Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas

PROCESOS DE DECISIÓN DE MARKOV DESCONTADOS: VERSIONES GENERALES DE LA ECUACIÓN DE EULER Y SU APLICACIÓN EN EL CRECIMIENTO ECONÓMICO ESTABLE

TESIS

que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:
GABRIEL ZACARÍAS ESPINOZA

Director de Tesis:
Dr. Hugo Adán Cruz Suárez
Dr. José Raúl Montes de Oca Machorro

Puebla, Pue. Noviembre 2012

Agradecimientos

Especialmente a mis asesores, los Doctores Hugo Cruz Suárez y J. Raúl Montes de Oca Machorro, por brindarme su amistad, comprensión, confianza y sobre todo sus enseñanzas. Gracias por ayudarme a dar este importante logro en mi vida.

A mis hermanos Jorge y Antonio por estar siempre a mi lado.

A mis suegros, comadres, cuñadas y sobrinos por hacer más grande y cálida a la familia, gracias por su gran apoyo, comprensión y confianza.

Al comité revisor integrado por: Dra. Hortensia J. Reyes Cervantes, Dra. Rosa María Flores Hernández, Dr. Rolando Cavazos Cadena, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara, Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, Dr. Enrique Lemus Rodríguez, Dr. Daniel Cruz Suárez, Dr. Bulmaro Juárez Hernández y Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria. Gracias a todos ustedes por sus grandes comentarios, sugerencias y observaciones, los cuales han mejorado y enriquecido este trabajo.

A mis compañeros y amigos, por todo su apoyo y confianza.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado para la realización de mi doctorado.

INTRODUCCIÓN

La presente tesis está relacionada con la teoría de Procesos de Decisión de Markov (PDM's) a tiempo discreto (véase [4], [13], [17] y [18]). Los PDM's son aquellos procesos que son observados de forma periódica, bajo incertidumbre en sus movimientos y tienen una gran variedad de aplicaciones (véase por ejemplo [4], [12], [16], [34] y [40]). En particular, en este trabajo nos enfocamos en el estudio de modelos de crecimiento económico (véase [2], [5], [12], [25], [31] y [34]). Un PDM está constituido mediante un modelo conocido como Modelo de Control de Markov (MCM), cuyas componentes permiten caracterizar su desarrollo en el transcurso del tiempo. A grandes rasgos, un PDM es descrito de la forma siguiente: el sistema es observado de forma discreta por un controlador en cada instante t ($t = 0, 1, \ldots$) y en ese momento el controlador elige una acción admisible al estado actual que presenta el sistema, como consecuencia de esto se obtiene una recompensa (o se paga un costo) y, mediante una ley de transición prefijada, el sistema transita al siguiente estado. A la sucesión de acciones que el proceso genera se le conoce como política. Una manera de evaluar la calidad de la política es mediante un criterio de rendimiento. En este trabajo se considera como criterio de rendimiento la recompensa total descontada con horizonte infinito (véase [17]). El Problema de Control Óptimo (PCO) consiste en encontrar una política que optimice el criterio de rendimiento y es comúnmente clasificado mediante su horizonte y/o su criterio de rendimiento (véase [17] y [18]).

Una manera de solucionar el PCO es mediante la técnica de Programación Dinámica (PD) iniciada a mediados de los años 50's por Richard Bellman en su trabajo titulado: *Dynamic Programming* (véase [3]). El método de PD consiste en llevar al PCO a otro equivalente, el cual está dado mediante una ecuación funcional conocida como Ecuación de Optimalidad (EO). Dicha ecuación permite caracterizar a la función objetivo (conocida como función de valor óptimo). Además, existe literatura donde se presentan condiciones (sobre el MCM) para garantizar la validez de PD (véase [17], [18] y [21]). Aunque estas condiciones tienen como objetivo principal determinar cuando el valor óptimo es solución de la EO, también dan información cualitativa sobre ella, por ejemplo: concavidad, acotabilidad, medibilidad, continuidad superior (o inferior), continuidad, entre otras (véase [6], [17], [18] y [21]).

Por otro lado, en los modelos de crecimiento económico se ha logrado caracterizar a su solución óptima mediante una ecuación funcional, conocida como la Ecuación de Euler (EE) (véase [5], [12], [22], [23], [25], [30], [31], [33] [34] y Zacarias). Históricamente, Leonhard Euler (1707-1783) introdujo un procedimiento matemático general para la investigación sistemática de problemas de variaciones, originando el Cálculo de Variaciones (véase [20]). Los problemas asociados al Cálculo de Variaciones consisten en optimizar cantidades donde las variables son curvas, superficies, etcétera, es decir, extremos de funcionales. Su metodología clásica hace uso de la noción de derivada y de ciertos lemas básicos en teoría de optimización como la condición de primer orden. Entonces, para obtener una versión de la EE en el contexto de PDM's es necesario dar condiciones que garanticen la diferenciabilidad de la función de valor óptimo. H. Cruz-Suárez y R. Montes-de-Oca en [9] garantizan esta propiedad. La idea básica consiste en aplicar una fórmula de la envolvente en el contexto de PDM's, y cabe mencionar que ésta además garantiza que la política óptima es diferenciable (siempre que exista y cumpla una propiedad de interioridad). Con este resultado, se tiene como antecedente [8] y [37], donde se presentan versiones de la EE en el contexto de PDM's para la política óptima en el caso determinista y estocástico, respectivamente. Sin embargo, no se logra caracterizar a la solución óptima, debido a que solo presentan condiciones necesarias. Además, en [38] y [39] incluyen un método complementario a PD, el cual consiste en una versión de la EE para las funciones de iteración de valores para un modelo lineal cuadrático.

Con la motivación de lograr caracterizar a la política óptima mediante una versión de la EE en el contexto de PDM's, en la elaboración de la tesis se ha realizado un estudio sobre modelos de crecimiento económico, en los cuales se ha logrado caracterizar a su solución óptima mediante ecuaciones de Euler. Este estudio es brevemente resumido de la forma siguiente: en 1928, Frank Ramsey en su trabajo titulado *A Mathematical Theory of Saving* (véase [31]) propone por primera vez un modelo de crecimiento económico determinista planteado de manera dinámica. La formulación más simple del problema de Ramsey es el suponer a un agente económico que debe decidir en cada periodo t qué parte de la producción generada por un capital debe ser consumida y qué parte deberá ser ahorrada para el siguiente periodo; en

1969, S. D. Levhari y T. N. Srinivasan en su trabajo *Optimal savings under uncertainty* (véase [25]), plantearon que en cada periodo t el agente tiene la opción de consumir todo su capital o invertir parte de éste con una tasa de interés aleatoria; eventualmente, en 1972, W. Brock y L. Mirman publican el trabajo *Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case* (véase [5]), donde se presenta el modelo clásico de crecimiento económico estocástico, cuya diferencia al dado por Ramsey es que la producción se ve afectada por perturbaciones aleatorias. En todos los modelos anteriores el objetivo es encontrar un plan que optimice a un criterio de rendimiento dependiente de una función de utilidad.

El modelo de Brock y Mirman ha sido estudiado de forma considerable y se han presentado generalizaciones, entre las que destacan: la no acotabilidad de la función de utilidad, la no compacidad del espacio de estados y/o del espacio donde está definida la perturbación aleatoria (véase [21], [22], [28] y [30]). Además, para este modelo, la EE ha sido utilizada para establecer la estabilidad del proceso óptimo, es decir, la estabilidad del proceso que se genera al aplicar la solución óptima. Actualmente, se han realizado estudios más generales sobre la estabilidad del proceso óptimo para el modelo de Brock y Mirman, los cuales resultan de gran interés por proporcionar caminos para obtener un teorema Central del Límite y/o una Ley de Grandes Números (véase [22] y [30]).

Las aportaciones de este trabajo son las siguientes:

a) Se establecen versiones generales de la Ecuación de Euler en el contexto de PDM's;

b) Se presentan condiciones necesarias y suficientes para caracterizar a la política óptima mediante una versión de la EE en el contexto de PDM's;

c) Las versiones de la Ecuación de Euler son aplicadas en una familia de problemas de Consumo Inversión (PCI) y hacer una modelación mediante la teoría de PDM's. Para ello se usará una versión de la EE para caracterizar a su solución óptima. La familia de PCI resultará ser una versión más general a la propuesta por Levhari y Srinivasan (véase [25]). Como antecedentes del PCI se tienen los trabajos presentados en [1], [14] y [24];

d) Se obtienen resultados de estabilidad del proceso óptimo para el PCI. Este objetivo es debido al interés de seguir el espíritu del estudio de la estabilidad para el proceso óptimo del modelo de Brock y Mirman. La metodología es aplicando teoría ergódica (véase [19] y [27]) y la EE obtenida en el inciso c).

Cabe mencionar que el inciso a) está sustentado por el trabajo titulado *A Version of the Euler Equation in Discounted Markov Decision Processes (véase* [11]), y los incisos b) y c) están sustentados por el trabajo titulado *A Consumption-Investment problem modelled as a discounted Markov decision process* (véase [10]).

El contenido de este trabajo está divido de la forma siguiente: en el Capítulo 1 se establece la teoría de PDM's para plantear al PCO y presentar la metodología de PD para su solución; en el Capítulo 2 se presenta un resultado que caracteriza a la solución óptima mediante una versión de la EE en el contexto de PDM's, como también un método iterativo mediante una versión de la EE para las funciones de iteración de valores. Como una aplicación de este resultado, en el Capítulo 3 se plantea el PCI caracterizando a su solución óptima mediante la EE obtenida en el capítulo anterior. Posteriormente en el Capítulo 4 se presenta un estudio sobre la estabilidad del proceso óptimo para el PCI con el objetivo de dar una aproximación para la función de valor óptimo. Finalmente, las conclusiones y una serie de problemas abiertos derivados de este trabajo son presentadas.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

PROCESOS DE DECISIÓN DE MARKOV

En un Problema de Control Óptimo (PCO) se considera un sistema dinámico, evolucionando a través del tiempo, cuyo comportamiento puede ser afectado por la aplicación de acciones dentro del sistema. A la colección de acciones aplicadas se le conoce como política, y una forma de evaluar su calidad es mediante un criterio de rendimiento (también llamada función objetivo). En resumen, el PCO es planteado mediante un modelo de control, un conjunto de políticas y un criterio de rendimiento.

En este capítulo se introduce el PCO mediante la teoría de Procesos de Decisión de Markov (PDM's) a tiempo discreto y con horizonte infinito. Los PDM's son una clase de procesos estocásticos controlados que son observados de manera periódica. En este contexto, una forma de solucionar el PCO es mediante la técnica conocida como Programación Dinámica (PD), la cual fue presentada por primera vez en 1957 por Richard Bellman en su trabajo titulado: *Dynamic Programming* (véase [3]), teniendo un gran impacto en diversas áreas como ingeniería y economía, por mencionar algunas. PD permite determinar el valor máximo de la función objetivo, así como las estrategias que conforman la política óptima.

Existiendo una gran cantidad de literatura sobre PDM's cabe destacar la presentada en el trabajo de Hernández-Lerma y Lasserre (véase [17] y [18]). En dichas referencias se realizan clasificaciones para el PCO mediante el criterio de rendimiento, y/o el horizonte del problema, entre otros temas de interés. Además, presentan condiciones, sobre el modelo que exponen, para garantizar la validez de PD.

Siguiendo un enfoque de clasificación, se realiza un estudio sobre una componente del modelo, conocida como función de recompensa (o costo). En el mejor de los casos esta componente es supuesta como una función continua, después generalizada como continua superiormente y por consecuencia como una función medible. Sin embargo, existe otra clasificación implícita, la acotabilidad y no acotabilidad de ella. En está última clasificación se considera el reciente trabajo de Jaśkiewicz y Nowak (véase [21]).

La aportación de este capítulo consiste en presentar una recopilación de condiciones para resolver al PCO mediante PD con el objetivo de proporcionar una clasificación para el PCO, la cual consiste en problemas de recompensa acotada (véase Condiciones 1.2.3-1.2.5, abajo) y no acotada (véase Condiciones 1.2.6 y 1.2.7, abajo). Además, dichas condiciones permiten obtener propiedades cualitativas de la función objetivo (véase Teorema 1.2.8, abajo).

1.1. Procesos de Decisión de Markov Descontados

Un *Modelo de Control de Markov* (MCM), estacionario, a tiempo discreto, consiste de una quíntupla:

$$(X, A, \{\, A(x) |\, x \in X\}, Q, r),$$

donde, X y A son espacios de Borel, llamados espacio de estados y espacio de acciones (o controles), respectivamente. $\{\, A(x) |\, x \in X\}$ es una familia de subconjuntos medibles y no vacíos $A(x)$ de A, donde $A(x)$ denota al conjunto de acciones admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado $x \in X$. El conjunto $\mathbb{K}$ de parejas de estados acciones admisibles, está definido por

$$\mathbb{K} := \{\, (x, a) |\, x \in X, a \in A\,(x)\} \,,$$

$Q(\cdot|\,\cdot)$, llamada la *ley de transición*, es un kérnel estocástico definido en X dado $\mathbb{K}$, y $r : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es una función medible llamada la función de recompensa en un paso.

La dinámica que describe a este sistema estocástico funciona de la forma siguiente: si el sistema al tiempo t se encuentra en el estado $x_t = x \in X$, y la acción $a_t = a \in A(x)$ es aplicada; entonces ocurren dos cosas:

a) se recibe una recompensa $r(x, a)$; y

b) el sistema transita a un nuevo estado x_{t+1} mediante la ley de transición Q.

Una vez hecha esta transición a un nuevo estado, se elige una nueva acción y la dinámica anteriormente descrita se repite.

Para introducir el concepto de estrategia o política, considérese un MCM y defina $\mathbb{H}_t$, el espacio de las historias observadas del proceso hasta el tiempo t, como $\mathbb{H}_0 = X$, y $\mathbb{H}_t = \mathbb{K} \times \mathbb{H}_{t-1}$, para $t = 1, 2, \ldots$. Un elemento de $\mathbb{H}_t$ llamada t-historia es un vector de la forma

$$h_t = (x_0, a_0, x_1, a_1, \ldots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t),$$

donde $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 0, \ldots, t-1$ y $x_t \in X$.

Una *política* es una sucesión $\pi = \{\pi_t\}$ de kérneles estocásticos, donde cada π_t está definido sobre A dado $\mathbb{H}_t$ y satisface que: $\pi_t(\,A(x_t)|\,h_t) = 1$ para toda $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$. El conjunto de todas las políticas es denotado por Π.

Sea

$$\mathbb{F} := \{\, f : X \to A|\, f \text{ es medible y para cada } x \in X,\ f(x) \in A(x)\},$$

a los elementos de $\mathbb{F}$ se les conoce como *funciones de decisión* o *selectores.*

Se dice que un kérnel estocástico π definido sobre A dado $\mathbb{H}_t$ está concentrada en g, donde g es una función medible en X, si $\pi(C|\,h_t) = I_C(g(x))$ para cada $C \in \mathcal{B}(A)$ y toda $h_t \in \mathbb{H}_t$. Donde $\mathcal{B}(A)$ I_C denota la función indicadora sobre C y denota la σ-álgebra de Borel de A.

Una política $\pi = \{\pi_t\}$ es:

a) *Markoviana Aleatorizada* (Π_{RM}). Si existe una sucesión $\{\varphi_t\}$ de kérneles estocásticos, con φ_t definida sobre A dado X, tales que, $\pi_t(\,\cdot|\,h_t) = \varphi_t(\,\cdot|\,x_t)$ para toda $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$.

b) *Markoviana Aleatorizada Estacionaria* (Π_{RS}). Si existe un kérnel estocástico φ sobre A dado X, tal que $\pi_t(\,\cdot|\,h_t) = \varphi(\,\cdot|\,x_t)$ para toda $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$.

c) *Determinista* (Π_D). Si existe una sucesión $\{g_t\}$ de funciones medibles con $g_t : \mathbb{H}_t \to A$, tales que, para cada $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$, $g_t(h_t) \in A(x_t)$ y $\pi_t(\,\cdot|\,h_t)$ está concentrada en $g_t(h_t)$.

d) *Determinista Markoviana* (Π_{DM}). Si existe una sucesión $\{f_t\} \subset \mathbb{F}$, tal que $\pi_t(\,\cdot|\,h_t)$ está concentrada en $f_t(x_t)$ para cada $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$.

d) *Determinista Markoviana Estacionaria* (Π_{DS}). Si existe $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot|\, h_t)$ está concentrada en $f(x_t)$ para cada $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$. En este caso π es denotado por f.

Observación 1.1.1 *Obsérvese que* $\Pi_{RS} \subset \Pi_{RM} \subset \Pi$ *y* $\Pi_{DS} \subset \Pi_{DM} \subset \Pi_D \subset \Pi$.

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible que consiste del espacio muestral canónico $\Omega := \overline{H}_\infty = (X \times A)^\infty$ y $\mathcal{F}$ su correspondiente σ-álgebra producto. Los elementos de Ω son de la forma $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \ldots)$ con $x_t \in X$ y $a_t \in A$ para toda $t = 0, 1, \ldots$, las proyecciones x_t y a_t de Ω sobre X y A son llamados estado y acción, respectivamente. Obsérvese que $H_\infty = \mathbb{K}^\infty \subset \Omega$.

Sean $\pi \in \Pi$ una política arbitraria y $x_0 = x \in X$. Entonces por el Teorema de Ionescu-Tulcea (véase [17]), existe una única medida de probabilidad P_x^π sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Además para cada $C \in \mathcal{B}(A)$, $B \in \mathcal{B}(X)$, $h_t \in \mathbb{H}_t$ y $t = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene que

$$P_x^\pi(\, a_t \in C|\, h_t) = \pi_t(C|\, h_t), \tag{1.1}$$

$$P_x^\pi(\, x_{t+1} \in B|\, h_t, a_t) = Q(B|\, x_t, a_t). \tag{1.2}$$

El proceso estocástico $((\Omega, \mathcal{F}, P_x^\pi), \{x_t\})$ es llamado un *Proceso de Control de Markov a tiempo discreto* o *Proceso de Decisión de Markov (PDM).* La esperanza con respecto a P_x^π es denotada por E_x^π.

Observación 1.1.2 *En general, en lugar de dar* $x_0 = x \in X$, *se puede dar una medida de probabilidad* ν *sobre* X, *referida como distribución inicial, la cual cumple que*

$$P_v^\pi(x_0 \in B) = \nu(B),$$

para cada $B \in \mathcal{B}(X)$. *Además, por (1.1) y (1.2) se obtiene que para una distribución inicial* v *y* $\pi = \{\varphi_t\} \in \Pi_{RM}$, $\{x_t\}$ *es un proceso de Markov no homogéneo con kérneles de transición* $\{Q(\cdot|\, x, \varphi_t)\}$, *esto es,*

$$P(\, x_{t+1} \in B|\, x_0, x_1, ..., x_t) = P(\, x_{t+1} \in B|\, x_t) = Q(\, B|\, \varphi_t).$$

En particular, si $\pi = \{f_t\} \in \Pi_{DM}$, *los kérneles de transición son* $Q(\,B|\, f_t)$. *Además para políticas estacionarias* $\varphi \in \Pi_{RS}$ *y* $f \in \Pi_{DS}$, *el proceso es de Markov homogéneo con kérnel de transición* $Q(\,B|\, \varphi)$ *y* $Q(\,B|\, f)$, *respectivamente.*

Un *criterio de rendimiento* mide la calidad de las políticas aplicadas al proceso. En este trabajo se considera el de *Recompensa Total Descontada*, el cual está definido para cada $x \in X$ y $\pi \in \Pi$ como

$$v(\pi, x) := E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r(x_t, a_t) \right], \tag{1.3}$$

donde $\alpha \in (0,1)$ es conocido como factor de descuento.

Definición 1.1.3 *Una política $\pi^* \in \Pi$ es óptima, si para cada $x \in X$,*

$$v(\pi^*, x) = \sup_{\pi \in \Pi} v(\pi, x).$$

La función definida para $x \in X$

$$V(x) := \sup_{\pi \in \Pi} v(\pi, x),$$

es llamada función de valor óptimo.

El *Problema de Control Óptimo* consiste en determinar una política óptima.

1.2. Programación Dinámica

En la literatura existente se encuentra una herramienta esencial para resolver el problema de control óptimo, conocida como Programación Dinámica (PD). Bajo condiciones adecuadas sobre el MCM este procedimiento permite determinar la función de valor óptimo y/o a la política óptima.

Definición 1.2.1 *Una función medible $\lambda : X \to \mathbb{R}$ es solución de la Ecuación de Optimalidad (EO), si satisface que*

$$\lambda(x) = \sup_{a \in A(x)} \left\{ r(x,a) + \alpha \int \lambda(y) Q(dy | x, a) \right\}, \tag{1.4}$$

$x \in X$.

