] \\
&= E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] - (E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2])^2 \\
&= E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] - \hat{\sigma}_{t,T}^4. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.7), se tiene que

$$\begin{aligned}
 E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] &= E \left[ \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left( \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} e^{\beta\sqrt{y}\xi} dy \right)^2 \right] \\
 &= E \left[ \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left( \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} e^{\beta W_y} dy \right)^2 \right] \\
 &= E \left[ \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \left( e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})y} e^{\beta W_y} \right) \left( e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})x} e^{\beta W_x} \right) dy dx \right] \\
 &= E \left[ \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \left( e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})(y+x)} \right) \left( e^{\beta(W_y + W_x)} \right) dy dx \right] \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \left( e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})(y+x)} \right) E \left[ e^{\beta(W_y + W_x)} \right] dy dx.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

En el Apéndice se prueba que

$$E[e^{\beta(W_y + W_x)}] = e^{\frac{\beta^2}{2}(y+x+2\min(x,y))}. \tag{3.20}$$

Sean  $\gamma = 2\alpha + \beta$  y  $\phi = \alpha + \beta^2$ ,

$$\begin{aligned}
E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})(y+x)} e^{\frac{\beta^2}{2}(y+x+2\min(x,y))} dy dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 \min(x,y)} dy dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[ \int_0^x e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 \min(x,y)} dy \right. \\
&\quad \left. + \int_x^{T-t} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 \min(x,y)} dy \right] dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[ \int_0^x e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 y} dy \right. \\
&\quad \left. + \int_x^{T-t} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 x} dy \right] dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[ e^{\alpha x} \int_0^x e^{(\alpha+\beta^2)y} dy + \right. \\
&\quad \left. e^{(\alpha+\beta^2)x} \int_x^{T-t} e^{\alpha y} dy \right] dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[ e^{\alpha x} \left( \frac{e^{(\alpha+\beta^2)x} - 1}{\alpha + \beta^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{(\alpha+\beta^2)x} \left( \frac{e^{\alpha(T-t)} - e^{\alpha x}}{\alpha} \right) \right] dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[ \left( \frac{e^{(2\alpha+\beta^2)x} - e^{\alpha x}}{\alpha + \beta^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{e^{(\alpha+\beta^2)x} e^{\alpha(T-t)} - e^{(2\alpha+\beta^2)x}}{\alpha} \right) \right] dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[ \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{\alpha x}}{\phi} \right) + \left( \frac{e^{\phi x} e^{\alpha(T-t)} - e^{\gamma x}}{\alpha} \right) \right] dx \\
&= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[ \frac{e^{\gamma(T-t)} - 1}{\phi \gamma} - \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\phi \alpha} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{\gamma(T-t)} - e^{\alpha(T-t)}}{\phi \alpha} - \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\gamma \alpha} \right]
\end{aligned}$$

(3.21)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[ e^{\gamma(T-t)} \left( \frac{1}{\gamma\phi} + \frac{1}{\alpha\phi} - \frac{1}{\gamma\alpha} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{\alpha\phi} + \frac{1}{\alpha\gamma} - \frac{1}{\gamma\phi} \right) - \frac{2e^{\alpha(T-t)}}{\phi\alpha} \right] \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[ e^{\gamma(T-t)} \frac{2}{\gamma\phi} + \frac{2}{\gamma\alpha} - \frac{2e^{\alpha(T-t)}}{\alpha\phi} \right] \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[ \frac{2e^{\gamma(T-t)}}{\gamma\phi} + \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\phi} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\gamma\phi} + \frac{1}{\alpha\phi} - \frac{1}{\gamma\alpha} &= \frac{\alpha + \gamma - \phi}{\alpha\phi\gamma} \\
 &= \frac{\alpha + (2\alpha + \beta^2) - (\alpha + \beta^2)}{\alpha\phi\gamma} \\
 &= \frac{2}{\phi\gamma}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha\phi} + \frac{1}{\alpha\gamma} - \frac{1}{\gamma\phi} &= \frac{\gamma + \phi - \alpha}{\alpha\phi\gamma} \\
 &= \frac{(2\alpha + \beta^2) + (\alpha + \beta^2) - \alpha}{\alpha\phi\gamma} \\
 &= \frac{2(\alpha + \beta^2)}{\phi\gamma} \\
 &= \frac{2}{\gamma}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De igual manera que si  $\alpha = 0$  o muy pequeña, entonces,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2]) = \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[ \frac{2e^{\beta^2(T-t)}}{\beta^4} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{2\alpha + \beta^2} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\alpha + \beta^2} \right) \right) \right] \tag{3.25}$$

Haciendo  $h = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{2\alpha + \beta^2} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\alpha + \beta^2} \right)$  Se tiene que

$$\begin{aligned}
h &= 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\alpha + \beta^2} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\alpha} \right) \\
&= 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{-2}{(2\alpha + \beta^2)^2} - \frac{(T-t)e^{\alpha(T-t)}(\alpha + \beta^2) - e^{\alpha(T-t)}}{(\alpha + \beta^2)^2} \right) \\
&= 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{-2}{(2\alpha + \beta^2)^2} - \frac{(T-t)e^{\alpha(T-t)}(\alpha + \beta^2) - e^{\alpha(T-t)}}{(\alpha + \beta^2)^2} \right) \\
&= 2 \left( \frac{-2}{\beta^4} - \frac{(T-t)\beta^2 - 1}{\beta^4} \right) \\
&= 2 \left( \frac{-(T-t)\beta^2 - 1}{\beta^4} \right) \\
&= -2 \left( \frac{(T-t)\beta^2 + 1}{\beta^4} \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo tanto, si  $\alpha = 0$  o muy pequeña, entonces

$$\frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\phi} \right) = -2 \left( \frac{(T-t)\beta^2 + 1}{\beta^4} \right). \tag{3.27}$$

Obteniéndose por la ecuación (3.21) que

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] = \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left( \frac{2(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4} \right). \tag{3.28}$$

Por lo que para  $\alpha = 0$ , de (3.17), (3.18) y (3.28) se tiene que

$$Var[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^4 \left( \frac{2(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4(T-t)^2} - 1 \right). \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
Sesgo[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= E[(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2])^3 | \sigma_t^2] \\
&= E[(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_t^2)^3 | \sigma_t^2] \\
&= E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 - 3\bar{\sigma}_{t,T}^4 \hat{\sigma}_t^2 + 3\bar{\sigma}_{t,T}^2 \hat{\sigma}_t^4 - \hat{\sigma}_t^6 | \sigma_t^2] \\
&= E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] - 3\hat{\sigma}_t^2 E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] + 3\hat{\sigma}_t^4 E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] - \hat{\sigma}_t^6 \\
&= E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] - 3\hat{\sigma}_t^2 E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] + 3\hat{\sigma}_t^4 \hat{\sigma}_t^2 - \hat{\sigma}_t^6 \\
&= E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] - 3\hat{\sigma}_t^2 E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] + 2\hat{\sigma}_t^6.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (3.28)

$$Sesgo[\bar{\sigma}_{t,T}^2|\sigma_t^2] = E[\bar{\sigma}_{t,T}^6|\sigma_t^2] - 3\sigma_t^2 \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left( \frac{2(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4} \right) + 2\sigma_t^6$$

Por otra parte, por la ecuación (3.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} E[\bar{\sigma}_{t,T}^6|\sigma_t^2] &= E \left[ \left( \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{-\frac{\beta^2}{2}y} e^{\beta\sqrt{y}\xi} dy \right)^3 \right] \\ &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} E \left[ \left( \int_0^{T-t} e^{-\frac{\beta^2}{2}y} e^{\beta\sqrt{y}\xi} dy \right)^3 \right] \\ &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} E \left[ \left( \int_0^{T-t} e^{(\alpha-\frac{\beta^2}{2})y} e^{\beta\sqrt{y}\xi} dy \right)^3 \right] \\ &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} E \left[ \left( \int_0^{T-t} e^{-\frac{\beta^2}{2}y} e^{\beta W_y} dy \right)^3 \right] \\ &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} E \left[ \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-\frac{\beta^2}{2}y} e^{\beta W_y} e^{(\alpha-\frac{\beta^2}{2})x} e^{\beta W_x} \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\frac{\beta^2}{2}z} e^{\beta W_z} dy dx dz \right] \\ &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-\frac{\beta^2}{2}(y+x+z)} \\ &\quad \times E \left[ e^{\beta(W_y+W_x+W_z)} \right] dy dx dz. \end{aligned} \tag{3.31}$$

De forma análoga como en (3.21), se obtiene que

$$E[e^{\beta(W_y+W_x+W_z)}] = e^{\frac{\beta^2}{2}(y+x+z+2\min(x,y)+2\min(y,z)+2\min(x,z))}.$$

Por lo tanto, si hacemos  $m = \min(x, y) + \min(y, z) + \min(x, z)$

$$m = \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\beta^2 m} dy dx dz. \tag{3.32}$$

Si dividimos la región de integración  $D = [0, T - t]^3$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 g_1 & : 0 \leq y \leq x \leq z \leq T - t \\
 g_2 & : 0 \leq z \leq x \leq y \leq T - t \\
 g_3 & : 0 \leq x \leq y \leq z \leq T - t \\
 g_4 & : 0 \leq z \leq y \leq x \leq T - t \\
 g_5 & : 0 \leq x \leq z \leq y \leq T - t \\
 g_6 & : 0 \leq y \leq z \leq x \leq T - t.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Obsérvese que en la región  $g_1$  se tiene que

- $\min(x, y) = y.$
- $\min(x, z) = x.$
- $\min(y, z) = y.$

Se puede ver de forma análoga para las demás regiones. Así

$$\begin{aligned}
 E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] & = \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\beta^2 m} dy dx dz \\
 & = \int_0^{T-t} \int_0^z \int_y^z e^{\beta^2(2y+x)} dx dy dz \\
 & \quad + \int_0^{T-t} \int_0^y \int_z^y e^{\beta^2(2z+x)} dx dz dy \\
 & \quad + \int_0^{T-t} \int_0^z \int_x^z e^{\beta^2(2x+y)} dy dx dz \\
 & \quad + \int_0^{T-t} \int_0^x \int_z^x e^{\beta^2(2z+y)} dy dz dx \\
 & \quad + \int_0^{T-t} \int_0^y \int_x^y e^{\beta^2(2x+z)} dz dx dy \\
 & \quad + \int_0^{T-t} \int_0^x \int_y^x e^{\beta^2(2y+z)} dz dy dx.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\text{Haganos } t = \int_0^{T-t} \int_0^z \int_y^z e^{\beta^2(2y+x)} dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
 t &= \int_0^{T-t} \int_0^z e^{2\beta^2 y} \int_y^z e^{\beta^2 x} dx dy dz \\
 &= \int_0^{T-t} \int_0^z e^{2\beta^2 y} \left( \frac{e^{\beta^2 z} - e^{\beta^2 y}}{\beta^2} \right) dy dz \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^{T-t} e^{\beta^2 z} \left[ \int_0^z e^{2\beta^2 y} dy - \int_0^z e^{3\beta^2 y} dy \right] dz \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^{T-t} e^{\beta^2 z} \left[ \left( \frac{e^{2\beta^2 z} - 1}{2\beta^2} \right) - \left( \frac{e^{3\beta^2 z} - 1}{3\beta^2 z} \right) \right] dz \\
 &= \frac{1}{\beta^4} \int_0^{T-t} \left( \frac{e^{3\beta^2 z}}{2} - \frac{e^{\beta^2 z}}{2} - \frac{e^{3\beta^2 z}}{3} + \frac{1}{3} \right) dz \\
 &= \frac{1}{6\beta^4} \int_0^{T-t} (e^{3\beta^2 z} - 3e^{\beta^2 z} + 2) dz \\
 &= \frac{1}{6\beta^4} \left[ \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{3\beta^2} - \frac{3(e^{\beta^2(T-t)} - 1)}{\beta^2} + 2(T-t) \right] \\
 &= \frac{1}{6\beta^4} \left[ \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1 - 9e^{\beta^2(T-t)} + 9 + 6\beta^2(T-t)}{3\beta^2} \right] \\
 &= \frac{1}{18\beta^6} [e^{3\beta^2(T-t)} + 8 - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t)].
 \end{aligned}$$

Cada una de las otras 5 integrales triples arroja este mismo resultado, por lo cual,

$$E[\sigma_{t,T}^6 | \sigma_t^2] = \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \left[ \frac{e^{3\beta^2(T-t)} + 8 - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t)}{3\beta^6} \right]. \quad (3.35)$$

Finalmente, sustituyendo (3.35) en (3.34), obtenemos así que,

$$\begin{aligned}
 Sego[\sigma_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= \sigma_t^6 \left[ \frac{e^{3\beta^2(T-t)} + 8 - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t)}{3\beta^6(T-t)^3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4(T-t)^2} + 2 \right] \\
 &= \sigma_t^6 \left[ \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - e^{\beta^2(T-t)}(9 + 18\beta^2(T-t)) + 24\beta^2(T-t)}{3\beta^6(T-t)^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8 + 18\beta^4(T-t)^2 + 6\beta^6(T-t)^3}{3\beta^6(T-t)^3} \right].
 \end{aligned}$$

Así, haciendo  $k = \beta^2(T-t)$  se tiene que

$$Var[\sigma_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^4 \left( \frac{2(e^k - k - 1)}{k^2} - 1 \right). \quad (3.36)$$

$$Sesgo(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) = \sigma_t^6 \left( \frac{e^{3k} - e^k(9 + 18k) + 24k + 8 + 18k^2 + 6k^3}{3k^3} \right) \quad (3.37)$$

### 3.2.3. Aproximación del precio de una opción con series de Taylor

Si  $\alpha = 0$  entonces a partir de (3.17), (3.36) y (3.37) la ecuación (3.13) puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} c(t, S_t, \sigma_t^2) &= C_{BS}(\sigma_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} \left( \frac{2(e^k - k - 1)}{k^2} - 1 \right) \sigma_t^4 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\delta^3 C_{BS}(\hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\delta(\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} \left( \frac{e^{3k} - e^k(9 + 18k) + 24k + 8 + 18k^2 + 6k^3}{3k^3} \right) \sigma_t^6 + \dots \end{aligned}$$

Solo queda calcular las derivadas parciales de esta última ecuación.

