Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas

Aproximaciones Contractivas en Cadenas de Decisión Semi-Markovianas con Criterio de Costo Promedio Sensible al Riesgo

Tesis

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Carlos Camilo Garay

Directores de Tesis:

Dr. Rolando Cavazos Cadena
Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla, Pue. *Diciembre 2021*

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Panorama General

Este trabajo trata sobre Procesos de Decisión Semi-Markovianos, los cuales son modelos matemáticos para sistemas dinámicos en los que los tiempos entre transiciones son aleatorios; vea, por ejemplo, [5], [13] y [24]. Una característica esencial de un proceso de decisión es la presencia de un agente, llamado el controlador, o tomador de decisiones, que se encarga de aplicar una acción (control) cada vez que el sistema completa una transición. Tal intervención tiene como propósito optimizar el funcionamiento del sistema incidiendo en las probabilidades con las que se puede transitar de un estado a otro y, en el caso semi-Markoviano, afectando la distribución del tiempo de retención en un estado al completarse una transición. Los procesos semi-Markovianos que se estudian en este trabajo tienen conjunto de estados finito, espacio de acciones compacto y tiempos de retención (de espera) acotados. El índice de funcionamiento que permite evaluar una estrategia (política) de selección de controles se construye suponiendo una estructura de costos doble: (i) cada vez que se aplica una acción se incurre en un costo instantáneo que depende tanto del estado actual como de la acción aplicada, y (ii) hay un costo que se se incurre continuamente mientras el sistema visita un estado a una tasa que depende tanto del estado ocupado como de la acción aplicada. Así, el *Problema de Control Óptimo* consiste en determinar una política de control que optimice un criterio de rendimiento dado; vea, por ejemplo, [5], [13] y [24] para una gran variedad de criterios de funcionamiento.

Una descripción un poco más precisa de una sistema que evoluciona de acuero a un modelo de Decisión Semi-Markoviano es la siguiente: si en el tiempo de la n-ésima etapa de decisión el sistema se encuentra en el estado $x_n = x$, entonces el controlador elige una acción $a_n = a$, y como consecuencia se tiene que *(i)* el sistema permanece en el estado x durante un tiempo aleatorio S_{n+1} con función de distribución F conocida, generándose un costo que depende del estado y la acción inmediata, además se paga un costo de permanencia, y *(ii)* después de transcurrido el tiempo de permanencia S_{n+1}, el sistema se mueve a un nuevo estado $x_{n+1} = y$ de acuerdo a una ley de transición, una vez ocurrido lo anterior, el proceso se repite; vea, por ejemplo, [32].

A la sucesión de controles que el proceso genera se conoce como *política de control* o simplemente política, la cual es una regla para elegir acciones en cada punto de observación del proceso. Para evaluar la calidad de cada política se cuenta con un criterio de rendimiento, el cual mide la eficiencia de ésta en función de los costos que genera. En la presente tesis se usa el criterio de rendimiento llamado *costo promedio sensible al riesgo*; vea [8].

Los procesos de decisión semi-Markovianos (PDSM) fueron introducidos en [15], estos modelos han sido estudiados y aplicados especialmente en líneas de espera controladas, vea [12], [19], [26], [30] y [31]. Hoy en día los PDSM son útiles para el estudio de una amplia gama de problemas de optimización. En muchos casos los PDSM proveen modelos más realistas que los Procesos de Decisión de Markov a tiempo discreto, ya que en los PDSM se considera el tiempo de manera continua.

Los modelos Markovianos con criterio promedio sensible al riesgo han sido estudiados, por ejemplo, en [3], [11], [18], [23], [27], [28] y [29]. Por otro lado, las cadenas semi-Markovianas se han aplicado ampliamente, bajo el supuesto de que el conrolador es neutral al riesgo, por lo que un costo aleatorio es evaluado vía su valor esperado correspondiente, por ejemplo; [30] trabaja sistemas de colas, [22] analiza el problema de horarios y [17] trabaja con reemplazamiento de equipos. Por otro lado, la literatura sobre modelos semi-Markovianos con criterio sensible al riesgo es de alguna forma escasa, vea [8] y [10]. Mientras que los modelos semi-Markovianos con horizonte de decisión finito se estudian en [16]. El criterio descontado bajo una función de utilidad recientemente se estudió en [4].

1.2. Contribución Principal

La aportación del trabajo de tesis es la siguiente: dada una cadena semi-Markoviana controlada, con espacio de estados finito y comunicante, se establece que es posible obtener aproximaciones convergentes del costo promedio óptimo sensible al riesgo a través de puntos fijos de una familia de operadores contractivos, esto se formula en el Teorema 4.3. Con esto, se extiende el enfoque descontado en la teoría de los procesos de decisión de Markov al contexto de las cadenas de decisión semi-Markovianas con criterio de costo promedio sensible al riesgo. En contraste al caso Markoviano, los operadores contractivos que se usan en este trabajo dependen de dos parámetros. Más aún, en la Observación 3.1*(ii)* de [6], se prueba que una familia de operadores de un sólo parámetro son en general no-contractivos.

1.3. Organización del Trabajo

El trabajo de tesis está organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 2, se introduce el modelo de decisión semi-Markoviano, se formula el criterio de costo promedio sensible al riesgo y se da un criterio de rendimiento. En el Capítulo 3, se introduce una *ecuación de Poisson* que, bajo ciertas condiciones, se demuestra que el criterio de costo promedio sensible al riesgo se caracteriza por dicha ecuación de Poisson, es decir, una solución de tal ecuación determina el costo promedio óptimo sensible al riesgo. Cabe mencionar que en este capítulo, se trabaja bajo el enfoque de cadenas semi-Markovianas no controladas, es decir, no se tiene un observador en cada etapa del proceso, vea [9]. En el Capítulo 4, se considera el caso controlado, espacio de estados comunicante y, bajo ciertas condiciones se establecerá que es posible obtener aproximaciones convergentes del costo promedio óptimo sensible al riesgo a través de puntos fijos de una familia de operadores contractivos, extendiendo el caso descontado en la teoría de los procesos de decisión de Markov al contexto de los procesos semi-Markovianos sensibles al riesgo. En contraste al caso Markoviano, los operadores contractivos que se utilizaron dependen de dos parámetros. En el caso no controlado, el enfoque descontado al criterio promedio sensible al riesgo se estudió en [25], mientras que el enfóque clásico sensible al riesgo, se puede encontrar en [1].

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Procesos de Decisión Semi-Markovianos

En este capítulo se presenta formalmente el Modelo de Decisión Semi-Markoviano. El espacio de estados se supone finito, el espacio de acciones compacto y los tiempos de permanencia acotados, vea [7], [13], [14] y [20].

Notación. Se denotará por $\mathbb{N}$ al conjunto de los enteros no-negativos, mientras que $\| h \|$ representa la norma del supremo de una función real h, es decir, $\| h \| := \sup\{| h | : x$ está en el dominio de $h\}$. Dado un espacio topológico $\mathbb{S}$, el σ-campo de Borel se denota como $\mathfrak{B}(\mathbb{S})$, mientras que el espacio lineal normado de todas las funciones continuas $h : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, tal que satisface $\| h \| < \infty$, se denota como $\mathbb{B}(\mathbb{S})$.

Definición 2.1. *Un Modelo de Decisión Semi-Markoviano (MDSM), estacionario, a tiempo continuo, consiste de una séxtupla*

$$\Big(\mathbb{X},\ \mathbb{A},\ C,\ P,\ \{\rho_{x,a}\},\ \{F_{x,a}\}\Big), \tag{2.1}$$

donde

- $\mathbb{X}$ *es un espacio de Borel, ver Apéndice A.1, llamado el espacio de estados.*

- $\mathbb{A}$ *es un espacio métrico compacto, llamado el conjunto de acciones.*

- $C \in \mathbb{B}(\mathbb{K})$ *es la función de costo por etapa, donde* $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in \mathbb{X},\ a \in \mathbb{A}(x)\}$ *es el conjunto de pares estado-acción admisible y es un subconjunto de Borel del espacio* $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$.

- *La ley de transición* $P(y \mid x, a) = [p_{x,y}(a)]$ *es un kérnel estocástico sobre* $\mathbb{X}$ *dado* $\mathbb{K}$*, ver Apéndice A.1, tal que* $\sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(a) = 1$ *y* $p_{x,y}(a) \geq 0$*, para cada* $(x, a) \in \mathbb{K}$ *y* $y \in \mathbb{X}$.

- $F_{x,a}$ *es la función de distribución del tiempo de permanencia sobre* $\mathbb{R}$*, para cada* $(x, a) \in \mathbb{K}$.

- *El mapeo* $\rho_{x,a} \in \mathbb{B}([0, \infty))$ *es la tasa de costo por operación.*

El MDSM representa un sistema dinámico que evoluciona de la siguiente manera: En el tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $X_0 = x_0 \in \mathbb{X}$, la $(n + 1)$-ésima época de decisión comienza cuando el sistema se encuentra en el estado $X_n = x_n \in \mathbb{X}$, el controlador elige una acción $A_n = a_n = a \in \mathbb{A}$, generándose con ello lo que se describe a continuación:

- Se incurre un costo $C(x_n, a_n) = C(x, a)$.

- El sistema permanece en dicho estado $x_n = x$ durante un tiempo aleatorio S_{n+1} con función de distribución $F_{x,a}$, pagando un costo de permanencia con tasa $\rho_{x,a}$, tal que un costo total $\int_0^{S_{n+1}} \rho_{x,a}(t)dt$ se genera.

- Transcurrido el tiempo de permanencia S_{n+1}, el sistema transita a un nuevo estado $x_{n+1} = y$, esto de acuerdo a la distribución $P(y \mid x, a) = p_{x,y}(a)$.

- Finalmente, una vez en el estado y el proceso se repite.

Observar que, el tiempo en que la $n-$ésima transición se completa está dado de la siguiente manera

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} S_k, \qquad y \qquad N_t := \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\} \tag{2.2}$$

es el número total de transiciones hasta el tiempo $t \geq 0$.

En adelante, se considera un modelo de decisión semi-Markoviano fijo.

2.2. Políticas de Decisión

Considerar el MDSM (2.1), se define el espacio de historias admisibles hasta la n-ésima época de decisión mediante

$$\mathbb{H}_0 := \mathbb{X} \quad \text{y} \quad \mathbb{H}_n := (\mathbb{K} \times \mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{X}, \qquad \text{para } n \geq 1.$$

De lo anterior se tiene que un elemento $h_n \in \mathbb{H}_n$, llamado n-historia, es un vector de la forma

$$h_n := (x_0, a_0, s_1, x_1, a_1, x_1, \ldots, x_{n-1}, a_{n-1}, s_{n-1}),$$

donde $(x_k, a_k, s_k) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}_+$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Definición 2.2. *Una política es una sucesión $\pi := \{\pi_n\}$, donde cada π_n es un kérnel estocástico sobre $\mathbb{A}$ dado $\mathbb{H}_n$, esto es, cada π_n es una probabilidad condicional $\pi_n(\cdot \mid h_n)$ sobre el conjunto de acciones $\mathbb{A}(x_n)$ dada la historia del proceso h_n, tal que satisface que $\pi_n(\mathbb{A}(x_n) \mid h_n) = 1$, para todo $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$, vea [24].*

Se denota por Π al conjunto de todas las políticas.

Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de todas las funciones Borel medibles, vea Apéndice A.1, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ tal que $f(x) \in \mathbb{A}(x)$, para todo $x \in \mathbb{X}$. Las funciones en $\mathbb{F}$ se conocen como *selectores* del conjunto de valores que mapean $x \mapsto \mathbb{A}(x)$.

Se denotará a la familia de kérneles estocástico sobre $\mathbb{A}$ dado $\mathbb{X}$, como $P(\mathbb{A} \mid \mathbb{X})$. Sea Φ el conjunto de todos los kérneles estocásticos φ en $P(\mathbb{A} \mid \mathbb{X})$ tales que para toda $x \in \mathbb{X}$ se tiene que $\varphi(\mathbb{A}(x) \mid x) = 1$. Así, $\mathbb{F} \subset \Phi$.

De manera intuitiva, una política $\pi = \{\pi_n\}$ se interpreta al definir una sucesión $\{a_n\}$ de variables aleatorias sobre $\mathbb{A}$, llamadas acciones, tal que, para cada n-historia, h_n, y $n \geq 1$, la distribución de a_n es

$\pi_n(\cdot \mid h_n)$, lo cual, por la Definición 2.2, está concentrada en $\mathbb{A}(x_n)$. Esta interpretación de π se formaliza en la ecuación (2.4). A continuación se introducen varias subclases de políticas.

Observación 2.1. *Se dice que $\pi(\cdot \mid h)$ está concentrada en $g(h)$ si $\pi(D \mid h) = I_D(g(h))$, para cada $D \in \mathfrak{B}(\mathbb{A})$, vea Apéndice A.1. Donde I_D es la función indicadora del conjunto D.*

Definición 2.3. *Una política $\pi = \{\pi_n\} \in \Pi$ se dice:*

(a) ***Markoviana Aleatorizada*** (Π_{RM}). *Si existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de kérneles estocásticos $\varphi_n \in \Phi$, tales que,*

$$\pi_n(\cdot \mid h_n) = \varphi_n(\cdot \mid x_n), \tag{2.3}$$

para toda $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$.

(b) ***Markoviana Aleatorizada Estacionaria*** (Π_{RS}). *Si (2.3) se cumple para un kérnel estocástico $\varphi \in \Phi$ independiente de n, es decir, $\pi_n(\cdot \mid h_n) = \varphi(\cdot \mid x_n)$, para toda $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$.*

(c) ***Determinista*** (Π_D). *Si existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones medibles con $g_n : \mathbb{H}_n \to \mathbb{A}$, tales que, para cada $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$, se tiene que $g_n(h_n) \in \mathbb{A}(x_n)$ y $\pi_n(\cdot \mid h_n)$ está concentrada en $g_n(h_n)$.*

(d) ***Determinista Markoviana*** (Π_{DM}). *Si existe una sucesión $\{f_n\}$ de selectores $f_n \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_n(\cdot \mid h_n)$ es la medida de Dirac en $f_n(x_n) \in \mathbb{A}(x_n)$ para cada $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$, vea Apéndice A.1.*

(e) ***Determinista Markoviana Estacionaria*** (Π_{DS}). *Si existe un selector $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_n(\cdot \mid h_n)$ es la medida de Dirac en $f_n(x_n) \in \mathbb{A}(x_n)$, para cada $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$.*

Observación 2.2. *(a) $\Pi_{RS} \subset \Pi_{RM} \subset \Pi$ y $\Pi_{DS} \subset \Pi_{DM} \subset \Pi_D \subset \Pi$.*
(b) Sin pérdida de generalidad, cualquier política estacionaria se escribirá como $\pi = (f, f, \ldots)$ y se identificará con $f \in \mathbb{F}$.