Definición 1.2.2 *Dada una función medible $u : X \to \mathbb{R}$ se define al operador de Programación Dinámica, denotado por T, de la forma siguiente. Para cada $x \in X$*

$$T(u)(x) := \sup_{a \in A(x)} \left\{ r(x,a) + \alpha \int u(y) Q(dy | x, a) \right\}, \tag{1.5}$$

siempre que la integral esté bien definida.

1.2.1. Espacios de Funciones

Sea X un espacio métrico. El espacio de Banach de funciones medibles y acotadas $u : X \to \mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{B}_b(X)$ y es dotado con la norma del supremo, es decir, para $u \in \mathbb{B}_b(X)$

$$\|u\| := \sup_{x\in X} |u(x)| .$$

$\mathbb{S}_b(X)$ denota al subespacio de $\mathbb{B}_b(X)$ de funciones semicontinuas superiormente (u.s.c) sobre X y $\mathbb{C}_b(X)$ denota al subespacio de $\mathbb{S}_b(X)$ de funciones continuas.

Sea $w : X \to [1, \infty)$ una función medible (conocida en la literatura como función de ponderación o de peso) y defínase la w-norma de la forma siguiente

$$\|u\|_w := \sup_{x\in X} \frac{|u(x)|}{w(x)}, \tag{1.6}$$

donde u es una función medible en X. Entonces $\mathbb{B}_w(X)$ denota al espacio de Banach de funciones medibles y w-acotadas definidas en X con valor real, es decir, el conjunto de funciones medibles $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\|u\|_w < \infty$.

Obsérvese que $\mathbb{B}_b(X) \subset \mathbb{B}_w(X)$. En efecto, dado que para cada $x \in X$ se tiene que $1 \leq w(x)$ entonces $|u(x)| / w(x) \leq |u(x)|$, donde $u \in \mathbb{B}_b(X)$, y la contención se sigue de manera inmediata al considerar los supremos.

Por otro lado, supóngase que existe una sucesión $\{X_j\}$ de subconjuntos compactos de X tales que $X_i \subset X_{i+1}$ y

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} int(X_i),$$

donde $int(Y)$ denota al interior del conjunto Y. Sean $M := \{m_j\}$ una sucesión creciente de números reales positivos y u una función real y medible sobre X, y para cada $j \in \mathbb{N}$ sea

$$\|u\|_j = \sup_{x\in X_j} |u(x)| ,$$

y defínase

$$\|u\|_M := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|u\|_j}{c^j m_j}, \tag{1.7}$$

donde c es una constante tal que $c > 1$. Considere al siguiente espacio vectorial

$$\mathbb{C}_M(X) := \{ u : X \to \mathbb{R} | \; u \text{ es continua y } \|u\|_M < \infty\},$$

el cual resulta ser un espacio de Banach con la norma definida en (1.7).

1.2.2. Condiciones que Validan la Ecuación de Optimalidad

Sea $(X, A, \{A(x)|\, x \in X\}, Q, r)$ un MCM fijo. A continuación se presenta una recopilación de diferentes condiciones sobre el MCM, las cuales garantizan cuando el valor óptimo es solución de la EO. Además, se exhibe cuando el valor óptimo resulta ser una función medible, semicontinua superiormente y continua.

Condición 1.2.3 **a)** *$A(x)$ es un conjunto compacto, para cada estado $x \in X$;*

b) *la función de recompensa $r \in \mathbb{C}_b(\mathbb{K})$;*

c) *la ley de transición Q es fuertemente (o débilmente) continua.*

Condición 1.2.4 **a)** *$A(x)$ es un conjunto compacto, para cada estado $x \in X$;*

b) *la función de recompensa $r \in \mathbb{S}_b(\mathbb{K})$;*

c) *la ley de transición Q es fuertemente (o débilmente) continua.*

Condición 1.2.5 *Para cada estado $x \in X$*

a) *$A(x)$ es un conjunto compacto;*

b) *la función de recompensa $r \in \mathbb{B}_b(X)$ y $r(x, \cdot)$ es u.s.c en $A(x)$;*

c) *la ley de transición Q es fuertemente (o débilmente) continua.*

Condición 1.2.6 *Para cada estado $x \in X$*

a) *$A(x)$ es un conjunto compacto;*

b) *la función $r(x, \cdot)$ es u.s.c en $A(x)$;*

c) *la ley de transición Q es fuertemente (o débilmente) continua;*

d) *existen constantes no negativas $\overline{c}$ y β, con $1 \leq \beta < 1/\alpha$, y una función de ponderación w sobre X, tales que, para cada $x \in X$*

d1) $\sup_{a \in A(x)} |r(x, a)| \leq \overline{c}w(x)$,

d2) $\sup_{a \in A(x)} \int w(y)Q(\,dy|\, x, a) \leq \beta w(x)$,

d3) para toda $x \in X$ la función $\overline{w}(a) := \int w(y)Q(\,dy|\, x, a)$ es continua en $A(x)$.

Condición 1.2.7 *Existe una sucesión* $\{X_j\}$ *de subconjuntos compactos de* X *tales que* $X_i \subset X_{i+1}$ *y*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} int(X_i).$$

Además, para cada estado $x \in X$

a) $A(x)$ *es un conjunto compacto;*

b) *la función de recompensa* r *es continua en* $\mathbb{K}$ *y para cada* $x \in X_j$ *defínase*

$$u_j(x) = \max_{a \in A(x)} |r(x,a)| \ \ y \ r_j := \max_{x \in X_j} u_j(x),$$

y supóngase que existe una sucesión creciente de números reales positivos $M := \{m_j\}$, *tales que* $r_j \le m_j$ *para cada* $j \in N$;

c) *La ley de transición* Q *es fuertemente continua ó para toda* $u \in \mathbb{C}_b(X)$ *se tiene que* $\overline{u} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{K})$ *donde* $\overline{u}$ *esta definida como*

$$\overline{u}(x,a) := \int u(y) Q(\,dy|\,x,a)$$

y además

c1) Para cada $i \in \mathbb{N}$, $x \in X_i$ *y* $a \in A(x)$ *se tiene que*

$$Q(\,X_i|\,x,a) = 1,$$

ó

c2) existen $c > 1$ *tal que*

$$\gamma := c \ \alpha \ \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{m_{i+1}}{m_i} \right\} < 1$$

y una función $h \in \mathbb{C}_M(X)$ *tal que para cada* $i \in \mathbb{N}$ *y* $x \in X_i$

$$u_i(x) \le h(x).$$

También, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x \in X_i$ *y* $a \in A(x)$ *se cumple que*

$$Q(\,X_{i+1}|\,x,a) = 1.$$

La prueba de los resultados del Teorema 1.2.8 puede ser consultada en [17] y [18] (bajo las Condiciones 1.2.3-1.2.6) y [21] (bajo la Condición 1.2.7). La idea básica de la demostración es notando que el operador de programación dinámica T (véase Definición 1.2.2), resulta ser una contracción en cada uno de los espacios mencionados y dado que éstos resultan ser de Banach, con sus respectivas normas, entonces T admite un único punto fijo, el cual se muestra que es el valor óptimo V. Así, el Teorema 1.2.8 proporciona el método de iteración de valores para su aproximación.

Teorema 1.2.8 *Bajo cualquiera de las Condiciones 1.2.3-1.2.7 se tiene que la función de valor óptimo V satisface (1.4), es decir, es solución de la EO, y existe $f \in \mathbb{F}$, tal que para cada $x \in X$*

$$V(x) = r(x, f(x)) + \alpha \int V(y) Q(dy|\, x, f(x)). \tag{1.8}$$

Además,

a) *Bajo Condición 1.2.3, $V \in \mathbb{C}_b(X)$;*

b) *Bajo Condición 1.2.4, $V \in \mathbb{S}_b(X)$;*

c) *Bajo Condición 1.2.5, $V \in \mathbb{B}_b(X)$;*

d) *Bajo Condición 1.2.6, $V \in \mathbb{B}_w(X)$;*

e) *Bajo Condición 1.2.7, $V \in \mathbb{C}_M(X)$.*

Definición 1.2.9 *Las funciones de iteración de valores, se definen de la forma siguiente: para $x \in X$ y $n = 1, 2, \ldots,$*

$$v_n(x) = \sup_{a \in A(x)} \left\{ r(x, a) + \alpha \int v_{n-1}(y) Q(dy|\, x, a) \right\}, \tag{1.9}$$

con $v_0(x) = 0$.

Observación 1.2.10 *Bajo cualquiera de las Condiciones 1.2.3-1.2.7, es posible mostrar que para cada $n = 1, 2, \ldots,$ existe $f_n \in \mathbb{F}$ tal que para cada $x \in X$*

$$v_n(x) = r(x, f_n(x)) + \alpha \int v_{n-1}(y) Q(dy|\, x, f_n(x)).$$

Nótese que las funciones de iteración de valores se pueden reescribir en términos del operador T de la forma siguiente, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$v_n = T\left(v_{n-1}\right),$$

y además por el método de iteración de valores se tiene que para cada $x \in X$,

$$v_n(x) \to V(x),$$

cuando $n \to \infty$.

Observación 1.2.11 *Las Condiciones 1.2.3-1.2.5 piden que la función de recompensa r sea acotada mientras que las Condiciones 1.2.6 y 1.2.7 estó no es necesario. Sin embargo, en la literatura existen condiciones más débiles sobre el MCM, por ejemplo la acotabilidad de r es cambiada por acotabilidad superior (o inferior) véase [18]. También es posible mostrar que el valor óptimo V es solución de la EO al considerar las siguientes suposiciones:*

1. *La función de recompensa r es u.s.c y sup-compacta, es decir, para cada estado $x \in X$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ el conjunto definido como*

   $$O_\gamma^x := \{ a \in A(x) |\, r(x,a) \geq \gamma \}$$

   es un conjunto compacto en A;

2. *La ley de transición es fuertemente (o débilmente) continua y la existencia de una política tal que al ser evaluada en el criterio de rendimiento su valor sea mayor a menos infinito, es decir, existe $\widetilde{\pi} \in \Pi$ tal que para toda $x \in X$*

   $$v(\widetilde{\pi}, x) > -\infty.$$

Pero a diferencia de la demostración del Teorema 1.2.8, bajo éstas condiciones, la demostración radica en que V es solución maximal de la EO (véase [18], Teorema 4.2.3, p. 46).

Capítulo 2

VERSIONES DE LA ECUACIÓN DE EULER

La Ecuación de Euler (EE), en esencia, es una condición de primer orden para problemas de optimización con un enfoque general. Históricamente, Leonhard Euler (1707-1783) introdujo una metodología para la investigación sistemática de problemas de variaciones. Los matemáticos consideran este evento como el comienzo de una de las más importantes ramas de las matemáticas, el Cálculo de Variaciones. Con aplicaciones en distintas áreas, en particular, la EE tiene un gran impacto en modelos de crecimiento económico (véase [5], [12], [25], [28], [31], [33] y [34]), los cuales pueden ser considerados como aplicaciones de PDM's.

Para establecer versiones de la EE en el contexto de PDM's es necesario responder la siguiente pregunta: ¿bajo qué condiciones la función de valor óptimo, las funciones de iteración de valores y/o la política resultan ser funciones diferenciables?. En el trabajo de H. Cruz-Suárez y R. Montes de Oca (véase [9]) se da una respuesta. Ellos presentan una fórmula de la envolvente que permite garantizar que, no solo la función de valor óptimo es diferenciable (véase Teorema 2.2.7, abajo), sino también que la política óptima cumple esta propiedad. Este resultado puede interpretarse como una continuación del Teorema 1.2.8; a saber, que dicho teorema da información cualitativa sobre el valor óptimo.

En este capítulo se proporcionan versiones generales de la EE en el contexto de PDM's. Las versiones son para: las funciones de iteración de valores, la función de valor óptimo y la política óptima. Para ésta última, se establecen condiciones necesarias y suficientes para que una política sea óptima vía la EE. Además, esta caracterización resulta ser más general que la presentada en modelos de crecimiento económico (véase [5], [12], [25], [28], [33], [34] y [31]). Cabe mencionar que el desarrollo presentado se encuentra sustentado por el trabajo titulado *A Version of the Euler Equation in Discounted Markov Decision Processes (véase* [11]).

A lo largo de este capítulo se considerará un MCM fijo y se supondrá que la conclusión del Teorema 1.2.8 es válida. Además, será considerado que: $X \subseteq \mathbb{R}^n$, A, $X' \subseteq \mathbb{R}^m$, son convexos con interiores no vacíos y están parcialmente ordenados (por ejemplo con el orden lexicográfico). Se considera que la multifunción $x \to A(x)$ es no-decreciente y convexa (véase Sección 2.1, abajo), y $A(x)$ tiene interior no vacío, para cada $x \in X$. También se supondrá que la ley de transición Q es inducida por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = L(F(x_t, a_t), \xi_t) \tag{2.1}$$

$t = 0, 1, \ldots$, con un estado inicial $x_0 = x \in X$, donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), independientes de x_0 y tomando valores en un espacio de Borel $S \subset \mathbb{R}^k$. Sea ξ un elemento genérico de $\{\xi_t\}$. La densidad de ξ es designada por Δ; $L : X' \times S \to X$ es una función medible dada, donde X' es un espacio de Borel, y $F : \mathbb{K} \to X'$, es una función medible conocida.

Nótese que la forma de la dinámica dada por (2.1) permite observar una relación entre un proceso de decisión determinista y uno estocástico, es decir, la función L tiene como objetivo involucrar a un ruido ξ en un proceso determinista generado por la función F. Como casos particulares de la función L se encuentran procesos con dinámicas multiplicativas y aditivas, es decir, cuando

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t)\xi_t,$$

o

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t) + \xi_t.$$

Dado lo anterior, se tiene que la función de valor óptimo (véase Definición 1.1.3) satisface

$$V(x) = \sup_{a \in A(x)} \{r(x, a) + \alpha E[V(L(F(x, a), \xi))]\},$$

y las funciones de Iteración de Valores (véase Definición 1.2.9) satisfacen

$$v_n(x) = \sup_{a \in A(x)} \{r(x, a) + \alpha E[v_{n-1}(L(F(x, a), \xi))]\},$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$, con $v_0(x) := 0$. Además, se denotarán, a la política óptima por f y el maximizador de v_n por f_n, para $n = 1, 2, \ldots$.

Para facilitar notación y demostraciones a lo largo de este capítulo defínase a $G : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ como

$$G(x, a) := r(x, a) + \alpha H(x, a), \tag{2.2}$$

$(x, a) \in \mathbb{K}$, donde

$$H(x, a) := E\left[V\left(L(F(x, a), \xi)\right)\right], \tag{2.3}$$

y a $G^n : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ por

$$G^n(x, a) := r(x, a) + \alpha E\left[v_{n-1}\left(L(F(x, a), \xi)\right)\right], \tag{2.4}$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$, con $v_0(x) := 0$.

2.1. Preliminares

Sean X y Y espacios Euclidianos y considérese la siguiente notación: $C^2(X, Y)$ denota el conjunto de funciones $l : X \to Y$ con segunda derivada continua (cuando $X = Y$, $C^2(X, Y)$ será denotado por $C^2(X)$ y en algunos casos, se escribirá sólo como C^2).

Sea $\Gamma : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\Gamma \in C^2(X \times Y, \mathbb{R})$. Γ_x, Γ_y denotan las derivadas parciales de Γ con respecto a x y y, respectivamente. Las segundas derivadas parciales de Γ están denotadas por Γ_{xx}, Γ_{xy}, Γ_{yx} y Γ_{yy}.

Sean X y Y subconjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente y supóngase que Y es dotado de un orden parcial, por ejemplo el lexicográfico. Una función $g : X \to Y$ es cóncava si para cada $x, z \in X$ y $\beta \in [0, 1]$ se tiene

$$g(\beta x + (1 - \beta)z) \geq \beta g(x) + (1 - \beta)g(z).$$

Si la desigualdad anterior es estricta entonces se dice que g es una función estrictamente cóncava.

Los siguientes lemas son bien conocidos en la literatura de análisis convexo (véase [35] y [36])

Lema 2.1.1 *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, y $g : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en X. Entonces, f es cóncava, si y sólo si, para todo $x, z \in X$ se tiene que*

$$g'(x)(y - x) \geq g(y) - g(x).$$

Demostración. Véase [36], Teorema 25.1, p. 242 ■

Lema 2.1.2 *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo y $g \in C^2(X, \mathbb{R})$. Entonces, f es cóncava, si y sólo si, para toda $x \in X$, $g''(x)$ es una matriz semidefinida negativa, es decir, para cada $z \in X$*

$$z^T g''(x) z \leq 0,$$

donde z^T denota la transpuesta del vector z.

Demostración. Véase [35], Teorema 7.10, p. 184. ■

Lema 2.1.3 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Sea $g : X \to \mathbb{R}$ una función cóncava y diferenciable, y $\{g_n\}$ una sucesión de funciones reales, cóncavas y diferenciables en X, tales que $g_n(x) \to g(x)$, cuando $n \to \infty$, para cada $x \in X$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} g_n'(x) = g'(x).$$

Demostración. Véase [36], Teorema 25.7, p. 248. ■

Sea $\Theta : X \to Y$ una *multifunción*, es decir, $\Theta(x) \subseteq Y$, para cada $x \in X$. Entonces Θ se dice ser:

a) *no-decreciente*, sí para $x, z \in X$ con $x < z$ implica que $\Theta(x) \subseteq \Theta(z)$,

b) *convexa*, sí para $x, z \in X$ y $\beta \in [0, 1]$, se tiene que $\beta y + (1 - \beta)\widetilde{y} \in \Theta(\beta x + (1 - \beta)z)$, con $y \in \Theta(x)$ y $\widetilde{y} \in \Theta(z)$.

Considérese el siguiente problema de optimización. Sea $\Upsilon : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ una función medible y

$$\upsilon(x) := \sup_{y\in\Theta(x)} \Upsilon(x, y),$$

$x \in X$. Donde

$$\mathbb{G} := \{(x, y)|x \in X, y \in \Theta(x)\}.$$

Sea

$$\mathbb{L} := \{\ g : X \to Y |\, g(x) \in \Theta(x) \text{ para cada} \in X\ \}.$$

Lema 2.1.4 *Supóngase que la multifunción Θ es convexa, Υ es una función cóncava en $\mathbb{G}$ y que existe $l \in \mathbb{L}$ tal que $\upsilon(x) = \Upsilon(x, l(x))$, para cada $x \in X$. Entonces el conjunto*

$$\mathbb{Y} := \{g \in \mathbb{L}|\ \ \upsilon(x) = \Upsilon(x, g(x)),\ \textit{para cada } x \in X\},$$

es convexo y υ es una función cóncava. Además si Υ es estrictamente cóncava, entonces υ también es estrictamente cóncava y $\mathbb{L}$ es un conjunto singular.

Demostración. Obsérvese que $\mathbb{Y}$ es no vacío, ya que $l \in \mathbb{Y}$. Sean $g_1, g_2 \in \mathbb{Y}$ y $\beta \in [0,1]$, entonces para $x \in X$, se tiene que

$$\Upsilon(x, g_1(x)) = \upsilon(x) = \Upsilon(x, g_2(x)).$$

Además, por hipótesis se sabe que $\Theta(x)$ es un conjunto convexo, implicando que $\beta g_1(x) + (1-\beta)g_2(x) \in \Theta(x)$. Y debido al hecho que Υ es una función cóncava implica que

$$\begin{aligned} \upsilon(x) &\geq \Upsilon(x, \beta g_1(x) + (1-\beta)h_2(x)) \\ &\geq \beta\Upsilon(x, g_1(x)) + (1-\beta)\Upsilon(x, g_2(x)) \\ &= \upsilon(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$\upsilon(x) = \Upsilon(x, \beta g_1(x) + (1-\beta)g_2(x)),$$

y como x es arbitrario se concluye que $\beta g_1 + (1-\beta)g_2 \in \mathbb{Y}$.