Recordemos así que el precio de Black-Sholes con varianza  $\sigma_t^2$  es:

$$C_{BS}(\sigma_t^2) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (3.38)$$

donde

- $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) - (r + \frac{\sigma_t^2}{2})(T-t)}{\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}}$ .
- $d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_t^2(T-t)}$ .
- $\Phi(d)$  es la distribución normal estándar.

Recordemos además la ecuación fundamental de las letras griegas probada en el capítulo anterior:

$$S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) = 0.$$

Por lo tanto,

$$K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) = S_t \Phi'(d_1). \quad (3.39)$$

La derivada del precio de Black-Sholes respecto de  $\sigma_t^2$  es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_t^2} &= S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} \\
&= S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} \\
&= S_t \Phi'(d_1) \left( \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} &= \frac{\frac{(T-t)}{2} \sqrt{\sigma_t^2(T-t)} - \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} (\ln(\frac{S_t}{K}) - (r + \frac{\sigma_t^2}{2})(T-t))}{\sigma_t^2(T-t)} \\
&= \frac{\sqrt{\sigma_t^2(T-t)} - \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) - (r + \frac{\sigma_t^2}{2})(T-t)}{\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}}}{2\sigma_t^2(t)} \\
&= \frac{\sqrt{\sigma_t^2(T-t)} - d_1}{2\sigma_t^2(t)} \\
&= \frac{-d_2}{2\sigma_t^2(t)}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Además como  $d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_t^2(T-t)}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} &= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(t)(T-t)}} \\
&= -\frac{d_2}{2\sigma_t^2} - \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(t)(T-t)}} \\
&= -\frac{1}{\sigma_t^2} (d_2 + \sqrt{\sigma_t^2(t)(T-t)}) \\
&= -\frac{d_1}{\sigma_t^2}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.41) y (3.42) en (3.40)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_t^2} &= S_t \Phi'(d_1) \left( \frac{-d_2}{2\sigma_t^2} - \frac{-d_1}{2\sigma_t^2} \right) \\
&= S_t \Phi'(d_1) \frac{(d_1 - d_2)}{2\sigma_t^2} \\
&= S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}}{2\sigma_t^2} \\
&= S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}}. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

De esta ecuación y por la regla de la derivada del producto, se sigue que

$$\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial (\sigma_t^2)^2} = S_t \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} - S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)^2}{4[\sigma_t^2(T-t)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.44}$$

Antes de calcular  $\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial (\sigma_t^2)^2}$ , notemos que por (3.41) y (3.42), se tienen las siguientes identidades

$$d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} = d_2 \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} = -\frac{d_1 d_2}{2\sigma_t^2} \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial(d_1 d_2)}{\partial \sigma_t^2} = d_1 \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} + d_2 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} = -\frac{d_1^2 + d_2^2}{2\sigma_t^2} \tag{3.46}$$

$$(d_1 + d_2) \left( \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} + \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} \right) = -\frac{(d_1 + d_2)^2}{2\sigma_t^2}. \tag{3.47}$$

Por otra parte, por la regla de la cadena y usando (3.45), se tiene que,

$$\Phi''(d_1) = -\Phi'(d_1) d_1. \tag{3.48}$$

Sustituímos (3.48) en (3.44)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial(\sigma_t^2)^2} &= -S_t \Phi'(d_1) d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} - S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)^2}{4[\sigma_t^2(T-t)]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= S_t \Phi'(d_1) d_1 \left( \frac{d_1 d_2}{2\sigma_t^2} \right) \frac{(T-t)}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} - S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)^2}{4[\sigma_t^2(T-t)]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= S_t \Phi'(d_1) d_1 d_2 \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} - S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{(T-t)}}{4\sigma_t^3} \\
 &= S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1).
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Aplicando la regla del producto a la ecuación (3.44) y de la ecuación (3.45), (3.46) y (3.47) se procede como sigue,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 C_{BS}}{\partial(\sigma_t^2)^3} &= S_t \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \left( \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) \right) \\
 &\quad + S_t \Phi'(d_1) \left( \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} \frac{\partial(d_1 d_2)}{\partial \sigma_t^2} + \left( \frac{\sqrt{T-t}(d_1 d_2 - 1)}{4} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) (\sigma_t^2)^{-\frac{5}{2}} \right) \\
 &= -S_t \Phi'(d_1) d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \left( \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) \right) \\
 &\quad + S_t \Phi'(d_1) \left( \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} \left( -\frac{d_1^2 + d_2^2}{2\sigma_t^2} \right) - 3 \left( \frac{\sqrt{T-t}(d_1 d_2 - 1)}{8\sigma_t^5} \right) \right) \\
 &= S_t \Phi'(d_1) \frac{d_1 d_2}{2\sigma_t^2} \left( \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) \right) \\
 &\quad + S_t \Phi'(d_1) \left[ \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} \left( -\frac{d_1^2 + d_2^2}{2\sigma_t^2} \right) - 3 \left( \frac{\sqrt{T-t}(d_1 d_2 - 1)}{8\sigma_t^5} \right) \right] \\
 &= S_t \Phi'(d_1) d_1 d_2 \left( \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} (d_1 d_2 - 1) \right) \\
 &\quad - S_t \Phi'(d_1) \left( \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} (d_1^2 + d_2^2) + 3 \left( \frac{\sqrt{T-t}(d_1 d_2 - 1)}{8\sigma_t^5} \right) \right) \\
 &= S_t \Phi'(d_1) \left( d_1 d_2 (d_1^2 + d_2^2) - (d_1^2 + d_2^2) - 3(d_1^2 + d_2^2) \right) \\
 &= S_t \Phi'(d_1) \left( (d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2) \right)
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Entonces a partir de (3.38), (3.49) y (3.50) concluimos que

$$\begin{aligned}
 c(t, S_t, \sigma_t^2) &= C_{BS}(\sigma_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \left( S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) \right) \left[ \frac{2(e^k - k - 1)}{k^2} - 1 \right] \sigma_t^4 \\
 &\quad + \frac{1}{6} S_t \Phi'(d_1) \left( (d_1 d_2 - 3)(d_1^2 + d_2^2) - (d_1^2 + d_2^2) \right) \\
 &\quad \times \left[ \frac{e^{3k} - e^k(9 + 18k) + 24k + 8 + 18k^2 + 6k^3}{3k^3} \right] \sigma_t^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Para valores de  $k$  muy pequeños, es decir, para  $\beta$  muy cercano a cero, la serie converge rápidamente. Por lo tanto, para  $\alpha = 0$  y  $\beta$  muy pequeña

$$\begin{aligned}
c(t, S_t, \sigma_t^2) &\approx C_{BS}(\sigma_{t,T}^2) + \frac{1}{2}(S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1)) \left[ \frac{2(e^k - k - 1)}{k^2} - 1 \right] \sigma_t^4 \\
&\quad + \frac{1}{6} S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} ((d_1 d_2 - 3)(d_1^2 + d_2^2) - (d_1^2 + d_2^2)) \\
&\quad \times \left[ \frac{e^{3k} - e^k(9 + 18k) + 24k + 8 + 18k^2 + 6k^3}{3k^3} \right] \sigma_t^6 \\
&= C_{BS}(\sigma_{t,T}^2) + \frac{1}{8} (S_t \Phi'(d_1) \sigma_t \sqrt{T-t} (d_1 d_2 - 1)) \left[ \frac{2(e^k - k - 1)}{k^2} - 1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{48} S_t \Phi'(d_1) \sigma_t \sqrt{T-t} [(d_1 d_2 - 3)(d_1^2 + d_2^2) - (d_1^2 + d_2^2)] \\
&\quad \times \left[ \frac{e^{3k} - e^k(9 + 18k) + 24k + 8 + 18k^2 + 6k^3}{3k^3} \right]
\end{aligned}$$

Haciendo

$$A(k) = \frac{2(e^k - k - 1)}{k^2} - 1$$

$$B(k) = \frac{e^{3k} - (8 + 18k)e^k + 8 + 24k + 18k^2 + 6k^3}{3k^3}$$

y

$$k = \beta^2(T - t)$$

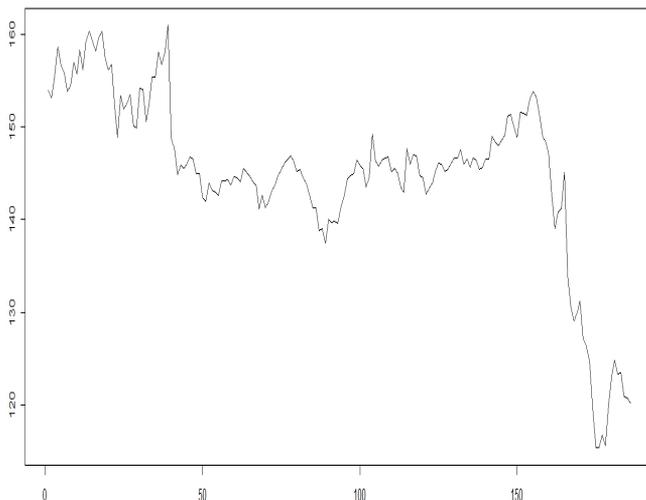
la fórmula de aproximación de Hull-White se expresa como

$$\begin{aligned}
c(t, S_t, \sigma_t^2) &\approx C_{BS}(\sigma_{t,T}^2) + \frac{1}{8} (S_t \Phi'(d_1) \sigma_t \sqrt{T-t} (d_1 d_2 - 1)) A(k) \\
&\quad + \frac{1}{48} S_t \Phi'(d_1) \sigma_t \sqrt{T-t} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 + d_2 - 1) \\
&\quad - (d_1^2 + d_2^2)] B(k).
\end{aligned}$$

### 3.2.4. Aplicación y análisis de resultados

En esta sección aplicaremos la metodología propuesta por Hull-White a un conjunto de datos reales para estimar el precio (prima) de una opción europea de compra con período de tiempo de 30, 90, 180 y 360 días de duración del contrato, teniendo como activo subyacente los precios de las acciones de la IBM del año 2018. También compararemos el rendimiento de este modelo de varianza aleatoria con el precio que proporciona la fórmula de Black-Sholes.

En la Gráfico 7, se puede observar que en los últimos años una marcada tendencia a la baja en los precios de sus acciones, más específicamente hasta el mes de marzo del 2018, y a partir de entonces existe gran volatilidad, presentando aumento abrupto en los precios durante el mes de abril, posteriormente un marcado decrecimiento hasta el mes de junio en presencia de inestabilidad, continuando así hasta julio pero con cierta tendencia a la baja y a partir de entonces hasta el mes de septiembre recuperándose con una subida en los precios, luego sufre una pronta caída en sus precios y finalmente parece que intentan recuperar la subida en sus precios.



**Gráfico 8:** Precios de las acciones de la IBM para el periodo.

Antes de aplicar directamente la forma cerrada de Hull-White, debemos analizar los datos y estimar los parámetros para ver si se cumplen los supuestos del modelo.

El primer supuesto que debemos comprobar es que la varianza del precio de las acciones sigue un movimiento Browniano Geométrico (3.3), lo cual conlleva comprobar de forma análoga que se obtuvo (2.4) a partir de (2.1), se comprueba partir de (3.6) que la distribución condicional de  $\ln\left(\frac{\sigma(\Delta t)}{\sigma(t)}\right)$ , dado  $\bar{\sigma}_{t,T}^2$  es una

$$N\left[\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)(\Delta t), \beta^2(\Delta t)\right]. \quad (3.51)$$

A partir de esto podemos estimar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación (3.3). El procedimiento consiste en calcular primero las

varianzas semanales  $\sigma_t^2$  durante el período de las observaciones de los datos y posteriormente determinar la serie  $\ln(\frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_t^2})$ . A partir de (3.51) estimamos los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  a partir de las ecuaciones

$$\beta = \frac{S^2}{\Delta t} \quad (3.52)$$

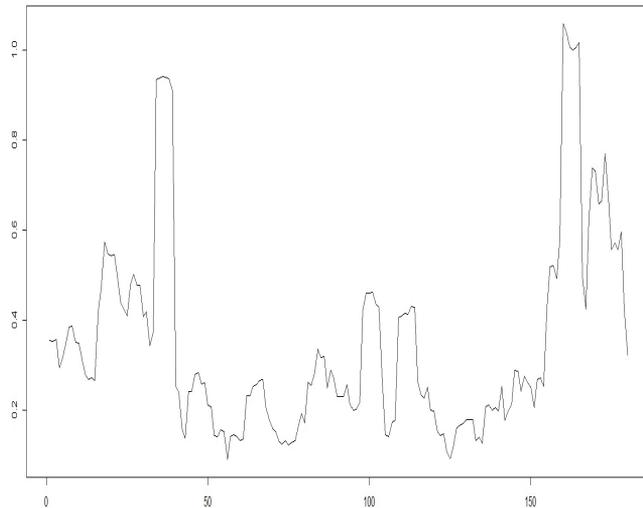
$$\alpha = \frac{\bar{X}}{\Delta t} + \beta^2/2 \quad (3.53)$$

donde  $\bar{X}$  es el promedio del vector  $\log(\frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_t^2})$ ,  $S^2$  es la varianza de los mismos y  $\Delta t = 6$  debido a que estamos suponiendo que las semana tiene 6 días debido a que los mercados no emiten datos los domingos.