2.3. Construcción Canónica

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ el espacio medible que consiste del espacio muestral, Ω es el espacio producto $(\mathbb{K} \times \mathbb{R}_+)^\infty$ y la correspondiente σ-álgebra producto $\mathcal{F}$. Obsérvese que un elemento $\omega \in \Omega$ tiene la forma

$$\omega = (x_0, a_0, s_0, x_1, a_1, s_1, \ldots,),$$

a las variables $x_k \in \mathbb{X}$, $a_k \in \mathbb{A}(x_k)$ y $s_k \in \mathbb{R}_+$, se les llaman variables de estado, acción y tiempo de permanencia, respectivamente.

De acuerdo al Teorema de C. Ionescu-Tulcea, vea Apéndice A.2, para cada $x \in \mathbb{X}$ y cada $\pi \in \Pi$, existe una medida de probabilidad P_x^π sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y un proceso estocástico $\{x_n, a_n, s_n, n \geq 0\}$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{A})$, $D \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$, $h_n \in \mathbb{H}_n$ y $n \geq 0$ se tiene:

$$P_x^\pi(X_0 = x) = 1,$$

$$P_x^\pi(a_n \in B \mid h_n) = \pi_n(B \mid h_n), \tag{2.4}$$

$$P_x^\pi(x_{n+1} \in D \mid h_n, a_n, s_n) = p_{x_n, D}(a_n), \tag{2.5}$$

$$P_x^\pi(s_{n+1} \leq t \mid h_n, a_n) = F_{x_n, a_n}(t). \tag{2.6}$$

Observación 2.3. *Para una política arbitraria $\pi \in \Pi$, la variable x_n describe el estado del sistema en el tiempo de la n-ésima transición (o época de decisión) s_n y a_n representa la acción elegida de acuerdo a la política π. Nótese que en general, el estado x_n depende de la evolución del sistema en las primeras $n-1$ transiciones; no obstante en el caso de una política estacionaria f, $\{x_n\}$ es una cadena de Markov con probabilidad de transición $p\big(\cdot \mid x, f(x)\big)$, lo cual es una consecuencia de las propiedades de esperanza condicional, así como de la ecuación (2.5) que se identificará como la* propiedad de Markov, *vea [13].*

Se denotará por E_x^π al operador esperanza con respecto a la medida de probabilidad P_x^π.

2.4. Problema de Control Sensible al Riesgo

El problema de control, para el caso sensible al riesgo, vea [8], [9] y [10], se formula de la siguiente manera:

Suponer que el sistema es conducido por un agente controlador hasta un tiempo $t > 0$, en los tiempos de arribo

$$T_0, T_1, \ldots, T_{N_t},$$

se visitan los siguientes estados:

$$X_0, X_1, \ldots, X_{N_t},$$

respectivamente. Así, para cada entero no negativo $k \leq N_t$, la acción A_k será aplicada en el estado X_k, donde se incurre en un costo $C(X_k, A_k)$, observar que $T_{k+1} = T_k + S_{k+1}$. El sistema permanecerá en X_k durante S_k unidades de tiempo, incurriendo en el costo de permanencia dado por

$$\int_0^{S_k} \rho_{X_k, A_k}(r)dr.$$

Por otro lado, al tiempo T_{N_t} el sistema transita al estado X_{N_t}, y permanece ahí durante un intervalo de tiempo $[T_{N_t}, t]$, ya que la siguiente transición ocurre en el tiempo $T_{N_{t+1}} > t$; luego, dentro del intervalo de observación $[0, t]$, el sistema permanece en X_{N_t} durante $t - T_{N_t}$, con el correspondiente costo de permanencia

$$\int_0^{t-T_{N_t}} \rho_{X_{N_t}, A_{N_t}}(r)dr.$$

Así, el costo total incurrido hasta el tiempo $t > 0$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t := \sum_{k=0}^{N_t+1} \left[C(X_k, A_k) + \int_0^{S_k} \rho_{X_{k-1}, A_{k-1}}(r)dr \right] \\ + C(X_{N_t}, A_{N_t}) + \int_0^{t-T_{N_t}} \rho_{X_{N_t}, A_{N_t}}(r)dr. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.5. Función de Utilidad y Criterio de Rendimiento

Suponga que un individuo, o consumidor, debe enfrentar situaciones en las que tendrá que elegir entre diversas alternativas, éstas pueden no estar representadas de manera que sea fácil poder decidir cuál de ellas es la mejor. Debido a la necesidad de representar las preferencias de un individuo, se desarrolla el concepto de *función de utilidad*. La teoría de utilidad representa de manera numérica las preferencias de un individuo y, gracias a los trabajos en [5] es posible representar preferencias bajo condiciones de incertidumbre y en tal caso se hablará de funciones de utilidad esperada.

Definición 2.4. *Una función U : dom $U \to \mathbb{R}$ se llama **función de utilidad**, si U es estrictamente creciente y continua sobre dom U.*

Sea $s \in \hat{X}$, donde $\hat{X}$ denota el conjunto de todas las posibles alternativas que puede elegir el consumidor y suponer que $\hat{X}$ es numerable. La probabilidad de ocurrencia del estado s se denota por $\hat{p}(s)$. Las siguientes propiedades son válidas,

i) $\hat{p}(s) \geq 0$,

ii) $\sum_{s\in\hat{X}} \hat{p}(s) = 1$.

El valor esperado de la utilidad de un consumidor es

$$E[U(s)] = \sum_{s\in\hat{X}} \hat{p}(s)U(s).$$

Sea Y un costo aleatorio, se define el **equivalente seguro** como el número real $\xi \equiv \xi_\lambda(Y)$, el cual satisface que

$$U(\xi) = E(U(Y)), \tag{2.8}$$

así, el consumidor será indiferente entre pagar la cantidad conocida ξ o incurrir en un costo aleatorio Y. El equivalente seguro está bien definido cuando Y es acotada y U es una función continua y estrictamente creciente. Más aún, la función de utilidad es única salvo constantes, es decir, la relación entre dos utilidades esperadas no cambia cuando U es reemplazada por $U_1 = aU + b$, con $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

Se sabe que los individuos no presentan actitudes ante el riesgo de la misma manera que otros, por lo tanto, las decisiones sobre las preferencias pueden depender completamente de la actitud al riesgo de cada individuo, en tal caso se hablará de la *sensibilidad al riesgo del consumidor*. A través de la función de utilidad U es posible medir la sensibilidad al riesgo que tiene un individuo. En adelante se supondrá que el controlador tiene un coeficiente de sensibilidad al riesgo constante $\lambda > 0$. Entonces, para cada $\lambda > 0$, se define la *función de utilidad exponencial* dada por

$$U_\lambda(x) = e^{\lambda x}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Si el controlador puede elegir entre pagar el costo aleatorio Y_0 o Y_1, entonces se preferirá Y_0 cuando $E[U_\lambda(Y_1)] > E[U_\lambda(Y_0)]$, mientras que el controlador será indiferente entre Y_1 y Y_0 cuando $E[U_\lambda(Y_1)] = E[U_\lambda(Y_0)]$. El equivalente seguro de un costo aleatorio Y con respecto a U_λ es el número real

$$\xi_\lambda[Y] := \frac{1}{\lambda} \log(E[e^{\lambda Y}]). \tag{2.9}$$

La función de utilidad cumple que $U_\lambda(\xi_\lambda[Y]) = E[U_\lambda(Y)]$, así, el controlador estará dispuesto a pagar el monto no-aleatorio $\xi_\lambda[Y]$ para evitar pagar la incertidumbre que genere el costo aleatorio Y. Suponiendo que el estado inicial es $X_0 = x$ y que el controlador conduce al sistema hasta un tiempo $t > 0$ usando la política $\pi \in \mathbb{F}$, el costo total incurrido en el intervalo de tiempo $[0, t]$ es $\mathcal{C}_t$, dado en la ecuación (2.7), pero si en lugar de enfrentar la cantidad aleatoria $\mathcal{C}_t$, el controlador acepta pagar el equivalente seguro

$$J_{t,\lambda}(x, \pi) := \frac{1}{\lambda} \log(E_x^\pi[e^{\lambda \mathcal{C}_t}]),$$

el cual representa un promedio de $J_{t,\lambda}(x, \pi)/t$ por unidad de tiempo.

El criterio de *costo promedio λ-sensible al riesgo* en el estado x bajo la política π, es el punto límite de estos promedios conforme t tiende a ∞, y está dado por:

$$J_\lambda(x,\pi) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} J_{t,\lambda}(x,\pi). \tag{2.10}$$

El *costo promedio óptimo sensible al riesgo* en el estado x es

$$J_\lambda^*(x) := \inf_{\pi\in\mathcal{P}} J_\lambda(x,\pi), \tag{2.11}$$

y una política $\pi^* \in \mathcal{P}$ es λ-*promedio óptima* si $J_\lambda(x,\pi^*) = J_\lambda^*(x)$ para cada estado x.

En el siguiente capítulo, se probará que el costo promedio sensible al riesgo está caracterizado por una ecuación de Poisson, vea [9], para esto, se darán previamente algunos resultados auxiliares. Además es importante mencionar que el problema se abordará en dos etapas: en el Capítulo 2; la versión de cadenas de Markov no-controladas, y en el Capítulo 3; el caso controlado, en este último, se probará que es posible obtener aproximaciones convergentes del costo promedio óptimo sensible al riesgo a través de puntos fijos de una familia de operadores contractivos.

Capítulo 3

Una Ecuación de Poisson para el Costo Promedio

En este capítulo se presenta una ecuación de Poisson para el costo promedio, para el caso de cadenas de Markov no controladas, vea [9]. Se proporcionarán condiciones bajo las cuales el criterio de costo promedio sensible al riesgo está caracterizado por una ecuación de Poisson, esto es, se presentará una ecuación tal que una solución de esta determine el costo promedio óptimo sensible al riesgo. Cabe mencionar que el contenido de este capítulo está basado en [9].

3.1. La ecuación de Poisson

En esta sección se presenta una ecuación de Poisson, así como condiciones necesarias para garantizar que la solución del costo promedio óptimo sensible al riesgo está caracterizada por la ecuación de Poisson.

Considerar un MDSM fijo como en (2.1), el espacio de estados $\mathbb{X}$ se supondrá finito y que el modelo satisface la siguiente condición.

Condición 3.1. *Para cada* $x, y \in \mathbb{X}$, $C(x,y) \geq 0$ *y* $\rho_{x,y}(\cdot) \geq 0$. *Además,* *para todo $t > 0$, la función*

$$\int_0^t \rho_{x,y}(s)ds < \infty.$$

La siguiente condición garantizará la existencia de una solución de la *ecuación de Poisson* que se presentará más adelante.

Condición 3.2. *El espacio de estados $\mathbb{X}$ es comunicante con respecto a la matriz de transición $[p_{x,y}]$, esto es, para cada $x, y \in \mathbb{X}$, existen un natural n y estados $x_k \in \mathbb{X}$, $0 \leq k \leq n$, tales que*

$$x_0 = x,\ x_n = y, \quad y \ \ p_{x_i,x_{i+1}} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La razón por lo cual se requiere esta condición, que es una condición fuerte para una cadena de Markov con espacio de estados finito, es la siguiente: Considerar el caso en donde los tiempos de permanencia S_n son idénticamente 1, así $J_\lambda(\cdot)$ en (2.10) es un costo promedio λ-sensible al riesgo asociado al la cadena de Markov a tiempo discreto $\{Y_n\}$. Bajo este contexto, se sabe que si la cadena tiene estados tansitorios, o *más de una clase recurrente*, entonces $J_\lambda(\cdot)$ no puede caracterizarse por una sola ecuación. Como consecuencia, la Condición 3.2 es necesaria para poder caracterizar a $J_\lambda(\cdot)$ vía una ecuación de Poisson, vea [9].

Para la siguiente condición, se introduce la siguiente notación: para cada $x, y \in \mathbb{X}$ y $t \geq 0$ tal que $F_{x,y}(t) < 1$, sea $F_{x,y,t}(\cdot)$ la función de distribución $S_1 - t$ condicionado al evento $[Y_0 = x, Y_1 = y, S_1 > t]$, es decir,

$$\begin{aligned} F_{x,y,t}(t_1) &:= P[S_1 - t \leq t_1 | Y_0 = x, Y_1 = y, S_1 > t] \\ &= \frac{F_{x,y}(t + t_1) - F_{x,y}(t)}{1 - F_{x,y}(t)}, \quad t_1 \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

luego, por las relaciones de Markov (2.4)-(2.6) se tiene que, para cada natural n y $t_1 \geq 0$,

$$F_{x,y,t}(t_1) = P[S_n - t \leq t_1 | Y_k, S_k, k < n, Y_{n-1} = x, Y_n = y, S_n > t]. \tag{3.2}$$

Ahora, sea $\mathscr{R}_\lambda(x,y,t)$ el equivalente seguro de $\int_t^{S_1} \rho_{x,y}(s)\,ds$ con respecto a U_λ cuando $S_1 - t$ tiene la función de distribución $F_{x,y,t}$, esto es,

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_\lambda(x,y,t) &= \frac{1}{\lambda}\log\left(\int_0^\infty \left[e^{\lambda\int_t^{t+r}\rho_{x,y}(s)\,ds}\right] dF_{x,y,t}(r)\right) \qquad (3.3)\\
&= \frac{1}{\lambda}\log\left(E_x\left[e^{\lambda\int_t^{S_1}\rho_{x,y}(s)\,ds}\,\middle|\, Y_0 = x, Y_1 = y, S_1 > t\right]\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\log\left(E_x\left[e^{\lambda\int_t^{S_n}\rho_{x,y}(s)\,ds}\,\middle|\, Y_k, S_k, k < n,\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. Y_{n-1} = x, Y_n = y, S_n > t\right]\right),
\end{aligned}$$

las últimas dos identidades se siguen de las ecuaciones (3.1) y (3.2).

Condición 3.3. *Existen constantes B, B_1 y $b \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{X}$ y $t \geq 0$, $F_{x,y}(t) < 1$,*

$$\mathscr{R}_\lambda(x,y,t) \leq B_1, \tag{3.4}$$

y

$$F_{x,y,t}(B) \geq b. \tag{3.5}$$

Considerar una transición del estado x al estado y, suponer que el sistema ha estado en el estado x durante un tiempo t. La ecuación (3.5) prescribe que la probabilidad de completar la transición dentro de las siguientes B unidades de tiempo, siempre está acotada inferiormente por b, mientras que (3.4) establece que el equivalente seguro de los costos de permanencia hasta el tiempo en que la transición se completa no sobrepasa a B_1. Ahora, suponer que la tasa $\rho_{x,y}$ está acotada, en este caso, se verifica que la Condición 3.3 se cumple si los tiempos de permanencia son acotados, es decir, para cada $x, y \in \mathbb{X}$, existe $b_{x,y} > 0$ tal que $F_{x,y}(b_{x,y}) = 1$.