Por otra parte, sean $x, z \in X$ y $\beta \in [0,1]$. Por la concavidad de Υ se obtiene que para $y \in \Theta(x)$ y $\widetilde{y} \in \Theta(z)$

$$\Upsilon(\beta x + (1-\beta)z, \beta y + (1-\beta)\widetilde{y}) \geq \beta\Upsilon(x, y) + (1-\beta)\Psi(z, \widetilde{y}),$$

y como $\beta y + (1-\beta)\widetilde{y} \in \Theta(\lambda x + (1-\beta)z)$ se sigue que

$$\upsilon(\beta x + (1-\beta)z) \geq \beta\Upsilon(x, y) + (1-\beta)\Upsilon(z, \widetilde{y}).$$

Sea $\widetilde{y} \in \Theta(z)$ fijo, entonces para cada $y \in \Theta(x)$,

$$\upsilon(\beta x + (1-\beta)z) - (1-\beta)\Upsilon(z, \widetilde{y}) \geq \beta\Upsilon(x, y),$$

implicando que

$$\upsilon(\beta x + (1-\beta)z) - (1-\beta)\Upsilon(z, \widetilde{y}) \geq \beta\upsilon(x),$$

equivalentemente,

$$\upsilon(\beta x + (1-\beta)z) - \beta\upsilon(x) \geq (1-\beta)\Upsilon(z, \widetilde{y}).$$

Entonces al variar a $\widetilde{y}$ se obtiene que

$$\upsilon(\beta x + (1-\beta)z) \geq \beta\upsilon(x) + (1-\beta)\upsilon(z),$$

es decir, υ es una función cóncava.

Obsérvese que al suponer a Υ estrictamente cóncava, tomando las desigualdades anteriores como estrictas se concluye que v es estrictamente cóncava. Además, bajo este supuesto, para probar que $\mathbb{Y}$ es un conjunto singular, supóngase por contradicción que existen $g_1, g_2 \in \mathbb{Y}$, tales que $g_1(x) \neq g_2(x)$, para toda $x \in X$. Se sabe, por lo anteriormente demostrado, que $\beta g_1 + (1-\beta)g_2 \in \mathbb{Y}$, con $\beta \in [0,1]$. Entonces para $x \in X$

$$\begin{aligned} v(x) &= \Upsilon(x, \beta g_1(x) + (1-\beta)g_2(x)) \\ &> \beta\Upsilon(x, g_1(x)) + (1-\beta)\Upsilon(x, g_2(x)) \\ &= v(x), \end{aligned}$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, $\mathbb{Y}$ es un conjunto singular. ■

Lema 2.1.5 *Supóngase que la multifunción Θ es creciente y que $G(\cdot, y)$ es una función (estrictamente) creciente en X para cada $y \in Y$ fijo. Entonces la función v es una función (estrictamente) creciente.*

Demostración. Sean $x, z \in X$ tales que $x < z$, entonces para cada $y \in \Theta(x)$ se tiene que $\Psi(x,y) \leq \Psi(z,y)$. Como $\Theta(x) \subseteq \Theta(z)$ se sigue que $\Upsilon(x,y) \leq v(z)$, y por lo tanto $v(x) \leq v(z)$. Ahora, si las desigualdades anteriores se toman estrictas se concluye que v es estrictamente creciente. ■

El siguiente lema es un resultado que garantiza la diferenciabilidad de la función objetivo v, y será utilizado en la siguiente sección.

Lema 2.1.6 *Supóngase que*

a) $\Upsilon \in C^2(int(\mathbb{G}); \mathbb{R})$ *y para cada* $x \in X$, $\Upsilon_{yy}(x, \cdot)$ *es definida negativa.*

b) Existe una función $l \in \mathbb{L}$ *tal que para cada* $x \in X$, $l(x) \in int(\Theta(x))$ *y* $v(x) = \Upsilon(x, l(x))$.

Entonces $l \in C^1(int(X); Y)$ *y* $v \in C^2(int(X); \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. Nótese que en $\Theta(x)$, $l(x)$ es un punto interior de él y además es un máximo de $\Upsilon(x, \cdot)$. Entonces, por la condición de primer orden, se tiene que

$$\Upsilon_y(x, l(x)) = 0.$$

Dado que $\Upsilon_{yy}(x, \cdot)$ es definida negativa, entonces tiene inversa $\Upsilon_{yy}^{-1}(x, \cdot)$ y además, l es única (esto es consecuencia de la concavidad estricta de $\Upsilon(x, \cdot)$, véase Lema 2.1.2). Entonces usando el Teorema de la Función Implícita, resulta que $l \in C^1(int(X); Y)$ y

$$l'(x) = -\Upsilon_{yx}(x, l(x))\Upsilon_{yy}^{-1}(x, l(x)).$$

Por otro lado, obsérvese que

$$\begin{aligned} \upsilon'(x) &= \Upsilon_x(x, l(x)) + \Upsilon_y(x, l(x))l'(x) \\ &= \Upsilon_x(x, l(x)). \end{aligned}$$

Entonces

$$\upsilon''(x) = \Upsilon_{xx}(x, l(x)) + \Upsilon_{xy}(x, l(x))l'(x),$$

y porque $l \in C^1(int(X); Y)$, y x es arbitrario, se sigue que $\upsilon \in C^2(int(X); \mathbb{R})$.
■

2.2. Diferenciabilidad y una Fórmula de la Envolvente en PDM

Con el espíritu de otorgar otra propiedad cualitativa a la función de valor óptimo como las presentadas en el Teorema 1.2.8, en esta subsección se presentan condiciones sobre el modelo de Control de Markov, las cuales tienen como objetivo dar la propiedad cualitativa de la diferenciabilidad, pero lo más destacado es que, no sólo se da la diferenciabilidad de la función de valor óptimo, sino también se garantiza la diferenciabilidad de la política óptima. Además, se obtiene la diferenciabilidad para las funciones de iteración de valores óptimos y de sus respectivos maximizadores (véase Teorema 2.2.7). Para ello, se establecen tres condiciones sobre el modelo las cuales al ser conjuntadas permiten obtener el objetivo de la sección.

La siguiente condición permite garantizar la concavidad tanto de las funciones de iteración de valores como de la función de valor óptimo, además se garantiza la unicidad tanto de los maximizadores de las funciones de iteración de valores como de la política óptima. La Condición 2.2.1 es similar a la condición C1 dada en [6] p. 420, con la diferencia que esta es para recompensas y no para costos. Además, el resultado del Lema 2.2.2 es muy similar al Lema 6.2 en [6] p. 433.

Condición 2.2.1 *Supóngase que:*

a) r es una función estrictamente cóncava y $r(\cdot, a)$ es una función creciente en X para cada $a \in A$;

b) $L(\cdot, s)$ *es una función cóncava y creciente, para cada* $s \in S$*;* F *es una función cóncava,* $F(\cdot, a)$ *es una función creciente en* X *y para cada* $a \in A$.

Lema 2.2.2 *Bajo la Condición 2.2.1, resulta que* v_n *es estrictamente cóncava y* f_n *es única, para toda* $n = 1, 2, \ldots$. *También,* V *es estrictamente cóncava y* f *es única.*

Demostración. Primero obsérvese que las funciones de iteración de valores son crecientes. En efecto, sean $x, y \in X$ con $x \leq y$, fijos.

Como $r(\cdot, a)$ es una función creciente y

$$v_1(x) = \max_{a \in A(x)} \{r(x, a)\},$$

entonces por el Lema 2.1.5 se concluye que $v_1(x) \leq v_1(y)$.

Bajo la hipótesis inductiva, v_n es una función creciente para $n \geq 1$, y por la Condición 2.2.1 b) se tiene que

$$L(F(x, a), s) \leq L(F(y, a), s)$$

para toda $a \in A$ y $s \in S$. Entonces

$$v_n(L(F(x, a), s)) \leq v_n(L(F(y, a), s))$$

para toda $a \in A$ y $s \in S$. Por la monotonicidad de la esperanza se concluye que

$$E\left[v_n(L(F(x, a), \xi))\right] \leq E\left[v_n(L(F(y, a), \xi))\right].$$

Por consiguiente, se sabe por la Definición 1.2.9 que

$$v_{n+1}(x) = \max_{a \in A(x)} \left\{r(x, a) + \alpha E\left[v_n(L(F(x, a), \xi))\right]\right\},$$

y como la suma de funciones crecientes es creciente, entonces $r(x, a) + \alpha E\left[V_n(F(x, a, \xi))\right]$ es una función creciente, aplicando el Lema 2.1.5 se concluye que v_{n+1} es crecientes. Nótese que si las desigualdades involucradas se toman estrictas entonces las funciones v_n son estrictamente crecientes.

La prueba se hará por inducción. Debido a que

$$v_1(x) = \max_{a \in A(x)} \{r(x, a)\},$$

con $x \in X$, y r es estrictamente cóncava en $\mathbb{K}$, el Lema 2.1.4 implica que v_1 es estrictamente cóncava en X y su maximizador f_1 es único.

Supóngase que para $n \geq 1$, v_n es estrictamente cóncava.

Sean $(x,a),(y,b) \in \mathbb{K}$ y $\beta \in [0,1]$. Entonces por la Condición 2.2.1 b) se tiene que

$$F(\beta(x,a)+(1-\beta)(y,b)) \geq \beta F(x,a)+(1-\beta)F(y,b),$$

y además, se sabe que $L(\cdot,s)$ es una función cóncava y creciente, para cada $s \in S$, entonces

$$L\left(F(\beta(x,a)+(1-\beta)(y,b)),s\right) \geq \beta L(F(x,a),s)+(1-\beta)L(F(y,b),s).$$

Dado que v_n es creciente, entonces para cada $s \in S$

$$v_n(L\left(F(\beta(x,a)+(1-\beta)(y,b)),s\right)) \geq v_n(\beta L(F(x,a),s)+(1-\beta)L(F(y,b),s)),$$

y por la hipótesis inductiva se obtiene que

$$\begin{aligned} & v_n(L\left(F(\beta(x,a)+(1-\beta)(y,b)),s\right)) \\ > \ & \beta v_n(L(F(x,a),s))+(1-\beta)v_n(L(F(y,b),s)). \end{aligned}$$

La monotonicidad y linealidad de la esperanza implican que

$$\begin{aligned} & E[v_n(L\left(F(\beta(x,a)+(1-\beta)(y,b)),\xi\right))) \\ \geq \ & \beta E[v_n(L(F(x,a),\xi))]+(1-\beta)E[v_n(L(F(y,b),\xi))]. \end{aligned}$$

Implicando que la función G^n definida en (2.4) es estrictamente cóncava (recuérdese que r es estrictamente cóncava).

Finalmente, aplicando el Lema 2.1.4 en

$$v_{n+1}(x) = \max_{a\in A(x)} \left\{ r(x,a)+\alpha E\left[v_n(L(F(x,a),\xi))\right] \right\},$$

se concluye que v_{n+1} es una función estrictamente cóncava y que f_{n+1} es único.

Por otro lado, dado que la sucesión de funciones de iteración de valores $\{v_n\}$ convergen de manera puntual a la función de valor óptimo V y, por la anteriormente demostrado, se sabe que v_n es una función estrictamente cóncava, entonces se concluye que

$$V(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda V(x)+(1-\lambda)V(y),$$

para $x,y \in X$ y $\beta \in [0,1]$, es decir, V es cóncava De manera análoga se muestra que V es creciente.

Ahora, debido a que L, F y V son funciones cóncavas y crecientes, es posible mostrar que la función H definida en (2.3) resulta ser cóncava. Así, como r es estrictamente cóncava y H es cóncava, entonces la función G es estrictamente cóncava, donde G está definida en (2.2).

Finalmente dado que la función de valor óptimo satisface

$$V(x) = G(x, f(x)),$$

para cada $x \in X$. Entonces, aplicando el Lema 2.1.4 se concluye que la función de valor óptimo es estrictamente cóncava y que la política óptima $f \in \mathbb{F}$ es única. ■

Observación 2.2.3 *En [6] se presenta una condición la cual garantiza la propiedad cualitativa de concavidad, pero a diferencia de la Condición 2.2.1, ésta es para dinámicas con ruido aditivo (véase [6], Condición C2, p. 420).*

La siguiente condición establece suavidad en las funciones que rigen a la dinámica y en la función de recompensa, la cual es pieza importante para el objetivo principal.

Condición 2.2.4 *Supóngase que:*

a) $r \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$*;* $r_{aa}(x, \cdot)$ *es definida negativa para cada* $x \in X$*;*

b) $F \in C^2(int(\mathbb{K}); X')$ *y* $F_a(x, \cdot)$ *es invertible, para cada* $a \in A$*;*

c) $L(\cdot, s) \in C^2(int(X'); X)$*, para cada* $s \in S$*,* $L(\cdot, \cdot)$ *tiene inversa en la segunda variable denotada por* R*, tal que* $R(\cdot, s) \in C^2(int(X' \times X); S)$ *y* $|\det R_s(\cdot, s)| \in C^2(int(X'); \mathbb{R})$*, para toda* $s \in S$*, donde* $\det R_s$ *denota el determinante de* R_s*.*

d) $\Delta \in C^2(int(S); R)$ *el intercambio entre derivada e integral es válido.*

La Condición 2.2.4 d) será usada en la demostración del Lema 2.2.5 para asegurar la diferenciabilidad de segundo orden de la integral $\int K(x, a, y)dy$ con respecto a x o a, donde

$$K(x, a, y) := V(y)\Delta(R(F(x, a), y)) \left|\det R_s(F(x, a), y)\right|,$$

$(F(x, a), y) \in int(X' \times X)$.

La Condición 2.2.4 d) puede ser verificada en la práctica cuando K las derivadas parciales de primer y segundo orden se encuantran acotadas en el siguiente sentido: para cada $(F(x, a), y) \in int(X' \times X)$, $|K_x(x, a, y)| \leq$

$g_1(a,y)$, $|K_a(x,a,y)| \leq g_2(x,y)$, $|K_{xx}(x,a,y)| \leq g_3(a,y)$, $|K_{aa}(x,a,y)| \leq g_4(a,y)$, $|K_{xa}(x,a,y)| \leq g_1(a,y)$, donde g_i son funciones integrales con respecto a y para $i = 1,\ldots,5$ (véase Observación 10 en [9]).

Por ejemplo, para dinámicas con ruido aditivo, es decir, para $(x,a) \in \mathbb{K}$ y $s \in S$

$$L(F(x,a),s) = F(x,a) + s,$$

donde $F \in C^2(int(\mathbb{K});X)$, se tiene que Condición 2.2.4 d) se cumple, en particular, para cada $s \in S$

$$|\det R_s(\cdot,s)| = 1.$$

Lema 2.2.5 *Bajo la Condición 2.2.4 se tiene que $H \in C^2(int(\mathbb{K});X')$, donde H está definida en (2.3).*

Demostración. La demostración es similar a la presentada en [9], Lema 5. La Condición 2.2.4 permite expresar a la ley de transición (véase Ec. (2.1)) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Q(B|(x,a)) &= Pr(s \in S|L(F(x,a),s) \in B) \\ &= Pr(s \in S|(s \in R(F(x,a),B)) \\ &= \int_{R(F(x,a),B)} \Delta(u)du, \end{aligned} \tag{2.5}$$

para $B \in \mathcal{B}(X)$ y $(x,a) \in \mathbb{K}$.

Entonces aplicando el Teorema de Cambio de Variable se tiene que

$$Q(B|(x,a)) = \int_{R(F(x,a),B)} \Delta(R(F(x,a),u))|\det R_s(F(x,a),u)|du.$$

Finalmente de (2.5) se tiene que la función H, definida en (2.3), se puede expresar como

$$H(x,a) = \int_{R(F(x,a),B)} V(u)\Delta(R(F(x,a),u))|\det R_s(F(x,a),u)|du,$$

y por la Condición 2.2.4, el resultado se sigue. ■

Defínase a la función W como

$$W(x,a) := \left[r_x - r_a F_a^{-1} F_x\right](x,a), \tag{2.6}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$.

Obsérvese que W está bien definida gracias a la Condición 2.2.4. Además, dicha condición garantiza que W es una función continuamente diferenciable. Cabe mencionar que de acuerdo a su forma, W está definida mediante las derivadas parciales de la función de recompensa r y de la función F, concluyendo así, que W se encuentra determinada mediante un proceso de decisión determinista.

La Condición 2.2.6 es necesaria para propósito principal del capítulo, debido a que la diferencial de una función en un elemento de su dominio está establecida cuando éste es un elemento interior.

Condición 2.2.6 *Supóngase que*

a) la política óptima f satisface que $f(x) \in int((A(x))$, para cada $x \in X$;

b) La sucesión $\{f_n\}$ de maximizadores de las funciones de Iteración de Valores satisface que $f_n(x) \in int(A(x))$, para cada $x \in X$ con $n = 2, 3, \ldots$.

En la práctica, la Condición 2.2.6 puede ser verificada, en el caso obvio, cuando $A(x)$ sea un conjunto abierto de A para cada $x \in X$. Sin embargo, en ocasiones se verifica mediante el uso de resultados conocidos, como el Teorema del Valor Intermedio, y/o por supuestos por contradicción (véase [10]).

Teorema 2.2.7 *Bajo las Condiciones 2.2.1, 2.2.4 y 2.2.6, resulta que*

a) $f \in C^1(int(X); A)$, $V \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y para cada $x \in int(X)$

$$V'(x) = W(x, f(x)), \tag{2.7}$$

b) $f_n \in C^1(int(X); A)$, $v_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$, para cada $n = 1, 2, \ldots$. Además,

$$v_n'(x) = W(x, f_n(x)), \tag{2.8}$$

para cada $x \in int(X)$ y $n = 2, 3, \ldots$.

Donde W está definida en (2.6).

Demostración. Sea $x \in int(X)$ fijo.

a) Nótese que las Condiciones 2.2.1 y 2.2.4 implican que $G \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$ donde G está definida en (2.2). En efecto, dada la Condición 2.2.4 a), se sabe que $r \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$ y $r_{aa}(x, \cdot)$ es definida negativa. Además, por los Lemas 2.2.2 y 2.2.5 se sabe que

$$H(x, a) = E\left[V(L(F(x, a), \xi))\right]$$

es una función cóncava y $H \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$, entonces por el Lema 2.1.2 se tiene que $H_{aa}(x, \cdot)$ es semidefinida negativa.

Entonces, por la Condición 2.2.6 a) y aplicando el Lema 2.1.6, se concluye que $f \in C^1(int(X); A)$ y $V \in C^2(int(X); \mathbb{R})$.

Por otro lado, se tiene que

$$G_a(x, a) = r_a(x, a) + \alpha E\left[V'\left(L\left(F(x, a), \xi\right)\right) L'(F(x, a), \xi)\right] F_a(x, a),$$

para cada $a \in int(A(x))$, $x \in X$. Entonces, la condición de primer orden y la invertibilidad de F_a (véase Condición 2.2.4 b)) implican que

$$G_a(x, f(x)) = 0,$$

equivalentemente,

$$-r_a F_a^{-1}(x, f(x)) = \alpha E\left[V'\left(L\left(F(x, f(x)), \xi\right)\right) L'(F(x, f(x)), \xi)\right]. \qquad (2.9)$$

Además, dado que V satisface (1.4) y $f \in \mathbb{F}$ es la política óptima, entonces

$$V(x) = G(x, f(x)).$$

Ahora, debido a que $G_a(x, f(x)) = 0$, es posible obtener la siguiente fórmula de la envolvente:

$$\begin{aligned} V'(x) &= G_x(x, f(x)) + G_a(x, f(x)) f'(x), \\ &= G_x(x, f(x)), \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$V'(x) = r_x(x, f(x)) + \alpha E\left[V'\left(L\left(F(x, f(x)), \xi\right)\right) L'(F(x, f(x)), \xi)\right] F_x(x, f(x)). \qquad (2.10)$$

Finalmente, sustituyendo (2.9) en (2.10), se sigue que

$$V'(x) = W(x, f(x)).$$

b) La demostración es bajo inducción. Dado que

$$v_1(x) = \max_{a \in A(x)} G^1(x, a),$$

donde G^1 está definida en (2.4). Entonces de las Condiciones 2.2.1 y 2.2.4, se obtiene que $G^1 \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$ y $G^1_{aa}(x,a)$ es definida negativa. Además, por la Condición 2.2.6 b) se sabe que $f_1(x) \in int(A(x))$, y aplicando el Lema 2.1.6 se sigue que $f_1 \in C^1(int(X); A)$, $v_1 \in C^2(int(X); \mathbb{R})$.

Además, por el Lema 2.2.2 se sabe que v_1 es estrictamente cóncava, y por consecuencia v_1'' es semidefinida negativa (véase Lema 2.1.2).

Sea $n = 2$, entonces

$$v_2(x) = \max_{a \in A(x)} G^2(x,a),$$

donde G^2 está definida en (2.4).

Dado que r, L, F, $v_1 \in C^2$, entonces también $G^2 \in C^2$. Además, las Condiciones 2.2.1 y 2.2.4, y el hecho que v_1 es cóncava, implican que

$$H^2(x,a) := E\left[v_1\left(L(F(x,a),\xi)\right)\right],$$

es una función cóncava y $H^2 \in C^2$. Por consecuencia se tiene que $H^2_{aa}(x,\cdot)$ es semidefinida negativa y por lo tanto, G^2_{aa} es definida negativa. Ahora, dado que $f_2(x) \in int(A(x))$ (véase Condición 2.2.6 b)), aplicando nuevamente el Lema 2.1.6, se sigue que $f_2 \in C^1(int(X); A)$, $v_2 \in C^2(int(X); \mathbb{R})$.