Este método que se plantea es adecuado para cualquier serie de volatilidad de la que se disponga. En este trabajo utilizamos las volatilidades realizadas con una frecuencia de 6 días durante un año mediante la ecuación (3.54)

$$\sigma_t^R = \sqrt{252} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=t-5}^t \left[ \ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) - \frac{1}{3} \sum_{k=t-5}^t \ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) \right]^2}, \quad t = 7, 8, (3.54)$$

Las volatilidades realizadas se muestran en el Gráfico 8.



**Gráfico 9:** Volatilidades realizadas semanales durante un año.

Podemos observar que las volatilidades semanales estimadas no son lineales. Para distintas semanas, se cuenta con diferentes volatilidades realizadas. Por lo tanto, se comprueba que se viola uno de los supuestos crudos en el modelo de Black-Scholes. Si se cumplierse las hipótesis clásicas, entonces los resultados de las observaciones en el gráfico de las volatilidades tomando distintos periodos, darían resultados iguales o parecidos, pero en realidad los resultados difieren. Por lo cual, este modelo generaría precios inconsistentes para las opciones. Por ello la necesidad de aplicar un modelo que asuma la volatilidad estocástica.

Para aplicar el modelo de Hull-White estudiado en esta sección, debemos estimar primero los parámetros del modelo propuesto para la volatilidad (3.7).

Se obtuvo así que  $\alpha = 0.4287633$  y  $\beta = 0.9263229$ . Observemos que  $\alpha$  y  $\beta$  no cumplen directamente los supuestos del modelo de Hull-White ya que  $\alpha \neq 0$ . Otro de los supuestos en los que se basa este modelo es la correlación entre el proceso de los precios del subyacente y sus volatilidades debe ser cero. Este supuesto tampoco se cumple en nuestros datos, ya que los procesos simulados  $S_t$  y  $\sigma_t^2$  presentaron una correlación negativa  $corr(S_t, \sigma_t^2) = -0.06071558$ . Sin embargo, vamos a aplicar la fórmula como ejemplo y posteriormente usaremos simulación a través del método de Montecarlo para determinar el precio de una opción europea de compra.

Mencionamos antes que no se cumplen los supuestos del modelo en nuestros datos. Sin embargo, con el fin de mostrar un ejemplo de la fórmula de Hull-White, haremos caso omiso.

Para  $\beta = 0.9263229$  y en tiempo anualizado  $(T - t)/365$ . Por ejemplo, la volatilidad simulada y el precio simulados a una fecha de vencimiento de 30 días son  $\sigma = 0.002178472$  y  $S_t = 121$ , entonces

$$k = \beta^2 30/365 = 0.07052664$$

$$A(k) = 0.0239293$$

$$B(k) = 0.0001254783$$

Así, el precio de una opción según la fórmula de aproximación de Hull-White es

$$C(t, S_t, \sigma_t^2) = 0.4388176.$$

Se muestra en la Tabla 2 los resultados del precio de una opción de compra con diferentes fechas de vencimiento según fórmula

de aproximación de Hull-White.

Duración de días del contrato	r	Hull-White
30	0.0779	0.4388176
90	0.0825	0.3107344
180	0.0828	0.2285821
360	0.0849	13.30099

*Tabla 2 : Precios según Hull – White.*

Sabemos que estos resultados no son confiables debido a que los supuestos del modelo no se cumplieron, por esta razón, usaremos simulación para determinar el precio de una opción europea de compra mediante (3.8) con el proceso para la volatilidad propuesto por Hull-White (3.7) como se muestra en la siguiente sección.

### 3.2.5. Simulación por Monte Carlo

Generalmente, el precio de la opción se consigue partiendo de los valores estimados. La técnica para prever valores esperados mayormente utilizado es el método de Montecarlo, el cual es una técnica muy pertinente para valorar el precio de una opción ([22]). Matemáticamente se precisa esta idea a través de la ley de los grandes números; donde se obtiene el valor esperado a partir del valor medio obtenido en teoría, de realizar una prueba aleatoria infinitas veces.

Para la simulación del precio de la opción se requiere suponer el valor esperado de la opción en un mercado neutral al riesgo.

$$C = e^{-r(T-t)} E[\max(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t))(T-t) + \bar{\sigma}(t)\sqrt{T-t}\xi} - K, 0)]$$

El procedimiento para calcular el precio de la opción es el siguiente:

- Paso 1 Se genera un número de realizaciones para  $\bar{\sigma}_T^2$  mediante (3.7) con  $\sigma_0^2$  igual al último valor del vector  $\log(\frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_t^2})$  y tomamos promedio.
- Paso 2 Apartir de la ecuación (3.2), con  $\bar{\sigma}_T^2$  del paso anterior y  $S_0$  igual al último valor observado del precio de la acción, generamos un número de realizaciones  $S_{T1}, S_{T2}, \dots, S_{Tn}$  del precio de la opción a la fecha de expiración del contrato.

Paso 3 Tomando en cuenta un rango factible de precio de ejercicio  $K$ , obtenemos los valores

$$A_i = \max(S_{T_i} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\xi} - K, 0). \quad (3.55)$$

Paso 4 Luego, una vía es definir aproximadamente el precio de la opción por medio de la estimación del valor esperado según el método de Montecarlo y obtener así un posible escenario.

$$C = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i. \quad (3.57)$$

Debido a que se espera que los precios de sus acciones aumenten en el futuro por los avances tecnológicos en los que trabaja la compañía IBM, tomamos un valor  $K = \$125$  que es mayor al último valor registrado para las acciones de la IBM. La tasa libre de riesgo  $r$  se ha tomado como referencia la tasa que pagan los CETES.

Los precios de una opción de compra con distintas fechas de vencimiento y su correspondiente tasa libre de riesgo  $r$  que se muestran en la tabla 2, son los promedios calculados de la simulación de Monte Carlo para el modelo de Hull-White en base a 10.000 iteraciones para apreciar la convergencia del método Montecarlo. También muestra los valores del precio de la opción según la fórmula de (B-S).

Duración de días del contrato	r	Hull-White	Black-Sholes
30	0.0779	0.007059516	8.510841e-16
90	0.0825	0.4226792	0.097454
180	0.0828	1.943526	0.6279111
360	0.0849	6.290723	5.278035

Tabla 3: Precios por simulación

En la Tabla 3 se observa una marcada diferencia en la prima estimada por el modelo de (B-S) que asume volatilidad constante y el modelo de Hull-White que asume que la volatilidad sigue un movimiento Geométrico Browniano. Esta diferencia es normal que exista, ya ha sido altamente documentado en la literatura que el modelo de (B-S) tiende a valorar erróneamente las opciones que están muy dentro o muy fuera de dinero. En la siguiente sección, desarrollaremos el modelo de Heston y finalmente hacer algunas comparaciones.

### 3.3. Modelo de Volatilidad Estocástica de Heston

Una de las limitaciones en el modelo de (B-S) es la asunción sobre el registro de las rentabilidades de los precios son log-normales y la volatilidad es constante, ya que construye sonrisa y sesgo, a su vez, precios inconsistentes.

En esta sección se presenta una derivación completa de la metodología para valorar una opción sobre una acción con volatilidad estocástica desarrollada por Steven I. Heston en su artículo "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility" publicado en el Review of Financial Studies en 1993. Dicha propuesta se introduce y se enfrenta contra el modelo de Black-Scholes con la esperanza de producir precios de opciones donde se toman en cuenta la sonrisa y el sesgo.

Un aspecto relevante en la propuesta de Heston es la técnica de solución. Esta la presentaremos de la siguiente manera, presentamos primero el modelo junto con la ecuación diferencial parcial de segundo orden (PDEs) que surge en la derivación. Mostramos que el precio de compra en el modelo de Heston se puede expresar como la suma de dos términos, cada uno de los cuales contiene la probabilidad de que la opción expire dentro del dinero. Mostraremos como obtener las funciones características obtenidas de las probabilidades neutrales al riesgo y como resolver la ecuación de Riccati a partir de la cual la función característica que se deriva de la solución de la ecuación diferencial parcial.

Otro aspecto es que el modelo permite correlación arbitraria entre volatilidad y las rentabilidades del precio del activo. Este modelo es el más popular entre los modelos de volatilidad estocástica, pues el proceso para la volatilidad es no negativa y presenta reversión a la media. Además, fue uno de los primeros modelos que pudo explicar el fenómeno de la curva sonrisa. Una característica notable en el modelo de Heston es que presenta una fórmula cerrada para el precio de una opción con el supuesto de correlación entre el precio del activo y su volatilidad.

#### 3.3.1. Dinámica del modelo

El modelo de Heston asume que el precio de las acciones subyacentes,  $S_t$ , sigue un proceso estocástico como el propuesto por Black-Scholes, con la diferencia que la varianza  $\sigma_t^2$  es estocástica

y sigue un proceso de Cox, Ingersoll y Ross (1985). Por lo tanto, el modelo de Heston está representado por el sistema bivariado de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad (3.58)$$

$$d\sigma_t^2 = a(b - \sigma_t^2)dt + \gamma \sigma_t dU_t \quad (3.59)$$

donde  $\mu \in R$ ,  $\sigma_t > 0$  y  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento geométrico Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración  $(\Omega^W, F^W, (F_t^W)_{t \in [0, T]}, P^W)$ ,  $\{U_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano definido sobre  $(\Omega^W, F^W, (F_t^W)_{t \in [0, T]}, P^W)$  y  $S_t$  y  $\sigma_t$  estén correlacionados entre sí, de forma que

$$Cov(dW_t, dU_t) = E[dW_t dU_t] = \rho dt. \quad (3.60)$$

Así, los parámetros del modelo son:

- $\mu$  la deriva del proceso para el stock, es decir, el crecimiento del proceso de  $S_t$ .
- $a > 0$  la velocidad de reversión media para la varianza;
- $b > 0$  el nivel de reversión promedio para la varianza (varianza a largo plazo).
- $\gamma > 0$  la volatilidad de la varianza;
- $\sigma_0$  el nivel inicial (tiempo cero) de la varianza;
- $\rho \in [-1, 1]$  la correlación entre los dos movimientos Brownianos  $W_t$  y  $U_t$ ;
- $\lambda$  el parámetro de riesgo de volatilidad. Definimos este parámetro más adelante.

El coeficiente de correlación se describe como la correlación entre el precio de la acción (forma logarítmica) y la volatilidad. Si  $\rho > 0$ , entonces la volatilidad aumentará a medida que la acción aumenta de precio. Si  $\rho < 0$ , entonces la volatilidad aumentará mientras que el precio de las acciones disminuye. Si  $\rho = 0$ , no hay ningún efecto a la asimetría de la distribución.

Los parámetros velocidad de reversión,  $a$ , y media del modelo,  $b$ , sujetan de cierta forma a la volatilidad enviándola siempre de

regreso hacia su media. Por otra parte, el parámetro  $\gamma$  hace que el modelo se adecue a la valoración de productos derivados sensibles a la volatilidad de la volatilidad. Obsérvese que si  $\gamma = 0$ , la volatilidad sería una función determinista del tiempo. Otro punto importante es que como la volatilidad no puede ser observada, solo estimada, y como  $\sigma_0$  representa esta variable de estado en el tiempo cero, esta caracterización es sensible a efectos de estimación.

Estos parámetros afectan la distribución del precio terminal del stock, es decir, de  $S_T$ , se debe tener cuidado en su estimación para una correcta valoración.

### 3.3.2. Ventajas del modelo

- Proporciona una solución de formato cerrado para la opción de compra europea.
- Es capaz de explicar la propiedad del precio de las acciones cuando su distribución no es gaussiana.
- Se ajusta a la superficie de volatilidad implícita de los precios de las opciones en el mercado.
- Permite que la correlación entre precio de las acciones y volatilidad sea negativa.

Es importante tener en cuenta que la volatilidad del precio de las acciones  $\sigma_t$  no se modela directamente en el modelo Heston, sino más bien a través de la varianza  $\sigma_t^2$ . El proceso que se asumió para la varianza en la ecuación (3.59) surge de un proceso Ornstein-Uhlenbeck para la volatilidad  $\sigma_t$  dado por

$$d\sigma_t = -\beta\sigma_t dt + \delta dU_t \quad (3.61)$$

es decir, en la propuesta de Heston, la varianza del activo subyacente  $\sigma_t^2$  es conducida por un proceso del tipo Cox, Ingersoll y Ross (1985) si la volatilidad  $\sigma_t$  es guiada por un proceso del tipo de Ornstein-Uhlenbeck. Esto puede ser probado aplicando el lema de Ito a  $\sigma_t^2$  en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, obteniendo que

$$d\sigma_t^2 = (\delta^2 - 2\beta\sigma_t^2)dt + 2\delta\sigma_t dU_t \quad (3.62)$$

por lo tanto,

$$d\sigma_t^2 = 2\beta\left(\frac{\delta^2}{2\beta} - \sigma_t^2\right)dt + 2\delta\sigma_t dU_t \quad (3.63)$$

definiendo  $a = 2\beta$ ,  $b = \frac{\delta^2}{2\beta}$  y  $\gamma = 2\delta$  se puede expresar a la varianza  $\sigma_t^2$  como un proceso de Cox, Ingersoll y Ross.

El lema de Ito para dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas (4.16) de Apéndice, siendo

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ d\sigma_t^2 = a(b - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dU_t, \end{cases} \quad (3.64)$$

con

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt \quad (3.65)$$

conduce a

$$dC = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + a(b - \sigma_t^2) \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} \sigma_t S_t dW_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} \gamma \sigma_t dU_t. \quad (3.66)$$

### 3.3.3. Ecuación diferencial del precio de una opción sobre una acción con volatilidad estocástica del modelo de Heston

En esta sección, explicamos cómo derivar la ecuación diferencial parcial (PDE) para el modelo de Heston. El argumento de cobertura que usa es similar al utilizado por (B-S) en el cual se forma un portafolio con acciones del subyacente, más un solo derivado que se usa para cubrir las acciones y hacer que la cartera sea segura.