Para establecer que la función de costo promedio óptimo sensible al riesgo, no controlado, está caracterizado por una ecuación de Poisson, (vea la Sección 3.3), se define *la ecuación de Poisson* de la siguiente manera

$$e^{\lambda h(x)} = E_x\left[e^{\lambda\left[C(x,Y_1)+\int_0^{S_1}\rho_{x,Y_1}(s)\,ds - gS_1 + h(Y_1)\right]}\right], \quad x \in \mathbb{X}, \tag{3.6}$$

donde $g \in \mathbb{R}$ y $h(\cdot)$ es una función real definida sobre $\mathbb{X}$. Usando la relación de Markov (2.6), se tiene que para cada estado $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} e^{\lambda h(x)} &= \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y} \int_0^\infty e^{\lambda\left[C(x,y)+\int_0^t \rho_{x,y}(s)\,ds-gt+h(y)\right]}\,dF_{x,y}(t) \qquad (3.7)\\ &= \sum_{y\in\mathbb{X}} e^{\lambda C(x,y)} p_{x,y}\left[\int_0^\infty e^{\lambda\left[\int_0^t \rho_{x,y}(s)\,ds-gt\right]}\,dF_{x,y}(t)\right] e^{\lambda h(y)}, \end{aligned}$$

mientras que, en términos del equivalente seguro, (3.6) se puede expresar como

$$h(x) = \mathscr{E}_\lambda\left[C(Y_0,Y_1) + \int_0^{S_1} \rho_{Y_0,Y_1}(s)\,ds - gS_1 + h(Y_1)\,\middle|\, Y_0 = x\right], \qquad (3.8)$$

vea la ecuación (2.9).

En la siguiente sección se demuestran resultados que serán de gran utilidad para los teoremas presentados en la Sección 3.3, bajo las condiciones dadas anteriormente.

3.2. Resultados Auxiliares

En esta sección se darán algunos resultados auxiliares que darán paso a la demostración del Teorema 3.2, que se enunciará en la Sección 3.3. Primeramente, observe que

$$[N_t \geq n] = [T_n \leq t] \qquad \text{y} \qquad [N_t = n] = [T_n \leq t < T_n + S_{n+1}]. \qquad (3.9)$$

Para cada $t \geq 0$, se define el costo

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &:= \sum_{k=1}^{N_t+1}\left[C(Y_{k-1},Y_k) + \int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1}\,Y_k}(s)\,ds\right] \qquad (3.10)\\ &= \mathcal{C} + \int_{t-T_{N_t}}^{S_{N_t+1}} \rho_{Y_{N t}\,Y_{N_t+1}}(s)\,ds, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a (2.7).

El siguiente lema es una consecuencia de las propiedades de Markov en (2.6).

Lema 3.1. *Para cada $x \in \mathbb{X}$, $\alpha \in (0,1)$ y $t > 0$, los siguientes enunciados se cumplen:*

(i) Existe una constante $\mathscr{A}_{\alpha,t} > 0$ tal que

$$P_x[N_t \geq n] \leq \alpha^n \mathscr{A}_{\alpha,t}, \quad x \in \mathbb{X}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.11}$$

(ii) $P_x[N_t < \infty] = 1$.

(iii) $P_x[T_{N_t} \nearrow \infty$ cuando $t \nearrow \infty] = 1$.

Demostración. (i) Como los tiempos de permanencia son positivos, cada función de distribución condicional $F_{x,y}$ en la ecuación (2.6) satisface que $F_{x,y}(0) = 0$. Así, por el teorema de convergencia dominada, para cada $x, y \in \mathbb{X}$

$$\int_0^\infty e^{-\mu s}\, dF_{x,y}(s) \searrow 0 \quad \text{cuando} \quad \mu \nearrow \infty.$$

Sea $\alpha \in (0,1)$ arbitrario, como $\mathbb{X}$ es finito, se elige $\mu_\alpha > 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\mu_\alpha s}\, dF_{x,y}(s) \leq \alpha, \quad x, y \in \mathbb{X}. \tag{3.12}$$

Luego, de la ecuación (2.6) se tiene que, condicionando sobre $Y_j = x_j$, $0 \leq j \leq n$, los tiempos de permanencia $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tienen funciones de distribución $F_{x_0,x_1}, F_{x_1,x_2}, \ldots, F_{x_{n-1},x_n}$, respectivamente, y son independientes, esto es, para cada $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} P[S_1 \leq t_1, S_2 \leq t_2, \ldots, S_n \leq & t_n | Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \ldots, Y_n = x_n] \\ &= F_{x_0,x_1}(t_1) F_{x_1,x_2}(t_2) \cdots F_{x_{n-1},x_n}(t_n). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Estas dos últimas igualdades implican que

$$\begin{aligned} E_{x_0}&[e^{-\mu_\alpha T_n} | Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \ldots, Y_n = x_n] \\ &= E_{x_0}[e^{-\mu_\alpha [S_1 + \cdots + S_n]} | Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \ldots, Y_n = x_n] \\ &= \prod_{k=1}^n \int_0^\infty e^{-\mu_\alpha s}\, dF_{x_{k-1},x_k}(s) \\ &\leq \alpha^n; \end{aligned}$$

puesto que los estados x_i son arbitrarios, se sigue que, para cada entero positivo n, $x \in \mathbb{X}$ y $t > 0$,

$$\alpha^n \geq E_x[e^{-\mu_\alpha T_n}] \geq E_x[e^{-\mu_\alpha T_n} I[T_n \leq t]] \geq e^{-\mu_\alpha t} P_x[T_n \leq t],$$

y en consecuencia, a través de la primera igualdad en (3.9), la parte *(i)* se cumple al hacer $\mathscr{A}_{\alpha,t} = e^{\mu_\alpha t}$.

(ii) Notar que, la ecuación (3.11) implica que

$$P_x[N_t = \infty] = \lim_{n\to\infty} P_x[N_t \geq n] = 0,$$

para cada $t > 0$.

(iii) Como los tiempos de permanencia son positivos, la ecuación (2.2) conlleva a que los mapeos $n \mapsto T_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $t \mapsto N_t$, $t \in [0, \infty)$ son crecientes, y por tanto también $t \mapsto T_{N_t}$, $t \in [0, \infty)$. Además, como $\lim_{n\to\infty} T_n \leq t$ es equivalente a que $N_t = \infty$, por la ecuación (2.2), luego, de *(ii)* se tiene que $P_x[\lim_{n\to\infty} T_n \leq t] = 0$, para cada $t > 0$, así que $P_x[T_n \nearrow \infty \text{ cuando } n \nearrow \infty] = 1$; en consecuencia

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty} T_{N_t} < \infty\right] = P_x\left[\lim_{t\to\infty} N_t < \infty\right].$$

Finalmente, observar que para cada entero $k > 0$, la condición

$$\lim_{t\to\infty} N_t < k$$

es equivalente a que $T_k = \infty$, el cual, recordando que los tiempos de permanencia son finitos, es igual al evento vacío. Como $k > 0$ es arbitrario, se tiene que $P\left[\lim_{t\to\infty} N_t < \infty\right] = 0$, en consecuencia, las igualdades anteriores conllevan a que $T_{N_t} \nearrow \infty$ cuando $t \nearrow \infty$ casi seguramente con respecto a la medida de probabilidad P_x. □

Teorema 3.1. *Sea $g \in \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una solución de la ecuación de Poisson (3.6). En este caso, para cada estado $x \in \mathbb{X}$ y $t > 0$,*

$$e^{\lambda h(x)} = E_x\left[e^{\lambda[\tilde{C}_t - gT_{N_t+1}] + \lambda h(Y_{N_t+1})}\right]. \tag{3.14}$$

Demostración. Se probará por inducción que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ y $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} &e^{\lambda h(x)} \qquad (3.15) \\ &= E_x\left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{N_t+1}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_{N_t+1}+h(Y_{N_t+1})\right]}I[N_t<n]\right] \\ &\quad + E_x\left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]}I[N_t\geq n]\right]. \end{aligned}$$

Para lograr este objetivo, observar que la ecuación de Poisson (3.6) puede reescribirse de forma equivalente como

$$e^{\lambda h(x)} = E_x\left[e^{\lambda\left[C(Y_0,Y_1)+\int_0^{S_1}\rho_{Y_0,Y_1}(s)\,ds-gS_1+h(Y_1)\right]}\right], \quad x \in \mathbb{X}, \quad (3.16)$$

una relación que, vía las relaciones de Markov (2.6), implican que, para cada entero positivo n, las siguientes relaciones se cumplen casi seguramente con respecto a la medida de probabilidad P_x:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda h(Y_n)} \qquad (3.17) \\ &= E_x\left[e^{\lambda\left[C(Y_n,Y_{n+1})+\int_0^{S_{n+1}}\rho_{Y_n,Y_{n+1}}(s)\,ds-gS_{n+1}+h(Y_{n+1})\right]}\,\middle|\, Y_k, S_k, k\leq n\right]. \end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in \mathbb{X}$ y $t > 0$ arbitrario, de la ecuación (3.16) se tiene que

$$\begin{aligned} e^{\lambda h(x)} &= E_x\left[e^{\lambda\left[C(Y_0,Y_1)+\int_0^{S_1}\rho_{Y_0,Y_1}(s)\,ds-gS_1+h(Y_1)\right]}I[S_1>t]\right] \\ &\quad + E_x\left[e^{\lambda\left[C(Y_0,Y_1)+\int_0^{S_1}\rho_{Y_0,Y_1}(s)\,ds-gS_1+h(Y_1)\right]}I[S_1\leq t]\right]; \end{aligned}$$

como $S_1 = T_1$, vía la ecuación (3.9), esta última relación muestra que la ecuación (3.15) se cumple cuando $n = 1$. Ahora, suponer que (3.15) es válida para cierto entero positivo n y sea

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_n &:= \sigma(Y_0, Y_k, S_k,\ 1\leq k\leq n), \\ Q_n &:= e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n\right]}, \end{aligned}$$

así que, Q_n es $\mathscr{G}_n$-medible, vea Apéndice A.1.

Como $[N_t \geq n] = [T_n \leq t] = [S_1 + \cdots + S_n \leq t]$ pertenece a $\mathscr{G}_n$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&E_x \left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]} I[N_t \geq n] \middle| \mathscr{G}_n \right] \\
&= Q_n e^{\lambda h(Y_n)} I[N_t \geq n] \\
&= Q_n I[N_t \geq n] E_x \left[e^{\lambda\left[C(Y_n,Y_{n+1})+\int_0^{S_{n+1}} \rho_{Y_n,Y_{n+1}}(s)\,ds - gS_{n+1}+h(Y_{n+1})\right]} \middle| \mathscr{G}_n \right] \\
&= E_x \left[Q_n e^{\lambda\left[C(Y_n,Y_{n+1})+\int_0^{S_{n+1}} \rho_{Y_n,Y_{n+1}}(s)\,ds - gS_{n+1}+h(Y_{n+1})\right]} I[N_t \geq n] \middle| \mathscr{G}_n \right],
\end{aligned}
$$

donde la ecuación (3.17) se utilizó para establecer la segunda igualdad.

Así, de la relación $T_{n+1} = T_n + S_{n+1}$ y la definición de Q_n, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&E_x \left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]} I[N_t \geq n] \right] \\
&= E_x \left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n+1}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_{n+1}+h(Y_{n+1})\right]}{}_{I[N_t \geq n]} \right] \\
&= E_x \left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{N_t+1}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_{N_t+1}+h(Y_{N_t+1})\right]}{}_{I[N_t = n]} \right] \\
&\quad + E_x \left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n+1}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_{n+1}+h(Y_{n+1})\right]}{}_{I[N_t \geq n+1]} \right];
\end{aligned}
$$

combinando esta última relación con la hipótesis de inducción, se sigue que la ecuación (3.15) se cumple para $(n+1)$ en vez de n, completando el argumento de inducción. Ahora, usando las ecuaciones (2.2) y (3.9), notar que

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]} I[N_t \geq n] \\
&\qquad \leq e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{t} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)+|g|t+\|h\|\right]} I[N_t \geq n] \\
&\qquad \leq e^{\lambda[n\|C\|+nR_t+|g|t+\|h\|]} I[N_t \geq n],
\end{aligned}
$$

donde

$$
R_t := \max_{x,y\in\mathbb{X}} \int_0^t \rho_{x,y}(s)\,ds < \infty,
$$

(vea Condición 3.1). Así,

$$E_x\left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_k,Y_{k+1})+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]}I[N_t\geq n]\right]$$
$$\leq e^{\lambda[n\|C\|+nR_t+|g|t+\|h\|]}P_x[N_t\geq n].$$

Sea $\alpha=e^{-\lambda[\|C\|+R_t]}/2\in(0,1)$ y sea $\mathscr{A}_{\alpha,t}$ un número positivo en el Lema 3.1. De la relación anterior se sigue que

$$E_x\left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]}I[N_t\geq n]\right]$$
$$\leq e^{\lambda[n\|C\|+nR_t+|g|t+\|h\|]}\mathscr{A}_{\alpha,t}\alpha^n=\mathscr{A}_{\alpha,t}e^{\lambda[|g|t+\|h\|]}(1/2)^n,$$

y así

$$\lim_{n\to\infty}E_x\left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_n+h(Y_n)\right]}I_{[N_t\geq n]}\right]=0.$$

Tomando el límite cuando n tiende a ∞ en la ecuación (3.15), esta última relación junto con el teorema de convergencia monótona, vea Apéndice A.2, implican que

$$e^{\lambda h(x)}$$
$$=E_x\left[e^{\lambda\left[\sum_{k=1}^{N_t+1}\left(C(Y_{k-1},Y_k)+\int_0^{S_k}\rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\,ds\right)-gT_{N_t+1}+h(Y_{N_t+1})\right]}I_{[N_t<\infty]}\right],$$

y la ecuación deseada (3.14) se sigue vía el Lema 3.1*(ii)* y (3.10). □

Corolario 3.1. *Si el par $(g,h(\cdot))$ satisface la ecuación (3.6), entonces $g\geq 0$.*

Demostración. Observar que $\tilde{C}_t\geq 0$, ya que los costos $C(x,y)$ y $\rho_{x,y}$ son no-negativos, vea la Condición 3.1. Así, la ecuación (3.14) implica que

$$e^{2\|h\|}\geq E_x\left[e^{-\lambda gT_{N_t+1}}\right],$$

tomando límite cuando $t\to\infty$ de lado derecho de esta desigualdad, por el Lema 3.1*(iii)* y la condición $g<0$ se tiene que $e^{2\|h\|}\geq\infty$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $g\geq 0$. □

Se hace notar que los resultados anteriores dependen únicamente de las relaciones de Markov (2.6). El siguiente resultado es una consecuencia de la Condición 3.3, que será de gran utilidad.