Con un argumento similar a la demostración del inciso a) es posible mostrar que

$$-r_a F_a^{-1}(x, f_2(x)) = \alpha E\left[v_1'\left(L\left(F(x,f_2(x)),\xi\right)\right) L'(F(x,f_2(x)),\xi)\right], \quad (2.11)$$

y

$$\begin{aligned} v_2'(x) &= r_x(x, f_2(x)) \quad (2.12) \\ &\quad + \alpha E\left[v_1'\left(L\left(F(x,f_2(x)),\xi\right)\right) L'(F(x,f_2(x)),\xi)\right] F_x(x, f_2(x)), \end{aligned}$$

sustituyendo (2.11) en (2.12), se sigue que

$$v_2'(x) = W(x, f_2(x)),$$

donde W está definida en (2.6).

Ahora, al suponer que $v_{n-1} \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ para $n > 2$, usando un argumento similar al caso $n = 2$ se puede mostrar que $f_n \in C^1(int(X); A)$, $v_n \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ y

$$v_n'(x) = W(x, f_n(x)).$$

■

2.3. La Ecuación de Euler en PDM's

Esta sección es divida en por dos subsecciones. En la primera se presenta una versión de la Ecuación de Euler en el contexto de PDM's tanto para las funciones de Iteración de Valores como para la función de Valor Óptimo. Además, se presenta un resultado sobre la convergencia puntual de los maximizadores de las funciones de iteración de valores hacia la política óptima. Consecutivamente, en la última subsección se presenta una caracterización para la política óptima vía la Ecuación de Euler.

2.3.1. La Ecuación de Euler en las Funciones de Iteración de Valores

Al saber que la función W definida en (2.6) es una función diferenciable, cabe la posibilidad de que para cada $x \in int(X)$ fijo, se tenga que el Jacobiano de $W(x, \cdot)$ en $a \in int(A(x))$ sea diferente de cero, es decir,

$$\det W_a(x, a) \neq 0,$$

entonces por el Teorema de la Función Inversa existe una función $w(x, z)$ definida en alguna vecindad de $W(x, a) = z$, tal que $a = w(x, z)$. Con esta motivación se establece la siguiente condición, la cual se presenta en un sentido más simple.

Condición 2.3.1 *Supóngase que para cada $x \in X$, la función $a \to W(x, \cdot)$ tiene inversa continua, la cual será denotada por w, donde W está definida en (2.6).*

A continuación se presenta la primera ecuación de Euler en el contexto de PDM's. Esta versión proporciona un algoritmo complementario a programación dinámica, debido a que establece una relación recursiva en términos de las derivadas de las funciones de iteración de valores, resultando ser (en ocasiones) más fácil de implementar.

Teorema 2.3.2 *Bajo las Condiciones 2.2.1, 2.2.4, 2.2.6 y 2.3.1 se tiene que*

$$v_n'(x) = r_x(x, z_n) + \alpha E[v_{n-1}'(L(F(x, z_n), \xi)L'(F(x, z_n), \xi)]F_x(x, z_n), \tag{2.13}$$

para cada $x \in int(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, donde $z_n := w(x, v_n'(x))$ y w es la función dada en la Condición 2.3.1.

Demostración. Sea $x \in int(X)$ fijo. Por el Lema 2.2.2 y el Teorema 2.2.7 se sabe que v_n es una función cóncava y $v_n \in C^2(int(X);\mathbb{R})$. Entonces por la condición de primer orden y la invertibilidad de F_a (véase Condición 2.2.4 b)), se obtiene que

$$-r_a F_a^{-1}(x, f_n(x)) = \alpha E\left[v'_{n-1}\left(L\left(F(x, f_n(x)), \xi\right)\right) L'(F(x, f_n(x)), \xi)\right]. \tag{2.14}$$

Dado que

$$v'_n(x) = W(x, f_n(x)),$$

y usando la inversa de $W(x, \cdot)$, se sigue que

$$f_n(x) = w(x, v'_n(x)). \tag{2.15}$$

Finalmente, sustituyendo (2.15) en (2.14), se obtiene (2.13). ■

Corolario 2.3.3 *La función de valor óptimo satisface*

$$V'(x) = r_x(x, Z) + \alpha E[V'(L(F(x, Z), \xi) L'(F(x, Z), \xi)] F_x(x, Z), \tag{2.16}$$

para cada $x \in int(X)$, donde $Z := w(x, V'(x))$ y w es la función dada en la Condición 2.3.1.

Demostración. Sea $x \in int(X)$ fijo. Se sabe que las funciones de IV satisfacen la Ecuación de Euler dada en (2.13), entonces aplicando el Lema 2.1.3 se obtiene que

$$v'_n(x) \to V'(x),$$

cuando $n \to \infty$. Finalmente, por la continuidad de $w(x, \cdot)$, se sigue que la función de valor óptimo satisface (2.16). ■

En la práctica el corolario anterior puede ser utilizado para aproximar a la derivada del valor óptimo mediante algoritmos numéricos, o mediante una expansión de series de Taylor de primer orden, se podría aproximar a la misma función de valor óptimo.

Corolario 2.3.4 *Bajo las condiciones 2.2.1, 2.2.4, 2.2.6 y 2.3.1 se tiene que*

$$f_n(x) \to f(x),$$

cuando $n \to \infty$, para cada $x \in int(X)$.

Demostración. En efecto, por el Lema 2.2.2 y el Teorema 2.2.7 se sabe que la función de valor óptimo V es cóncava y diferenciable en $int(X)$. También, se sabe que la sucesión $\{v_n\}$ consiste de funciones cóncavas y diferenciables en $int(X)$. Entonces por el Lema 2.1.3 se sigue que para cada $x \in int(X)$

$$v_n'(x) \to V'(x),$$

cuando $n \to \infty$.

Además, por la Condición 2.3.1 se concluye que para $n = 2, 3, \dots,$

$$f_n(x) = w(x, v_n'(x)),$$

y

$$f(x) = w(x, V'(x)),$$

donde f_n es el maximizador de v_n y f es la política óptima.

Finalmente la convergencia se garantiza por la continuidad de $w(x, \cdot)$. ■

Algunos comentarios sobre el presente corolario en la literatura son: la convergencia puntual ha sido estudiada en Stokey y Lucas (véase [34]) para PDM's en espacios Euclidianos, con conjunto de acciones compacto y convexo, y suponiendo que el lado derecho de la EO es estrictamente cóncava. Por otro lado, M. Schäl (véase [32]) presenta el resultado siguiente: para cada $x \in X$, $f(x)$ es un punto de acumulación de $\{f_n(x)\}$, en el caso en que las acciones admisibles sean compactas. Finalmente, D. Cruz Suárez y R. Montes de Oca (véase [7]) obtienen resultados similares con la ventaja que no es necesario que el espacio de acciones A sea un conjunto compacto. En nuestro caso, la convergencia es obtenida utilizando la metodología establecida en el presente capítulo.

2.3.2. Una Caracterización de la Política Óptima

En esta subsección se supondrá que el espacio de estados y el de acciones son $X = A = [0, \infty)$. Con esto en consideración se tiene que las Condiciones 2.2.1 y 2.2.4 están reunidas en la Condición 2.3.5. En este caso, la función H definida en (2.3) será considerada como hipótesis con el fin de facilitar la demostración del Teorema 2.3.6. Cabe mencionar que la Condición 2.3.1 no es necesaria en este caso.

Condición 2.3.5 *Sean* r, $H \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$*;*

para cada $x \in int(X)$*:* $r_a(x, \cdot) > 0$, $r_{aa}(x, \cdot) < 0$, $H_{aa}(x, \cdot) \leq 0$*;*

para cada $s \in S$*:* $L(\cdot, s)$ *es cóncava en* X' *y* $L(\cdot, s) \in C^2(int(X'); X)$ *con* $L'(\cdot, s) > 0$*;* $F \in C^2(int(\mathbb{K}); X')$*,* $F(\cdot)$ *cóncava en* $\mathbb{K}$ *y con* $F_a(x, \cdot) < 0$*.*

El siguiente teorema caracteriza a las políticas óptimas vía una versión de la ecuación de Euler.

Teorema 2.3.6 *Bajo la Condición 2.3.5 se tiene que:*

Si f es la política óptima con la propiedad de que $f(x) \in int((A(x))$ para cada $x \in X$. Entonces f satisface la ecuación de Euler

$$r_a F_a^{-1}(x, f(x)) + \alpha E[W(L(\digamma, \xi), f(L(\digamma, \xi)))L'(\digamma, \xi)] = 0, \tag{2.17}$$

para cada $x \in int(X)$, donde $\digamma := F(x, f(x))$ y W está definida en (2.6).

Inversamente, si $f \in \mathbb{F}$ satisface a (2.17) para cada $x \in int(X)$ y si además

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n E_x^f \left[W(x_n, f(x_n))x_n\right] = 0, \tag{2.18}$$

donde $\{x_n\}$ es la trayectoria generada por f con $x_0 = x$, entonces f es óptima.

Demostración. Sean $x \in X$ fijo y $f \in \mathbb{F}$ la política óptima con la propiedad de que $f(x) \in int((A(x))$ para cada $x \in X$. Nótese que en este caso las Condiciones 2.2.1 y 2.2.4 suceden por la Condición 2.3.5, y la Condición 2.2.6 sucede por hipótesis, entonces aplicando el Teorema 2.2.7 se tiene que $f \in C^1(int(X); A)$ y $V \in C^2(int(X); \mathbb{R})$ por lo que $G \in C^2(int(\mathbb{K}); \mathbb{R})$ donde G está definida en (2.2). Así, se sigue que para $a \in int(A(x))$,

$$G_a(x, a) = r_a(x, a) + \alpha E\left[V'\left(L\left(F(x, a), \xi\right)\right) L'(F(x, a), \xi)\right] F_a(x, a).$$

Entonces, por la condición de primer orden se obtiene que $G_a(x, f(x)) = 0$, y por la invertibilidad de F_a se sigue que

$$-r_a F_a^{-1}(x, f(x)) = \alpha E\left[V'\left(L\left(F(x, f(x)), \xi\right)\right) L_y(F(x, f(x)), \xi)\right]. \tag{2.19}$$

Por otro lado, dado que V satisface (1.4) y $f \in \mathbb{F}$ es la política óptima, entonces

$$V(x) = G(x, f(x)).$$

Usando el hecho que $G_a(x, f(x)) = 0$, es posible obtener la siguiente fórmula de la envolvente:

$$\begin{aligned} V'(x) &= G_x(x, f(x)) + G_a(x, f(x))f'(x), \\ &= G_x(x, f(x)), \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$V'(x) = r_x(x, f(x)) + \alpha E\left[V'\left(L\left(F(x, f(x)), \xi\right)\right) L'(F(x, f(x)), \xi)\right] F_x(x, f(x)). \tag{2.20}$$

Sustituyendo (2.19) en (2.20), se sigue que

$$V'(x) = W(x, f(x)), \tag{2.21}$$

implicando que

$$V'\left(L\left(F(x, f(x)), \xi\right)\right) = W\left(L(F(x, f(x)), \xi), f\left(L(F(x, f(x)), \xi\right)\right). \tag{2.22}$$

Finalmente, (2.17) es obtenida por sustituir (2.22) en (2.19). Dado que x es arbitraria, el resultado se sigue.

Recíprocamente, sean $x \in X$ fijo y $f \in \mathbb{F}$ una función que satisface (2.17) y (2.18). Sea $g \in \mathbb{F}$ otra función y para $t = 0, 1, \ldots$, las trayectorias de los estados y las acciones al aplicar las políticas f y g están denotadas por x_t y y_t, y por $a_t = f(x_t)$ y $b_t = g(y_t)$, respectivamente, con $x_0 = y_0 = x$ para ambas políticas.

Dado que r es estrictamente cóncava y $r \in C^2$, aplicando el Lema 2.1.1, se puede obtener que

$$r(x_t, a_t) - r(y_t, b_t) \geq r_x(x_t, a_t)(x_t - y_t) - r_a(x_t, a_t)(a_t - b_t). \tag{2.23}$$

Dado que L y F son cóncavas y de clase C^2, en sus respectivos dominios, nuevamente al aplicar el Lema 2.1.1, se puede obtener que

$$\begin{aligned} x_{t+1} - y_{t+1} &= L(F(x_t, a_t), \xi_t) - L(F(y_t, b_t), \xi_t) \\ &\geq L'(F(x_t, a_t), \xi_t)(F(x_t, a_t) - F(y_t, b_t)), \end{aligned} \tag{2.24}$$

y

$$F(x_t, a_t) - F(y_t, b_t) \geq F_x(x_t, a_t)(x_t - y_t) + F_a(x_t, a_t)(a_t - b_t). \tag{2.25}$$

Entonces, por (2.24), (2.25) y dado que $L'(\cdot, \xi) > 0$ casi seguramente (c.s), se tiene que

$$x_{t+1} - y_{t+1} \geq L'(F(x_t, a_t), \xi_t)\left[F_x(x_t, a_t)(x_t - y_t) + F_a(x_t, a_t)(a_t - b_t)\right],$$

y bajo el supuesto que $F_a(x, \cdot) < 0$ se puede concluir que

$$(a_t - b_t) \geq F_a^{-1}(x_t, a_t)[{L'}^{-1}\left(F(x_t, a_t), \xi_t\right)\left(x_{t+1} - y_{t+1}\right) - F_x(x_t, a_t)(x_t - y_t)]. \tag{2.26}$$

Para facilitar los cálculos siguientes defínase para $t = 0, 1, 2 \ldots,$ a

$$rx_t := r_x(x_t, a_t), \;\; ra_t := r_a(x_t, a_t),$$

$$Fa_t := F_a(x_t, a_t),\ \ Fx_t := F_x(x_t, a_t),$$

y

$$L_t := L'(F(x_t, a_t), \xi_t).$$

Entonces (2.23) y (2.26) son de la forma

$$\begin{aligned} r(x_t, a_t) - r(y_t, b_t) &\geq rx_t(x_t - y_t) - ra_t(a_t - b_t), & (2.27)\\ (a_t - b_t) &\geq Fa_t^{-1}[L_t^{'^{-1}}(x_{t+1} - y_{t+1}) - Fx_t(x_t - y_t)]. & (2.28) \end{aligned}$$

Así, sustituyendo (2.28) en (2.27) se obtiene que

$$r(x_t, a_t) - r(y_t, b_t) \geq rx_t(x_t - y_t) + ra_tFa_t^{-1}[L_t^{'^{-1}}(x_{t+1} - y_{t+1}) - Fx_t(x_t - y_t)].$$

Multiplicando la última desigualdad por α^t en ambos lados y sumando desde 0 hasta n, y usando el hecho de que $x_0 = y_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{n} \alpha^t \left(r(x_t, a_t) - r(y_t, b_t)\right)\\ \geq\ &\sum_{t=0}^{n} \alpha^t \left(rx_t(x_t - y_t) + ra_tFa_t^{-1}[L_t^{'^{-1}}(x_{t+1} - y_{t+1}) - Fx_t(x_t - y_t)]\right)\\ =\ &\sum_{t=1}^{n-1} \left[\alpha^t \left(ra_tFa_t^{-1}L_t^{'^{-1}} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1})\right)(x_t - y_t)\right]\\ &+\alpha^n ra_nFa_n^{-1}L_n^{'^{-1}}(x_{n+1} - y_{n+1})\\ =\ &\sum_{t=1}^{n-1} \left[\alpha^t \left(ra_tFa_t^{-1} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1})L_t\right) L_t^{'^{-1}}(x_t - y_t)\right]\\ &+\alpha^n ra_nFa_n^{-1}L_n^{'^{-1}}(x_{n+1} - y_{n+1}), \end{aligned}$$

y como

$$x_{n+1} - y_{n+1} \leq x_{n+1},$$

$$r_aF_a^{-1}(x, \cdot)L'^{-1}(F(x, \cdot), \xi) < 0,$$

se concluye que

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{n} \alpha^t \left(r(x_t, a_t) - r(y_t, b_t)\right)\\ \geq\ &\sum_{t=1}^{n-1} \left[\alpha^t \left(ra_tFa_t^{-1} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1})L_t\right) L_t^{'^{-1}}(x_t - y_t)\right]\\ &+\alpha^n ra_nFa_n^{-1}L_n^{'^{-1}}x_{n+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $a_t = f(x_t)$ y f satisface (2.17), se sigue que

$$-ra_n F a_n^{-1} = \alpha E_x^f \left[[W(x_{n+1}, a_{n+1}) L_t | \, x_n, a_n \right]. \tag{2.29}$$

Entonces, usando (2.29) se concluye que

$$\begin{aligned} & \alpha^n E_x^f \left[ra_n F a_n^{-1} L_n^{^{-1}} x_{n+1} \right] \\ = \; & -\alpha^{n+1} E_x^f \left[E_x^f \left[[W(x_{n+1}, a_{n+1}) L_t | \, x_n, a_n \right] L_n^{^{-1}} x_{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Además, dado que $x_{n+1} = L(F(x_n, a_n), \xi_n)$, es decir, depende de x_n, entonces por propiedades de la esperanza condicional, es posible obtener que

$$\alpha^n E_x^f \left[ra_n F a_n^{-1} L_n^{^{-1}} x_{n+1} \right] = -\alpha^{n+1} E_x^f \left[W(x_{n+1}, a_{n+1}) x_{n+1} \right].$$

De similar manera se puede concluir que

$$\begin{aligned} & E_x^f \left[\left(ra_t F a_t^{-1} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1}) L_t \right) L_t^{^{-1}} (x_t - y_t) \right] \\ = \; & E_x^f \left[E_x^f \left[\left(ra_t F a_t^{-1} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1}) L_t \right) \middle| \, x_t, a_t \right] L_t^{^{-1}} (x_t - y_t) \right]. \end{aligned}$$

Entonces, dado que f satisface (2.17), se sigue que

$$ra_t F a_t^{-1} + E_x^f \left[\alpha W(x_{t+1}, a_{t+1}) L_t | \, x_t, a_t \right] = 0,$$

implicando que

$$E_x^f \left[\left(ra_t F a_t^{-1} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1}) L_t \right) \middle| \, x_t, a_t \right] = 0,$$

consecuentemente

$$E_x^f \left[\left(ra_t F a_t^{-1} + \alpha W(x_{t+1}, a_{t+1}) L_t \right) L_t^{^{-1}} (x_t - y_t) \right] = 0.$$

De aquí

$$E_x^f [\sum_{t=0}^{n} \alpha^t \left(r(x_t, a_t) - r(y_t, b_t) \right)] \geq \alpha^{n+1} E_x^f \left[W(x_{n+1}, a_{n+1}) x_{n+1} \right].$$

Entonces haciendo n tender a ∞, y ya que f satisface (2.18), se tiene que

$$E_x^f [\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r(x_t, a_t)] \geq E_x^f [\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r(y_t, b_t)].$$

Por lo tanto, f es óptima. ■

Observación 2.3.7 *Una parte interesante sobre la ecuación de Euler (2.17) es su contraparte determinista, es decir, considere que la ley de transición dada en (2.1), es de la forma*

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t),$$

para $t = 1, 2, \ldots$, *con estado inicial conocido* $x_0 = x$, *donde* $F : \mathbb{K} \to X$ *es una función medible conocida. Bajo cambios adecuados en la Condición 2.3.5 se tiene que (2.17) es de la forma*

$$-(r_a F_a^{-1})(x, f(x)) = \alpha W\left(F(x, f(x)), f\left(F(x, f(x))\right)\right) F_x(x, f(x)),$$

y (2.18) es de la forma siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n (r_a F_a^{-1})(x_n, f(x_n)) x_n = 0.$$

2.4. Un Problema Lineal Cuadrático Vectorial

El siguiente problema es conocido como Lineal-Cuadrático (LC) debido a que su dinámica se describe por una ecuación en diferencias lineal y la función de recompensa es descrita por un funcional cuadrático. Ésta es una formulación de un problema de regulación en el cual se pretende que el estado del sistema permanezca lo más cerca posible de un punto fijo. Usar la función de recompensa cuadrática, es en muchas ocasiones razonable, puesto que induce una alta penalidad para grandes desviaciones del estado al punto fijo, pero penalidades relativamente pequeñas para desviaciones pequeñas.

Este ejemplo sirve para mostrar el uso del Teorema 2.3.2 y del Corolario 2.3.4. La metodología es de la forma siguiente: el resultado del Teorema 2.3.2 es un método complementario a programación dinámica, este permite encontrar, de manera inductiva, a las derivadas de las funciones de iteración de valores sin la necesidad de determinar a sus respectivos maximizadores. Después mediante el resultado del Corolario 2.3.4, poder garantizar la convergencia de los maximizadores hacia la solución óptima.