En el modelo Heston, sin embargo, se requiere un derivado adicional en la cartera para cubrir la volatilidad. Formamos una cartera que consiste  $w_0$  unidades de una acción  $S_t$ ,  $w_1$  unidades de una opción  $c_1 = C(t, S_t, \sigma_t; T_1)$  y 1 unidad de una opción  $c_2 = C(t, S_t, \sigma_t; T_2)$ , donde  $T_i$ , con  $i = 1, 2$  es la fecha de vencimiento de la opción  $c_i$ , siendo ambas opciones sobre la misma acción  $S_t$ . Entonces, el valor del portafolio es

$$\Pi_t = w_0 S_t + w_1 c_1 + c_2, \quad t > 0. \quad (3.67)$$

La estrategia es similar a la del caso Black-Scholes. Suponiendo que el portafolio es autofinanciado, sustituyendo el valor de  $dS_t$ , además, aplicamos el lema de Ito para dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas para  $dc_1$  y  $dc_2$  dado por la ecuación (3.66) y reorganizando los términos.

El cambio en el valor del portafolio se calcula como

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= w_0 dS_t + w_1 dc_1 + dc_2 \\ &= \left( w_0 + w_1 \frac{\partial c_1}{\partial S_t} + \frac{\partial c_2}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left( w_0 + w_1 \frac{\partial c_1}{\partial S_t} + \frac{\partial c_2}{\partial S_t} \right) \sigma_t S_t dW_t \\ &+ \left( w_1 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2} + \frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2} \right) a(b - \sigma_t^2) dt + \left( w_1 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2} + \frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2} \right) \gamma \sigma_t dU_t \\ &+ w_1 \left( \frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt \\ &+ \left( \frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Si escogemos  $w_1 = -\frac{\partial c_2 / \partial \sigma_t^2}{\partial c_1 / \partial \sigma_t^2}$  entonces el coeficiente del factor de riesgo  $dU_t$  se anula. Además, con el fin de que se anule el término de  $dW_t$

$$w_0 = \frac{\partial c_2 / \partial \sigma_t^2}{\partial c_1 / \partial \sigma_t^2} \left( \frac{\partial c_1}{\partial S_t} \right) - \frac{\partial c_2}{\partial S_t}.$$

Para estos valores de  $w_0$ ,  $w_1$ , el cambio de valor en el portafolio está dado por

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= -\frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} \left( \frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt \\ &+ \left( \frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Otro supuesto del modelo de Heston es que el tipo de interés libre de riesgo, denotado por  $r$ , es constante. Lo que quiere decir que si la cantidad invertida  $\Pi_t$  en el portafolio, se invirtiera de manera alternativa depositándola en el banco que paga una tasa de interés  $r$ , entonces la condición de que la cartera gane la tasa libre de riesgo,  $r$ , implica que el cambio en valor de este nuevo

portafolio es  $d\Pi_t^r = r\Pi_t dt$ . Sustituimos los valores de  $w_0$ ,  $w_1$  y reorganizamos los términos, produce

$$\begin{aligned} d\Pi_t^r &= r(w_0 S_t + w_1 c_1 + c_2) dt \\ &= r \left( \left( \frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} \left( \frac{\partial c_1}{\partial S_t} - \frac{\partial c_2}{\partial S_t} \right) S_t + -\frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} c_1 + c_2 \right) dt \right. \\ &= -\frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} \left( -\frac{\partial c_1}{\partial S_t} S_t + c_1 \right) r dt + \left( -\frac{\partial c_2}{\partial S_t} S_t + c_2 \right) r dt. \quad (3.70) \end{aligned}$$

Si los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje, es decir, si existen inversiones alternativas, entonces producen exactamente el mismo rendimiento, es decir que se debe cumplir que  $d\Pi_t = d\Pi_t^r$ .

Luego, igualando la ecuación (3.69) con (3.70) nos conduce a la siguiente igualdad

$$k_2 = k_1$$

$$\text{donde } k_i = \frac{\left[ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial S_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial c_i}{\partial S_t \partial \sigma_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \sigma_t^2} \right] - r c_i + r S_t \frac{\partial c_i}{\partial S_t}}{\frac{\partial c_i}{\partial \sigma_t}}$$

El lado izquierdo de la ecuación es una función de  $c_2$  solamente, y la mano derecha el lado es una función de  $c_1$  solamente. Esto implica que ambos lados se pueden escribir como una función  $m = m(t, S_t, \sigma_t^2)$ , es decir, que

$$\frac{q - rC}{\frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2}} = m \quad (3.71)$$

donde  $q = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial C}{\partial S_t \partial \sigma_t^2}$  y  $m(t, S_t, \sigma_t^2)$  es independiente de la fecha de vencimiento.

### Determinación de la prima al riesgo por volatilidad

Otro parámetro muy útil en el modelo es  $\lambda(t, S_t, \sigma_t^2)$ , el cual representa al precio del riesgo por volatilidad, es decir, se considera como la compensación que exigen los inversores por asumir el riesgo relacionado con cambios bruscos en la volatilidad del mercado.

La ecuación (3.66) puede escribirse de la siguiente manera,

$$dc = \mu_c(t, S_t, \sigma_t^2) c + \sigma_c(t, S_t, \sigma_t^2) c dW_t + \xi_c(t, S_t, \sigma_t^2) c dU_t \quad (3.72)$$

donde

$$\mu_c = \frac{q + a(b - \sigma_t^2) \frac{\delta C}{\delta \sigma_t^2}}{c}$$

$$\sigma_c = \left( \frac{S_t \sigma_t}{c} \right) \frac{\partial c}{S_t}$$

y

$$\xi_t = \left( \frac{\gamma \sigma_t}{c} \right) \frac{\partial c}{\sigma_t^2}.$$

Consideremos el valor de un portafolio

$$\Pi_t = \theta_0 S_t + \theta_1 c_1 + \theta_2 c_2$$

con  $\theta_0$  unidades de una acción,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  unidades de dos opciones sobre la acción con diferentes fechas de vencimiento.

Si asumimos que las cantidades  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son constantes ante variaciones en el mercado, entonces el cambio en el portafolio es

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= (\theta_0 \mu S_t + \theta_1 \mu_1 c_1 + \theta_2 \mu_2 c_2) dt \\ &\quad + (\theta_0 \sigma S_t + \theta_1 \sigma_1 c_1 + \theta_2 \sigma_2 c_2) dW_t \\ &\quad + (\theta_1 \xi_1 c_1 + \theta_2 \xi_2 c_2) dU_t \end{aligned} \tag{3.73}$$

donde,  $\mu_i = \mu_{c_i}$ ,  $\sigma_i = \sigma_{c_i}$ ,  $\xi_i = \xi_{c_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Los subíndices  $t$  se han omitido por conveniencia.

Con el objetivo de eliminar los coeficientes de los factores de riesgo  $dU_t$  y  $dW_t$ , notemos que debemos escoger a las constantes  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  como sigue

$$\theta_1 = \frac{\xi_2}{c_1(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)}$$

$$\theta_2 = -\frac{\xi_1}{c_2(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)}$$

y

$$\theta_0 = \frac{\sigma_2 \xi_1}{\sigma_t S_t (\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} - \frac{\sigma_1 \xi_2}{\sigma_t S_t (\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} = \frac{1}{\sigma_t S_t}.$$

Por lo tanto,

$$d\Pi_t = \left( \frac{\mu}{\sigma_t} + \frac{\xi_2 \mu_1}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} - \frac{\xi_1 \mu_2}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} \right) dt. \quad (3.74)$$

Al igualar esta ecuación con el rendimiento libre de riesgo de una cuenta bancaria

$$\Pi_t r dt = \left( \frac{1}{\sigma_t} + \frac{\xi_2}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} - \frac{\xi_1}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} \right) r dt \quad (3.75)$$

obtenemos que

$$\left( \frac{\sigma_2}{\xi_2} \right) \left( \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right) = \left( \frac{\sigma_1}{\xi_1} \right) \left( \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right). \quad (3.76)$$

Así, la cantidad

$$\left( \frac{\sigma_c}{\xi_c} \right) \left( \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right)$$

es independiente de la fecha de vencimiento. De esto, podemos decir que

$$\left( \frac{\sigma_c}{\xi_c} \right) \left( \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right) = \lambda(t, S_t, \sigma_t)$$

para alguna función  $\lambda(t, S_t, \sigma_t)$ . Por lo que,

$$\mu_c - r - \sigma_c \left( \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right) = \lambda(t, S_t, \sigma_t) \xi_c. \quad (3.77)$$

Recordemos como están definidas  $\mu_c$  y  $\sigma_c$  en la ecuación (3.72), si sustituimos estos valores en la ecuación (3.77), se obtiene que

$$\begin{aligned} \lambda(t, S_t, \sigma_t) \gamma \sigma_t \frac{\partial C}{\partial \sigma_{2t}} &= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ &+ a(b - \sigma_t^2) \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} - r C. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Si siguiendo a Heston (1993), concluimos que la función  $m(t, S_t, \sigma_t^2)$  queda especificada como

$$m(t, S_t, \sigma_t^2) = -a(b - \sigma_t^2) + \lambda(t, S_t, \sigma_t) \gamma \sigma_t$$

donde  $\lambda(t, S_t, \sigma_t^2)$  es el precio del riesgo de volatilidad.

Sustituyendo por  $m(S, v, t)$  en el lado izquierdo de la ecuación (3.71), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} - r c_1 \\ + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + [a(b - \sigma_t^2) + \lambda(t, S_t, \sigma_t^2) \gamma \sigma_t^2] \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

es la ecuación del modelo (PDE) de Heston (1993).

### 3.3.4. Supuesto sobre el premio al riesgo por volatilidad

En lo que sigue se supone que  $\lambda(t, S_t, \sigma_t^2)$  es proporcional a  $\sigma_t^2$ , lo que llevó a Heston a utilizar la siguiente expresión para la prima de riesgo por volatilidad,

$$\gamma \lambda(t, S_t, \sigma_t^2) = \bar{\lambda}$$

donde es una constante. Si esta forma funcional es efectivamente la que determina el mercado, en teoría, el parámetro podría ser determinado por algún activo dependiente de la volatilidad, el cual se podría utilizar para valorar todos los demás activos dependientes de la volatilidad.

En general, se cuenta con evidencia empírica de que el término que representa el precio del riesgo por volatilidad es distinto de cero para opciones sobre diversos subyacentes.

### 3.3.5. Especificación de las condiciones de frontera

Las siguientes condiciones de contorno en la ecuación diferencial parcial del modelo de Heston (3.79) se mantienen para un opción de compra europea con vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $K$ .

- $C(T, S_T^2, \sigma_t) = \max(0, S_T - K)$ .
- $C(t, 0, \sigma_t^2) = 0$ .

- $\frac{\partial C}{\partial S_t} = 1.$
- $C(t, S_t, \infty) = S_t.$
- $\frac{\partial C(t, S_t, 0)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t, 0) + ab \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2}(t, S_t, 0) - rC(t, S_t, 0) = 0.$

Este quiere decir que al vencimiento, la opción vale su valor intrínseco, cuando el precio de las acciones es cero, la opción de compra no tiene valor. A medida que aumenta el precio de las acciones, delta se acerca a uno, y cuando aumenta la volatilidad, la opción de compra se convierte igual al precio de las acciones y la última condición es consistente con el modelo de Black-Scholes, se desprende inmediatamente al sustituir  $\sigma_t = 0$  en la ecuación (3.79).

Finalmente, notemos que la ecuación (3.79) se puede escribir como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + AC - rC = 0 \quad (3.80)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= rS_t \frac{\partial}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} - \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \\ &+ \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2}{\partial (\sigma_t^2)^2} + [a(b - \sigma_t^2) + \lambda(t, S_t, \sigma_t^2)] \frac{\partial}{\partial \sigma_t^2}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Podemos definir el logaritmo del precio  $x_t = \ln(S_t)$  y expresar (3.79) en términos de  $(t, x_t, \sigma_t^2)$  en lugar de  $(t, S_t, \sigma_t^2)$ . Esto conduce a una forma más simple de PDE en la que el precio al contado  $S_t$  no aparece. Esta simplificación requiere las siguientes derivadas. Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{\partial C}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x_t} \frac{1}{S_t} \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma_t^2 \partial S_t} = \frac{\partial}{\partial \sigma_t^2} \left( \frac{1}{S_t} \frac{\partial C}{\partial x_t} \right) = \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 C}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x_t^2} \frac{\partial x_t}{\partial t} \frac{1}{S_t} - \frac{\partial C}{\partial x_t} \frac{1}{\partial S_t \partial S_t^2} = \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x_t^2} - \frac{\partial C}{\partial x_t} \right) \frac{1}{S_t^2}. \quad (3.85)$$

Sustituyamos estas expresiones en la PDE de Heston (3.79) y utilizando el supuesto que  $\gamma\lambda(t, S_t, \sigma_t^2) = \bar{\lambda}$ . Todos los términos  $S_t$  se cancelan, obteniendo así el PDE de Heston en términos del precio de los logaritmos de las rentabilidades, es decir, de  $x_t = \log(S_t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \left( \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x_t^2} - \frac{\partial C}{\partial x_t} \right) \frac{1}{S_t^2} \right) + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t \left( \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 C}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} - rC + rS_t \frac{\partial C}{\partial x_t} \frac{1}{S_t} + [ab - (a + \bar{\lambda})\sigma_t^2] \frac{\partial C}{\sigma_t^2} = 0. \end{aligned}$$

(3.87)

Entonces, reorganizando los términos, llegamos a la siguiente PDE

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} - rC \\ &+ \left( r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) \frac{\partial C}{\partial x_t} + [ab - (a + \bar{\lambda})\sigma_t^2] \frac{\partial C}{\sigma_t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

### 3.3.6. Precio de la opción de compra

En esta sección, mostramos que el precio de compra en el modelo de Heston se puede expresar de forma similar al precio de compra en el modelo de (B-S), que presentamos en la ecuación (2.35).