Lema 3.2. *Suponga que la Condición 3.3 se cumple, en este caso, para cada entero* $n > 0$, $x \in \mathbb{X}$ *y* $t \geq 0$,

$$P_x \left[B \geq S_{n+1} - (t - T_n) \middle| Y_0, Y_j, S_j, 1 \leq j \leq n, Y_{n+1}, N_t = n\right] \geq b, \tag{3.18}$$

consecuentemente, para $\mu \geq 0$,

$$E_x \left[e^{-\mu[S_{n+1}-(t-T_n)]} \middle| Y_0, Y_j, S_j, 1 \leq j \leq n, Y_{n+1}, N_t = n\right] \geq e^{-\mu B} b. \tag{3.19}$$

Demostración. Observar que, las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.5), implican que si $t \geq 0$ satisface que $F_{Y_n,Y_{n+1}}(t) < 1$, entonces

$$F_{Y_n,Y_{n+1}}(t + B) - F_{Y_n,Y_{n+1}}(t) \geq b[1 - F_{Y_n,Y_{n+1}}(t)].$$

Más aún, esta relación también se cumple cuando $F_{Y_n,Y_{n+1}}(t) = 1$, puesto que, para este caso, ambos lados de la desigualdad son cero. Con esto en mente, y usando la ecuación (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
&P_x[S_{n+1} \leq t - T_n + B, N_t = n | Y_j, S_i, i \leq n, Y_{n+1}] \\
&\quad = P_x[S_{n+1} \leq t - T_n + B, S_{n+1} > t - T_n, T_n \leq t | Y_j, S_i, i \leq n, Y_{n+1}] \\
&\quad = I[T_n \leq t] P_x[S_{n+1} \leq t - T_n + B, S_{n+1} > t - T_n | Y_j, S_i, i \leq n, Y_{n+1}] \\
&\quad = I[T_n \leq t](F_{Y_n,Y_{n+1}}(t - T_n + B) - F_{Y_n,Y_{n+1}}(t - T_n)) \\
&\quad \geq I[T_n \leq t] b[1 - F_{Y_n,Y_{n+1}}(t - T_n)] \\
&\quad = b P_x[S_{n+1} > t - T_n, T_n \leq t | Y_j, S_i, i \leq n, Y_{n+1}] \\
&\quad = b P_x[N_t = n \, | Y_j, S_i, i \leq n, Y_{n+1}],
\end{aligned}$$

y en consecuencia, la ecuación (3.18) se cumple. Además, notar que para cada $\mu \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&E_x \left[e^{-\mu[S_{n+1}-(t-T_n)]} \middle| Y_j, S_j, \, 0 \leq j \leq n, Y_{n+1}, N_t = n\right] \\
&E_x \left[e^{-\mu[S_{n+1}-(t-T_n)]} I[B \geq S_{n+1} - (t - T_n)] \middle|_{Y_j,S_j,\,0\leq j\leq n, Y_{n+1}, N_t = n}\right] \\
&\geq e^{-\mu B} P_x \left[B \geq S_{n+1} - (t - T_n) \middle| Y_j, S_j, \, 0 \leq j \leq n, Y_{n+1}, N_t = n\right],
\end{aligned}$$

así, la ecuación (3.19) se cumple de la ecuación (3.18). □

En la siguiente sección se presentan los dos resultados importantes de este capítulo, que se conocen como teoremas de verificación y existencia, respectivamente.

3.3. Teoremas de Verificación y Existencia

La relación de la ecuación de Poisson con la función de costo promedio $J_\lambda(\cdot)$ está ralacionada por el siguiente resultado.

Teorema 3.2 (Verificación). *Suponer que las Condiciones 3.1-3.3 se cumplen. Si la ecuación de Poisson (3.6) se satisface para algún $g \in \mathbb{R}$ y una función $h : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, entonces $J_\lambda(\cdot)$ es idénticamente g y la ecuación (2.10) se cumple con límite en vez de límite superior, esto es:*

$$g = J_\lambda(x) = \lim_{t \mapsto \infty} \frac{1}{\lambda t} \log \left(E_x \left[e^{\lambda \mathcal{C}_t} \right] \right), \quad x \in \mathbb{X}.$$

El complemento de esta conclusión está dado por el siguiente teorema.

Teorema 3.3 (Existencia). *Bajo las Condiciones 3.1-3.3, existen $g \in \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación de Poisson (3.6).*

Demostración del Teorema 3.2. Sea $t > 0$ arbitrario. Como $\rho_{x,y}$ es no-negativo, la ecuación (3.10) implica que $\tilde{C}_t \geq \mathcal{C}$, por lo que

$$\tilde{C}_t - gT_{N_t+1} \geq \mathcal{C}_t - gT_{N_t+1} = \mathcal{C}_t - tg - g[S_{N_t+1} - (t - T_{N_t})];$$

para la igualdad, vea la ecuación (2.2). Así, usando (3.10), observar que, sobre el evento $[N_t = n]$ el costo acumulado $\mathcal{C}$ hasta el tiempo t está dado por

$$\mathcal{C}_t = \sum_{k=1}^{n} \left[C(Y_{k-1}, Y_k) + \int_0^{S_k} \rho_{Y_{k-1},Y_k}(s)\, ds \right] + \int_0^{t-T_n} \rho_{Y_n,Y_{n+1}}(s)\, ds,$$

por la ecuación (2.2), esta relación lleva a que $\mathcal{C}_t$ es una función de $Y_j, S_j, j \leq n$ y Y_{n+1} sobre el evento $[N_t = n]$. Combinando este hecho junto con la última relación, se sigue que, para cada entero positivo n y $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} E_x & \left[e^{\lambda[\tilde{C}_t - gT_{N_t+1}] + \lambda h(Y_{N_t+1})} \middle| \, {\scriptstyle Y_j, S_j, j \le n, Y_{n+1}, N_t = n} \right] \\ & \ge E_x \left[e^{\lambda[\mathcal{C}_t - gt] - \lambda g[S_{n+1} - (t - T_n)] + \lambda h(Y_{n+1})} \middle| \, {\scriptstyle Y_j, S_j, j \le n, Y_{n+1}, N_t = n} \right] \\ & = e^{\lambda[\mathcal{C}_t - gt] + \lambda h(Y_{n+1})} E_x \left[e^{-\lambda g(S_{n+1} - (t - T_n))} \middle| \, {\scriptstyle Y_j, S_j, j \le n, Y_{n+1}, N_t = n} \right] \\ & \ge e^{\lambda[\mathcal{C}_t - gt] + \lambda h(Y_{n+1})} e^{-\lambda g B} b \\ & \ge e^{\lambda[\mathcal{C}_t - gt] - \lambda \|h\|} e^{-\lambda g B} b, \end{aligned}$$

donde, recordando que λ es positivo y g es no-negativo (por Corolario 3.1). La segunda desigualdad se debe al Lema 3.2. Así,

$$e^{\lambda h(x)} = E_x \left[e^{\lambda[\tilde{C}_t - gT_{N_t+1}] + \lambda h(Y_{N_t+1})} \right] \ge E_x \left[e^{\lambda \mathcal{C}_t} \right] e^{-\lambda g t - \lambda \|h\| - \lambda g B} b,$$

donde la igualdad se debe al Teorema 3.1. Esto conlleva a que

$$\frac{1}{b} e^{\lambda g B + 2\lambda \|h\| + \lambda g t} \ge E_x[e^{\lambda \mathcal{C}_t}], \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.20}$$

Como $T_{N_t+1} > t$, por la ecuación (2.2), la desigualdad $g \ge 0$, establecida en el Corolario 3.1, y la ecuación (3.10) implican que

$$\tilde{C}_t - gT_{N_t+1} \le \mathcal{C} - gt + \int_{t - T_{N_t}}^{S_{N_t+1}} \rho_{Y_{N_t}, Y_{N_{t+1}}}(s)\, ds. \tag{3.21}$$

Teniendo en cuenta las especificaciones de la función de distribución condicional $F_{x,y,t}$ y que el equivalente seguro $\mathscr{R}_\lambda(x, y, t)$ en las ecuaciones (3.2) y (3.3), respectivamente, se tiene que, de las relaciones de Markov en (2.6):

$$\begin{aligned} E_x & \left[e^{\lambda \int_{t - T_{N_t}}^{S_{N_t+1}} \rho_{Y_{N_t}, Y_{N_t+1}}(s)\, ds} \middle| Y_j, S_j, j \le n, Y_{n+1}, N_t = n \right] \\ & = E_x \left[e^{\lambda \int_{t - T_n}^{S_{n+1}} \rho_{Y_n, Y_{n+1}}(s)\, ds} I[T_n \le t] \middle| Y_j, S_j, j \le n, Y_{n+1}, N_t = n \right] \\ & = I[T_n \le t] E_x \left[e^{\lambda \int_{t - T_n}^{S_{n+1}} \rho_{Y_n, Y_{n+1}}(s)\, ds} \middle| Y_j, S_j, j \le n, \right. \\ & \qquad \qquad \left. Y_{n+1}, T_n \le t, S_{n+1} > t - T_n \right] \\ & = I[T_n \le t] \int_0^\infty e^{\lambda \int_{t - T_n}^{t - T_n + r} \rho_{Y_n, Y_{n+1}}(s)\, ds} dF_{Y_n, Y_{n+1}, t - T_n}(r) \\ & = I[T_n \le t] e^{\lambda \mathscr{R}(Y_n, Y_{n+1}, t - T_n)}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$E_x\left[e^{\lambda\int_{t-T_{N_t}}^{S_{N_t+1}}\rho_{Y_{N_t},Y_{N_t+1}}(s)\,ds}\middle| Y_j,S_j,j\le n,Y_{n+1},N_t=n\right]\le e^{\lambda B_1},$$

por la Condición 3.3. Por un argumento similar con que se obtuvo la ecuación (3.20), esta última relación y la ecuación (3.21) ambas conllevan a que

$$E_x\left[e^{\lambda[\tilde{C}_t-gT_{N_t+1}]+\lambda h(Y_{N_t+1})}\right]\le E_x\left[e^{\lambda\mathcal{C}_t}\right]e^{-\lambda gt+\lambda\|h\|+\lambda B_1},$$

utilizando el Teorema 3.1, se sigue que

$$e^{\lambda h(x)}\le E_x\left[e^{\lambda\mathcal{C}_t}\right]e^{-\lambda gt+\lambda\|h\|+\lambda B_1},$$

es decir,

$$E_x\left[e^{\lambda\mathcal{C}_t}\right]\ge e^{\lambda gt-2\lambda\|h\|-\lambda B_1},\quad x\in\mathbb{X}.$$

De esta última relación y la ecuación (3.20) se sigue que

$$g=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda t}\log\left(E_x\left[e^{\lambda\mathcal{C}_t}\right]\right),$$

para cada estado $x\in\mathbb{X}$, por lo que $J_\lambda(\cdot)=g$ y la ecuación (2.10) ocurre con límite en vez de límite superior. □

La siguiente sección presenta resultados auxiliares que se utilizarán para probar el Teorema 3.3.

3.4. Un Problema de Costo Total en Tiempo Discreto

Para una función de costo arbitrario, se analizará el costo total (sensible al riesgo) incurrido hasta la primer visita a $\{Y_n\}$ para un estado dado z, que se verá en el Teorema 2.4. Se define, para cada $z\in\mathbb{X}$, el tiempo de alcance H_z mediante

$$H_z:=\min\{n>0\,|\,Y_n=z\},\tag{3.22}$$

además, como el epacio $\mathbb{X}$ es finito junto con la Condición 3.2 se tiene que

$$P_x[H_z<\infty]=1,\quad x,z\in\mathbb{X}.\tag{3.23}$$

Definición 3.1. *Para cada $D : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{X}$, se define la función $h_{z,D} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ como*

$$h_{z,D}(x) = \frac{1}{\lambda} \log \left(E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_z - 1} D(Y_k, Y_{k+1})} \right] \right), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Si se interpreta a $D(x, y)$ como el costo asociado a una transición de x a y, entonces $h_{z,D}(x)$ será el equivalente seguro del costo total incurrido hasta que $\{Y_n\}$ regrese a z.

Las siguientes propiedades de la función $h_{z,D}$ serán de gran utilidad.

Lema 3.3. *Bajo la Condición 3.2, los siguientes enunciados se cumplen para cada función $D : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{X}$.*

(i) $h_{z,D}(\cdot) > -\infty$.

(ii) Si $h_{z,D}(z) < \infty$, *entonces* $h_{z,D}(\cdot) < \infty$.

(iii) Para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$e^{\lambda h_{z,D}(x)} = p_{x,z} e^{\lambda D(x,z)} + \sum_{y \neq z} e^{\lambda D(x,y)} p_{x,y} e^{\lambda h_{z,D}(y)}. \tag{3.24}$$

Demostración. *(i)* Dados $z, x \in \mathbb{X}$, la Condición 3.2 y la ecuación (3.22) implican que $P_x[H_z \leq n_{x,z}] > 0$, para algún entero positivo $n_{x,z}$, por lo que

$$E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_z - 1} D(Y_k, Y_{k+1})} \right] \geq e^{-\lambda n_{x,z} \|D\|} P_x[H_z \leq n_{x,z}] > 0,$$

y así $h_{z,D}(x) > -\infty$.

(ii) Por la Condición 3.2, para cada $z, x \in \mathbb{X}$ con $z \neq x$, existen un entero positivo m y estados $x_0, x_1 \ldots, x_m$ tales que

$$p_{x_{i-1}, x_i} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{y} \quad x_0 = z, \quad x_m = x.$$

Si m es el entero más pequeño para la cual la trayectoria existe, se sigue que $x_i \neq z, x$ para $1 \leq i < m$, en este caso

$$\begin{aligned} &P_z[Y_i = x_i, 0 \leq i \leq m] > 0, \quad \text{y} \\ &[Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \ldots, Y_m = x_m] \subset [H_z > H_x = m]; \end{aligned} \tag{3.25}$$

vea la ecuación (3.22). Así,

$$\begin{aligned}
&E_z\left[I[H_z > H_x = m]e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\middle| Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\right] \\
&\qquad = e^{\lambda\sum_{k=0}^{m-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[H_z > H_x = m] \times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad E_z\left[e^{\lambda\sum_{k=m}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\middle| Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\right] \\
&\qquad = e^{\lambda\sum_{k=0}^{m-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[H_z > H_x = m] E_{Y_m}\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\right] \\
&\qquad = e^{\lambda\sum_{k=0}^{m-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[H_z > H_x = m] E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\right] \\
&\qquad \geq e^{-\lambda m\|D\|} I[H_z > H_x = m] e^{\lambda h_{z,D}(x)},
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a la propiedad de Markov (2.6), la tercer igualdad se debe al hecho de que $Y_m = x$ cuando $H_x = m$, y la Definición 3.1 se usa en el último paso. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
e^{\lambda h_{z,D}(z)} &= E_z\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\right] \\
&\geq E_z\left[I[H_z > H_x = m]e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\right] \\
&\geq e^{-\lambda m\|D\|} e^{\lambda h_{z,D}(x)} P_z[H_z > H_x = m];
\end{aligned}$$

usando el hecho de que $P_z[H_z > H_x = m] > 0$ (vea (3.25)), la relación anterior implica que $h_{z,D}(z) < \infty$, lo que conlleva a que $h_{z,D}(x) < \infty$ y por tanto, como $x \in \mathbb{X} \setminus \{z\}$ es arbitrario, se obtiene lo deseado por la parte *(i)*.