2.4.1. Planteamiento del Problema LC

Considérese que $\mathbb{R}^n = X = A = A(x)$, para cada $x \in X$. La dinámica está dada por

$$x_{t+1} = Bx_t + Ca_t + \xi_t, \tag{2.30}$$

$t = 1, 2, \ldots$, con $x_0 = x \in X$ dado. Donde B y C son matrices invertibles de tamaño $n \times n$, $\{\xi_t\}$ es una sucesión de vectores columna aleatorios i.i.d. con valores en $\mathbb{R}^n$. Sea ξ un elemente genérico de la sucesión $\{\xi_t\}$, supóngase que ξ tiene una densidad $\Delta \in C^2$, y $E(\xi)$ es igual al vector cero. Además, supóngase que sí P es una matriz simétrica, definida negativa y de tamaño $n \times n$, entonces $E\left[\xi^T P \xi\right]$ es finita.

La función de recompensa está dada por

$$r(x, a) = x^T Q x + a^T R a,$$

donde x^T y a^T denota la transpuesta de los vectores x y a; Q y R son matrices simétricas, definidas negativas y de tamaño $n \times n$.

Lema 2.4.1 *Para el modelo LC es válido la conclusión del Teorema 1.2.8.*

Demostración. Nótese que r es una función no-positiva y continua en $\mathbb{K}$.

Ahora, obsérvese que para cada $x \in X$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ el siguiente conjunto

$$O_\gamma^x := \left\{ a \in A(x) |\, x^T Q x + a^T R a \geq \gamma \right\}$$

es compacto. En efecto, sean $x \in X$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. Afirmamos que O_γ^x es acotado, de lo contrario existe una sucesión $\{a_n\}$ de O_γ^x tal que $x^T Q x + a_n^T R a_n \to -\infty$, implicando que $-\infty \geq \gamma$, lo cual es absurdo. Además, sí $\{\widetilde{a}_n\}$ es una sucesión de O_γ^x tal que $\widetilde{a}_n \to a$, entonces por la continuidad de r, se sigue que $r(x, a) \geq \gamma$, implicando que O_γ^x es un conjunto cerrado. Por lo tanto, la función de recompensa r es sup-compacta (véase Observación 1.2.11).

Por otro lado, sea $C \in \mathcal{B}(X)$, entonces

$$Q(C|x_t = x, a_t = a) = \Pr(x_{t+1} \in C | x_t = x, a_t = a) = \int I_C(Bx + Ca)\Delta(s) ds,$$

donde I_C denota la función indicadora del conjunto C. Debido al hecho que la densidad Δ de ξ es continua, se puede concluir que la ley de transición es débilmente continua.

Considérese a $g \in \mathbb{F}$ definida como

$$g(x) := -C^{-1} B x,$$

entonces la dinámica del sistema, al aplicar a g, está dada por

$$x_t = B x_{t-1} + C g(x_{t-1}) + \xi_{t-1} = \xi_{t-1},$$

para $t = 1, 2, \ldots$, con $x_0 = x \in X$.

Entonces es posible obtener que

$$E_x^h[x_t^T Q x_t + g(x_t)^T R g(x_t)] = E[\xi_t^T P \xi_t] =: \theta,$$

donde $P := \left(Q + \left(C^{-1}B\right)^T R \left(C^{-1}B\right)\right)$, la cual es una matriz simétrica, definida negativa y de tamaño $n \times n$.

Dado que los elementos de la sucesión $\{\xi_t\}$ son i.i.d., entonces

$$v(g, x) = \frac{\theta}{1 - \alpha} < \infty,$$

donde v es el criterio de rendimiento definido en (1.3).

Finalmente, por las Suposiciones 4.2.1 y 4.2.2, y el Teorema 4.2.3 en [17], p. 46, se tiene el resultado (véase Observación 1.2.11). ■

Lema 2.4.2 *Para el problema LC se satisfacen las condiciones 2.2.1, 2.2.4, 2.2.6 y 2.3.1.*

Demostración. Debido a que las matrices Q y R son definidas negativas, es fácil ver que r resulta ser una función estrictamente cóncava y, dada la forma lineal de la dinámica, es decir, para $(x, a) \in \mathbb{K}$,

$$F(x, a) = Bx_t + Ca_t,$$

entonces se puede concluir, por la observación 2.2.3, a la Condición 2.2.1. Obsérvese que $r \in C^2$, y dado que C es una matriz invertible, entonces F_a^{-1} existe. Además, nótese que

$$L(y, s) = y + s,$$

$(y, s) \in X' \times S$. Entonces se sigue que L tiene inversa R en la segunda variable, cuya forma es

$$R(y, u) = u - y,$$

y dado que $\Delta \in C^2$, se puede concluir la validez de la Condición 2.2.4.

Es fácil ver que la Condición 2.2.6 sucede debido al hecho que $A(x) = \mathbb{R}^n$ para cada $x \in X$.

Finalmente, se obtiene que la función W definida en (2.6) es de la forma siguiente

$$W(x, a) := 2\left(Qx - \left(\left(RC^{-1}B\right)^T\right)^{-1} a\right),$$

implicando que la inversa de $W(x,\cdot)$ es

$$w(x,z) = \left(\left(RC^{-1}B\right)^T\right)^{-1}\left(Qx - \frac{1}{2}z\right), \tag{2.31}$$

la cual resulta ser una función continua. Por lo tanto la Condición 2.3.1 sucede. ■

Lema 2.4.3 *Para el problema LC, las funciones de IV satisfacen que*

$$v_n'(x) = 2K_n x$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$, *donde*

$$K_n = Q + \alpha B^T\left(K_{n-1} - K_{n-1}C\left(R + C^T K_{n-1}C\right)^{-1} C^T K_{n-1}\right)B, \tag{2.32}$$

con $K_1 = Q$.

Demostración. Obsérvese que la validez de la conclusión del Teorema 2.3.2 es garantizada por los Lemas 2.4.1 y 2.4.2. Entonces, porque Q y R son definidas negativas, se sigue que

$$v_1(x) = x^T Qx.$$

y que $v_1'(x) = 2Qx$.

Entonces al aplicar, el resultado del Teorema 2.3.2, se sigue que $v_2(x)$ satisfice la ecuación de Euler (2.13), y por la ecuación (2.31), se obtiene que

$$\begin{aligned} v_2'(x) &= 2Qx \\ &\quad + \alpha B^T E\left[v_1'\left(\begin{array}{c} \left(B + C\left(\left(RC^{-1}B\right)^T\right)^{-1} Q\right)x \\ -\frac{1}{2}C\left(\left(RC^{-1}B\right)^T\right)^{-1} v_2'(x) + \xi \end{array}\right)\right]. \end{aligned}$$

Bajo la suposición que $E(\xi) = \mathbf{0}$ (en este caso, $\mathbf{0}$ denota al vector nulo), entonces

$$\begin{aligned} v_2'(x) &= 2\left[Q + \alpha B^T Q\left(B + C\left(\left(RC^{-1}B\right)^T\right)^{-1} Q\right)\right]x \\ &\quad -\alpha B^T QC\left(\left(RC^{-1}B\right)^T\right)^{-1} v_2'(x), \end{aligned}$$

y mediante cálculos directos, se concluye que

$$v_2'(x) = 2K_2 x,$$

donde

$$K_2 = Q + \alpha B^T \left(Q - QC \left(R + C^T QC \right)^{-1} C^T Q \right) B.$$

Ahora, supongáse la hipótesis inductiva siguiente

$$v_n'(x) = 2K_n x$$

para $n > 2$, con K_n definida en (2.32).

Entonces, nuevamente por el Teorema 2.3.2 y (2.31), se sabe que

$$\begin{aligned} v_{n+1}'(x) &= 2Qx \\ &\quad + \alpha B^T E \left[v_n' \left(\begin{array}{c} \left(B + C \left(\left(RC^{-1}B \right)^T \right)^{-1} Q \right) x \\ -\frac{1}{2} C \left(\left(RC^{-1}B \right)^T \right)^{-1} v_{n+1}'(x) + \xi \end{array} \right) \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} v_{n+1}'(x) &= 2 \left[Q + \alpha B^T K_n \left(B + C \left(\left(RC^{-1}B \right)^T \right)^{-1} Q \right) \right] x \\ &\quad - \alpha B^T K_n C \left(\left(RC^{-1}B \right)^T \right)^{-1} v_{n+1}'(x), \end{aligned}$$

y usando álgebra matricial, se sigue que

$$v_{n+1}'(x) = 2K_{n+1} x,$$

donde K_{n+1} satisface (2.32). ■

Lema 2.4.4 *La política óptima para el problema LC es*

$$f(x) = -\alpha \left(R + C^T KC \right)^{-1} C^T KBx, \tag{2.33}$$

donde K satisface la siguiente igualdad,

$$K = Q + \alpha B^T \left(K - KC \left(R + C^T KC \right)^{-1} C^T K \right) B. \tag{2.34}$$

Demostración. Obsérvese que por el Lema 2.4.3 y por la ecuación (2.31) se tiene que

$$f_n(x) = \left(\left(RC^{-1}B \right)^T \right)^{-1} \left(Q - K_n \right) x,$$

para $n = 1, 2, \ldots$ y $x \in X$.

Entonces, aplicando el Corolario 2.3.4, el cual es asegurado por el Lema 2.4.2, nos permite concluir que $f_n(x) \to f(x)$, implicando la convergencia de la sucesión $\{K_n\}$, la cual, de acuerdo con su definición en (2.32), garantiza que su limite, denotado por K, debe satisfacer la relación (2.34).

Finalmente, usando álgebra de matrices es posible obtener a (2.33). ■

Capítulo 3

UN PROBLEMA DE CONSUMO INVERSIÓN

Se presenta un Problema de Consumo Inversión (PCI) modelado mediante la teoría de PDM's y caracterizando a su solución óptima mediante la ecuación de Euler presentada en el Teorema 2.3.6. El PCI resulta ser una versión más general del modelo propuesto por Levhari y Srinivasan (véase [25]). Cabe destacar que el desarrollo presentado se encuentra sustentado por el trabajo titulado *A Consumption-Investment problem modelled as a discounted Markov decision process* (véase [10]).

3.1. Datos Históricos

Las teorías de crecimiento económico explican sus causas utilizando modelos que son simplificaciones de la realidad, con los cuales permiten aislar fenómenos que se quieren analizar. Estos modelos de crecimiento económico no se refieren a ninguna economía en particular, aunque sí pueden ser contrastados empíricamente.

En 1928, Frank Ramsey en su trabajo titulado *A Mathematical Theory of Saving* (véase [31]) propone por primera vez un modelo de crecimiento económico determinista planteado de manera dinámica. La formulación más simple del problema de Ramsey es el suponer a un agente económico que debe decidir en cada periodo t qué parte de la producción generada por un capital debe ser consumida y qué parte deberá ser ahorrada para el siguiente periodo, dicha formulación está dada por

$$h(x_t) = a_t + x_{t+1},$$

con x_0 dado, y para $t \geq 0$, x_t es el capital, a_t el consumo y h es una función de producción. El objetivo es encontrar un plan que optimice a un criterio de rendimiento dependiente de una función de utilidad.

Eventualmente se presentan versiones del trabajo de Ramsey en la que destaca el propuesto por S. D. Levhari y T. N. Srinivasan en su trabajo *Optimal savings under uncertainty* (véase [25]), publicado en 1969 cuyo planteamiento es que en cada periodo t el agente tiene la opción de consumir todo su capital o invertir parte de este con una tasa de interés aleatoria, es decir,

$$x_{t+1} = (x_t - a_t)\xi_t,$$

con x_0 dado, y para $t \geq 0$, x_t es el capital, a_t el consumo y ξ_t una tasa de interés aleatoria.

Por otro lado, en 1972 W. Brock y L. Mirman publican el trabajo *Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case* (véase [5]), donde presentan el modelo clásico de crecimiento económico estocástico, cuya diferencia al dado por Ramsey es que la producción se ve afectada por perturbaciones aleatorias, es decir,

$$h(x_t, \xi_t) = a_t + x_{t+1},$$

con x_0 dado, para $t \geq 0$, x_t es el capital, ξ_t es la perturbación aleatoria, h es la función de producción y a_t el consumo.

El modelo de Brock y Mirman ha sido estudiado de forma considerable. Las generalizaciones que destacan son la no acotabilidad de la función de utilidad, la no compacidad del espacio de estados y/o del espacio donde esta definida la perturbación aleatoria (véase [5], [12], [28], [33] y [34]).

En los modelos de Levhari-Srinivasan y Brock-Mirman la metodología para su solución es por medio de la teoría de Procesos de Decisión de Markov. Mediante está metodología se ha logrado caracterizar a la solución óptima mediante ecuaciones de Euler. Actualmente, para el modelo de Brock-Mirman, se han realizado estudios sobre la estabilidad del proceso óptimo el cual resulta de gran interés por proporcionar caminos para obtener un teorema de Límite Central y/o una Ley de Grandes Números (véase [22] y [30]).

3.2. Planteamiento

Supóngase que en cada tiempo t, la riqueza actual x_t genera una producción $h(x_t)$, y una parte de ella, a_t, se consume, y el resto $i_t = h(x_t) - a_t$

es invertido ($h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función de producción). Se supone que el endeudamiento no es permitido, por lo que $i_t \in [0, h(x_t)]$ y, de forma equivalente, $a_t \in [0, h(x_t)]$. Esta inversión dará lugar a otra riqueza en el siguiente período $t + 1$, en este caso, se asume que la relación entre la riqueza y el consumo viene dada por

$$x_{t+1} = \xi_t(h(x_t) - a_t), \tag{3.1}$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$, donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. tomando valores en $S = [0, \infty)$, independientes de x_0, donde $x_0 = x \in X = [0, \infty)$ es el capital inicial. Sea ξ un elemento genérico de la sucesión $\{\xi_t\}$; se supone que ξ es una variable aleatoria con densidad $\Delta \in C^2((0, \infty))$. En este modelo, ξ es una tasa de rendimiento aleatoria.

Condición 3.2.1 *La función de producción h satisface lo siguiente:*

a) $h \in C^2((0, \infty))$,

b) *h es cóncava en X,*

c) $h' > 0$ *y* $h(0) = 0$.

Para cada $x_0 = x \in X$, el conjunto de acciones admisibles esta dado por $A(x) = [0, h(x)]$.

El objetivo es maximizar una utilidad del consumo sobre todas las políticas $\pi \in \Pi$:

$$v(\pi, x) = E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t U(a_t) \right], \tag{3.2}$$

donde $x \in X$ y $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función medible, llamada función de utilidad.

Condición 3.2.2 *La función de utilidad U satisface lo siguiente:*

a) $U \in C^2((0, \infty), \mathbb{R})$*, la cual es estrictamente creciente y estrictamente cóncava,*

b) *U' es invertible con inversa u,*

c) $U'(0) = \infty$ *y* $\lim_{x \to \infty} U'(x) = 0$,

d) *existe una función ϑ definida sobre S tal que $E[\vartheta(\xi)] < \infty$, y*

$$\left| U'(h(s(h(x) - a)))h'(s(h(x) - a))s\Delta(s) \right| \leq \vartheta(s), \tag{3.3}$$

$s \in S$, $a \in (0, h(x))$.

e) El intercambió entre derivada e integral es válido.

Defínase K como

$$K(x,a,y) := \Delta\left(\frac{y}{h(x)-a}\right)\frac{1}{h(x)-a}, \tag{3.4}$$

con $x > 0, a \in [0, h(x)]$ y $y > 0$. Dado que la densidad Δ de la variable aleatoria ξ pertenece a $C^2([0,\infty))$, se sigue que $K \in C^2$. Así, la siguiente condición hace posible el proceso de derivación bajo la integral.

Condición 3.2.3 *Supóngase que:*

$$\begin{aligned} |K_x(x,a,y)| &\leq g_1(a,y), |K_a(x,a,y)| \leq g_2(x,y), |K_{xx}(x,a,y)| \leq g_3(a,y), \\ |K_{xa}(x,a,y)| &\leq g_4(a,y)y\, |K_{xx}(x,a,y)| \leq g_5(a,y), \end{aligned}$$

para $x > 0, a \in [0, h(x)]$ y $y > 0$. Donde g_i son funciones integrables, para $i = 1, \ldots, 5$.

La Condición 3.2.2-d) será usada en la demostración del Lema 3.3.3 para asegurar la interioridad de la política óptima. Y la Condición 3.2.2-e) será usada en la demostración del Lema 3.3.4. Esta condición en casos particulares puede ser verificada por medio del Teorema de Convergencia Dominada (véase Condición 3.2.3).

3.2.1. Observaciones sobre el PCI

Para el PCI existe una política óptima. En efecto, sea θ una función continua y acotada sobre X y defínase

$$\Theta(x,a) := E[\theta(\xi(h(x)-a))], \tag{3.5}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$. Observe que Θ es continua en $a \in [0, h(x)]$ para cada $x \in X$. En este caso la ley de transición es débilmente continua (véase [17]). Dado que la función de utilidad es continua en $A(x)$, donde éste es un conjunto compacto, para cada $x \in X$, entonces por el Teorema 3.3.5 en [17] existe una solución óptima.

Sin embargo, para que el valor óptimo sea solución de la EO (véase Definición 1.2.1) se deben considerar las condiciones presentadas en el Capítulo 1 (véase Condiciones 1.2.3-1.2.7) para garantizarlo. Por ejemplo si la función de utilidad U es no acotada entonces las Condiciones 1.2.6 y 1.2.7 serían:

a) Existe una función de peso w y constantes $c, \beta > 0$ tales que $1 \leq \beta < 1/\alpha$ y, para cada $x \in X$,

$$\sup_{a\in[0,h(x)]} |U(a)| \leq cw(x), \tag{3.6}$$

$$\sup_{a\in[0,h(x)]} E\left[w(\xi(h(x)-a))\right] \leq \beta w(x). \tag{3.7}$$

b) Existe una sucesión $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de X tal que $X_j \subset X_{j+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y

$$X = \bigcup_{j=1} int(X_j).$$

Además, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, sea m_j definido por

$$m_j := \sup_{x\in X_j} \sup_{a\in A(x)} u^+(a), \tag{3.8}$$

donde $u^+(a) = \max\{u(a), 0\}$. Supóngase que $m_0 > 0$, $m_j < \infty$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$ y

$$\alpha \limsup_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} < 1. \tag{3.9}$$

Finalmente, supóngase que para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y $x \in X_j$, $a \in A(x)$,

$$Q(X_{j+1}|\, x, a) = 1. \tag{3.10}$$

Obsérvese que el PCI satisface una condición similar (en términos de recompensa) a la Condición 1 (C1) en [6], así es posible garantizar que la función de valor óptimo V es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y la política óptima es única.

En la literatura económica la Condición 3.2.2-c) es conocida como la Condición de Inada (véase [5], [12], [22], [25], [28], [31] y [34]). En algunos trabajos una condición similar para la función de producción es considerada (véase [5], [12], [28] y [34]).

3.3. Análisis Vía la Ecuación de Euler

A lo largo de esta sección se supondrá que la conclusión del Teorema 1.2.8 es válida. Así las funciones de iteración de valores (véase Definición 1.2.9) notando que en este caso particular están dadas por:

$$v_n(x) = \max_{a\in[0,h(x)]} \left\{U(a) + \alpha E\left[v_{n-1}(\xi(h(x)-a))\right]\right\},$$

$x \in X$, $n \geq 1$, con $v_0(x) = 0$. Y la correspondiente EO (véase Definición 1.2.1) para el PCI es de la forma siguiente:

$$V(x) = \max_{a \in [0,h(x)]} \{U(a) + \alpha E\left[V(\xi(h(x) - a))\right]\}, \tag{3.11}$$

$x \in X$.