El precio de una opción de compra en el tiempo  $t$  europea de una acción que no paga dividendos con precio  $S_t$ , cuando el precio de ejercicio es  $K$  y el tiempo de duración hasta el vencimiento es  $T - t$ , es el valor esperado descontado de la recompensa según la medida de riesgo neutral  $Q$

$$\begin{aligned} C(K) &= e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T - K)1_{S_T > K}] \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q[S_T 1_{S_T > K} - K 1_{S_T > K}] \\ &= S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2, \end{aligned} \quad (3.89)$$

donde 1 es la función indicadora. La última línea de (3.89) es la fórmula de Black-Sholes para precio de compra, con sustitución de  $P_1$  por  $\Phi(d_1)$ , y reemplazo de  $P_2$  por  $\Phi(d_2)$  en (2.35). En esta sección, explicamos cómo la última línea de (3.89) puede ser derivado de la tercera línea. Las cantidades  $P_1$  y  $P_2$  representan cada una

la probabilidad de que la opción de compra expire en el dinero, condicional al valor  $S_t = e^{x_t}$  de la acción y en el valor  $\sigma_t$  de la volatilidad en el tiempo  $t$ . Por lo tanto

$$P_i = P(\ln(S_t) > \ln(K)) \quad (3.90)$$

$i = 1, 2$ . Estas probabilidades se obtienen bajo diferentes medidas de probabilidad. En la ecuación (3.89), el valor esperado  $E^Q[1_{S_T > K}]$  es la probabilidad de que la opción de compra caduque en el dinero bajo la medida  $Q^s$ . Por lo tanto, podemos escribir

$$E^Q[1_{S_T > K}] = Q(S_T > K) = Q(\ln(S_T) > \ln(K)) = P_2 \quad (3.91)$$

La evaluación de  $e^{-r(T-t)}E^Q[S_T 1_{S_T > K}]$  en (3.89) requiere cambiar la medida original  $Q$  a otra medida  $Q^s$ . Consideremos la derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ}{dQ^s} = \frac{B_T/B_t}{S_T/S_t} = \frac{E^Q[e^{XT}]}{e^{XT}} \quad (3.92)$$

donde  $B_t = e^{\int_0^t r du} = e^{rt}$ .

En la ecuación (3.92),  $S_t e^{r(T-t)} = E^Q[e^{XT}]$ . Bajo la medida  $Q$ , los activos crecen en el tasa libre de riesgo,  $r$ . La primera esperanza en la tercera línea de (3.89), por lo tanto, puede ser escrita como

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)}E^Q[S_T 1_{S_T > K}] &= S_t E^Q \left[ \frac{S_T/S_t}{B_T/B_t} 1_{S_T > K} \right] \\ &= S_t E^{Q^s} \left[ \frac{S_T/S_t}{B_T/B_t} 1_{S_T > K} \frac{dQ}{dQ^s} \right] \\ &= S_t E^{Q^s} [1_{S_T > K}] \\ &= S_t Q^s(S_T > K) = S_t P_1. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Esto implica que el precio de compra europeo de la ecuación (3.89) se puede escribir en términos de ambas medidas como

$$C(K) = S_t Q^s(S_T > K) - K e^{-r(T-t)} Q(\ln(S_t) > \ln(K)). \quad (3.94)$$

La medida  $Q$  usa el bono  $B_t$  como el activo numerario, mientras que la medida  $Q^s$  utiliza el precio de las acciones  $S_t$ . Se puede mostrar que cuando  $S_T$  sigue la distribución lognormal especificada en el modelo Black-Scholes, luego  $Q^s(S_T > K) = d_1$  y

$Q(S_T > K) = d_2$ . De aquí, el enfoque de las funciones característica de los precios de las opciones, iniciado por Heston (1993), se aplica al modelo Black-Scholes también.

Como hemos escrito a  $x_t = \ln(S_t)$ , la ecuación anterior se convierte en

$$C(t, S_t, \sigma_t^2) = e^{x_t} P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2. \quad (3.95)$$

Esta ecuación expresa el precio  $C(K)$  en términos de las probabilidades en el dinero  $P_1 = Q^S(S_T > K)$  y  $P_2 = Q(S_T > K)$ .

Dado que la opción de compra europea satisface la ecuación diferencial parcial (3.88), podemos encontrar las derivadas requeridas en la ecuación (3.95), sustituirlos, y expresarla en términos de  $P_1$  y  $P_2$ . La derivada de  $C(K)$  con respecto a  $x_t$  es

$$\frac{\partial C}{\partial x_t} = e^{x_t} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial x_t}. \quad (3.96)$$

Respecto de  $x_t^2$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_t^2} = e^{x_t} \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2}. \quad (3.97)$$

Respecto de  $x_t$  y  $\sigma_t^2$

$$\frac{\partial C}{\partial x_t \partial \sigma^2} = e^{x_t} \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} \right) - K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2}. \quad (3.98)$$

Respecto de  $t$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t} - r K e^{r(T-t)} P_2. \quad (3.99)$$

Respecto de  $\sigma_t^2$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} = e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2}. \quad (3.100)$$

Respecto de  $(\sigma_t^2)^2$

$$\frac{\partial C}{\partial (\sigma_t^2)^2} = e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2}. \quad (3.101)$$

Ahora sustituimos estas expresiones en la ecuación (3.88) y obtenemos que

$$\begin{aligned}
 & \left[ e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t} - r K e^{r(T-t)} P_2 \right] \\
 + & \frac{1}{2} \sigma_t^2 \left[ e^{x_t} \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} \right] \\
 + & \rho \gamma \sigma_t^2 \left[ e^{x_t} \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} \right) - K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \right] \\
 + & \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \left[ e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} \right] \\
 + & \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) e^{x_t} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial x_t} \\
 + & [ab - (a + \bar{\lambda}) \sigma_t^2] \left[ e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2} \right] \\
 - & r \left[ e^{x_t} P_1 - K e^{r(T-t)} P_2 \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Notemos que algunos términos se cancelan, obteniéndose así que

$$\begin{aligned}
 & e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t} \\
 + & \frac{1}{2} \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} \\
 + & \rho \gamma \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} - \rho \gamma \sigma_t^2 K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \\
 + & \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 K e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\
 + & \left( r + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial x_t} - \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial x_t} \\
 + & [ab - (a + \bar{\lambda} - \rho \gamma) \sigma_t^2] e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} \\
 & - [ab - (a + \bar{\lambda}) \sigma_t^2] K e^{r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Esto implica que esta ecuación se puede escribir como

$$e^{x_t} f(P_1) - K e^{-r(T-t)} f(P_2) = 0 \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
f(P_1) &= \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\
&\quad + (r + \frac{1}{2}\sigma_t^2) \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + [ab - (a + \bar{\lambda} - \rho\gamma)\sigma_t^2] \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

y

$$\begin{aligned}
f(P_2) &= \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\
&\quad + (r + \frac{1}{2}\sigma_t^2) \frac{\partial P_2}{\partial x_t} + [ab - (a + \bar{\lambda})\sigma_t^2] \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2}.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Una solución para la ecuación (3.103) es  $f(P_1) = f(P_2) = 0$ . Por lo tanto, esto implicaría que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\
&\quad + (r + \frac{1}{2}\sigma_t^2) \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + [ab - (a + \bar{\lambda} - \rho\gamma)\sigma_t^2] \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} = 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\
&\quad + (r - \frac{1}{2}\sigma_t^2) \frac{\partial P_2}{\partial x_t} + [ab - (a + \bar{\lambda})\sigma_t^2] \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2} = 0.
\end{aligned}$$

En forma más compacta, las funciones  $P_1 = P_1(t, S_t, \sigma_t^2)$  y  $P_2 = P_2(t, S_t, \sigma_t^2)$  satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\
&\quad + (r + a_j\sigma_t^2) \frac{\partial P_j}{\partial x_t} + [v - b_j\sigma_t^2] \frac{\partial P_j}{\partial \sigma_t^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.106}$$

donde  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $v = ab$ ,  $b_1 = a\bar{\lambda} - \rho\gamma$ ,  $b_2 = a + \bar{\lambda}$ .

### 3.3.7. Obteniendo las funciones características del modelo de Heston

Cuando las funciones características  $f_j(t, x_t, \sigma_t^2)$  son conocidas, cada una de las probabilidades en el dinero  $P_j$  pueden ser recuperadas a través de las siguientes igualdades

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iux} f(u)}{iu} \right] du$$

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iux} f(u)}{iu} \right] du.$$

Tenemos que las funciones  $P_1$  y  $P_2$  están dadas por

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iux} f_i(x_t \sigma_t^2, T; u)}{iu} \right] du. \quad (3.107)$$

Las funciones  $P_1$  y  $P_2$  son conocidas como probabilidades ajustadas o probabilidades neutrales al riesgo, es decir, son funciones de distribución que determinan la probabilidad de que la opción se encuentre dentro del dinero en la fecha de vencimiento. Estas probabilidades pueden ser interpretadas como probabilidades ajustadas o probabilidades neutrales al riesgo. Desafortunadamente, no existe una expresión analítica para estas probabilidades.

A continuación se determinan las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo.

Observemos que para que al tiempo de vencimiento el precio de la opción satisfaga la condición final  $C((T, S_t, \sigma_t^2) = \max(S_t - K, 0)$ , tanto  $P_1$  como  $P_2$  deben satisfacer las condiciones finales

$$P_j(x_t, \ln(K), \sigma_t^2) = 1_{x_t \geq \ln(K)} \quad (3.108)$$

ya que  $e^{-r(T-T)} = 1$  y

$$S_t P_1 = P_1(x_t, S_t, \sigma_t^2) - K P_1 = P_2(x_t, S_t, \sigma_t^2) = \max(S_t - K, 0) \quad (3.109)$$

ó

$$e^{x_t} P_1 = P_1(x_t, S_t, \sigma_t^2) - e^{\ln(K)} P_1 = P_2(x_t, S_t, \sigma_t^2) = \max(S_t - K, 0). \quad (3.110)$$

Por otro lado, Heston supone que las funciones características del logaritmo del precio terminal  $f_j(t, x_t, \sigma_t^2; u) = e^{iux_t}$  donde  $j = 1, 2$  y  $X_T = \ln(T)$  son de la forma log-lineal

$$f_j(t, x_t, \sigma_t^2; u) = e^{C_j(T-t, u) + D_j(T-t, u) \sigma_t^2 + iux_t} \quad (3.111)$$

siendo  $i = \sqrt{-1}$ .

Las funciones características  $f_j$  seguirán la ecuación (3.112). Esto es una consecuencia del teorema de Feynman-Kac, que estipula que, si una función  $f(x_t, t)$  del sistema bivariado Heston de ecuaciones diferenciales  $\mathbf{x}_t = (x_t, v_t) = (\ln S_t, v_t)$  satisface la ecuación  $\frac{\partial f}{\partial t} - rf + Af = 0$ , donde  $A$  es el generador de Heston de (3.81), entonces, la solución a  $f(x_t, t)$  es la esperanza condicional

$$f(\mathbf{x}_t, t) = E[f(\mathbf{x}_T, T) | \mathfrak{F}].$$

Usando  $f(\mathbf{x}_t, t) = E[e^{iu \ln(S_T)} | x_t, \sigma_t^2]$ , la cual es la función característica de  $X_T = \ln(T)$ , se tiene que las ecuaciones diferenciales parciales de las funciones características son

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ + (r + a_j\sigma_t^2) \frac{\partial f_j}{\partial x_t} + [v - b_j\sigma_t^2] \frac{\partial f_j}{\partial \sigma_t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Las derivadas requeridas en la ecuación (3.112) son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_t} &= iu f_j, & \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} &= -u^2 f_j \\ \frac{\partial f_j}{\partial \sigma_t^2} &= D u f_j, & \frac{\partial^2 f_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} &= D^2 u f_j \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} &= iu D f_j, & \frac{\partial f_j}{\partial t} &= \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \sigma_t^2 \frac{\partial D}{\partial t} \right) f_j. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas requeridas se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma_t^2 u^2 f_j + \rho\gamma\sigma_t^2 iu D f_j + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 D_j f_j + (r + a_j\sigma_t^2) iu \\ + (v - b_j\sigma_t^2) D f_j + \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \sigma_t^2 \frac{\partial D}{\partial t} \right) f_j = 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

o equivalentemente

$$\left( -\frac{1}{2}u^2 + \rho\gamma iu D_j + \frac{1}{2}\gamma^2 D_j^2 + a_j iu - b_j D_j + \frac{\partial D_j}{\partial t} \right) \sigma_t^2 + \left( r iu + v D_j + \frac{\partial C_j}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.114)$$

Se obtiene así el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_j}{\partial t} &= \rho\gamma i u D_j - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 D_j^2 + a_j i u - b_j D_j \\ \frac{\partial C_j}{\partial t} &= r i u + v D_j.\end{aligned}\quad (3.115)$$

La primera ecuación en el sistema (3.115) es una ecuación de Riccati en  $D_j$  mientras que la segunda es una ecuación ordinaria para  $C_j$  la cual puede ser resuelta por integración directa una vez que se obtiene  $D_j$ . Para resolver estas ecuaciones se requieren dos condiciones iniciales. Recordemos que

$$f_j(t, x_t, \sigma_t^2; u) = E[e^{i u x_T}] = e^{C_j(T-t, u) + D_j(T-t, u)\sigma_t^2 + i u x_t}. \quad (3.116)$$

Al tiempo de vencimiento,  $T - t = 0$ , el valor de  $x_T = \ln(S_t)$  es conocido, así la esperanza desaparecerá y la expresión a la derecha de (3.116) se reduce a  $e^{i u x_T}$ . Esto implica que las condiciones iniciales en el tiempo de maduración son  $D_j(0, u) = 0$  y  $C_j(0, u) = 0$

### 3.3.8. Solución de la Ecuación de Riccati en el modelo de Heston

Para obtener el precio a la opción de compra, debemos resolver las expresiones en (3.115).