(iii) Observar que para cada estado $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned}
e^{\lambda h_{z,D}(x)} &= E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\right] \qquad (3.26)\\
&= E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[Y_1 = z]\right] + \\
&\qquad\qquad E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[Y_1 \neq z]\right] \\
&= p_{x,z}e^{\lambda D(x,z)} + E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[Y_1 \neq z]\right],
\end{aligned}$$

luego, para cada $y \in \mathbb{X} \setminus \{z\}$, por la propiedad de Markov de la cadena $\{Y_n\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[Y_1 \neq z]\middle| Y_1 = y\right] \\
&\qquad\qquad\qquad = e^{\lambda D(x,y)} E_y\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})}\right],
\end{aligned}$$

así

$$E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_z-1} D(Y_k,Y_{k+1})} I[Y_1 \neq z]\right] = \sum_{y\neq z} e^{\lambda D(x,y)} p_{x\,y} e^{\lambda h_{z,D}(y)},$$

esta igualdad junto con (3.26) conllevan a la ecuación (3.24). □

Ahora, se introduce una notación que se usará en los siguientes resultados. Para $z \in \mathbb{X}$, la función indicadora de la sección de $\mathbb{X} \times \{z\}$ en $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ se denota por $\mathscr{I}_z$, es decir, para $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$,

$$\mathscr{I}_z(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad y \neq z, \quad \mathscr{I}_z(x,y) = 1 \quad \text{si} \quad y = z. \tag{3.27}$$

Lema 3.4. *Bajo la Condición 3.2, los siguientes enunciados (i) y (ii) se cumplen, donde $z \in \mathbb{X}$ y $D : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ son arbitrarios.*

(i) Para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$0 < P_x\left[\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) \geq 1\right]. \tag{3.28}$$

(ii) Si $h_{z,D}(z) < 0$ entonces, existe un entero positivo δ tal que

$$h_{x,\,\delta\mathscr{I}_z+D}(x) < 0, \quad \textit{para cada } x \in \mathbb{X}. \tag{3.29}$$

Demostración. *(i)* Tal como se estableció en la prueba del Lema 3.3*(ii)*, la desigualdad $P_x[H_z < H_x] > 0$ se cumple cuando $x \neq z$, y por tanto

$$P_x[H_z \leq H_x] > 0, \quad z, x \in \mathbb{X}.$$

Como $Y_r \neq z$ para $1 \leq r < H_z$ y $Y_{H_z} = z$ cuando H_z es finito, se sigue de la ecuación (3.27) que

$$\sum_{k=0}^{H_z-1} \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) = \mathscr{I}_z(Y_{H_z-1}, Y_{H_z}) = \mathscr{I}_z(Y_{H_z-1}, z) = 1,$$

sobre el evento $[H_z < \infty]$. Así,

$$\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) \geq \sum_{k=0}^{H_z-1} \mathscr{I}_x(Y_k, Y_{k+1}) = 1 \text{ sobre } [H_z < \infty] \cap [H_z \leq H_x];$$

combinando estas dos últimas relaciones junto con la ecuación (3.23) se sigue que

$$0 < P_x[H_z \leq H_x] \leq P_x\left[\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) \geq 1\right].$$

(ii) Suponer que $h_{z,D}(z) < 0$. Para este caso, los incisos *(i)* y *(ii)* del Lema 3.3 conllevan a que $h_{z,D}$ es una función finita y que la ecuación (3.24) se cumple para cada $x \in \mathbb{X}$. Sea

$$\alpha := -h_{z,D}(z) > 0,$$

se sigue de las ecuaciones (3.24) y (3.27) que, para cada estado x

$$\begin{aligned} e^{\lambda h_{z,D}(x)} &= p_{x,z} e^{\lambda[\alpha + D(x,z)]} e^{\lambda h_{z,D}(z)} + \sum_{y \neq z} e^{\lambda D(x,y)} p_{x,y} e^{\lambda h_{z,D}(y)} \\ &= p_{x,z} e^{\lambda[\alpha \mathscr{I}_z(x,z) + D(x,z)]} e^{\lambda h_{z,D}(z)} + \\ &\qquad \sum_{y \neq z} e^{\lambda[\alpha \mathscr{I}_z(x,y) + D(x,y)]} p_{x,y} e^{\lambda h_{z,D}(y)}, \end{aligned}$$

así,

$$e^{\lambda h_{z,D}(x)} = E_x\left[e^{\lambda[\alpha \mathscr{I}_z(Y_0,Y_1) + D(Y_0,Y_1)]} e^{\lambda h_{z,D}(Y_1)}\right], \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.30}$$

Se probará que para cada entero positivo n y $x \in \mathbb{X}$, la siguiente relación se satisface:

$$e^{\lambda h_{z,D}(x)} = E_x\left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x \wedge n-1}[\alpha \mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1}) + D(Y_k,Y_{k+1})]} e^{\lambda h_{z,D}(Y_{H_x \wedge n})}\right], \tag{3.31}$$

para esto, notar que la igualdad $H_x \wedge 1 = 1$ y la ecuación (3.30) hacen que la igualdad anterior se cumpla cuando $n = 1$. Por inducción, suponga que la ecuación (3.31) se cumple para algún valor n. Notar que $H_x \wedge n = H_x \wedge (n+1)$ sobre el evento $H_x \leq n$ y $H_x \wedge n = n$ cuando $H_x > n$, por hipótesis inductiva se tiene

$$
\begin{aligned}
&e^{h_{z,D}(x)} \qquad (3.32)\\
&= E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_x\wedge n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_{H_x\wedge n})}I[H_x\le n]\right]\\
&\quad + E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_x\wedge n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_{H_x\wedge n})}I[H_x> n]\right]\\
&= E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_x\wedge (n+1)-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_{H_x\wedge (n+1)})}I[H_x\le n]\right]\\
&\quad + E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_n)}I[H_x> n]\right].
\end{aligned}
$$

Ahora, sea

$$\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n),$$

observar que

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_n)}I[H_x> n]\middle|\mathscr{F}_n\right]\\
&\quad = e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_n)}I[H_x> n]\\
&\quad = e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}I[H_x> n]\\
&\qquad\quad \times E_{Y_n}\left[e^{\lambda[\alpha\mathscr{I}_z(Y_n,Y_{n+1})+D(Y_n,Y_{n+1})]+\lambda h_{z,D}(Y_{n+1})}\right],
\end{aligned}
$$

donde la segunda igualdad se sigue usando la propiedad de Markov junto con la ecuación (3.30). Aplicando nuevamente la propiedad de Markov se tiene que

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_n)}I[H_x> n]\middle|\mathscr{F}_n\right]\\
&\quad = E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]+\lambda h_{z,D}(Y_{n+1})}I[H_x> n]\middle|\mathscr{F}_n\right],
\end{aligned}
$$

así,

$$
\begin{aligned}
&E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]}e^{\lambda h_{z,D}(Y_n)}I[H_x> n]\right]\\
&= E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{n}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]+\lambda h_{z,D}(Y_{n+1})}I[H_x> n]\right]\\
&= E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_x\wedge (n+1)-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]+\lambda h_{z,D}(Y_{H_x\wedge (n+1)})}I[H_x=n+1]\right]\\
&+ E_x\left[e^{\lambda\sum_{k=0}^{H_x\wedge (n+1)-1}[\alpha\mathscr{I}_z(Y_k,Y_{k+1})+D(Y_k,Y_{k+1})]+\lambda h_{z,D}(Y_{H_x\wedge (n+1)})}I[H_x>n+1]\right].
\end{aligned}
$$

Combinando esta relación con la ecuación (3.32), se sigue que la igualdad (3.31) se cumple para $n+1$ en vez de n, completando el argumento de inducción. Ahora, usando la ecuación (3.23) y el hecho de que $Y_{H_x} = x$ sobre el evento $[H_x < \infty]$, por el lema de Fatou, vea Apéndice A.2, las igualdades (3.23) y (3.31) implican que

$$\begin{aligned} e^{\lambda h_{z,D}(x)} &\geq E_x \left[\liminf_{n\to\infty} e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x \wedge n-1} [\alpha \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})] + \lambda h_{z,D}(Y_{H_x \wedge n})} \right] \\ &= E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x-1} [\alpha \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})] + \lambda h_{z,D}(Y_{H_x})} \right] \\ &= E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x-1} [\alpha \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})] + \lambda h_{z,D}(x)} \right], \end{aligned}$$

y así, como la función $h_{z,D}$ es finita,

$$1 \geq E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x-1} [\alpha \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})]} \right], \quad x \in \mathbb{X}. \tag{3.33}$$

Finalmente, observar que, como α es positivo,

$$e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x-1} [\alpha \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})]} \geq e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x-1} [(\alpha/2) \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})]}$$

donde la desigualdad es estricta sobre el evento

$$[H_x < \infty] \cap \left[\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) \geq 1 \right],$$

la cual, por la parte *(i)* y la ecuación (3.23), tiene probabilidad positiva cuando $Y_0 = x$. Así, la ecuación (3.33) implica que

$$1 > E_x \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_x-1} [(\alpha/2) \mathscr{I}_z(Y_k, Y_{k+1}) + D(Y_k, Y_{k+1})]} \right], \quad x \in \mathbb{X},$$

una propiedad que, vía la Definición 3.1, se tiene que la ecuación (3.29) se cumple con $\delta = \alpha/2$. □

El siguiente resultado será fundamental para la prueba del Teorema 3.3.

Teorema 3.4. *Sea $z \in \mathbb{X}$ y $D : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ arbitraria, suponga que se cumple la Condición 3.2. Para este caso, si $h_{z,D}(z) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$h_{z,\delta+D}(z) < 0. \tag{3.34}$$

Demostración. Suponer que $z \in \mathbb{X}$ y que la función $D : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ cumple que $h_{z,D}(z) < 0$, sea N el número de elementos de $\mathbb{X}$, esto es

$$\mathbb{X} = \{z_1, \ldots z_N\}, \quad \text{donde} \quad z_1 = z. \tag{3.35}$$

Se probará por inducción que la siguiente afirmacíon $\mathscr{C}_k$ se cumple para cada $k = 1, 2, 3, \ldots, N$.

$\mathscr{C}_k$: Existen enteros positivos δ_j, $1 \leq j \leq k$, tales que

$$h_{x,D_k}(x) < 0, \quad x \in \mathbb{X}, \quad \text{donde} \quad D_k = \sum_{j=1}^{k} \delta_j \mathscr{I}_{z_j} + D.$$

Observar que, como $z_1 = z$ y $h_{z,D}(z) < 0$, el Lema 3.4*(ii)* implica que $\mathscr{C}_1$ se cumple. Soponer ahora que $\mathscr{C}_k$ es válido para algún $k < N$. En este caso, $h_{z_{k+1},D_k}(z_{k+1}) < 0$, aplicando el Lema 3.4*(ii)* con z_{k+1} y D_k en vez de z y D, respectivamente, implica que existe $\delta_{k+1} > 0$ tal que $h_{x,D_{k+1}}(x) < 0$, para cada $x \in \mathbb{X}$, donde

$$D_{k+1} = \delta_{k+1} \mathscr{I}_{z_{k+1}} + D_k = \sum_{j=1}^{k+1} \delta_j \mathscr{I}_{z_j} + D,$$

cumpliéndose $\mathscr{C}_{k+1}$, completando el argumento de inducción.

Sean $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ los número positivos en la afirmación $\mathscr{C}_N$, y sea

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\} > 0,$$

notar los siguientes puntos:

(a) Por las ecuaciones (3.27) y (3.35),

$$\sum_{j=1}^{N} \mathscr{I}_{z_j} = 1.$$

Esto implica

(b) $D_N = \sum_{j=1}^{N} \delta_j \mathscr{I}_{z_j} + D \geq \delta + D$.

Combinando la Definición 3.1 junto con la propiedad de la afirmación $\mathscr{C}_N$, se sigue que

$$h_{x,\delta+D}(x) \leq h_{x,D_N}(x) < 0, \quad x \in \mathbb{X};$$

en particular, $h_{z,\delta+D}(z) < 0$, que es la conclusión deseada. $\square$

3.5. Existencia de Soluciones

En esta sección se prueba el Teorema 3.3. Para esto, se usará el Teorema 3.4 junto con la conclusión del siguiente lema, que utiliza la siguiente definición.

Definición 3.2. *Para cada $g \in [0, \infty)$, la función $D_g : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ se define como*

$$D_g(x, y) := C(x, y) + \frac{1}{\lambda} \log \left(E_x \left[e^{\lambda \left[\int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\, ds - g S_1 \right]} \middle| Y_0 = x, Y_1 = y \right] \right).$$

Lema 3.5. *Bajo la condición 3.2, las siguientes afirmaciones son válidas para $x, y \in \mathbb{X}$,*

(i) El mapeo $g \mapsto D_g(x, y)$ es finito, decreciente y continuo en $g \in [0, \infty)$.

(ii) $\lim_{g \to \infty} D_g(x, y) = -\infty$.

(iii) $D_0(x, y) \geq 0$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{X}$ arbitrarios pero fijos. Para la parte *(i)*, seleccionar $b_{x,y} > 0$ tal que $F_{x,y}(b_{x,y}) > 0$, observar que

$$E \left[e^{-\lambda g_1 S_1} \middle| Y_0 = x, Y_1 = y \right] \geq e^{-\lambda g_1 b_{x,y}} F_{x,y}(b_{x,y}) > 0, \quad g_1 > 0.$$

Como la función de costo $\rho_{x,y}$ y los tiempos de permanencia S_1 son no-negativos, se tiene que

$$\begin{aligned} -g_1 S_1 &\leq \int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\, ds - g_1 S_1 \\ &\leq \int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\, ds - g_0 S_1 \leq \int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\, ds, \quad g_1 \geq g_0 \geq 0, \end{aligned}$$

mientras que

$$E \left[e^{\lambda \int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\, ds} \middle| Y_0 = x, Y_1 = y \right] < \infty,$$

(por la Condición 3.2). Combinando estas últimas tres relaciones junto con la Definición 3.2 y el teorema de la convergencia dominada, se sigue que el mapeo $g \mapsto D_g(x, y)$ es finito, decreciente y continuo. Para probar la segunda afirmación, se sabe que el tiempo de permanencia S_1 es positivo y finito, por lo que $\lim_{g\to\infty} e^{\lambda\left[\int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\,ds - gS_1\right]} = 0$, combinando este resultado con la última relación y el teorema de la convergencia dominada implican que

$$\lim_{g\to\infty} E\left[e^{\lambda\left[\int_0^{S_1} \rho_{x,y}(s)\,ds - gS_1\right]} \,\middle|\, Y_0 = x, Y_1 = y \right] = 0,$$

así, la parte *(ii)* se cumple combinando esta convergencia con la Definición 3.2. Finalmente para la parte *(iii)*, como los costos por etapa $C(x,y)$ y los costos $\rho_{x\,y}(\cdot)$ son no-negativos, por la Condición 3.1 y la Definición 3.2 se llega a que D_0 es no-negativo. □

Para finalizar este capítulo, se presenta la demostración del Teorema 3.3.