Para cada $n \geq 1$, defínase $G^n : \widehat{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}$ por

$$G^n(x,a) = U(a) + \alpha H^n(x,a),$$

donde $H^n : \widehat{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}$ es definida como

$$H^n(x,a) := E[v_{n-1}(\xi(h(x) - a))], \tag{3.12}$$

y

$$\widehat{\mathbb{K}} := \{\,(x,a)|\, x > 0, a \in (0, h(x))\}\,. \tag{3.13}$$

Lema 3.3.1 *Para las funciones de iteración de valores existen sus maximizadores $\{f_n\}_{n \geq 1}$ y para $n \geq 2$, $f_n(x) \in (0, h(x))$ con $x > 0$. Además, $v_n \in C^2((0,\infty);\mathbb{R})$ y $f_n \in C^1((0,\infty))$.*

Demostración. La demostración es por inducción. Sea $x > 0$, fijo. Dado que U es creciente (véase Condición 3.2.2 a)), entonces

$$v_1(x) = U(h(x))$$

y $f_1(x) = h(x)$. Tomando a $n = 2$, por definición

$$v_2(x) = \max_{a \in [0,h(x)]} \left\{U(a) + \alpha H^2(x,a)\right\},$$

donde H^2 esta definida en (3.12). Por las Condiciones 3.2.1 y 3.2.2 se sabe que $U \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ y $h \in C^2((0,\infty))$, ambas son cóncavas, y por consiguiente se tiene que $v_1 \in C^2((0,\infty);\mathbb{R})$,

$$v_1'(x) = U'(h(x))h'(x),$$

y $v_1''(x) < 0$. Por la Condición 3.2.2 e) y lo anteriormente mencionado se concluye que $H^2 \in C^2(\widehat{\mathbb{K}};\mathbb{R})$ y $H^2_{aa}(x,a) < 0$. Por lo tanto, $G^2 \in C^2(\widehat{\mathbb{K}};\mathbb{R})$.

Obsérvese que $v_1'(0) = \infty$ y

$$G^2_a(x,a) = U'(a) - \alpha E\left[v_1'(\xi(h(x) - a))\xi\right],$$

entonces, de la Condición 3.2.2 c), se sigue que

$$G_a^2(x,0) = +\infty \text{ y } G_a^2(x,h(x)) = -\infty.$$

Entonces por el Teorema del Valor Intermedio existe $\overline{a} \in (0,h(x))$ tal que $G_a^2(x,\overline{a}) = 0$. Además, nótese que G^2 es estrictamente cóncava implicando que $\overline{a} := f_2(x)$ es único, y por consiguiente $f_2(x) \in int(A(x))$. Aplicando al Teorema 2.2.7 se tiene que $v_2 \in C^2((0,\infty);\mathbb{R})$ y $f_2 \in C^1((0,\infty))$. Nótese que $v_2'(0) = \infty$, por la Condición 3.2.2 c).

Supóngase que para $n > 2$, $v_{n-1} \in C^2((0,\infty);\mathbb{R})$, $v_{n-1}''(x) < 0$ y $v_{n-1}'(0) = \infty$. Nuevamente, como

$$v_n(x) = \max_{a\in[0,h(x)]} \{U(a) + \alpha H^n(x,a)\},$$

y de una similar manera al caso $n = 2$, es posible concluir que $H^n \in C^2(\widehat{\mathbb{K}};\mathbb{R})$ y $H_{aa}^n(x,a) < 0$. Aplicando nuevamente el Teorema del Valor Intermedio se puede obtener que $f_n(x) \in (0,h(x))$, $G^n \in C^2(\widehat{\mathbb{K}};\mathbb{R})$ y G^n es estrictamente cóncava. Finalmente, usando el Teorema 2.2.7 es posible garantizar que $v_n \in C^2((0,\infty);\mathbb{R})$ y $f_n \in C^1((0,\infty))$. ∎

Lema 3.3.2 *Las funciones de iteración de valores satisfacen la ecuación de Euler*

$$v_n'(x) = \alpha E\left\{v_{n-1}'\left[\xi\left(h(x) - u\left(v_n'(x)/h'(x)\right)\right)\right]\xi\right\}h'(x), \tag{3.14}$$

para toda $x \in (0,\infty)$.

Demostración. Sean $x > 0$ y $n \geq 2$ fijos. Obsérvese que las Condiciones 2.2.1, 2.2.4 están garantizadas por las Condiciones 3.2.1 y 3.2.2, y la Condición 2.2.6 b) lo está por el Lema 3.3.1. Además, para este caso la función W definida en (2.6) es de la forma

$$W(x,a) = U'(a)h'(x),$$

y usando la Condición 3.2.2 b) se tiene que la inversa de $W(x,\cdot)$ es

$$w(x,z) = u\left(\frac{z}{h'(x)}\right), \tag{3.15}$$

donde u es la inversa de U'.

Es fácil ver que $w(x,\cdot)$ es una función continua. Por lo tanto, la Condición 2.3.1 es satisfecha.

Finalmente, aplicando el Teorema 2.3.2 el resultado se sigue. ∎

Lema 3.3.3 *Para $x > 0$, la política óptima cumple que $f(x) \in (0, h(x))$.*

Demostración. Por contradicción, sea $x > 0$ fijo y supóngase que la política óptima es la función (constante) cero. Entonces por la Definición 1.1.3 se sigue que

$$V(x) = v(0, x) = \frac{U(0)}{1-\alpha},$$

donde v está definida en (3.2).

Dado que U y h son estrictamente crecientes (véase Condiciones 3.2.1 y 3.2.2), se tiene que

$$V(x) = \frac{U(0)}{1-\alpha} < U(h(x)) + \frac{\alpha}{1-\alpha}U(0),$$

pero esto es imposible, dado que

$$v(h, x) = U(h(x)) + \frac{\alpha}{1-\alpha}U(0),$$

contradiciendo la definición de V.

Por otro lado, si h es la política óptima, entonces

$$\begin{aligned} V(x) &= v(h, x) \\ &= U(h(x)) + \frac{\alpha}{1-\alpha}U(0). \end{aligned}$$

Sea $g : [0, h(x)] \to \mathbb{R}$ definido como

$$g(a) := U(a) + \alpha E[U(h(\xi(h(x) - a)))] + \frac{\alpha^2}{1-\alpha}U(0).$$

Nótese que g es continua y estrictamente cóncava, así existe una única $\overline{a} \in [0, h(x)]$ que maximiza a g. Si $\overline{a} \neq h(x)$, entonces

$$V(x) \geq g(\overline{a}) > g(h(x)) = V(x),$$

lo cuál es imposible. Por tanto, $\overline{a} = h(x)$.

Ahora, por la Condición 3.2.2 d) se sigue que, para $a \in (0, h(x))$,

$$g'(a) = U'(a) - \alpha E[U'(h(\xi(h(x) - a)))h'(\xi(h(x) - a))\xi],$$

y por la Condición 3.2.2 c), se concluye que

$$\lim_{a \to h(x)} g'(a) = -\infty.$$

En particular, existe $\widetilde{a} \in (0, h(x))$ tal que $g'(\widetilde{a}) < 0$, implicando que g es estrictamente decreciente en $[\widetilde{a}, h(x)]$. Pero entonces $h(x)$ no puede ser el maximizador de g, es decir, hay una contradicción. ■

Lema 3.3.4 *$V \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ y $f \in C^1((0,\infty))$.*

Demostración. Sea $x > 0$. Nótese que la función H definida en (2.3) es de la forma

$$H(x,a) = E\left[V(\xi(h(x)-a))\right],$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$. Dado que $U \in C^2((0,\infty);\mathbb{R})$, usando el Teorema de Cambio de Variable, es posible obtener que

$$H(x,a) = \int V(y)\Delta\left(\frac{y}{h(x)-a}\right)\frac{dy}{h(x)-a},$$

y por la Condición 3.2.3, se sigue que $H \in C^2$.

Por otro lado, obsérvese que las Condiciones 2.2.1, 2.2.4 están garantizadas por las Condiciones 3.2.1 y 3.2.2, y la Condición 2.2.6-a) lo está por el Lema 3.3.3. Finalmente, usando el Teorema 2.2.7, el resultado se sigue. ■

El siguiente resultado caracteriza a la política óptima para el PCI con su correspondiente ecuación de Euler.

Lema 3.3.5 *La política óptima f satisface la siguiente ecuación de Euler para cada $x \in (0,\infty)$:*

$$U'(f(x)) = \alpha E[h'(\xi(h(x)-f(x)))U'(f(\xi(h(x)-f(x))))\xi]. \tag{3.16}$$

Inversamente, si $f \in \mathbb{F}$ es una política tal que para cada $x \in (0,\infty)$ satisface (3.16) y

$$\lim_{t\to\infty}\alpha^t E_x^f\left[h'(x_t)U'(f(x_t))x_t\right] = 0. \tag{3.17}$$

Entonces f es óptima.

Demostración. Sea $f \in \mathbb{F}$ y $x > 0$ fijo. Obsérvese que la Condición 2.3.5 está garantizada por las Condiciones 3.2.1, 3.2.2 y en la demostración del Lema 3.3.4 se muestra que $H \in C^2$ donde H está definida en (2.3). En efecto, considerando a la función de recompensa $r(x,a) = U(a)$, entonces por la Condiciones 3.2.2-a) se sigue que $r_a(x,\cdot) > 0$ y $r_{aa}(x,\cdot) < 0$.

Nótese que $L(y,\xi) = \xi y$ con $y \in X$. Entonces se tiene que: para cada $s \in (0,\infty)$, $L(\cdot,s)$ es cóncava y $L(\cdot,s) \in C^2((0,\infty))$ con $L'(\cdot,s) = s > 0$. Además, $F(x,a) = h(x) - a$, entonces por la Condición 3.2.1 se sigue que: $F \in C^2((0,\infty)\times(0,\infty))$, $F(\cdot)$ es cóncava en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ y $F_a(x,\cdot) = -1 < 0$. Por consiguiente la Condición 2.3.5 se satisface.

Por otro lado, obsérvese que en este caso

$$W(x,a) = h'(x)U'(a), \tag{3.18}$$

para $(x,a) \in \widehat{\mathbb{K}}$ (véase Ec. (3.13)).

Así, si f es la política óptima entonces por el Lema 3.3.3, se tiene que $f(x) \in int(A(x))$. Aplicando el Teorema 2.3.6 el resultado se sigue.

Recíprocamente, si f es una función que satisface (3.16) y (3.17). Entonces por el Teorema 2.3.6 f es óptima. En este caso, se tiene que (2.18) está dado en (3.17). ■

3.4. Ejemplos

3.4.1. Utilidad Logarítmica

Este ejemplo es presentado en [9] y [34], pero con la diferencia que aquí se plantea una versión estocástica.

Supóngase que

$$U(a_t) = \ln(a_t),$$

y la función de producción es $h(x) = x^\gamma$, con $\gamma \in (0,1)$; y

$$x_{t+1} = \xi_t \left(x_t^\gamma - a_t\right),$$

$a_t \in [0, x_t^\gamma]$ y $x_0 = x \in X := [0,\infty)$, donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. e independiente de x, tomando valores en $S := (0,1)$. Sea ξ un elemento genérico de la sucesión $\{\xi_t\}$. Supóngase que $\mu_\gamma := E[\ln(\xi^\gamma)] < \infty$. La densidad de ξ está designada por Δ. Será considerado que $\Delta \in C^2((0,\infty))$.

Lema 3.4.1 *El Teorema 1.2.8 es válido para el ejemplo de utilidad logarítmica.*

Demostración. Nótese que la ley de transición es débilmente continua. Sean $\epsilon > 1$ fijo y $X_j := [0, j+\epsilon]$, para $j \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $X_j \subset X_{j+1}$ y

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} int(X_j).$$

Por otro lado, para cada $j \in \mathbb{N}$, m_j definido en (3.8) es de la forma:

$$m_j = \gamma \ln(j+\epsilon),$$

y es fácil ver que (3.9) sucede. Además, para $t = 0, 1, 2, \ldots$, si $x_t = x \in X$ y $a_t \in A(x)$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_j$ y, como $\xi \in (0, 1)$, se sigue que $x_{t+1} \in X_{j+1}$, es decir, (3.10) sucede, y por tanto se satisface la Condición 1.2.7, y el resultado se sigue. ■

Lema 3.4.2 *Para cada* $n = 1, 2, \ldots,$

$$v_n(x) = \gamma k_n \ln(x) + c_n, \tag{3.19}$$

donde $x \in X$, $c_n \in \mathbb{R}$ *y* $k_n = \sum_{t=0}^{n-1} (\alpha\gamma)^t$, $n = 2, 3, \ldots$.

Demostración. La demostración es por inducción. Sea $x > 0$ fijo. Tómese $n = 1$. Entonces, directamente, $v_1(x) = \gamma \ln(x)$. En este caso, H^2 (véase Ec. (3.12)) esta dada por

$$H^2(x, a) = \gamma \ln(x^\gamma - a) + \mu_\gamma,$$

$a \in A(x)$. Nótese que $H^2 \in C^2(\widehat{\mathbb{K}}; \mathbb{R})$ y $H^2_{aa}(x, a) < 0$, entonces usando el Lema 3.3.2,

$$\begin{aligned} v_2'(x) &= \alpha E\left[v_1'\left(\xi\left(x^\gamma - \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{v_2'(x)}\right)\right)\xi\right]\gamma x^{\gamma-1}, \\ &= \alpha E\left[\gamma\xi \Big/ \xi\left(x^\gamma - \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{v_2'(x)}\right)\right]\gamma x^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

se sigue que $v_2'(x) = \frac{\gamma}{x}(1 + \alpha\gamma)$, y por consiguiente

$$v_2(x) = \gamma \ln(x)(1 + \alpha\gamma) + c_2.$$

Supóngase que para $n > 2$, v_{n-1} satisface (3.19). Entonces H^n (véase Ec. (3.12)) es de la forma:

$$H^n(x, a) = \gamma k_{n-1} \ln(x^\gamma - a) + \gamma k_{n-1}\mu_\gamma + c_{n-1}.$$

Nótese que $H^n \in C^2(\widehat{\mathbb{K}}; \mathbb{R})$ y $H^n_{aa}(x, a) < 0$, entonces usando el Lema 3.3.2,

$$\begin{aligned} v_n'(x) &= \alpha E\left[v_{n-1}'\left(\xi\left(x^\gamma - \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{v_{n-1}'(x)}\right)\right)\xi\right]\gamma x^{\gamma-1}, \\ &= \alpha E\left[\gamma\xi \Big/ \xi\left(x^\gamma - \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{v_{n-1}'(x)}\right)\right]\gamma x^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

y un cálculo sencillo permite obtener que

$$v_n'(x) = \frac{\gamma}{x}\sum_{t=0}^{n-1}(\alpha\gamma)^t.$$

Finalmente, (3.19) es obtenido integrando la última igualdad. ■

Lema 3.4.3 *Para cada* $n = 1, 2, \ldots,$

$$f_n(x) = \frac{x^\gamma}{k_n},$$

$x \in X$*, con* $k_n = \sum_{t=0}^{n-1}(\alpha\gamma)^t$*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *donde*

$$f_n(x) \in \arg \max_{a \in A(x)} \{\ln(a) + \alpha H^n(x, a)\}.$$

Demostración. Sea $x > 0$ fijo. Por el Lema 3.4.1 se tiene que

$$v_n'(x) = \frac{\gamma k_n}{x}.$$

Por otro lado, nótese que $U(a) = \ln(a)$, implicando que $u(z) = 1/z$, con $z \in (0, \infty)$, donde u es la inversa de U' (véase Condición 3.2.2-b)). Además, $h(x) = x^\gamma$, en consecuencia se tiene, de la ecuación (3.15), que

$$f_n(x) = w(x, v_n'(x)) = u\left(\frac{v_n'(x)}{h'(x)}\right).$$

Finalmente, realizando las sustituciones adecuadas y mediante algunos cálculos sencillos se tiene que

$$f_n(x) = \frac{x^\gamma}{k_n}.$$

Nótese que $f_n(x) \in (0, h(x))$. ■

Obsérvese que para $x \geq 0$, $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$, donde

$$\tilde{f}(x) := x^\gamma(1 - \alpha\gamma), \tag{3.20}$$

y $\tilde{f}(x) \in [0, x^\gamma]$, es decir, $\tilde{f}$ es una política determinista estacionaria admisible. Además, evaluando $\tilde{f}$ en (3.2) permite obtener que $v(\tilde{f}, x) = K\ln(x) + C > -\infty$**,** donde K, $C \in \mathbb{R}$.

Corolario 3.4.4 *Para el ejemplo de utilidad logarítmica,*

$$V(x) = \frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}\ln(x) + C,$$

$x > 0$, donde

$$C = \frac{1}{1-\alpha}[\ln(1-\alpha\gamma) + \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\gamma}\left(\mu_\gamma + \ln(\alpha\gamma)\right)],$$

y $\tilde{f}$ es la política óptima, donde $\tilde{f}$ está definida en (3.20).

Demostración. Sea $x > 0$. Como $v_n(x) \to V(x)$, y $k_n \to 1/(1-\alpha\gamma)$, $n \to \infty$, (nótese que $0 < \alpha\gamma < 1$), entonces de (3.19) se sigue que $\{c_n\}$ es convergente. Sea $C := \lim_{n\to\infty} c_n$. Así

$$V(x) = \frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}\ln(x) + C.$$

Por otro lado, dado que $U'(a) = 1/a$ and $h'(x) = \gamma x^{\gamma-1}$, entonces

$$\begin{aligned} & \alpha E[h'(\xi(h(x) - \tilde{f}(x)))U'\left(\tilde{f}\left(\xi\left(h(x) - \tilde{f}(x)\right)\right)\right)\xi] \\ = \quad & \alpha E\left[\frac{\gamma(\xi(x^\gamma - x^\gamma(1-\alpha\gamma)))^{\gamma-1}}{\left(\xi\left(x^\gamma - x^\gamma(1-\alpha\gamma)\right)\right)^\gamma (1-\alpha\gamma)}\xi\right] \end{aligned}$$

y un cálculo directo permite ver que (3.16) sucede, para $\tilde{f}$ definida en (3.20). Además, obsérvese que

$$\begin{aligned} \alpha^t E\left[h'(x_t)U'(\tilde{f}(x_t))x_t\right] &= \alpha^t E\left[\frac{\gamma x_t^{\gamma-1}}{x_t^\gamma(1-\alpha\gamma)}x_t\right], \\ &= \frac{\alpha^t\gamma}{1-\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

entonces, haciendo que $t \to \infty$, se tiene que (3.17) se cumple. Así, por el Lema 3.3.5 se sabe que $\tilde{f}$ es la política óptima.

Por otro lado, debido que V satisface (3.11), entonces se sigue que

$$\frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}\ln(x) + C = \sup_{a\in[0,x^\gamma]}\{\ln(a) + \alpha\frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}E\left[\ln(\xi(x^\gamma - a))\right] + \alpha C\},$$

y al sustituir a la política óptima $\tilde{f}$ la cual está definida en (3.20) se concluye que

$$C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\ln(1-\alpha\gamma) + \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\gamma}\left(\mu_\gamma + \ln(\alpha\gamma)\right)\right].$$

■

3.4.2. Utilidad Exponencial

Considérese que la función de utilidad está dada por:

$$U(a) = \frac{b}{\gamma} a^{\gamma},$$

donde $b > 0$ y $\gamma \in (0,1)$. La función de producción $h(x) = x$, y

$$x_{t+1} = \xi_t \left(x_t - a_t \right),$$

$a_t \in [0, x_t]$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0 = x \in X := [0, \infty)$. Supóngase que $\{\xi_t\}$ es una sucesión de v.a's i.i.d. e independiente de x_0, tomando valores en $S = [0, \infty)$. Sea ξ un elemento genérico de $\{\xi_t\}$ y considérese que $\Delta \in C^2((0,\infty))$, donde Δ denota la densidad de ξ. Supóngase que $\mu_\gamma := E[\xi^\gamma] < \infty$, $1 \leq \mu_\gamma$, tal que $0 < \alpha\mu_\gamma < 1$, y defínase a $\delta := \left(\alpha\mu_\gamma\right)^{1/(\gamma-1)}$.

Lema 3.4.5 *El Teorema 1.2.8 es válido para el ejemplo de utilidad exponencial.*

Demostración. Nótese que $A(x) = [0, x]$ es un conjunto compacto, para cada $x \in X$, y la función de utilidad es continua. Sea θ una función continua y acotada sobre X y

$$\Theta(a) = \int \theta(sa)\Delta(s)ds,$$

$a \in [0, x]$ (véase Ec. (3.5)). Dado que $\Delta \in C^2(0, \infty)$, es posible obtener que Θ es continua en $a \in [0, x]$ para cada $x \in X$. De esta manera la ley de transición es débilmente continua.

Además, dado que (3.6) y (3.7) se satisfacen, sí se considera como función de peso a

$$w(x) = \frac{b\mu_\gamma}{\gamma(1 - \alpha\mu_\gamma)} x^\gamma + 1,$$

y a las constantes c y β iguales a 1.

En efecto, debido a que $1 \leq \mu_\gamma$ y $0 < \alpha\mu_\gamma < 1$, se sigue que

$$1 < \frac{\mu_\gamma}{(1 - \alpha\mu_\gamma)}$$

y por el hecho que la función y^γ es una función creciente en $[0, \infty)$, entonces para $a \in [0, x]$ se obtiene que

$$\begin{aligned} |U(a)| &= \frac{b}{\gamma} a^\gamma < \frac{b\mu_\gamma}{\gamma(1 - \alpha\mu_\gamma)} x^\gamma + 1, \\ E[w(\xi(x - a))] &= \frac{b\mu_\gamma}{\gamma(1 - \alpha\mu_\gamma)} (x - a)^\gamma < \frac{b\mu_\gamma}{\gamma(1 - \alpha\mu_\gamma)} x^\gamma + 1. \end{aligned}$$

Al tomar supremos sobre $[0,x]$ lo anteriormente afirmado se sigue.