#### Ecuación de Riccati en un entorno general

La ecuación de Riccati para  $y$  con coeficientes  $P(t)$ ,  $Q(t)$  y  $R(t)$  es

$$\frac{dy(t)}{dt} = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)y^2(t). \quad (3.117)$$

Esta ecuación se puede resolver considerando la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para  $w(t)$

$$w'' = \left[ \frac{P'}{P} + Q \right] W' + P R w = 0. \quad (3.118)$$

La cual puede ser escrita como  $w'' + bw' + cw = 0$ . La solución de la ecuación (3.117) es entonces

$$y(t) = -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{R(t)}.$$

La ecuación diferencial ordinaria (3.117) puede ser resuelta vía la ecuación auxiliar  $b^2 + br + c = 0$ , cuyas soluciones son

$$q = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{y} \quad p = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (3.118) es

$$w(t) = Me^{qt} + Ne^{pt}$$

donde  $M$  y  $N$  son constantes. Así, la solución de (3.117) es

$$y(t) = -\frac{Mqe^{qt} + Npe^{pt}}{Me^{qt} + Ne^{pt}} \frac{1}{R(t)}.$$

### Ecuación de Riccati en el modelo de Heston

Para la ecuación (3.115), la ecuación de Riccati puede ser escrita como

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j + R D_j^2 \quad (3.119)$$

donde

$$P_j = a_j i u - \frac{1}{2} u^2, \quad Q_j = b_j - \rho \gamma i u, \quad R = \frac{1}{2} \gamma^2.$$

La correspondiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es

$$w'' + Q_j w' + P_j R w = 0 \quad (3.120)$$

así que  $D_j = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w}$ .

La ecuación auxiliar es  $h^2 + Q_j h + P_j R = 0$  cuyas raíces son

$$q_j = -\frac{Q_j - \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j + d_j}{2}$$

$$p_j = -\frac{Q_j + \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j - d_j}{2}$$

donde

$$d_j = q_j - p_j = \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R} \quad (3.121)$$

$$= \sqrt{(\rho \gamma i u - b_j)^2 - \gamma^2 (2b_j i u - u^2)}. \quad (3.122)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de Riccati en el modelo de Heston es

$$D_j = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w} = -\frac{1}{R} \left( \frac{Mqe^{q\tau} + Npe^{p\tau}}{Me^{q\tau} + Ne^{p\tau}} \right) = -\frac{1}{R} \left( \frac{Lqe^{q\tau} + pe^{p\tau}}{Le^{q\tau} + e^{p\tau}} \right) \quad (3.123)$$

donde  $L = \frac{M}{N}$ . La condición inicial  $D_j(0, u) = 0$  implica que cuando  $\tau = 0$  es sustituido en (3.123), el numerador se convierte en  $Lq + p = 0$ , por lo tanto,  $L = -\frac{p}{q}$ . La solución para  $D_j$  se convierte en

$$\begin{aligned} D_j &= -\frac{p_j}{R} \left( \frac{-e^{q_j\tau} + e^{p_j\tau}}{-g_j e^{q_j\tau} + e^{p_j\tau}} \right) \\ &= -\frac{p_j}{R} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$= \frac{Q_j + d_j}{2R} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \quad (3.125)$$

donde

$$g_j = -L = \frac{p_j}{q_j} = \frac{b_j - \rho\gamma ui + d_j}{b_j - \rho\gamma ui - d_j} = \frac{Q_j - d_j}{Q_j + d_j}. \quad (3.126)$$

Entonces, la solución para  $D_j$  puede ser escrita como

$$D_j(T - t, u) = \frac{b_j - \rho\gamma ui + d_j}{\gamma^2} \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right). \quad (3.127)$$

La solución para  $C_j$  la encontramos por integración de la segunda ecuación en (3.115)

$$C_j(T - t, u) = \int_0^\tau riu dy + v \left( \frac{Q_j + d_j}{\gamma^2} \right) \int_0^\tau \left( \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) dy + K_1, \quad (3.128)$$

donde  $K_1$  es una constante. La primera integral es  $riu\tau$  y la segunda integral la podemos encontrar por sustitución, usando  $x = e^{d_j y}$ , para la cual  $dx = d_j e^{d_j y} dy$  y  $dy = \frac{dx}{(x d_j)}$ . Así, la ecuación (3.128) se convierte en

$$C_j(T - t, u) = riu\tau + \frac{a}{d_j} \left( \frac{Q_j + d_j}{\gamma^2} \right) \int_1^{e^{d_j\tau}} \left( \frac{1 - x}{1 - g_j x} \right) \frac{1}{x} dx + K \quad (3.129)$$

La integral en (3.129) puede ser evaluada por fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{1-x}{x(1-g_j x)} dx &= \int_1^{e^{d_j \tau}} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1-g_j}{1-g_j x} \right] dx \quad (3.130) \\
&= \ln(x) + \frac{1-g_j}{g_j} \ln(1-g_j x) \Big|_1^{e^{d_j \tau}} \\
&= d_j \tau + \frac{1-g_j}{g_j} \ln \left( \frac{1-g_j e^{d_j \tau}}{1-g_j} \right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo la integral en (3.129), produce la solución para  $C_j$  dada por

$$C(\tau, u) = rui\tau + \frac{v}{\gamma^2} \left[ (b_j - \rho\gamma ui + d_j)\tau - 2\ln \left( \frac{1-g_j e^{d_j \tau}}{1-g_j} \right) \right] \quad (3.131)$$

donde

$$g_j = \frac{b_j - \rho\gamma ui + d_j}{b_j - \rho\gamma ui - d_j} \quad (3.132)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\gamma ui - b_j)^2 - \gamma^2(2a_j ui - u^2)} \quad (3.133)$$

donde  $j = 1, 2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Así, sustituyendo  $C_j$  y  $D_j$  en (3.116), se obtienen las funciones características  $f_j$ , posteriormente se sustituyen estas en (3.107) para obtener las probabilidades  $P_j$ . Luego, poder calcular el precio de la opción con el modelo de Heston (3.95).

Por tanto, la fórmula de valoración de una opción call europea según el modelo de Heston se efectúa a través de la ecuación (3.94). Para ello es necesario evaluar las dos integrales en la parte real de números complejos de la ecuación (3.107) para obtener las  $P_j$ . Nótese que el precio de la opción europea depende del valor del parámetro correspondiente a la prima de riesgo por volatilidad.

Observemos que en general las integrales dadas por (3.107) no se pueden calcular por métodos analíticos, sin embargo, se pueden calcular aproximaciones a ella utilizando algún método numérico, por ejemplo, el método del punto medio.

### 3.3.9. Sensibilidad del modelo de Heston

Veamos que dependiendo de la configuración de  $\rho$  y  $\gamma$  la distribución del precio de las acciones al vencimiento puede mostrar sesgo

y exceso de curtosis. Se puede observar a través de [11] página 34 que la correlación controla la asimetría de la densidad de  $\ln(S_T)$  y del retorno compuesto continuo  $\ln(\frac{S_T}{S_0})$  sobre  $[0, T]$ . Cuando  $\rho > 0$ , el sesgo en la distribución de  $\ln(S_T)$  es positivo, por lo que más peso es asignado a la cola derecha de la distribución, lo que implica un aumento de la varianza cuando sube el precio de las acciones. Esto tiene el efecto de engordar la cola derecha de la distribución y adelgazar la cola izquierda. Por lo tanto, como el precio de ejercicio las opciones de compra fuera del dinero se encuentra en la cola derecha, el precio de Heston es mayor al de Black-Scholes. Asimismo, como el precio de ejercicio de las opciones de compra dentro del dinero se encuentra en la cola izquierda, el precio de Heston es mayor al de Black-Scholes. Ocurre lo contrario cuando  $\rho < 0$ .

Por lo tanto, los precios de las opciones generados por el modelo Heston deberían diferir de los generados por el modelo Black-Scholes. En el cuadro 3.1 se resume el efecto del parámetro de correlación sobre el precio de Heston del precio de Black-Scholes.

Opción de compra	$\rho > 0$	$\rho < 0$
Fuera del dinero	$Heston > BS$	$Heston < BS$
Dentro del dinero	$Heston < BS$	$Heston > BS$

Cuadro 3.1: **Comparación bajo diferentes correlaciones.**

Esto muestra que el modelo de Heston es muy sensible a los parámetros por lo que la aptitud del modelo depende de la calibración, por lo tanto, estimar los parámetros es una tarea delicada.

### 3.3.10. Aplicación y análisis de resultados

En esta sección se considera una vez más el estudio de los precios de cierre de las acciones de la IBM. En este análisis se considera información desde 14 de noviembre del año 2017 hasta el día 30 de noviembre del año 2018 sin considerar los días en que no hubo operaciones en los mercados.

Primero aplicaremos Montecarlo para los precios de las opciones con el algoritmo de simulación utilizado en el capítulo anterior, con la diferencia de las volatilidades fueron simuladas a través del proceso de Ornstein-Uhlenbeck (3.61) propuesto por Heston para representar la evolución de la volatilidad instantánea del activo subyacente cuya solución está dada por

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-\beta t} + \delta e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s, \quad (3.134)$$

lo cual implica que,  $\sigma_t \sim N[\sigma_0^2 e^{-\beta t}, \frac{\delta^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})]$ .

A través de la distribución de  $\sigma_t$ , se obtienen los parámetros  $\delta$  y  $\beta$ . Se usarán las volatilidades estimadas con una frecuencia de seis días de los datos históricos de las acciones durante el periodo observado. Más específicamente, si  $\bar{X}$  denota la volatilidad promedio de las volatilidades estimadas y  $S^2$  la volatilidad de las mismas, entonces a través de

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_0 e^{-\beta t}, \\ S^2 &= \frac{\delta^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}) \end{aligned}$$

y

$$t = 6.$$

Despejando se obtiene que

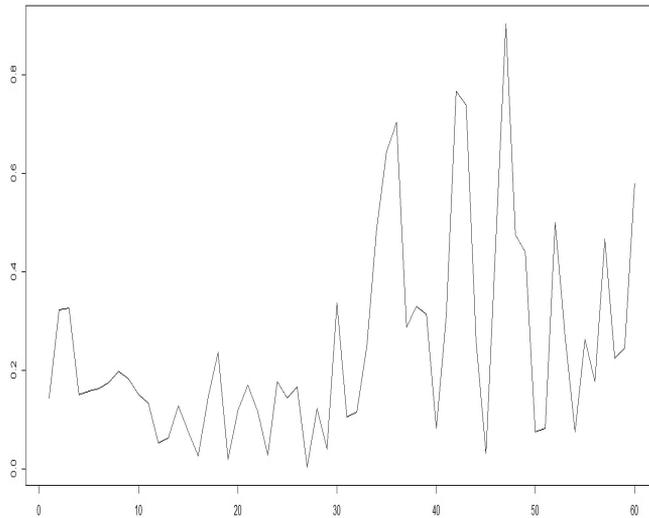
$$\beta = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\bar{X}}{\sigma_0}\right) \quad (3.135)$$

y

$$\delta = \sqrt{\frac{2\beta S^2}{1 - \exp(-2\beta t)}} \quad (3.136)$$

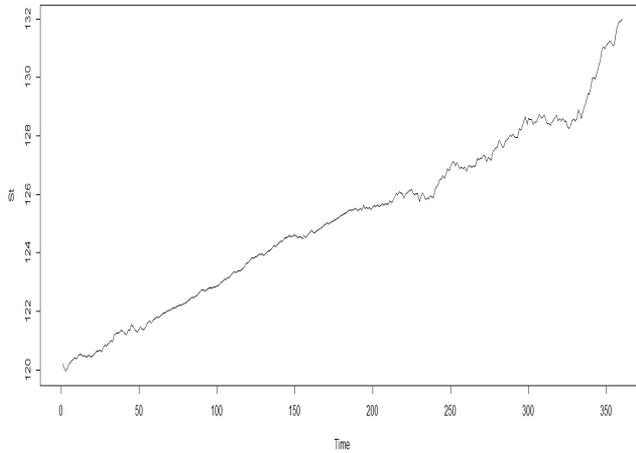
A partir de los datos de volatilidad realizada fueron obtenidos mediante (3.54) y de las ecuaciones (3.135) y (3.136), obtuvimos las siguientes estimaciones de los parámetros del modelo propuesto por Heston para las volatilidades (3.61), estos fueron  $\beta = 1,005906$  y  $\delta = 0,6489019$ .

Luego, para obtener el precio de una opción en el tiempo  $T$ , se necesita conocer  $S_T$  el cual depende de  $\sigma_T$ . Simulamos las volatilidades a través del proceso (3.134) a un año y se muestran en el Gráfico 9.



**Gráfico 10: Volatilidades semanales simulados a un año.**

Otra observación del gráfico de volatilidades es que, aunque estocástica, es ajustada continuamente por los parámetros de reversión presentes en el modelo que guía dicho proceso, por lo tanto, las variaciones en los precios del subyacente siguen siendo aleatorios pero tienden siempre a una media, evitando así un problema de sobrevaloración, esto siempre pensando en un mundo en el que los movimientos del activo subyacente se comporten de manera normal.