Prueba del Teorema 3.3. Sea $z \in \mathbb{X}$ un estado fijo, y para cada $g \in [0,\infty)$, sea h_{z,D_g} el costo total λ-sensible al riesgo hasta el primer regreso al estado z correspondiente a la función D_g; vea la Definición 3.1. Sea

$$\mathscr{M} := \{ g \geq 0 \,|\, h_{z,D_g}(z) \leq 0 \}, \tag{3.36}$$

como $\mathbb{X}$ es finito, el Lema 3.5 implica que $D_g(\cdot,\cdot) < 0$ para g suficientemente grande, por lo que la Definición 3.1 conlleva a que la función h_{z,D_g} es negativa, así $\mathscr{M}$ es no-vacío. Sea

$$g^* = \inf \mathscr{M} \geq 0. \tag{3.37}$$

Se probará que el par $(g^*, h_{z,D_{g^*}}(\cdot))$ satisface la ecuación de Poisson (3.6). Para esto, notar que existe una sucesión $\{g_n\}$ tal que

$$\{g_n\} \subset \mathscr{M} \text{ and } g_n \searrow g^*,$$

por lo que

$$D_{g_n}(\cdot,\cdot) \nearrow D_{g^*}(\cdot,\cdot),$$

por el Lema 3.5. Notar que, $\{g_n\} \subset \mathscr{M}$ es equivalente a que

$$1 \geq e^{\lambda h_{z,D_{g_n}}(z)} = E_z\left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_z - 1} D_{g_n}(Y_k, Y_{k+1})} \right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

por la ecuación (3.36) y la Definición 3.1. Por el teorema de la convergencia monótona, estas últimas dos relaciones implican que

$$1 \geq E_z \left[e^{\lambda \sum_{k=0}^{H_z - 1} D_{g^*}(Y_k, Y_{k+1})} \right] = e^{\lambda h_{z, D_{g^*}}(z)},$$

así

$$h_{z,D_{g^*}}(z) \leq 0. \tag{3.38}$$

Se probará que

$$h_{z,D_{g^*}}(z) = 0. \tag{3.39}$$

Por contradicción, suponer que $h_{z,D_{g^*}}(z) < 0$ y, observar que bajo esta condición, las siguientes afirmaciones se cumplen:

(a) $g^* > 0$. En efecto, el Lema 3.5*(iii)* conlleva a que $D_0 \geq 0$, por lo que $h_{z,D_0}(z) \geq 0$, debido a la Definición 3.1, así que $g^* = 0$ no puede ocurrir cuando $h_{z,D_{g^*}}(z)$ es negativo; puesto que $g^* \geq 0$, por la ecuación (3.37), se tiene que g^* es positivo.

(b) Existe $\delta > 0$ tal que $h_{z,\delta + D_{g^*}}(z) < 0$, esto, por el Teorema 3.4.

Puesto que $\mathbb{X}$ es finito, g^* es positivo y el Lema 3.5*(i)* implican que existe $\varepsilon \in (0, g^*)$ tal que $g \in [g^* - \varepsilon, g^*)$ implicando que $D_g \leq \delta + D_{g^*}$, por lo que $h_{z,D_g}(z) \leq h_{z,\delta + D_{g^*}}(z) < 0$, por la Definición 3.1. De la definición de $\mathscr{M}$ en la ecuación (3.36), se sigue que $[g^* - \varepsilon, g^*) \subset \mathscr{M}$, lo que contradice la ecuación (3.37). Consecuentemente, la desigualdad $h_{z,D_{g^*}}(z) < 0$ no puede ocurrir, y por tanto la ecuación (3.38) implica la ecuación (3.39).

Observar que la ecuación (3.39) y el Lema 3.3 implican que $h_{z,D_{g^*}}(\cdot)$ es una función finita y que

$$e^{\lambda h_{z,D_{g^*}}(x)} = \sum_{y \in \mathbb{X}} e^{\lambda D_{g^*}(x,y)} p_{x,y} e^{\lambda h_{z,D_{g^*}}(y)} \quad x \in \mathbb{X};$$

este hecho junto con la Definición 3.2 y las relaciones de Markov en (2.6), se tiene que

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda h_{z,D_{g^*}}(x)}\\
&= \sum_{y\in\mathbb{X}} E_x\left[e^{\lambda\left[C(x,y)+\int_0^{S_1}\rho_{x\,y}(s)\,ds-g^*S_1\right]}\middle| Y_0=x, Y_1=y\right] p_{x,y}e^{\lambda h_{z,D_{g^*}}(y)}\\
&= \sum_{y\in\mathbb{X}} E_x\left[e^{\lambda\left[C(Y_0,Y_1)+\int_0^{S_1}\rho_{Y_0,Y_1}(s)\,ds-g^*S_1+h_{z,D_{g^*}}(Y_1)\right]}\middle|_{Y_0=x,Y_1=y}\right] p_{x,y}\\
&= E_x\left[e^{\lambda\left[C(Y_0,Y_1)+\int_0^{S_1}\rho_{Y_0,Y_1}(s)\,ds-g^*S_1+h_{z,D_{g^*}}(Y_1)\right]}\right], \quad x\in\mathbb{X},
\end{aligned}
$$

esto muestra que el par $(g^*, h_{z,D_{g^*}}(\cdot))$ satisface la ecuación de Poisson (3.6), concluyendo la prueba. $\square$

El siguiente capítulo presenta la parte central de este trabajo de tesis, cabe recordar que ahora se considerará el caso controlado, es decir, se toma una acción en cada etapa del proceso. Además, de las Condiciones 3.1, 3.2 y 3.3, se dan nuevas condiciones, para el caso controlado, que asegurarán que la función de valor óptimo se determina mediante una Ecuación de Optimalidad, los puntos fijos de una familia de operadores contractivos se ocupan para obtener aproximaciones del costo promedio óptimo, vea la ecuación (2.11), y una solución de la Ecuación de Optimalidad.

Capítulo 4

Aproximaciones Contractivas para el Costo Sensible al Riesgo

El objetivo de este capítulo se centra en aproximar el costo promedio óptimo y en dar una solución a una Ecuación de Optimalidad, que se presenta en la Sección 4.1, a través de los puntos fijos de una familia de operadores contractivos. El resultado principal se enuncia en la Sección 4.5, específicamente en el Teorema 4.3, el cual proporciona una extensión del enfoque descontado en la teoría de los Procesos de Decisión de Markov con costo promedio a las cadenas de control semi-Markovianas sensibles al riesgo, en contraste al caso Markoviano, los operadores contractivos que se usan dependerán de dos parámetros, vea [8].

Considerar un MDSM (2.1) controlado, se dan las siguientes condiciones;

Condición 4.1. *(i) Para cada* $(x, a) \in \mathbb{K}$, $C(x, a) \geq 0$, $\rho_{x,a} \geq 0$*;*

(ii) $\sup_{(x,a)\in\mathbb{K}} \|\rho_{x,a}(\cdot)\| =: \rho^* < \infty$*;*

(iii) Para cada $x, y \in \mathbb{X}$, $t \geq 0$ *los mapeos* $a \mapsto p_{x,y}(a)$ *y* $a \mapsto \rho_{x,a}(t)$

son continuos para cada $a \in \mathbb{A}(x)$*;*

(iv) $F_{x,a}(0) = 0$*, para cada* $(x, a) \in \mathbb{K}$*, y el mapeo* $a \mapsto F_{x,a}$ *es débilmente continuo;*

(v) Existe una constante $B_2 > 0$*, tal que* $F_{x,a}(B_2) = 1$*, para cada* $(x, a) \in \mathbb{K}$*.*

La siguiente condición es parecida a la Condición 3.2, sólo que, bajo el caso controlado.

Condición 4.2. *Bajo cualquier política estacionaria* $f \in \mathbb{F}$*, el espacio de estados* $\mathbb{X}$ *es comunicante, esto es, para cada* $x, y \in \mathbb{X}$*, existen un natural* $n(x, y, f) \equiv n$ *y estados* $x_k \in \mathbb{X}$*,* $0 \leq k \leq n$*, tales que*

$$x_0 = x, \;\; x_n = y, \quad y \;\; p_{x_i,x_{i+1}}(f(x_i)) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4.1. Ecuación de Optimalidad

Esta sección establece una ***Ecuación de Optimalidad*** (EO) correspondiente al costo promedio λ-sensible al riesgo, ver ecuación (2.11). Además, bajo el supuesto de que existe una solución para tal ecuación, se caracterizará a la función de costo promedio óptima $J^*_\lambda(\cdot)$, y se determinará una política óptima.

Se considera la siguiente EO:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda h(x)} \\ &= \inf_{a\in\mathbb{A}(x)} E_x\left[e^{\lambda[C(X_0,A_0)+\int_0^{S_1}\rho_{X_0,A_0,X_1}(r)dr - gS_1 + h(X_1)]} \mid {}_{X_0=x,A_0=a}\right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde g es un número real y $h(\cdot)$ es una función real definida sobre el espacio de estados $\mathbb{X}$. Usando las relaciones de Markov (2.6), la ecuación (4.1) puede reescribirse, para cada $x \in \mathbb{X}$, como

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda h(x)} &= \inf_{a\in\mathbb{A}(x)} \left[e^{\lambda C(x,a)} \int_0^\infty e^{\lambda[\int_0^s \rho_{x,a,y}(r)dr - gs + h(y)]} dF_{x,a,y}(t) \right] \\
&= \inf_{a\in\mathbb{A}(x)} \left[e^{\lambda C(x,a)} \int_0^\infty e^{\lambda[\int_0^s \rho_{x,a,y}(r)dr - gs]} dF_{x,a,y}(t) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. \times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda h(y)} \right]. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Lema 4.1. *Bajo las Condiciones 4.1 y 4.2, las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(i) Existe un par $(g, h(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}(\mathbb{X})$ *que satisface la ecuación (4.1).*

(ii) Para cada $x \in \mathbb{X}$*, el término entre corchetes de la ecuación (4.1) tiene un minimizador* $f^*(x) \in \mathbb{A}$*. Más aún,* $f^* \in \mathbb{F}$ *es óptima y* $J^*_\lambda(\cdot)$ *es una constante igual a* g*:*

$$J^*_\lambda(\cdot) = J_\lambda(\cdot, f^*) = g.$$

(iii) Si la ecuación (4.1) se satisface cuando el par $(g, h(\cdot))$ *se reemplaza por* $(\tilde{g}, \tilde{h}(\cdot)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{B}(\mathbb{X})$*, entonces* $g = \tilde{g}$ *y* $h(\cdot) - \tilde{h}(\cdot)$ *es una función constante.*

Demostración. Para la prueba de las partes *(i)* y *(ii)*, ver los Teoremas 3.1 y 3.2, respectivamente, en [10].

Para verificar *(iii)*, suponer que los pares $(g, h), (\tilde{g}, \tilde{h}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}(\mathbb{X})$ satisfacen la ecuación de optimalidad (4.1). En este caso, la parte *(ii)* implica que $g = J^*_\lambda(\cdot) = \tilde{g}$, y que existe una política estacionaria f^* tal que satisface que, para $x \in \mathbb{X}$;

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda h(x)} = e^{\lambda C(x, f^*(x))} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,f^*(x)}(t)\, dt - \lambda s g}\, F_{x,f^*(x)}(ds) \\
\times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda h(y)},
\end{aligned}
$$

además, como $(\tilde{g}, \tilde{h}) = (g, \tilde{h})$ es una solución de la ecuación (4.1) se sigue que

$$e^{\lambda\tilde{h}(x)} \leq e^{\lambda C(x,f^*(x))} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,f^*(x)}(t)\,dt - \lambda s g} F_{x,f^*(x)}(ds)$$
$$\times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda\tilde{h}(y)}.$$

Estas dos últimas relaciones implican que, para $x \in \mathbb{X}$,

$$e^{\lambda(h(x)-\tilde{h}(x))} \geq \frac{\sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x))e^{\lambda h(y)}}{\sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x))e^{\lambda\tilde{h}(y)}} = \sum_{y\in\mathbb{X}} Q_{x,y} e^{\lambda(h(y)-\tilde{h}(y))},$$

donde la matriz estocástica Q está dada por

$$Q_{x,y} := p_{x,y}(f^*(x))e^{\tilde{h}(y)} / \sum_{w\in\mathbb{X}} p_{x,w}(f^*(w))e^{\lambda\tilde{h}(w)},$$

para cada $x, y \in \mathbb{X}$. Notar que la Condición 4.2 implica que el espacio es comunicante bajo Q, y defínanse $m^* = \min_{x\in\mathbb{X}}(h(x) - \tilde{h}(x))$ así como $\mathcal{M} = \{y \in \mathbb{X} : h(y) - \tilde{h}(y) = m^*\}$. Puesto que el espacio de estados es finito, se sigue que $h - \tilde{h}$ alcanza su mínimo en algún $x_* \in \mathbb{X}$ y así $x_* \in \mathcal{M}$. Finalmente, observar que la última relación implica que $\mathcal{M}$ es cerrado con respecto a Q, esto es, si $x \in \mathcal{M}$ y $Q_{x,y} > 0$, entonces $y \in \mathcal{M}$, por lo que $\mathcal{M} = \mathbb{X}$, por la Condición 4.2, por tanto $h(\cdot) - \tilde{h}(\cdot) = m^*$. □

Observar que la Condición 4.2 es importante para establecer la unicidad del Lema 4.1*(iii)*, además esta condición será crucial para asegurar la existencia de soluciones de la EO (4.1), vea [8] o [10].

4.2. Aproximaciones Contractivas

Definición 4.1. *Sean $\alpha \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$, el operador*

$$D_{\alpha,\varepsilon} : \mathbb{B}(\mathbb{X}) \to \mathbb{B}(\mathbb{X})$$

se determina de la siguiente manera: Para cada $W \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ y $x \in \mathbb{X}$,

$$e^{\lambda D_{\alpha,\varepsilon}[W](x)} \tag{4.3}$$
$$= \inf_{a\in A} \left[e^{\lambda C(x,a)} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha^{s\vee\varepsilon} W(y)} F_{x,a}(ds) \right].$$

Observar que la desigualdad $\alpha^{s\vee\varepsilon} \leq \alpha^{\varepsilon}$ se cumple para cada $\varepsilon, s > 0$ y $\alpha \in (0,1)$, no es difícil verificar que $D_{\alpha,\varepsilon}$ es sub-homogénea con módulo α^{ε}, vea [9], es decir,

$$D_{\alpha,\varepsilon}[W + r] \leq D_{\alpha,\varepsilon}[W] + \alpha^{\varepsilon} r, \quad W \in \mathbb{B}(\mathbb{X}), \quad r \in \mathbb{R},$$

así como la siguiente propiedad:

$$W_0, W_1 \in \mathbb{B}(\mathbb{X}) \quad \text{y} \quad W_0 \leq W_1 \implies D_{\alpha,\varepsilon}[W_0] \leq D_{\alpha,\varepsilon}[W_1]. \tag{4.4}$$

Sean $W_0, W_1 \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ arbitrarios, luego, por las dos propiedades en la ecuación(4.4), se sigue que la desigualdad $W_1 \leq W_0 + \|W_1 - W_0\|$ implica que $D_{\alpha,\varepsilon}[W_1] \leq D_{\alpha,\varepsilon}[W_0] + \alpha^{\varepsilon}\|W_1 - W_0\|$, intercambiando W_0 y W_1, se tiene que

$$\|D_{\alpha,\varepsilon}[W_1] - D_{\alpha,\varepsilon}[W_0]\| \leq \alpha^{\varepsilon}\|W_1 - W_0\|, \tag{4.5}$$

mostrando que $D_{\alpha,\varepsilon}$ es un operador contractivo sobre $\mathbb{B}(\mathbb{X})$ con módulo α^{ε}, y por tanto existe $V_{\alpha,\varepsilon} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ tal que

$$V_{\alpha,\varepsilon} = D_{\alpha,\varepsilon}[V_{\alpha,\varepsilon}], \tag{4.6}$$

donde $V_{\alpha,\varepsilon}$ se puede determinar mediante 'aproximaciones sucesivas', esto es, para cada $W \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$ y $x \in \mathbb{X}$, $V_{\alpha,\varepsilon}(x) = \lim_{n\to\infty}(D_{\alpha,\varepsilon})^n[W](x)$. Puesto que $D_{\alpha,\varepsilon}[0] \geq 0$, por la Condición 3.1 *(ii)*, la ecuación (4.4) implica que $(D_{\alpha,\varepsilon})^n[0] \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así

$$V_{\alpha,\varepsilon} \geq 0, \quad \alpha \in (0,1), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.7}$$

Ahora, los puntos fijos $V_{\alpha,\varepsilon}$ se usarán para definir soluciones aproximadas a la EO (4.1).