Finalmente, la Condición 1.2.6 es garantizada y por tanto, el resultado se sigue. ■

Lema 3.4.6 *Para* $n = 1, 2, \ldots,$

$$v_n(x) = \left(\frac{\delta^{n-1}(1-\delta)}{1-\delta^n}\right)^{\gamma-1} \frac{b}{\gamma} x^\gamma, \tag{3.21}$$

$x \in X$.

Demostración. Sea $x > 0$ fijo. Entonces $v_1(x) = \frac{b}{\gamma}x^\gamma$. En este caso, H^2 (véase Ec. (3.12)) está dada por

$$H^2(x,a) = \frac{b}{\gamma}\mu_\gamma (x-a)^\gamma,$$

$a \in A(x)$. Note que $H^2 \in C^2(\widehat{\mathbb{K}}; \mathbb{R})$ y $H^2_{aa}(x,a) < 0$, entonces usando el Lema 3.3.2, se obtiene que $v_2'(x)$ satisface que

$$v_2'(x) = b\delta^{\gamma-1}\left(x - \left(\frac{v_2'(x)}{b}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)^{\gamma-1},$$

y mediante cálculos sencillos se concluye que

$$v_2'(x) = \left(\frac{\delta(1-\delta)}{1-\delta^2}\right)^{\gamma-1} bx^{\gamma-1}. \tag{3.22}$$

Entonces

$$v_2(x) = \left(\frac{\delta(1-\delta)}{1-\delta^2}\right)^{\gamma-1} \frac{b}{\gamma}x^\gamma.$$

Obsérvese que v_2 fue obtenida al integrar a (3.22) y tomando la constante involucrada igual a cero, porque para este ejemplo, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $v_n(0) = 0$ (véase [9]).

Supóngase que para alguna $n > 2$, v_{n-1} satisface a (3.21). Entonces H^n (véase Ec. (3.12)) es de la forma:

$$H^n(x,a) = \left(\frac{\delta^{n-1}(1-\delta)}{1-\delta^n}\right)^{\gamma-1} \frac{b\mu_\gamma}{\gamma}(x-a)^\gamma.$$

Note que $H^n \in C^2(\widehat{\mathbb{K}}; \mathbb{R})$ y $H^n_{aa}(x,a) < 0$, entonces usando el Lema 3.3.2,

$$v_n'(x) = \alpha E\left[v_{n-1}'\left(\xi\left(x - \left(\frac{v_n'(x)}{b}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)\right)\xi\right]$$

y un cálculo sencillo permite obtener que

$$v_n'(x) = \left(\frac{\delta^{n-1}(1-\delta)}{1-\delta^n}\right)^{\gamma-1} bx^{\gamma-1}. \tag{3.23}$$

Finalmente, integrando (3.23) permite probar que (3.21) sucede. ∎

Lema 3.4.7 *Para cada* $n = 1, 2, \ldots,$

$$f_n(x) = \left(\frac{\delta^{n-1}(1-\delta)}{1-\delta^n}\right) x,$$

$x \in X$.

Demostración. Sea $x > 0$. Del Lema 3.4.5 se sigue que

$$v_n'(x) = \left(\frac{\delta^{n-1}(1-\delta)}{1-\delta^n}\right)^{\gamma-1} bx^{\gamma-1}.$$

Por otro lado, nótese que $U(a) = \frac{b}{\gamma} a_t^{\gamma}$, implicando que $u(z) = (z/b)^{1/\gamma - 1}$, con $z \in (0, \infty)$, donde u es la inversa de U' (véase Condición 3.2.2-b)). Además, $h(x) = x$, en consecuencia se tiene, de la ecuación (3.15), que

$$f_n(x) = w(x, v_n'(x)) = u\left(\frac{v_n'(x)}{h'(x)}\right).$$

Finalmente, realizando las sustituciones adecuadas y mediante algunos cálculos sencillos se puede concluir que

$$f_n(x) = \left(\frac{\delta^{n-1}(1-\delta)}{1-\delta^n}\right) x.$$

Nótese que $f_n(x) \in (0, h(x))$. ∎

Obsérvese que para cada $x \geq 0$, $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$, donde

$$\tilde{f}(x) := \left(\frac{(\delta-1)}{\delta}\right) x, \tag{3.24}$$

y $\tilde{f}(x) \in [0, x]$, es decir, $\tilde{f}$ es una política determinísta estacionaria admisible.

Corolario 3.4.8 *Para el ejemplo utilidad exponencial,*

$$V(x) = \left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^{\gamma-1} \frac{b}{\gamma} x^{\gamma}, \tag{3.25}$$

y $\tilde{f}$ *es la política óptima definida en (3.24).*

Demostración. Haciendo que $n \to \infty$ en (3.21), (3.25) se sigue. Por otro lado, dado que $U'(a) = ba^{\gamma-1}$ y $h'(x) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} & \alpha E\left[h'(\xi(h(x)-\tilde{f}(x)))U'\left(\tilde{f}\left(\xi\left(h(x)-\tilde{f}(x)\right)\right)\right)\xi\right] \\ = \quad & \alpha bE\left[\left(\xi\left(x - x\frac{\delta-1}{\delta}\right)\frac{\delta-1}{\delta}\right)^{\gamma-1}\xi\right], \end{aligned}$$

y un cálculo directo permite verificar (3.16), para $\tilde{f}$ definida en (3.24). Ahora, obsérvese que

$$\alpha^t E\left[h'(x_t)U'(\tilde{f}(x_t))x_t\right] = \alpha^t b\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^{\gamma-1} E\left[x_t^\gamma\right], \tag{3.26}$$

con $x_0 = x \in X$. Dado que $\{\xi_n\}$ es una sucesión de v.a's i.i.d. e independientes de x_0, entonces es fácil ver que

$$E\left[x_t^\gamma\right] = \left(\frac{x}{\delta}\right)^\gamma \mu_\gamma^t. \tag{3.27}$$

Sustituyendo (3.27) en (3.26) y como $0 < \alpha\mu_\gamma < 1$, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} \alpha^t E\left[h'(x_t)U'(\tilde{f}(x_t))x_t\right] = 0,$$

es decir, se tiene (3.17). Finalmente, por el Lema 3.3.5 se sabe que $\tilde{f}$ es la política óptima. ■

Capítulo 4

ESTABILIDAD PARA EL PCI

La estabilidad es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos de suma importancia. La estabilidad en sistemas dinámicos puede entenderse, a grandes rasgos, como el comportamiento que se produce en el sistema por perturbaciones en las condiciones iniciales o en algunas de las variables que intervienen en la ley de movimiento.

Históricamente, el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918) en su tesis doctoral publicada en 1892, establece que un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable, si todas las soluciones que nacen en las cercanías de éste permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. Por otro lado, la estabilidad asintótica significa que soluciones que empiezan suficientemente cerca, no sólo permanecen cercanas sino que eventualmente acaban convergiendo al mismo punto de equilibrio.

En el contexto estocástico, la estabilidad se maneja mediante la Teoría Ergódica (TO). Dicha teoría estudia a los sistemas dinámicos con estructura de espacio medible (véase [19] y [27]). La estabilidad mediante la TO ha sido aplicada para dar resultados como teoremas de límite central y ley de grandes números por medio del criterio de rendimiento conocido como costos promedios (véase [26]).

Por otro lado, en [5] es presentado el modelo clásico de Brock y Mirman el cual incluye un estudio sobre la estabilidad de su proceso óptimo. Eventualmente, para este modelo, Nishimura and Stachurski en [30] presentan resultados de estabilidad mediante TO, que después fue generalizado por Kamihigashi en [22]. El objetivo es establecer la estabilidad del modelo de Brock y Mirman para determinar cotas de aproximación para el valor óptimo y/o la política óptima.

Bajo el espíritu de los trabajos realizados por Nishimura, Stachurski y Kamihigashi, se presenta en este capítulo un estudio de la estabilidad para el PCI. La metodología consiste en establecer la estabilidad mediante la teoría de Procesos (o cadenas) de Markov, y utilizando la ecuación de Euler obtenida en el Lema 3.3.5. Cabe mencionar que este estudio es debido al Teorema 1.2.8, la cual garantiza que la política óptima es determinista estacionaria, y por la Observación 1.1.2 se sabe que el proceso óptimo del PCI resulta ser de Markov.

4.1. Estabilidad en Procesos de Markov

Considérese a una cadena Markov $\{x_n\}$ definida en X con kérnel de transición Q y a $w : X \to [1, \infty)$ una función de peso. Sea $\mathbb{B}_w(X)$ el espacio de funciones medibles y w-acotadas en X con la norma $\|\cdot\|_w$ definida en (1.6).

Sea φ una medida signada definida en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$. Entonces para cada $u \in \mathbb{B}_w(X)$, denótese por φu a la función definida en X como

$$\varphi u := \int u(y)\varphi(dy).$$

Obsérvese que para el kérnel de transición Q, Qu es de la forma

$$Qu(x) = \int u(y)Q(\,dy|\,x),$$

y el n-ésimo kérnel de transición es $Q^n = QQ^{n-1}$, para $n \geq 1$ con $Q^0 := \delta_x$, donde δ_x es la medida de Dirac en el estado x.

Definición 4.1.1 *Sea P una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(X)$. Entonces P es invariante (m.p.i) para la cadena $\{x_n\}$, si*

$$QP = P.$$

Defínase para cada medida φ definida en $\mathcal{B}(X)$ a

$$\|\varphi\|_w := \sup_{\|u\|_w \leq 1} |\varphi u|\,,$$

donde $\mathcal{B}(X)$ denota a la σ-álgebra de Borel de X.

Definición 4.1.2 *La cadena de Markov* $\{X_n\}$ *es* w*-geométricamente ergódica, si existen una medida de probabilidad* P*, y constantes no negativas* R *y* ρ*, con* $\rho < 1$*, tales que para toda* $n = 0, 1, \ldots$*, se satisface*

$$\|Q^n - P\|_w \leq R\rho^n.$$

Definición 4.1.3 *La cadena de Markov* $\{X_n\}$ *es* φ*-irreducible, si existe una medida* φ *sobre* $\mathcal{B}(X)$ *tal que: siempre que* $\varphi(A) > 0$ *implique que* $\Pr[X_n \in A$ *para alguna* $n \in \mathbb{N}] > 0$*.*

Definición 4.1.4 *Sea* $C \in \mathcal{B}(X)$*.* C *es un conjunto pequeño para la cadena* $\{X_n\}$*, si existen una medida finita* μ *sobre* $\mathcal{B}(X)$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, tal que para cada* $x \in C$ *implique que*

$$Q^n(B|\,x) \geq \mu(B),$$

para cada $B \in \mathcal{B}(X)$*.*

Definición 4.1.5 *La cadena de Markov* $\{X_n\}$ *es fuertemente aperiódica si existe un conjunto pequeño* C *tal que* $\mu(C) > 0$*, donde* μ *es misma medida de la Definición 4.1.4.*

La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [27], Teorema 16.1.2, p. 395.

Teorema 4.1.6 *Supóngase que la cadena* $\{X_n\}$ *es* φ*-irreducible, fuertemente aperiódica y que existen un conjunto pequeño* C *y constantes* $\beta < 1$ *y* $b < \infty$ *tales que para cada* $x \in X$

$$Qw(x) \leq \beta w(x) + bI_C(x).$$

Entonces existe una única m.p.i. P *tal que la cadena es* w*-geométricamente ergódica.*

Definición 4.1.7 *Una función de Lyapunov sobre un espacio topológico* S *es una función real no negativa* W *definida en* Y *con la propiedad de que todo subconjunto de nivel es precompacto, es decir, para cada* $a \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{x : W(x) \leq a\}$ *tiene clausura compacta.*

Lema 4.1.8 *Si* $Y = (0, \infty)$ *entonces* $W : Y \to \mathbb{R}_+$ *es una función de Lyapunov, si y sólo si,* $\lim_{x\downarrow 0} W(x) = \lim_{x\uparrow\infty} W(x) = \infty$*.*

Debido al Teorema 4.1.6 se concluye que la sucesión de variables aleatorias del procesos de Markov converge en distribución a la variable aleatoria generada por la m.p.i. (véase Definición 4.1.1). A continuación se presenta un resultado que garantiza la convergencia en media de una sucesión de variables aleatorias conociendo la convergencia en distribución. Esto esta basado en el Libro de A. Gut (véase [15]).

Definición 4.1.9 *Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ es uniformemente integrable, si y soló si,*

$$E[X_n|\, I_{\{X_n>a\}}] \to 0,$$

cuando $a \to \infty$ y es uniformemente en n. (véase [15], Definición 4.3.1, p. 214).

Lema 4.1.10 *Sea $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias tal que para alguna $p > 1$ se tiene que*

$$\sup_n E[|X_n|^p] < \infty.$$

Entonces la sucesión es uniformemente integrable. (véase [15], Teorema 4.2, p. 215).

Lema 4.1.11 *Sea $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias convergente en distribución a la variable aleatoria X. Sí para alguna $r > 0$, la sucesión $\{|X_n|^r\}$ es uniformemente integrable entonces*

$$E[|X_n|^r] \to E[|X|],$$

cuando $n \to \infty$. Y para $r \geq 1$, se tiene que $E[X_n] \to E[X]$ cuando $n \to \infty$. (véase [15], Teorema 5.5, p. 224).

4.2. Estabilidad para el PCI

Considérese las condiciones y resultados dados en el Capítulo 3 sobre el PCI. El proceso óptimo para el PCI está modelado por

$$x_{t+1} = \xi_t(h(x_t) - f(x_t)),$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$, donde f es la política óptima descrita por la ecuación de Euler (3.16), h es la función de producción y $\{\xi_t\}$ es la sucesión de variables aleatorias i.i.d. tomando valores en $S = [0, \infty)$, independientes de x_0, donde $x_0 = x \in X = [0, \infty)$.

Condición 4.2.1 *Sea ξ un elemento genérico de la sucesión $\{\xi_t\}$; supóngase que ξ tiene una densidad estrictamente positiva Δ. Además, supóngase que $E[\xi^p]$ y $E[1/\xi]$ existen y son ambas finitas, donde $p > 1$. Sea $h'(0) := \lim_{x \downarrow 0} h'(x)$ y supóngase que $h'(0) > 1$ y*

$$\alpha h'(0) > E[1/\xi]. \tag{4.1}$$

Por la Condición 4.2.1 se considerará a $S = X = (0, \infty)$. Por otro lado, dada la forma de la dinámica se tiene que

$$Q(B|\, x, f(x)) = \int_{\{s|s(h(x)-f(x))\in B\}} \Delta(s)ds,$$

y por el hecho que $h - f$ es estrictamente positiva (véase Lema 3.3.3) se tiene que si $q(\cdot|\, x, f(x))$ es la densidad del kérnel $Q(\cdot|\, x, f(x))$ entonces

$$q(y|\, x, f(x)) = \Delta\left(\frac{y}{h(x) - f(x)}\right)\frac{1}{h(x) - f(x)}.$$

Entonces dado $x_0 > 0$, se sigue que para toda t la distribución de x_t tiene una densidad q_t y la sucesión $\{q_t\}$ satisface

$$q_{t+1}(y) = \int q(y|\, x, f(x))q_t(x)dx.$$

Sea D la colección de todas las densidades definidas en $(0, \infty)$.

Lema 4.2.2 *La cadena óptima $\{x_n\}$ para el PCI es φ-irreducible para toda $\varphi \in D$ las cuales son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración. Sean $\varphi \in D$ y $B \in \mathcal{B}(X)$ con φ-medida positiva y $x > 0$. Dado que la política óptima es interior (véase Lema 3.3.3) entonces el subconjunto $\{h(x) - f(x)\}^{-1} \cap B$ tiene medida de Lebesgue positiva. Así

$$\begin{aligned}\Pr(x_1 \in B) &= \int_{\{s|s(h(x)-f(x))\in B\}} \Delta(s)ds \\ &= \int_{\{h(x)-f(x)\}^{-1}\cap B} \Delta(s)ds.\end{aligned}$$

Y dado que Δ es estrictamente positiva (véase Condición 4.2.1) se sigue que $\Pr(x_1 \in B) > 0$. ■

Lema 4.2.3 *Todo subconjunto compacto en* $(0,\infty)$ *es un conjunto pequeño. Además el proceso óptimo* $\{x_n\}$ *es fuertemente aperiódico.*

Demostración. Es suficiente probar que para toda $n \in \mathbb{N}$ el intervalo $C_n := [1/n, n]$ es un conjunto pequeño. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Dado que la política óptima es interior (véase Lema 3.3.3) entonces la función $h - f$ es creciente. En efecto, sea $y = h(x) - f(x)$ entonces

$$V(x) = U(h(x) - f(x)) + \alpha E[V(f(x)\xi)],$$

y mediante la fórmula de la envolvente se tiene que

$$V'(x) = U'(h(x) - f(x))h'(x),$$

entonces, dada la concavidad de V, se tiene que $h-f$ es una función creciente.

Por consiguiente, para cada $x \in C_n$ se tiene que

$$0 < h(1/n) - f(n) \leq h(x) - f(x) \leq h(n) - f(n).$$

Dado que Δ es continua y estrictamente positiva (véase Condición 4.2.1). Entonces

$$\begin{aligned} m \quad : \quad &= \inf_{C_n \times C_n} q(y|\, x, f(x)) \\ &= \inf_{C_n \times C_n} \Delta \left(\frac{y}{h(x) - f(x)} \right) \frac{1}{h(x) - f(x)} > 0. \end{aligned}$$

Sea μ la medida definida para $B \in \mathcal{B}(X)$ como

$$\mu(B) := m \int_B I_{C_n}(x) dx,$$

entonces se tiene que

$$Q(B|\, x) \geq \mu(B).$$

Concluyendo que C_n es un conjunto pequeño (véase Definición 4.1.4).

Por otro lado, obsérvese que $\mu(C_n) > 0$ y por lo tanto, el proceso es fuertemente aperiódico (véase Definición 4.1.5). ■

Sea W definida para $x \in (0, \infty)$ como

$$W(x) := [U'(f(x))h'(x)]^{1/2} + x^p + 1, \tag{4.2}$$

donde $p > 1$.

Lema 4.2.4 *Sea* $w_1(x) := [U'(f(x))h'(x)]^{1/2}$*. Si la desigualdad (4.1) ocurre, entonces existen constantes* λ_1 *y* b_1 *tales que* $\lambda_1 \in (0,1)$*,* $b_1 < \infty$ *y para cada* $x \in (0,\infty)$

$$\int_0^\infty w_1((h(x)-f(x))s)\Delta(s)ds \leq \lambda_1 w_1(x) + b_1. \tag{4.3}$$

Demostración. Se sabe que la política óptima f satisface la ecuación de Euler dada en (3.16), es decir,

$$U'(f(x)) = \alpha \int_0^\infty U'(f((h(x)-f(x))s))h'((h(x)-f(x))s)s\Delta(s)ds.$$

Entonces por (3.16) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\int_0^\infty w_1((h(x)-f(x))s)\Delta(ds) =$$

$$\int_0^\infty \left[U'(f((h(x)-f(x))s))h'((h(x)-f(x))s)s(1/s)\right]^{1/2}\Delta(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^\infty U'(f((h(x)-f(x))s))h'((h(x)-f(x))s)s\Delta(s)ds\right)^{1/2} \\
&\quad \left(\int_0^\infty (1/s)\Delta(s)ds\right)^{1/2} \\
&= \left(U'(f(x))\right)^{1/2}(E(1/\xi)/\alpha)^{1/2} \\
&= w_1(x)\left(E(1/\xi)/\alpha h'(x)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dado que se satisface (4.1) entonces existe $\delta > 0$ y $\lambda \in (0,1)$ tales que si $x < \delta$ entonces

$$E(1/\xi)/\alpha h'(x) < \lambda. \tag{4.4}$$

En efecto, dado que

$$0 < \frac{1}{h'(0)} < \frac{\alpha}{E[\xi]}.$$

Entonces para

$$\epsilon := \frac{\alpha}{E[\xi]} - \frac{1}{h'(0)}$$

existe $\delta > 0$ tal que si $x < \delta$

$$\frac{1}{h'(x)} < \frac{\alpha}{E[\xi]},$$

de lo cual se concluye que

$$\frac{\alpha E[\xi]}{h'(x)} < 1,$$

para $x < \delta$. Por consiguiente, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que (4.4) se satisface. Además, dada la continuidad de $x^{1/2}$ se tiene que existe $\delta > 0$ y $\lambda_1 \in (0,1)$ tales que si $x < \delta$ entonces

$$\left(E(1/\xi)/\alpha h'(x)\right)^{1/2} < \lambda_1. \tag{4.5}$$

Dado que U' y h' son funciones decrecientes y $h-f$ es creciente entonces la función definida para $x \in (0,\infty)$ como $U'(h(x)-f(x))h'(x)$ es decreciente.