**Gráfico 11: Precios simulados a un año.**

En el Cuadro 3.2 se muestran las estimaciones de las volatilidades semanales y de las opciones europeas de compra a distintas fechas de vencimiento con precio de ejercicio  $K = \$125$ . El gráfico muestra que la opción de compra se encontraría dentro del dinero para la fecha de vencimiento del contrato.

Un escenario posible para la aplicación de opciones sobre la IBM a través del método de Montecarlo como en el capítulo anterior con 10,000 iteraciones se puede observar a través del Cuadro 3.2.

Dias a vencimiento	r	$\sigma_t$	MC Heston
30	0.079	0.01572012	0.003500
90	0.0825	0.00002178472	0.007113
180	0.0828	0.005680382	2.717171
360	0.0849	0.05484674	7.415636

Cuadro 3.2: Estimacion por Montecarlo.

A continuación se muestra un cuadro comparativo de los resultados arrojados de esta simulación, la simulación según la propuesta de Hull y White y el modelo de Heston para la valuación de opciones.

Días a vencimiento	Black-Sholes	MC HESTON
30	8.510841e-16	0.003500
90	0.097454	0.007113
180	0.6279111	2.717171
360	5.278035	7.415636

Cuadro 3.3: Comparación de los precios.

El Cuadro 3.3 muestra que los precios arrojados por la simulación del modelo de modelo de Heston están alejado de los precios de Black-Sholes. Esto tiene sentido con el efecto que causa la sonrisa de la volatilidad implícita en el modelo de Black-Sholes. Habíamos visto en el Gráfico 7 que cuando disminuye el precio de ejercicio, aumenta la volatilidad. Sabemos por la sensibilidad del modelo de Black-Sholes, un aumento de la volatilidad provoca un aumento en el precio de la opción de compra. Es decir, la volatilidad implícita más alta provoca precios más caros de las opciones de compra. Por lo tanto, la fórmula de Black-Sholes estaría subvalorando los precios de las opciones de compra fuera del dinero debido a que estas tienen precio de ejercicio en la cola derecha de la distribución de  $\ln(S_T)$ . A su vez, la fórmula de Black-Sholes estaría sobrevalorando los precios de las opciones de compra dentro del dinero debido a que estas tienen precio de ejercicio en la cola izquierda de la distribución de  $\ln(S_T)$ . Lo contrario sucede con las opciones de venta.

Todo esto es provocado cuando el precio de la opción de compra  $K$  disminuye ya que esto provoca que la volatilidad aumente.

Esto explica los resultados en el Cuadro 3.2. Los precios obtenidos a través de la simulación por Montecarlo con el modelo de volatilidad estocástica de Heston superaron los precios arrojados por la fórmula de Black-Scholes para opciones con fecha de vencimiento 180 y 360 días y fueron inferiores para 30 y 90 días.

Considerando esto, y en base a los resultados obtenidos en el Cuadro 3.2, se confirma la hipótesis una vez más que el precio de la opción obtenida por medio del modelo de Heston evita la subvaloración o la sobrevaloración que se presenta en el modelo Black-Scholes.

Por otra parte, aplicaremos la fórmula cerrada del modelo de Heston para luego comparar con los resultados de la simulación. Para ello, es necesario estimar previamente los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_0^2$ ,  $\gamma$  y  $\rho$ . La estimación óptima de estos parámetros estaría formada por aquellos valores que se ajusten a los datos del mercado para los cuales se minimiza el error entre los precios de mercado y los precios teóricos dados por el modelo.

### 3.4. Estimación de los parámetros

Con la implementación de la solución de forma cerrada de Heston, se está en la capacidad de calibrar los parámetros del modelo para algunas opciones europeas de compra comercializadas. La forma más popular de estimar los parámetros del modelo de Heston es usar alguna clase de función de pérdida asociada bien sea a los precios de opciones para minimizar la distancia entre los precios de opciones de mercado y el precio del modelo Heston calibrado o asociada a las volatilidades implícitas minimizando el error entre la volatilidad citada en el mercado y la volatilidad implícita del modelo. Aquellos valores que minimizan el valor de la función de pérdida serán tomadas como las estimaciones de los parámetros, de modo que el modelo los precios o las volatilidades implícitas están lo más cerca posible de sus contrapartes del mercado. Se debe utilizar un algoritmo de minimización restringido a este respecto para que el restricciones en los parámetros  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\rho \in [-1, 1]$  sean respetados.

Dado que las funciones de pérdida utilizan precios de opciones de mercado (o la volatilidad implícita de esos precios) y no se disponía de toda la información requerida. Por esta razón para estimar los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\gamma$  en (3.59) utilizaremos los valores obtenidos de  $\beta$  y  $\delta$  según (3.63) considerando únicamente los datos históricos sin examinar las expectativas del mercado teniendo en cuenta que esto puede conllevar a una incorrecta valoración y gestión de los activos derivados.

El Cuadro (3.4) muestra el valor estimado de la velocidad media, la varianza a largo plazo, la volatilidad de la volatilidad, el coeficiente de correlación entre el rendimiento del activo y su volatilidad y por último la variación instantánea que se obtuvieron para el conjunto de datos.

La prima de riesgo de la volatilidad incorporada fué  $\lambda = 1$ .

Parámetro	a	b	$\gamma$	$\rho$	$\sigma_0$
Estimación	2.011	0.118	0.976	-0.053	0.176

Cuadro 3.4: Estimación de los parámetros del Heston.

Aquí comparamos opciones de precios calculados según simulación por Montecarlo y de la fórmula cerrada de Heston para distintas fechas de vencimientos. Los resultados de las implementaciones se observan en la siguiente tabla.

Días a vencimiento	Black-Sholes	Precio Heston
30	8.510841e-16	0.00018543
90	0.097454	0.001993
180	0.6279111	2.100258
360	5.278035	7.756231

Cuadro 3.5: Comparación del precio por Montecarlo y por la fórmula cerrada de Heston.

Al estimar los parámetros, obtuvimos  $\rho < 0$ , lo cual tiene sentido con la información en el Cuadro 3.1 y los resultados en el Cuadro 3.5, ya que la opción de compra se encontrará dentro del dinero a partir del día 150 después de la emisión del contrato debido a que el precio de las acciones simuladas serán mayores al precio establecido en el contrato  $K = \$125$  como se observa en el Gráfico 10. Por lo que los precios de las opciones obtenidas por el modelo de Heston para fechas de vencimiento 180 y 360 días debían ser mayor que los obtenidos con la fórmula de Black-Sholes lo cual se comprueba en el Cuadro 3.5 para las opciones con fecha de vencimiento de 180 y 360 días. Sin embargo, para las opciones con fecha de vencimiento de 30 y 90 días, las opciones de compra se encontrarían fuera del dinero debido a que los precios simulados serían menores  $K = \$125$ , por lo que estos precios arrojados por la fórmula de Heston debían haber sido menores a los generados por los de (B-S). Esto también se cumplió para la opción de 90. Una razón por la que no se cumplió para la opción de 30 días puede ser por que la volatilidad estimada para esa fecha es mayor a la que se utilizó en el modelo de Black-Sholes.

Otra observación, los precios dados por el modelo de Heston, se puede observar a través del Cuadro 3.5 que la aproximación de Heston pierde su precisión al momento de la madurez ya que va aumentando el precio de la opción conforme aumenta el tiempo de vencimiento del contrato, pero el modelo de Black-Scholes también enfrenta el mismo tipo de problema.

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este trabajo se presentó de manera muy detallada el modelo de Black-Scholes, el modelo de Hull-White y el modelo de Heston para la valoración de opciones europeas de compra. También se analizó la implementación de estos tres modelos a los datos correspondientes a las acciones de la IBM durante el año 2018 para valorar opciones de compra para distintas fechas de vencimiento. Todos los algoritmos fueron implementados en código R excepto la fórmula de Heston que fué ejecutada en Mathematica pues cuenta con herramientas que facilitaron la aplicación de la misma.

Para la aplicación de los dos modelos de volatilidad estocástica fué necesario la estimación de la volatilidad como los demás parámetros para ambos modelos. Para ello, se hizo coincidir el proceso propuesto para la volatilidad compilado por las series temporales históricas de los logaritmos de los rendimientos.

Es importante resaltar que por el hecho de que los parámetros se obtuvieron solo a partir de los datos históricos y no se pudo considerar la información implícita en el mercado, por esta razón, los resultados obtenidos por el modelo de Heston en este trabajo pueden no haber sido tan confiables, sin embargo el modelo de Heston se usa ampliamente en las investigaciones financieras y la aproximación de Heston funciona realmente bien y mejora los precios en comparación con Black-Scholes con la elección adecuada de los parámetros.

# Apéndice

## 4.1. Cálculo estocástico

Es necesario tener ciertas ideas básicas de las matemáticas del interés compuesto y un conocimiento elemental de probabilidad para el entendimiento de la fórmula de valoración de Black–Scholes

### 4.1.1. Matemáticas del interés compuesto

- Interés simple:  $V$  es el valor al cabo de un tiempo  $t$  de un depósito inicial  $P$  a una tasa de interés anual  $r$ .

$$V = P(1 + r)^t.$$

- Interés compuesto:  $V$  es el valor al cabo de un tiempo  $t$  de un depósito inicial  $P$  a una tasa  $r$  de interés compuesto  $n$  veces al año.

$$V = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

- Interés continuo:  $V$  es el valor al cabo de un tiempo  $t$  de un depósito inicial  $P$  a una tasa de interés continuo anual  $r$ .

$$V = Pe^{rt}$$

Observemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- Tasa anual continua de pago de un activo:  $r$  es la tasa anual continua de beneficio de un activo  $S$  cuyo precio es  $S_0$  en un instante  $t_0$  y  $S(t)$  en un instante posterior  $t$ .

$$r = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right).$$

Dado un espacio de probabilidad en donde está definida una sucesión de variables aleatorias, existen varios tipos de convergencia. Para nuestro efecto, solo nos interesa la convergencia en media cuadrática que es la que se utilizará cuando discutamos la integral estocástica.

Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias definidas en  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{P})$ , tales que  $E[|X_n|^2] < \infty$  para toda  $n \in N$ . Se dice que  $\{X_n\}$  converge en media cuadrática (m.c.) o que converge en  $L_t^2$  a una variable aleatoria  $X$  si

$$E[|X|^2] < \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^2] \rightarrow 0$$

y suele denotarse como  $E[|X_n - X|^2] \stackrel{L^2}{\rightarrow} 0$ .

## 4.2. Procesos estocásticos

Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{P})$  un espacio de probabilidad fijo, un proceso estocástico unidimensional es una función

$$X : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada  $t > 0$ , la función

$$X(t, \omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

satisface que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathfrak{F}$ . Dicho de otra forma, que  $\forall T \in \mathbb{R}$ ,  $X(t, \omega)$  es una variable aleatoria definida en  $(\Omega, \mathfrak{F})$ .

Para cada  $\omega \in \Omega$ , la función

$$X(t, \omega) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$$

es una trayectoria del proceso.

### 4.2.1. Martingalas

Sea  $(\Omega, \mathfrak{F})$  un espacio medible. Una **filtración** en  $(\Omega, \mathfrak{F})$  es una familia de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ , donde

$$\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}.$$

Sea  $\{X_n\}$  un proceso estocástico en  $(\Omega, \mathfrak{F})$ . Ahora consideremos  $\mathfrak{F}_n := \sigma\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . La **filtración natural** se define como la familia

$$\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\},$$

es decir, es la menor  $\sigma$ -álgebra que hace que  $X_1, X_2, \dots$  y  $X_n$  sean medibles.

Sea  $X_n$  un proceso estocástico en  $(\Omega, \mathfrak{F})$  y sea  $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  una filtración en  $(\Omega, \mathfrak{F})$ . El proceso  $X$  es llamado  $\{\mathfrak{F}_n\}$ -adaptado si para cada  $n \geq 0$ , se tienen que  $X_n$  es  $\mathfrak{F}_n$ -medible, es decir, que si  $n \geq 0$ ,

$$\{X_n \leq x\} \equiv \{\omega | X_n(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}_n \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que el valor que tome  $X_n$  en  $n$  depende solamente de la información disponible al tiempo  $n$ .

Esta propiedad de adaptabilidad es muy importante y afortunadamente la mayoría de los procesos que se utilizan en finanzas la tienen. Claramente, todo proceso es adaptado a la filtración natural.

Sea  $X_n$  un proceso  $\{\mathfrak{F}_n\}$ -adaptado tal que  $E[|X_n|] < \infty$ . Se dice que  $X_n$  es una martingala si satisface que

$$E[X_{n+1}|\mathfrak{F}_n] = X_n \quad \forall n \geq 0.$$

**Lema de suaviamiento:** Supongamos que  $\mathfrak{F}_1$  y  $\mathfrak{F}_2$  son sub- $\sigma$ -algebras de  $\mathfrak{F}$ , y que además  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ . Entonces

$$E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_1] = E[E[X|\mathfrak{F}_1]|\mathfrak{F}_2]$$

Si el proceso  $\{X_n\}$  es una martingala y  $m > n$ , se cumple que

$$E[X_m|\mathfrak{F}_n] = X_n$$

#### 4.2.2. Proceso de Wiener

Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{P})$  un espacio de probabilidad fijo, el movimiento Browniano estándar y unidimensional es un proceso estocástico  $W : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow R$  que satisface:

1.  $W(0, w) \stackrel{c.s.}{=} 0$
2. Sus trayectorias son continuas.
3. Dados  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ , los incrementos  $W(t_1, w) - W(t_0, w), W(t_2, w) - W(t_1, w), \dots, W(t_k, w) - W(t_{k-1}, w)$  son mutuamente independientes.
4. Para cualquier par de tiempos  $t \geq s \geq 0$ ,  $W(t, w) - W(s, w) \sim N(0, t - s)$

(4.1)

**Observación:** Se puede definir el movimiento Browniano no estándar si la condición 4 se sustituye por

$$W(t, w) - W(s, w) \sim N(0, c(t - s)),$$

donde  $c$  es una constante positiva.