Definición 4.2. *Sean $\alpha \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, en adelante se considerará $x_0 \in \mathbb{X}$ fijo. Ahora, se definen la función de valor relativo $h_{\alpha,\varepsilon} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ y la función de costo promedio aproximada $g_{\alpha,\varepsilon} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ como*

$$h_{\alpha,\varepsilon}(x) := V_{\alpha,\varepsilon}(x) - V_{\alpha,\varepsilon}(x_0), \quad g_{\alpha,\varepsilon}(x) := (1-\alpha)V_{\alpha,\varepsilon}(x), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Observar que, por la Definición 4.1, la ecuación (4.6) se puede reescribir explícitamente como

$$e^{\lambda V_{\alpha,\varepsilon}(x)} = \inf_{a\in\mathbb{A}} \left[e^{\lambda C(x,a)} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha^{s\vee\varepsilon} V_{\alpha,\varepsilon}(y)} F_{x,a}(ds) \right], \tag{4.8}$$

para $x \in \mathbb{X}$, multiplicando ambos lados de esta ecuación por $e^{-\lambda V_{\alpha,\varepsilon}(x_0)}$ y usando la Definición 4.2, se llega a que, para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$e^{\lambda h_{\alpha,\varepsilon}(x)} = \inf_{a\in\mathbb{A}} \Big[e^{\lambda C(x,a)} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha^{s\vee\varepsilon} h_{\alpha,\varepsilon}(y) - \frac{1-\alpha^{s\vee\varepsilon}}{1-\alpha} g_{\alpha,\varepsilon}(x_0)} F_{x,a}(ds) \Big].$$

Ahora, suponer que α y ε son 'cercanos' a 1 y 0, respectivamente, así que $\alpha^{s\vee\varepsilon} \approx 1$ y $\frac{1-\alpha^{s\vee\varepsilon}}{1-\alpha} \approx s$, para cada $s > 0$. En este caso, esta última relación implica que el par $(g_{\alpha,\varepsilon}(x_0), h_{\alpha,\varepsilon}(\cdot))$ es una 'solución aproximada' de la ecuación (4.1), esta idea se formalizará en el Teorema 4.3 de la Sección 4.5.

Observación 4.1. *De la ecuación (4.5), observar que*

$$\|V_{\alpha,\varepsilon} - D_{\alpha,\varepsilon}[0]\| = \|D_{\alpha,\varepsilon}[V_{\alpha,\varepsilon}] - D_{\alpha,\varepsilon}[0]\| \leq \alpha^{\varepsilon}\|V_{\alpha,\varepsilon} - 0\| = \alpha^{\varepsilon}\|V_{\alpha,\varepsilon}\|,$$

como $\|V_{\alpha,\varepsilon} - D_{\alpha,\varepsilon}[0]\| \geq \|V_{\alpha,\varepsilon}\| - \|D_{\alpha,\varepsilon}[0]\|$, *se sigue que*

$$\|V_{\alpha,\varepsilon}\| \leq \|D_{\alpha,\varepsilon}[0]\|/(1-\alpha^{\varepsilon}),$$

por tanto

$$\|g_{\alpha,\varepsilon}\| \leq \|D_{\alpha,\varepsilon}[0]\| \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\varepsilon}}.$$

Como $(1-\alpha)/(1-\alpha^{\varepsilon}) \approx 1/\varepsilon$ *si* $(\alpha,\varepsilon) \in (0,1)\times(0,\infty)$ *es 'cercano' a* $(1,0)$, *se sigue que la desigualdad anterior no garantiza que las funciones de costo aproximadas* $g_{\alpha,\varepsilon}$ *se mantengan acotadas conforme* α *incrementa a 1 y* ε *decrece a* 0.

En las siguientes dos secciones se presentan herramientas técnicas para demostrar el Teorema 4.3. En la Sección 4.3 se probará que, si $0 < \alpha_n \nearrow 1$ y $\varepsilon \searrow 0$, entonces la sucesión $\{\|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|\}$ está acotada, este resultado se usará en la Sección 4.4 para establecer una conclusión similar para la familia $\{h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\}$ de funciones de valor relativas. Con estos resultados de acotamiento se probará el Teorema 4.3 al analizar los puntos límites de la sucesión $\{(g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0), h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot))\}$.

4.3. Costos Aproximados Acotados

El resultado principal de esta sección se presenta en el Teorema 4.1, el cual establece que la función de costo aproximado $g_{\alpha_n,\varepsilon_n}$ permanece acotada conforme (α,ε) se aproxima a $(1,0)$. Para esto, primero se prueba el siguiente resultado de continuidad.

Lema 4.2. *Sea $W \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$, $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in (0,1)$ arbitrario.*
(i) Para cada $x \in \mathbb{X}$, el mapeo

$$a \mapsto \mathcal{U}(a) := e^{\lambda C(x,a)} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha^{s\vee\varepsilon} W(y)} F_{x,a}(ds), \tag{4.9}$$

para $a \in \mathbb{A}$, es continuo.
(ii) Existe una política $f \in \mathbb{F}$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$, $f(x) \in \mathbb{A}$ es un minimizador de la función en la ecuación (4.9).

Demostración. (i) Sea $(x,a^*) \in \mathbb{K}$ arbitrario pero fijo, de la Condición 4.1*(ii) y (iii)* y usando que $\rho_{x,a}(t)$ es una función continua en $a \in \mathbb{A}$, para cada $t \in [0,\infty)$, y del teorema de la convergencia dominada implican que $(s,a) \mapsto e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt}$ es continuo en $(s,a) \in [0,\infty) \times \mathbb{A}$. Además, como el espacio de estados es finito y la función $p_{x,y}(\cdot)$ es continua, entonces la función

$$(s,a) \mapsto \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha^{s\vee\varepsilon} W(y)}$$

es continua sobre el espacio $[0, \infty) \times \mathbb{A}$. Así,

$$u(s,a) := e^{\lambda C(x,a)+\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha^{s \vee \varepsilon} W(y)}, \ (s,a) \in [0,\infty) \times \mathbb{A}, \tag{4.10}$$

es continua en su dominio. Dado $\delta > 0$, al aplicar el Lema 26.8 de [21] (conocido como el lema del tubo), implica que existe una vecindad $V(a^*)$ de a^* tal que

$$\delta/B \geq |u(s,a) - u(s,a^*)|,$$

para $(s,a) \in [0,B] \times V(a^*)$, donde B es la constante en la Condición 4.1*(v)*; como $F_{x,a}(B) = 1$ siempre es válida, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{[0,B]} u(s,a^*) F_{x,a}(ds) - \delta \leq \int_{[0,B]} u(s,a) F_{x,a}(ds) \\ \leq \int_{[0,B]} u(s,a^*) F_{x,a}(ds) + \delta,\end{aligned}$$

para $a \in V(a^*)$. Puesto que el mapeo $a \mapsto F_{x,a}$ es débilmente continuo, entonces la continuidad de $u(\cdot, a^*)$ implica que existe una vecindad $\tilde{V}(a^*)$ de a^* tal que

$$\left| \int_{[0,B]} u(s,a^*) F_{x,a}(ds) - \int_{[0,B]} u(s,a^*) F_{x,a^*}(ds) \right| \leq \delta,$$

para cada $a \in \tilde{V}(a^*)$. Estas dos últimas relaciones implican que

$$\begin{aligned}-2\delta + \int_{[0,B]} u(s,a^*) F_{x,a^*}(ds) &\leq \int_{[0,B]} u(s,a) F_{x,a}(ds) \\ &\leq \int_{[0,B]} u(s,a^*) F_{x,a^*}(ds) + 2\delta,\end{aligned}$$

donde $a \in V(a^*) \cap \tilde{V}(a^*)$, el resultado se sigue al notar que

$$\mathcal{U}(a) = \int_{[0,B]} u(s,a) F_{x,a}(ds),$$

para cada $a \in \mathbb{A}$, esto, por las ecuaciones (4.9) y (4.10).

(ii) Como $\mathbb{A}$ es compacto, el resultado se sigue por la parte *(i)*. $\square$

En adelante $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ y $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ representarán dos sucesiones tales que

$$\alpha_n \nearrow 1, \quad \text{y} \quad \varepsilon_n \searrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \tag{4.11}$$

mientras que $f_n \in \mathbb{F}$ es una política estacionaria—cuya existencia lo garantiza el Lema 4.2—que satisface que para $x \in \mathbb{X}$, la acción $f_n(x)$ minimiza el término entre corchetes de la ecuación (4.8) con $(\alpha_n, \varepsilon_n)$ en lugar de (α, ε), es decir, para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} e^{\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} = e^{\lambda C(x,f_n(x))} \int_{[0,B]} & e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,f_n(x)}(t)\,dt} \\ & \times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f_n(x)) e^{\lambda \alpha_n^{s\vee\varepsilon_n} V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y)} F_{x,f_n(x)}(ds). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como $\mathbb{F}$ es un espacio métrico compacto, después de elegir una subsucesión, si es necesario, sin pérdida de generalidad se supone que $\{f_n\}$ converge a $f^* \in \mathbb{F}$, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f^*(x), \quad x \in \mathbb{X}. \tag{4.13}$$

Nota 4.1. *Suponer que $s \in [0,B]$ y $\alpha \in [\alpha_1, 1]$.*
(i) Por el teorema del valor medio, $\alpha^s - 1 = s\hat{\alpha}^{s-1}(\alpha - 1)$, donde $\hat{\alpha} \in (\alpha,1) \subset (\alpha_1,1)$, así, $\hat{\alpha}^{s-1} \le 1/\alpha_1$, por lo que

$$\begin{aligned} \Delta_0(\alpha) &:= \sup_{s\in[0,B]} |\alpha^s - 1| \\ &\le B(1-\alpha)/\alpha_1^2 \to 0 \quad \textit{cuando} \quad \alpha \nearrow 1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

(ii) Aplicaciones sucesivas del teorema del valor medio implican que

$$(1-\alpha^s)/(1-\alpha) = s\hat{\alpha}^{s-1},$$

donde $\hat{\alpha} \in (\alpha,1)$, y $s\hat{\alpha}^{s-1} - s = s(s-1)\tilde{\alpha}^{s-2}(\hat{\alpha}-1)$, con $\tilde{\alpha} \in (\hat{\alpha},1) \subset (\alpha,1) \subset (\alpha_1,1)$. Se sigue que, $\tilde{\alpha}^{s-2} \le 1/\alpha_1^2$, además $(1-\hat{\alpha}) \le (1-\alpha)$, por lo que

$$|(1-\alpha^s)/(1-\alpha) - s| \le |s(s-1)|(1-\alpha)/\alpha_1^2.$$

Así,

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) &:= \sup_{s\in[0,B]}\left|\frac{1-\alpha^s}{1-\alpha}-s\right| \\ &\leq B(B+1)\frac{1-\alpha}{\alpha_1^2}\to 0 \quad \textit{cuando} \quad \alpha\nearrow 1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Como el espacio de estados es finito, para cada $n\in\mathbb{N}$, la función $V_{\alpha_n,\varepsilon_n}$ alcanza su máximo en algún $x_n\in\mathbb{X}$, tomando una subsucesión, si es necesario, se supondrá que, junto con las ecuaciones (4.11) y (4.13), la sucesión $\{x_n\}$ es constante, digamos $x_n=z$, por lo que $V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)\geq V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y)$, para cada $y\in\mathbb{X}$ y $n\in\mathbb{N}$, recordando que $V_{\alpha,\varepsilon}$ es no-negativa (por la ecuación (4.7)), vía la Definición 4.2*(i)* se tiene que

$$g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)=\|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Ahora se enuncia el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.1. *Bajo las Condiciones 4.1 y 4.2,* $\sup_n\|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|<\infty$*, (vea la Definición 4.2).*

Demostración. Por contradicción. Suponer que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|=\infty$ y, tomando una subsucesión, si es necesario, suponer que $\|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|\to\infty$ cuando $n\to\infty$, condición que, por la ecuación (4.16), es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)=\infty. \tag{4.17}$$

Reemplazando x por z en la ecuación (4.12) y multiplicando ambos lados de la igualdad resultante por $e^{-\lambda C(z,f_n(z))-\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} e^{-\lambda C(z,f_n(z))} &= \int_{[0,B]} e^{\lambda\int_0^s \rho_{z,f_n(z)}(t)\,dt} \\ &\quad\times\sum_{y\in\mathbb{X}} p_{z,y}(f_n(z))e^{\lambda[\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y)-V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)]}F_{z,f_n(z)}(ds) \\ &\leq e^{\lambda B\rho^*}\int_{[0,B]}\sum_{y\in\mathbb{X}} p_{z,y}(f_n(z))e^{\lambda[\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y)-V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)]}F_{z,f_n(z)}(ds), \end{aligned}$$

donde la Condición 4.1*(ii)* se ocupó para establecer la igualdad. Con esto en mente, $z \in \mathbb{X}$ maximiza a $V_{\alpha_n,\varepsilon_n}$, además observar que para cada $y \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned}
&\lambda\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n} V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z) \\
&\qquad = \lambda\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)] - (1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n})V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z) \\
&\qquad \le -(1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n})V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z) = -\frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z),
\end{aligned}$$

estas dos últimas relaciones implican que

$$e^{-\lambda C(z,f_n(z))} \le e^{\lambda B\rho^*} \int_{[0,B]} e^{-\lambda \frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)} F_{z,f_n(z)}(ds). \tag{4.18}$$

Ahora, sea $\delta > 0$ un punto de continuidad de la función de distribución $F_{z,f^*(z)}$, usando la ecuación (4.11), se elige $N \in \mathbb{N}$ de manera tal, que

$$\varepsilon < \delta \quad \text{y} \quad \Delta(\alpha_n) \le \delta/2 \quad \text{para} \quad n \ge N;$$

vea la ecuación (4.15). Para este caso,

$$\frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} = \frac{1-\alpha_n^{s}}{1-\alpha_n} \ge s - \Delta(\alpha_n) \ge \delta - \delta/2 = \delta/2,$$

para $s \ge \delta$, $n \ge N$, combinando esta relación con $g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)$, por la ecuación (4.18) se tiene que

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda C(z,f_n(z))} \\
&\qquad \le e^{\lambda B\rho^*}\left(\int_{[0,\delta]} F_{z,f_n(z)}(ds) + e^{-\lambda g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)\delta/2}\int_{[\delta,B]} F_{z,f_n(z)}(ds)\right) \\
&\qquad \le e^{\lambda B\rho^*}\left(F_{z,f_n(z)}(\delta) + e^{-\lambda g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(z)\delta/2}\right).
\end{aligned}$$

Recordando que C es una función continua y que δ es un punto de continuidad de $F_{z,f^*(z)}$, tomando límite cuando n tiende a ∞ en la relación anterior, la Condición 3.1*(iii)* y las ecuaciones (4.13) y (4.17) implican que

$$e^{-\lambda C(z,f^*(z))} \le e^{\lambda B\rho^*} F_{z,f^*(z)}(\delta),$$

y haciendo que δ decrezca a 0, por la Condición 3.1*(iii)*, se obtiene la contradicción que $e^{-\lambda C(z,f^*(z))} \le 0$, por lo que $\sup_n \|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|$ es finito.