Entonces nuevamente de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que para $x \geq \delta$

$$\int_0^\infty w_1((h(x)-f(x))s)\Delta(s)ds \leq b_1, \tag{4.6}$$

donde

$$b_1 := \left(\int_0^\infty U'(f((h(\delta)-f(\delta))s))h'((h(\alpha)-f(\delta))s)s\Delta(s)ds\right)^{1/2} (E(1/\xi))^{1/2}.$$

El resultado se sigue de (4.5) y de (4.6). ■

Lema 4.2.5 *Sea $w_2(x) = x^p$ entonces bajo la Condición 4.2.1 existen constantes λ_2 y b_2 tales que $\lambda_2 \in (0,1)$, $b_2 < \infty$ y para cada $x \in (0,\infty)$*

$$\int_0^\infty w_2((h(x)-f(x))s)\Delta(s)ds \leq \lambda_2 w_2(x) + b_2. \tag{4.7}$$

Demostración. Se puede elegir a $\gamma \in (0,1)$ tal que $\gamma^p E[\xi^p] < 1$ y encontrar $d < \infty$ tal que $h(x) < \gamma x$, para $x > d$. En efecto dada la hipótesis

$\lim_{x\to\infty} h'(x) = 0$ entonces existe $\widehat{x}$ tal que para $x > \widehat{x}$ $h'(x) \leq \gamma/2$ implicando que

$$h(x) \leq h(\widehat{x}) + (x - \widehat{x})\gamma/2,$$

y el lado derecho de la desigualdad vista como función de x se puede determinar a $\widetilde{x}$ tal que para $x > \widetilde{x}$

$$h(\widehat{x}) + (x - \widehat{x})\gamma/2 \leq \gamma x.$$

Si $d := \max\{\widehat{x}, \widetilde{x}\}$ se tiene lo mencionado.

Por consiguiente, para $x \in (0, d]$ se tiene que $f(x) \in [0, h(d)]$ implicando que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w_2((h(x) - f(x))s)\Delta(s)ds &= \int_0^\infty ((h(x) - f(x))s)^p \Delta(s)ds \\ &\leq (h(d))^p E[\xi^p]. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x > d$ entonces

$$\int_0^\infty ((h(x) - f(x))s)^p \Delta(s)ds \leq \gamma^p E[\xi^p] x^p.$$

Finalmente, haciendo $\lambda_2 := \gamma^p E[\xi^p]$ y $b_2 := (h(d))^p E[\xi^p]$, el resultado se sigue. ■

Corolario 4.2.6 *Sea W la función definida en (4.2). Entonces W es una función de Lyapunov y existen constantes $\lambda \in (0, 1)$ y $b < \infty$ tales que para cada $x \in (0, \infty)$*

$$\int_0^\infty W((h(x) - f(x))s)\Delta(s)ds \leq \lambda W(x) + b. \tag{4.8}$$

Demostración. Dada la Condición 3.2.2 c) para la función de utilidad U, se sigue que la función w_1, definida en el Lema 4.2.4, satisface que

$$\lim_{x\downarrow 0} w_1(x) = \infty,$$

además, por definición de la función w_2 en el Lema 4.2.5 se obtiene que

$$\lim_{x\uparrow\infty} w_2(x) = \infty,$$

implicando que la función W definida en (4.2) satisface que

$$\lim_{x\downarrow 0} W(x) = \lim_{x\uparrow\infty} W(x) = \infty.$$

Entonces por el Lema 4.1.8 se obtiene que W es una función de Lyapunov.

Por otro lado, dado que w_1 y w_2 satisfacen (4.3) y (4.7), respectivamente. Entonces W satisface (4.8) con $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ y $b := b_1 + b_2 + 1$. ■

Lema 4.2.7 *Sean $\lambda \in (0,1)$ y $b < \infty$ como en el Corolario4.2.1. Entonces existe un conjunto compacto C de X tal que*

$$QW(x) \leq \beta W(x) + bI_C(x), \tag{4.9}$$

con $\lambda < \beta < 1$.

Demostración. Sea β tal que $\lambda < \beta < 1$. Por la propiedad de Lyapunov (véase Definición 4.1.7) se puede elegir un conjunto compacto C tal que $W(x) \geq b/(\beta - \lambda)$ siempre que $x \notin C$. Además, por el Corolario 4.2.6 se sigue que para $x \in C$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W((h(x) - f(x))s)\Delta(s)ds &\leq \lambda W(x) + b \\ &\leq \beta W(x) + bI_C(x), \end{aligned}$$

y para $x \notin C$ se tiene que (4.9) se satisface, dado que

$$\int_0^\infty \frac{W((h(x) - f(x))s)\Delta(s)ds}{W(x)} \leq \lambda + \frac{b}{W(x)} \leq \beta.$$

■

Teorema 4.2.8 *Para el proceso óptimo del PCI existe una única m.p.i. P y es W-geométricamente ergódico.*

Demostración. En efecto, por los Lemas 4.2.2 y 4.2.3 se tiene que el proceso óptimo es φ-irreducible y fuertemente aperiódico. Y por el Lema 4.2.7 existe un conjunto compacto C de X el cual, por Lema 4.2.3 es un conjunto pequeño, tal que para cada $x \in X$

$$QW(x) \leq \beta W(x) + bI_C(x).$$

Finalmente, aplicando el Teorema 4.1.6 el resultado se sigue. ■

Corolario 4.2.9 *El proceso óptimo para el PCI converge en media.*

Demostración. Sean $x_0 = x \in X$ y $\{x_n\}$ el proceso óptimo. Dado el Lema 4.2.5 se sabe que el proceso óptimo satisface la condición de Lyapunov (4.7). Implicando que para $n = 0, 1, \ldots,$

$$E[x_{n+1}^p \,|\, x_n] \leq \lambda_2 x_n^p + b_2, \tag{4.10}$$

donde λ_2 y b_2 son las constantes del Lema 4.2.5. Entonces por propiedades de Esperanza Condicional e iterando a (4.10) desde $n = 0, 1, \ldots,$ y dado que $\lambda_2 \in (0, 1)$ es posible mostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$E[x_{n+1}^p] \leq x_0^p + \frac{b_2}{1 - \lambda_2} < \infty,$$

implicando que

$$\sup_n E[x_n^p] < \infty.$$

Dado que x_n es estrictamente positiva casi seguramente, entonces por el Lema 4.1.10 se tiene que el proceso óptimo es uniformemente integrable y por el Teorema 4.2.8 se sabe que la sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}$ convergen en distribución a la m.p.i. P. Aplicando el Lema 4.1.11 se tiene el resultado. ■

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

5.1. Conclusiones

En esta tesis se abordaron los siguientes temas: Procesos de Decisión de Markov descontados (PDM's), Programación Dinámica (PD), Diferenciabilidad de la función de Valor Óptimo, la Ecuación de Euler (EE), Modelos de Crecimiento Económico (particularmente Problemas de Consumo Inversión), Estabilidad para procesos de Markov y Teoría Ergódica.

En el Capítulo 1 se planteó el Problema de Control Óptimo (PCO) mediante la teoría de PDM's y se exhibió la técnica de PD para su solución. La aportación del capítulo consiste en la presentación de una recopilación de condiciones (véase Condiciones 1.2.3-1.2.7) sobre el modelo de control óptimo que permiten clasificar al PCO de la siguiente manera: las Condiciones 1.2.3-1.2.5 suponen que la función de recompensa r sea acotada mientras que las Condiciones 1.2.6 y 1.2.7 no lo requieren. Concluyendo que cuando la función de valor óptimo es solución de la ecuación de optimalidad y en los casos cuando ésta es una función: medible, semicontinua superiormente y continua (véase Teorema 1.2.8). La importancia de esta recopilación es que en los estudios sobre modelos de crecimiento económico están basados en los casos en que la función de utilidad es acotada y no acotada. Entonces bajo el hecho de que la función de utilidad, en el contexto de PDM's, se identifica con la función de recompensa, en la práctica las Condiciones 1.2.3-1.2.7 sirven para garantizar la validez de PD en aplicaciones particulares (no necesariamente modelos económicos).

En el Capítulo 2 se estudió la Diferenciabilidad de la función de Valor

Óptimo (véase Teorema 2.2.7). Este estudio permitió dar la aportación del capítulo, presentar versiones de la EE en el contexto de PDM's. Una versión tiene la importancia de caracterizar a la política óptima (véase Teorema 2.3.6), es decir, se presentaron condiciones necesarias y suficientes para que una política estacionaria sea óptima mediante la EE. La aportación principal es proporcionar condiciones suficientes en el siguiente contexto: si una política estacionaria satisface la EE y una condición de transversalidad (véase Teorema 2.3.6) entonces la política es óptima. También se debilitaron las condiciones de necesidad presentadas en [38], con el objetivo de caracterizar a la solución óptima del PCO. La EE tiene un impacto en modelos de crecimiento económico, los cuales pueden ser considerados como ejemplos de PDM's. Concluyendo que esta versión resulta ser más general a la presentada en la literatura de modelos de crecimiento económico, y con la expectativa de ser aplicada a distintos modelos. Cabe mencionar que este capítulo está sustentado por el trabajo titulado *A Version of the Euler Equation in Discounted Markov Decision Processes (véase* [11])

En el Capítulo 3 se planteó el PCI modelado como un PDM y se analizó mediante la EE. El PCI presentado en este trabajo resulta ser un MCE y es una versión más general al modelo de Levhari y Srinivasan (véase [25]) y diferente al modelo clásico de Brock y Mirman (véase [5]) en el sentido siguiente, a diferencia de Levhari y Srinivasan, el agente tiene la opción de consumir todo su capital o invertir parte *de la producción generada por el capital* con una tasa de interés aleatoria; y a diferencia al de Brock y Mirman, la perturbación aleatoria solo afecta a la producción. Para el PCI se demostró que se satisfacen las Condiciones 2.2.1, 2.2.4 y 2.3.1 y la interioridad de la política óptima (véase Lema 3.3.3), logrando así caracterizar a su solución óptima mediante la EE (véase Lema 3.3.5). Además se implementó un algoritmo iterativo para las funciones de Iteración de Valores mediante una versión de la EE, el cual resultó ser complementario a PD (véase Lema 3.3.2). Se exhiben dos casos particulares del PCI, utilidad logarítmica y exponencial. En estos ejemplos se verifica la metodología otorgada por lo anteriormente dicho. Cabe mencionar que lo siguiente está sustentado por el trabajo titulado *A Consumption-Investment problem modelled as a discounted Markov decision process* (véase [10]).

En el Capítulo 4 se presentó una introducción a la estabilidad de Procesos de Markov a tiempo discreto basado en los libros de Hernández-Lerma y Lasserre (véase [19]) y de Meyn y Tweedie (véase [27]), cuya metodología consiste en hacer uso de la Teoría Ergódica. Mediante esta literatura y la EE, se demostró, para el PCI, que su proceso óptimo (el proceso generado por la política óptima) resultó ser un proceso estable (véase Teorema 4.2.8), garantizando además la existencia de una única distribución invariante para dicho proceso. Esto último tiene significado en que la sucesión de variables aleatorias (v.a's) óptimas convergen en distribución a la v.a determinada por la distribución invariante (denominada variable aleatoria invariante). Además, como consecuencia se tiene que esta sucesión converge en media a la variable aleatoria invariante (véase Corolario 4.2.9). Este estudio es motivado a los trabajos de Nishimura and Stachurski (véase [30]) y Kamihigashi (véase [22]) para el modelo de Brock y Mirman.

Puntualizando los resultados obtenidos son los siguientes:

a) Se establecieron versiones generales de la ecuación de Euler en el contexto de PDM's para las funciones de iteración de valores y de la función de valor óptimo. Como consecuencia de esto se obtuvo un resultado sobre la convergencia puntual de los maximizadores de las funciones de iteración de valores hacia la política óptima.

b) Se establecieron condiciones necesarias y suficientes para que una política sea óptima mediante una versión de la ecuación de Euler en el contexto de Procesos de Decisión de Markov.

c) Se modeló un problema de Consumo-Inversión mediante PDM's y se caracterizó a su política óptima mediante la EE obtenida en (a). Destacando que el PCI es una generalización al propuesto por Levhari y Srinivasan (véase [25]).

d) Sobre el PCI, se presenta un estudio de estabilidad de su proceso óptimo mediante la estabilidad de Lyapunov, teoría ergódica en cadenas de Markov y la ecuación de Euler.

Cabe mencionar que el Resultado a) está sustentado por el trabajo titulado *A Version of the Euler Equation in Discounted Markov Decision Processes (véase* [11]), los Resultados b) y c) están sustentados por el trabajo titulado *A Consumption-Investment problem modelled as a discounted Markov decision process* (véase [10]).

5.2. Problemas Abiertos

a) Dar condiciones sobre la Diferenciabilidad de la función de Valor Óptimo en espacios vectoriales más generales, por ejemplo la diferencial de Gâteaux y/o de Fréchet. También obtener la Ecuación de Euler (EE) en este contexto. Esto es justificado dado que la Ecuación de Euler ha sido establecida originalmente en el Cálculo de Variaciones y aplicada a sistemas dinámicos más generales.

b) Debido a que la EE presentada en este trabajo define de manera implícita a la política óptima. Se plantea el objetivo de estudiar métodos de aproximación para dar cotas de error para aproximar a la política óptima. Esto es justificado por trabajos relacionados al modelo de Brock y Mirman (véase [16] y [29]). Sin embargo, en el contexto general de Procesos de Decisión de Markov no ha sido presentado.

c) Con relación a la estabilidad del PCI, el Teorema 4.2.8, da una posible cota de aproximación y por el Corolario 4.2.9 se garantiza la convergencia en media del proceso óptimo. Pero no se ha vinculado con aproximaciones en aplicaciones concretas.

d) Además por los trabajos de Nishimura and Stachurski (véase [30]) y Kamihigashi (véase [22]) se sabe sobre la existencia de teoremas de Límite Central y/o Leyes de los Grandes Números. Se pretende realizar este estudio para el PCI como también en el contexto general de PDM's mediante la EE.

Bibliografía

[1] Angelatos G. M., *Uninsured idiosyncratic investment risk and aggregate saving*, Rev. Econ. Dy. 10, 1-30, (2007).

[2] Arrow K. J., *A note on uncertainty and discounting in models of economic growth*, J. Risk Unc. 38, 87-94, (2009).

[3] Bellman R., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, ISBN 0691146683, 1957.

[4] Bertsekas D. P., Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models, Prentice-Hall, Belmont, ISBN 0132215810, 1987.

[5] Brock W. and Mirman L., *Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case*, J. Econ. Th. 4, 479-513, (1972).

[6] Cruz-Suárez D., Montes-de-Oca R. and Salem-Silva F., *Conditions for the uniqueness of optimal policies of discounted Markov decision processes*, Math. Methods Oper. Res. 60, 415-436, (2004).

[7] Cruz-Suárez D. and. Montes-de-Oca R., *Uniform Convergence of the Value Iteration Policies for Discounted Markov Decision Processes*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 12 , 133-152, (2006).

[8] Cruz-Suárez H. and Montes-de-Oca R., *Discounted Markov control processes induced by deterministic systems*, Kybernetika 42, 647-664, (2006).

[9] Cruz-Suárez H. and Montes-de-Oca R., *An envelope theorem and some applications to discounted Markov decision processes*, Math. Methods Oper. Res. 67, 299-321, (2008).

[10] Cruz-Suárez H., Montes-de-Oca R. and Zacarías G., *A Consumption-Investment problem modelled as a discounted Markov decision process*, Kybernetika 47, 740-760, (2011).

[11] Cruz-Suaréz H., Zacarías-Espinoza G. and Vázquez-Guevara V., *A Version of the Euler Equation in Discounted Markov Decision Processes*, Journal of Applied Mathematic, Volume 2012, Article ID 103698, doi:10.1155/2012/103698, 1-16, (2012).

[12] De la Fuente A., Mathematical Methods and Models for Economists, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0521585295, 2000.

[13] Dynkin E. B. and Yushkevich A. A., Controlled Markov Processes, Springer-Verlag, New York, ISBN 038703879, 1980.

[14] Epstein L. and Zin S., *Substitution, risk aversion, and the temporal behaviour of consumption and asset returns I: theoretical framework*, Econometrica 57, 937-969, (1989).

[15] Gut A., Probability: A Graduate Course, Springer, New York, ISBN 387-22833, 2005.

[16] Heer B. and Maussner A., Dynamic General Equilibrium Modelling: Computational Method and Application, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 354022095X, 2005.

[17] Hernández-Lerma O. and Lasserre J. B., Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria, Springer-Verlag, New York, ISBN 038794792,1996.

[18] Hernández-Lerma O. and Lasserre J. B., Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes, Springer-Verlag, ISBN 0387986944, 1999.

[19] Hernández-Lerma O. and Lasserre J. B., Markov Chains and Invariant Probabilities, Birkhauser Verlag, ISBN 3764370009, 2003.

[20] Ize J., Cálculo de Variaciones, V Coloquio del Departamento e Matemáticas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1987.

[21] Jaśkiewics A. and Nowak A.S., *Discounted dynamic programming with unbounded returns: application to economic models*, J. Math. Anal. Appl. 378, 450-462, (2011).

[22] Kamihigashi T., *Stochastic optimal growth with bounded or unbounded utility and bounded or unbounded shocks*, J. Math. Econom. 43, 477-500, (2007).

[23] Karatzas I. and Sudderth W. D., *Two Characterizations of Optimality in Dynamic Programming*, Appl Math Optim., 61, 421–434, (2010).

[24] Korn R. and Kraft H., *A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates*, SIAM J. Control Optim. 40, 1250–1269, (2001).

[25] Levhari D. and Srinivasan T. N., *Optimal savings under uncertainty*, Rev. Econ. Stud. 36, 153-163, (1969).

[26] Mendoza-Pérez A. F. and Hernández-Lerma O., *Asymptotic normality of Discrete-time Markov Control Processes*, J. Appl. Prob. 47, 778-795, (2010).

[27] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, Springer-Verlag, London, ISBN 9780511516719, 1993.

[28] Mirman L. and Zilcha I., *On optimal growth under uncertainty*, J. Econ. Th. 2, 329-339, (1975).

[29] Moreira H. and Maldonado W., *A Contractive method for computing the stationary solution of Euler equation*, Economics Bulletin, 3, 1-14, (2002).

[30] Nishimura K. and Stachurski J., *Stability of stochastic optimal growth models: a new approach*, J. Econom. Theory, 122, 100–118, (2005).

[31] Ramsey F. P., *A Mathematical theory of saving*, Econ. J. 38, 543-559, (1928).

[32] Schäl M., *Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 32, 179-196, (1975).

[33] Stachurski J., *Stochastic growth: asymptotic distributions*, Econom. Theory. 21, 913-919. (2003).

[34] Stokey N., Lucas R. and Prescott E., Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press, Cambridge, ISBN 0674750969, 1989.

[35] Sundaram R. K., A First Course in Optimization Theory, Cambridge University Press, ISBN 0521497701, 1997.

[36] Tyrrell-Rockafellar R., Convex Analysis, Princeton, New Jersey, ISBN 0691015864, 1970.

[37] Zacarías-Espinoza G., La Ecuación de Euler en Procesos de Decisión de Markov Descontados, Tesis de Maestría, FCFM-BUAP, 2009.

[38] Zacarías-Espinoza G. and Cruz-Suárez H., *Un Método iterativo para resolver un modelo Lineal Cuadrático*, Memorias de la Octava Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática CISCI 2009, Orlando Fl., vol. 1, ISBN 1934272639, 286-291, 2009.

[39] Zacarías-Espinoza G., Cruz-Suárez H. y Venegas-Pérez A., *Aproximación de la Solución Óptima de un Problema Lineal Cuadrático vía la Ecuación de Euler*, Memorias de la Novena Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática CISCI 2010, Orlando Fl., vol. 3, ISBN 139781934272930, 154-149, 2010.

[40] Zacarías-Espinoza G., Cruz-Suárez H. y Venegas-Pérez A., *Control Óptimo de Dos Máquinas Usando Políticas de Reemplazo*, Memorias de la Novena Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática CISCI 2010, Orlando Fl., vol. 3, ISBN 139781934272930, 159-163, 2010.