A lo largo de este trabajo, denotaremos al proceso de Wiener en forma breve como  $\{W_t, t \geq 0\}$ .

Se puede verificar fácilmente que un proceso de Wiener tiene las siguientes propiedades

- $E(W_t) = 0$
- $Var(W_t) = t = E[W_t^2]$
- Es una martingala.
- Es una cadena de Markov.
- No es diferenciable.

### 4.3. Cálculo estocástico

Damos algunas nociones básicas de la teoría del cálculo estocástico o cálculo de Ito. Además de algunas herramientas necesarias en forma ascendente de la teoría con la que se establece el modelo de valuación de opciones, con el fin de que el entendimiento de la misma sea lo más natural posible.

El cálculo de Ito juega un papel muy importante en matemática financiera, es una de las herramientas fundamentales para manipular las fórmulas de las finanzas matemáticas, en particular, en el precio de las opciones.

#### 4.3.1. Integral de Ito

Vamos a definir la integral estocástica, o integral de Ito de un proceso estocástico respecto del movimiento browniano.

##### Pimeras hipótesis

- Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad.
- $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar con su filtración natural  $\mathfrak{F}_t$

- $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso con espacio parametral  $[0, T]$ ,  $T > 0$  fijo.  
Visto como función

$$X : \Omega \times [0, T] \rightarrow R \text{ es } \mathfrak{F}_T \otimes B_{[0, T]} \text{ medible}$$

y que satisface las condiciones:

- $\int_0^t X_s^2 ds < \infty$
- $\int_0^t E[X_s^2] ds < \infty$

y sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano estándar.

La integral de Ito de  $X_t$  respecto de  $W_t$  es una proceso de la forma:

$$I_t = \int_0^t X_s dW_s, \quad (4.2)$$

y es tal que si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  es una partición del intervalo  $[0, t]$  en subintervalos de igual longitud, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - I_t \right]^2 = 0 \quad (4.3)$$

La convergencia es en media cuadrática, es decir, en  $L_t^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$

**Ejemplo:** Queremos mostrar que  $(dW_t)^2 = dt$ , en otras palabras, deseamos probar que

$$\int_0^t (dW_t)^2 = t$$

Sabemos que

$$\int_0^t (dW_t)^2 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$$

No es complicado probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t \right]^2 = 0 \quad (4.4)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \stackrel{L_t^2}{=} t \quad (4.5)$$

Así

$$\int_0^t (dW_t)^2 = t \quad (4.6)$$

Esto muestra que

$$(dW_t)^2 = dt \quad (4.7)$$

Esta regla es central en el cálculo estocástico, muestra que el cuadrado de una cantidad infinitesimal normal es significativa, lo que hace distinción con el cálculo de variables reales.

Por otra parte, sabemos que en el cálculo de variables reales, si  $t$  es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal,  $(dt)^2$ , es una cantidad despreciable y se escribe

$$(dt)^2 = 0$$

De hecho,  $(dt)^a = 0$  para  $a > 1$ .

Otra regla básica del cálculo estocástico se construye a partir de las dos anteriores y es la siguiente

$$dt dW_t = dt(dt)^{\frac{1}{2}} = (dt)^{\frac{3}{2}} = 0$$

Podemos resumir lo anterior en lo que se conoce como la tabla de multiplicación de McKean :

.	dt	$dW_t$
dt	0	0
$dW_t$	0	dt

### 4.3.2. Proceso de Ito

Un proceso estocástico  $S(t, w)$  es un proceso de Ito si se puede escribir por la ecuación integral

$$S(t, w) = S(0) + \int_0^t \mu[u, S(u, w)] du + \int_0^t \sigma[u, S(u, w)] dW(u) \quad (4.18)$$

Su forma abreviada diferencial es:

$$dS(t, w) = \mu[t, S(t, w)]dt + \sigma[t, S(t, w)]dW(t, w) \quad (4.9)$$

Vamos a describir a cada uno de los componentes de la ecuación de Ito.

- $\mu[t, S(t, w)]$  es llamado componente deriva. Es el cambio esperado en  $S(t, w)$ . Se usa para calcular el valor esperado del cambio esperado en  $S(t, w)$ .
- $\sigma[t, S(t, w)]$  es llamado coeficiente de difusión. Se usa para calcular la desviación instantánea del cambio de  $S(t, w)$ . Mide la volatilidad de  $dS(t, w)$  (cambio en  $S(t, w)$ ).
- $dW(u, w)$  es puramente aleatorio, con

$$E(dW(u, w)) = 0 \quad \text{y} \quad Var(dW(u, w)) = dt$$

por ser un movimiento Browniano.

La inclusión del movimiento Browniano en la ecuación, está generando incertidumbre, esta no desaparece aunque los intervalos se vuelvan extremadamente pequeños y justamente quien está captando toda esta incertidumbre es  $dW_t$  debido a que

$$dW_{\Delta t} \neq 0 \text{ aunque } \Delta t \rightarrow 0$$

**Observación:** Nótese que

$$\begin{aligned} E[\sigma[t, S(t, w)]dW(u, w)] &= \sigma[t, S(t, w)]E[dW(u, w)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

y

$$\begin{aligned} Var[\sigma[t, S(t, w)]dW(u, w)] &= \sigma^2[t, S(t, w)]Var[dW(u, w)] \\ &= \sigma^2[t, S(t, w)]dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

Así,  $\sigma[t, S(t, w)]dW(u, w)$  es la contribución total de la incertidumbre a  $dS(t, w)$

La ecuación de Ito expresa los cambios en los valores de una v.a continua en el tiempo.

En finanzas,  $S(t, w)$  es el precio de una acción en el tiempo  $t$ , el cual es afectado por el estado de la economía descrito por el término aleatorio  $w$ . Así  $dS(t, w)$ , expresa el pequeño cambio en el precio de las acciones.

La interpretación de los componentes conceptuales es que si en un momento dado  $t$  se está evaluando el posible cambio futuro en el precio de un activo durante la próxima negociación, el cambio se puede descomponer en dos componentes:

$$\text{El cambio esperado: } E[dS(t, w) = E[\mu[t, S(t, w)]dt]$$

$$\text{El cambio inesperado: } E[\sigma[t, S(t, w)]dW(u, w)].$$

Aunque  $\mu[t, S(t, w)]$  y  $\sigma[t, S(t, w)]$  son v.a debido a que dependen de  $S(t, w)$ , son conocidos en el momento  $t$  en que se está evaluando el cambio infinitesimal del precio del activo. Esto indica que la incertidumbre instantánea o (nueva información que no se puede anticipar) entra en el modelo solo a través de  $dW(t, w)$ .

### 4.3.3. Lema de Ito

Lema de Ito. Sea  $C[t, S(t, w)] : [0, \infty) \times R \rightarrow R$  con derivadas parciales  $C_t$ ,  $C_s$  y  $C_{ss}$  y

$$dS(t, w) = \mu[t, S(t, w)]dt + \sigma[t, S(t, w)]dW(t, w).$$

Entonces

$$\begin{aligned} C[t, S(t, w)] &= \{C_t[t, S(t, w)] + C_s[t, S(t, w)]\mu[t, S(t, w)] \\ &\quad + \frac{1}{2}C_{ss}[t, S(t, w)]\sigma^2[t, S(t, w)]\}dt \\ &\quad + C_s[t, S(t, w)]\sigma[t, S(t, w)]dW(t, w) \end{aligned} \tag{4.12}$$

## 4.4. Lema de Ito para dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas dadas por

$$\begin{cases} dS_{1t} = \mu_1(t, S_{1t})dt + \sigma_1(t, S_{1t})dW_{1t}, \\ dS_{2t} = \mu_2(t, S_{2t})dt + \sigma_2(t, S_{2t})dW_{2t}, \end{cases} \quad (4.13)$$

con

$$Cov(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt \quad (4.14)$$

Definamos una función  $C = C(t, S_{1t}, S_{2t})$ . La expansión en serie de Taylor de esta función hasta términos de segundo orden está dada por

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_{1t}} dS_{1t} + \frac{\partial C}{\partial S_{2t}} dS_{2t} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S_{1t}^2} (dS_{1t})^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S_{2t}^2} (dS_{2t})^2 \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_{1t} \partial t} dS_{1t} dt + \frac{\partial^2 C}{\partial S_{2t} \partial t} dS_{2t} dt + \frac{\partial^2 C}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} dS_{1t} dS_{2t} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

La sustitución del sistema (4.13) y las reglas básicas de diferenciación estocásticas plasmadas en la tabla de Mc.Kean conducen a

$$\begin{aligned} dC &= \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_{1t}} \mu_1(t, S_{1t}) + \frac{\partial C}{\partial S_{2t}} \mu_2(t, S_{2t}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_{1t}^2} \sigma_1^2(t, S_{1t}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_{2t}^2} \sigma_2^2(t, S_{2t}) \rho \sigma_1(t, S_{1t}) \sigma_2(t, S_{1t}) \frac{\partial^2 C}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} \right) dt \\ &+ \frac{\partial C}{\partial S_{1t}} \sigma_1(t, S_{1t}) dW_{1t} + \frac{\partial C}{\partial S_{2t}} \sigma_2(t, S_{2t}) dW_{2t} \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] Asai, M., McAleer, M., & Yu, J. (2006). *Multivariate stochastic volatility: a review*. *Econometric Reviews*, 25(2-3), 145-175.
- [2] Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2002). *Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models*. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64(2), 253-280.
- [3] Bergomi, L. (2015). *Stochastic volatility modeling*. CRC Press.
- [4] Broadie, M., & Kaya, Ö. (2006). *Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes*. *Operations research*, 54(2), 217-231.
- [5] Chan, J. C. (2017). *The stochastic volatility in mean model with time-varying parameters: An application to inflation modeling*. *Journal of Business & Economic Statistics*, 35(1), 17- 28.
- [6] Diebold, F. X., Schorfheide, F., & Shin, M. (2017). *Real-time forecast evaluation of DSGE models with stochastic volatility*. *Journal of Econometrics*.
- [7] Fleming, W. H., & Hernández-Hernández, D. (2003). *An optimal consumption model with stochastic volatility*. *Finance and Stochastics*, 7(2), 245-262.
- [8] Funahashi, H., & Higuchi, T. (2017). *An analytical approximation for single barrier options under stochastic volatility models*. *Annals of Operations Research*, 1-29.
- [9] Ghysels, E., Harvey, A. C., & Renault, E. (1996). *5 Stochastic volatility*. *Handbook of statistics*, 14, 119-191.
- [10] Gut, A. *Probability: A Graduate Course*. Springer, segunda edición.

- [11] Steven L. Heston (2013). *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C*. Wiley Finance Series, segunda edición.
- [12] Heston, S. L. (1993). *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. *The review of financial studies*, 6(2), 327-343.
- [13] Hoel P.G., Port S.C., Stone C.J (1972). H.J *Introduction to Stochastic Processes*. HOUGHTON MIFFLIN COMPANY.
- [14] Hull,J.C.(John C.) (2002) *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. Prentice Hall, cuarta edición.
- [15] H.J. Girlich, (2002) *Bachelier's Predecessors*. Universidad de Leipzig, Alemania.
- [16] Ilhuicatzí-Roldán, R., Cruz-Suárez, H., & Chávez-Rodríguez, S. (2017). *Markov decision processes with time-varying discount factors and random horizon*. *Kybernetika*, 53(1), 82- 98.
- [17] Jackwerth, J. C. (1999). *Option-implied risk-neutral distributions and implied binomial trees: A literature review*. *The Journal of Derivatives*, 7(2), 66-82.
- [18] Jacquier, E., Polson, N. G., & Rossi, P. E. (2002). *Bayesian analysis of stochastic volatility models*. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(1), 69-87.
- [19] Kim, S., Shephard, N., & Chib, S. (1998). *Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models*. *The review of economic studies*, 65(3), 361-393.
- [20] Lehar, A., Scheicher, M., & Schittenkopf, C. (2002). *GARCH vs. stochastic volatility: Option pricing and risk management*. *Journal of Banking & Finance*, 26(2), 323-345.
- [21] McAleer, M., & Medeiros, M. C. (2008). *Realized volatility: A review*. *Econometric Reviews*, 27(1-3), 10-45.
- [22] NEFTCI, N. Salih (2008). "Ingeniería Financiera" Mc Graw Hill Interamericana de México. Mexico (2008). Primera edición.
- [23] So, M. E. P., Lam, K., & Li, W. K. (1998). *A stochastic volatility model with Markov switching*. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(2), 244-253.
- [24] Sircar, K. R., & Papanicolaou, G. C. (1999). *Stochastic volatility, smile & asymptotics*. *Applied Mathematical Finance*, 6(2), 107-145. amp; asymptotics. *Applied Mathematical Finance*, 6(2), 107-145.

- 
- [25] Taylor, S. J. (1994). *Modeling stochastic volatility: A review and comparative study*. *Mathematical finance*, 4(2), 183-204.
- [26] Venegas, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos. Parainfo, segunda edición*.
- [27] R. Brouzet. *About the existence of recursion operators for completely integrable Hamiltonian systems near a Liouville torus*, *J. Math. Phys.* 34, 1309-1313, 1993.
- [28] <https://www.akubica.com/segun-ibm-estas-5-tecnologias-impactaran-al-mundo-para-el-2023/>