□

4.4. Funciones de Valor Relativas Acotadas

En esta sección se muestra que las funciones de valores relativas asociadas con la sucesión $\{(\alpha_n, \varepsilon_n)\}$ en la ecuación (4.11), forman un conjunto acotado de $\mathbb{B}(\mathbb{X})$ (vea la Definición 4.2).

Teorema 4.2. *Sea $\{h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\}$ la familia de funciones relativas asociada a la sucesión $\{(\alpha_n, \varepsilon_n)\}$ en la ecuación (4.11). En este caso,*

$$\sup_n \|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| < \infty.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $w_n \in \mathbb{X}$ un minimizador de $V_{\alpha_n,\varepsilon_n}$, usando que $\mathbb{X}$ es finito, tomando a la subsucesión, si es necesesario, junto con las ecuaciones (4.11) y (4.13), la sucesión $\{w_n\}$ es constante, digamos, $w_n = w$, por lo que

$$V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) \geq g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w), \quad y \in \mathbb{X}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Ahora, se definen

$$b(y) := \sup_n [V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)], \tag{4.20}$$

y

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{X} \,:\, b(x) < \infty\}, \tag{4.21}$$

como $b(w) = 0$, entonces $w \in \mathcal{A}$. Se probará que $\mathcal{A}$ es cerrado con respecto a la política f^* en la ecuación (4.13), esto es,

$$x \in \mathbb{A} \quad \text{y} \quad p_{x,\tilde{x}}(f^*(x)) > 0 \implies \tilde{x} \in \mathbb{A}. \tag{4.22}$$

Para lograr esto, sean $x, \tilde{x} \in \mathbb{X}$ tales que $x \in \mathcal{A}$ y $p_{x,\tilde{x}}(f^*(x)) > 0$. Ahora, como $C(x,a) \geq 0$ y $\rho_{x,a}(\cdot) \geq 0$ para cada $(x,a) \in \mathbb{K}$, por lo que, la ecuación (4.12) conlleva a que

$$e^{\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} \geq \int_{[0,B]} \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(f_n(x)) e^{\lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y)} F_{x,f_n(x)}(ds),$$

así,

$$\begin{aligned} e^{\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} &\geq p_{x,\tilde{x}}(f_n(x)) \int_{[0,B]} e^{\lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x})} F_{x,f_n(x)}(ds) \\ &\geq p_{x,\tilde{x}}(f_n(x)) e^{\lambda \alpha_n^{B \vee \varepsilon_n} V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x})}, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se debe al hecho de que $\alpha_n \in (0,1)$. De las ecuaciones (4.11), (4.13) y la Condición 4.1*(iii)*, se elige $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < B$ y $p_{x,\tilde{x}}(f_n(x)) \geq p_{x,\tilde{x}}(f^*(x))/2$ para $n \geq N$, multiplicando ambos lados de la desigualdad por $e^{-\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)}$ se obtiene que, para $n \geq N$,

$$e^{\lambda[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)-V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)]} \geq 2^{-1}p_{x,\tilde{x}}(f^*(x))e^{\lambda\alpha_n^B V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x})-\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)}. \tag{4.23}$$

Ahora, sea

$$G^* := \sup_n \|g_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| \quad \text{y} \quad \Delta^* := \sup_n \Delta(\alpha_n), \tag{4.24}$$

observar que estas constantes son finitas, por el Teorema 4.1 y la ecuación (4.15), respectivamente. Luego, notar que

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^B V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x}) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w) \\
&\qquad = \alpha_n^B[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x}) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)] - (1-\alpha_n^B)V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w) \\
&\qquad = \alpha_n^B[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x}) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)] - \frac{1-\alpha_n^B}{1-\alpha_n}g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w) \\
&\qquad \geq \alpha_n^B[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x}) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)] - (B+\Delta(\alpha_n))g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w) \\
&\qquad \geq \alpha_n^B[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x}) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)] - (B+\Delta^*)G^*
\end{aligned}$$

donde la Definición 4.2 se usó para establecer la segunda igualdad, la primera y segunda desigualdad se deben a las ecuaciones (4.15) y (4.24), respectivamente. Las relaciones anteriores y la ecuación (4.23) implican que

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)-V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)]} \\
&\qquad \geq 2^{-1}p_{x,\tilde{x}}(f^*(x))e^{\lambda\alpha_1^B[V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x})-\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)]-\lambda(B+\Delta^*)G^*}, \ n \geq N,
\end{aligned}$$

combinando esta relación con la definición de $b(\cdot)$ en (4.20) se sigue que, para $n \geq N$,

$$V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\tilde{x}) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w) \leq \frac{b(x) + (B+\Delta^*)G^* - \log(2^{-1}p_{x,\tilde{x}}(f^*(x))\lambda^{-1}}{\alpha_1^B}, \tag{4.25}$$

por lo que $b(\tilde{x}) < \infty$, así, $\tilde{x} \in \mathcal{A}$; vea las ecuaciones (4.19) y (4.21). Como $\mathcal{A}$ es no vacío, la ecuación (4.21) y la Condición 3.3 implican que $\mathcal{A} = \mathbb{X}$, esto es, $b(x) < \infty$, para cada $x \in \mathbb{X}$, así

$$\begin{aligned}\|V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)\| &= \max_{x\in\mathbb{X}} |V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)| \\ &\leq \max_{x\in\mathbb{X}} b(x) =: b^* < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot) &= V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) \\ &= V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w) - (V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)),\end{aligned}$$

finalmente se tiene que,

$$\|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| \leq 2\|V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot) - V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(w)\| \leq 2b^* < \infty.$$

$\square$

4.5. Resultado Principal

En esta sección el teorema principal del trabajo de tesis se enuncia y se demuestra. Para esto, se hará uso del siguiente lema.

Lema 4.3. *Sean $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ y $\{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty)$ tales que la ecuación (4.11) se cumple, suponer además que, para alguna función $h^* \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ y $g^* \in [0,\infty)$,*

$$\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)(x) = h^*(x),\ x \in \mathbb{X} \tag{4.26}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)(x_0) = g^*, \tag{4.27}$$

y que la convergencia en (4.13) se cumple. Bajo este contexto, las aseveraciones siguientes son válidas.

(i) Para cada $(x,a) \in \mathbb{K}$,

$$e^{\lambda h^*(x)} \leq e^{\lambda C(x,a)} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt - \lambda s g^*}\, F_{x,a}(ds) \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda h^*(y)}. \tag{4.28}$$

(ii) Para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$e^{\lambda h^*(x)} = e^{\lambda C(x,f^*(x))} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,f^*(x)}(t)\, dt - \lambda s g^*} F_{x,f^*(x)}(ds) \times \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda h^*(y)}. \tag{4.29}$$

(iii) El par $(h^*, g^*) \in \mathbb{B}(\mathbb{X}) \times \mathbb{R}$ satisface la EO *(4.1).*

Demostración. *(i)* Sea $(x,a) \in \mathbb{K}$ arbitrario pero fijo, notar que la ecuación (4.8) implica que

$$e^{\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} \leq e^{\lambda C(x,a)} \int_0^\infty e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\, dt} \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y)} F_{x,a}(ds).$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $e^{-\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)}$, por la Definición 4.2, se sigue que

$$e^{\lambda h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} \leq e^{\lambda C(x,a)} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\, dt} \times \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \lambda \frac{1-\alpha_n^{s \vee \varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)} F_{x,a}(ds). \tag{4.30}$$

Puesto que el espacio de estados $\mathbb{X}$ es finito, notar que las ecuaciones (4.11) y (4.27) implican que, para cada $s \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\, dt} \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \lambda \frac{1-\alpha_n^{s \vee \varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)} = e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\, dt} \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda h^*(y) - \lambda s g^*}, \tag{4.31}$$

mientras que, como $g_{\alpha_n,\varepsilon_n} \geq 0$, por la ecuación (4.7) y la Definición 4.2, se sigue que

$$\lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \lambda \frac{1-\alpha_n^{s \vee \varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) \leq \lambda \alpha_n^{s \vee \varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) \leq \lambda H,$$

con $H := \sup_n \|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| < \infty$, por el Teorema 4.2.

Como $\|\rho_{x,a}\| \leq \rho^* < \infty$, por la Condición 4.1*(ii)*, se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(a) e^{\lambda \alpha_n^{s\vee\varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \lambda \frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)} \\
&\leq e^{\lambda B\rho^* + \lambda H}, \quad s \in [0,B].
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando n tiende a ∞ en ambos lados de la ecuación (4.30), combinando esta última relación con las ecuaciones (4.27) y (4.31), la desigualdad en (4.28) se sigue por el teorema de la convergencia dominada.

(ii) Sea $x \in \mathbb{X}$ arbitrario pero fijo, al multiplicar ambos lados de la ecuación (4.12) por $e^{-\lambda V_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)}$ se obtiene que, vía la Definición 4.2, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$
e^{\lambda h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} = e^{\lambda C(x,f_n(x))} \int_{[0,B]} Q_n(s) F_{x,f_n(x)}(ds), \tag{4.32}
$$

en donde

$$
\begin{aligned}
Q(s) :=& e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,f_n(x)}(t)\,dt} \\
&\times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f_n(x)) e^{\lambda \alpha_n^{s\vee\varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \lambda \frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)}, \ s \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, se define

$$
\hat{\rho}_k(t) := \text{ínf}\{\rho_{x,f_n(x)}(t) : n \geq k\}, \quad t \geq 0, \tag{4.34}
$$

y, dado $\delta > 0$, usando las ecuaciones (4.11), (4.13) y la Condición 4.1*(iii)*, se elige $N^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\varepsilon < B, \text{ y } p_{x,y}(f_n(x)) \geq (1-\delta) p_{x,y}(f^*(x)) \ y \in \mathbb{X}, \ n \geq N^*.
$$

Observar que, para $n \geq N^*$ y $s \in [0,B]$, de las ecuaciones (4.14) y

(4.15) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) \\
&\geq h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \Delta_0(\alpha_n)\|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| - s g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) - \Delta(\alpha_n) g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) \\
&\geq h^*(y) - \|h_{\alpha_n,\varepsilon_n} - h^*\| - \Delta_0(\alpha_n)\|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| - s g^* \\
&\qquad - s|g^* - g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)| - \Delta(\alpha_n) g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0);
\end{aligned}
$$

luego

$$
\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(y) - \frac{1-\alpha_n^{s\vee\varepsilon_n}}{1-\alpha_n} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) \ \geq h^*(y) - s g^* - r_n, \tag{4.35}
$$

para $n \geq N^*,\ s \in [0, B]$, donde

$$
r_n := \|h_{\alpha_n,\varepsilon_n} - h^*\| + \Delta_0(\alpha_n)\|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\| + B|g^* - g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)| + \Delta(\alpha_n) g_{\alpha_n,\varepsilon_n},
$$

y las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.27) implican que

$$
\lim_{n\to\infty} r_n = 0. \tag{4.36}
$$

Combinando las ecuaciones (4.32)–(4.35) se sigue que

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x)} \geq (1-\delta) e^{\lambda C(x, f_n(x)) - \lambda r_n} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \hat{\rho}_k(t)\,dt - \lambda s g^*} \\
\times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda h^*(y)} F_{x, f_n(x)}(ds), \quad n \geq k \vee N^*,
\end{aligned}
$$

donde la función bajo la integral es continua y no depende de n. Como C es un mapeo continuo, se toma el límite cuando n tiende a ∞ en ambos lados de la última desigualdad para obtener que, vía las ecuaciones (4.13), (4.27), (4.36) y la Condición 4.1*(iv)*,

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda h^*(x)} \geq (1-\delta) e^{\lambda C(x, f^*(x))} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \hat{\rho}_k(t)\,dt - \lambda s g^*} \\
\times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda h^*(y)} F_{x, f^*(x)}(ds).
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $\rho_{x,a}(t)$ es una función continua de $a \in \mathbb{A}$, por la Condición 4.1*(iii)*, notar que las ecuaciones (4.13) y (4.34) implican que $\hat{\rho}_k(\cdot) \nearrow \rho_{x,f^*(x)}(\cdot)$, por lo que, vía el teorema de la convergencia monótona, la relación anterior conlleva a que

$$\begin{aligned} e^{\lambda h^*(x)} \geq (1-\delta) e^{\lambda C(x,f^*(x))} \int_{[0,B]} & e^{\lambda \int_0^s \hat{\rho}_{x,f^*(x)}(t)\,dt - \lambda s g^*} \\ & \times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda h^*(y)} F_{x,f^*(x)}(ds); \end{aligned}$$

ahora, como $\delta > 0$ es arbitraria, se sigue que

$$\begin{aligned} e^{\lambda h^*(x)} \geq e^{\lambda C(x,f^*(x))} \int_{[0,B]} & e^{\lambda \int_0^s \hat{\rho}_{x,f^*(x)}(t)\,dt - \lambda s g^*} \\ & \times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f^*(x)) e^{\lambda h^*(y)} F_{x,f^*(x)}(ds), \end{aligned}$$

y, por la parte *(i)*, se cumple la igualdad en esta relación. Con esto se demuestra *(ii)*, pues $x \in \mathbb{X}$ es arbitrario.
(iii) La conclusión se sigue combinando las partes *(i)* y *(ii)*. □

El teorema principal del trabajo se enuncia a continuación y establece que es posible obtener aproximaciones convergentes del costo promedio óptimo (2.11) vía los puntos fijos de una familia de operadores contractivos, extendiendo el caso descontado en la teoría de los procesos de decisión de Markov al contexto de los procesos semi-Markovianos sensibles al riesgo.

Teorema 4.3. *Suponer que las Condiciones 4.1 y 4.2 se cumplen, y sea* $(g, h(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}(\mathbb{X})$ *la solución única de la EO (4.1) tal que* $h(x_0) = 0$.
(i) Para cada $x \in \mathbb{X}$,

$$h_{\alpha,\varepsilon}(x) \to h(x) \text{ y } g_{\alpha,\varepsilon}(x_0) \to g \quad \text{cuando} \quad \alpha \nearrow 1 \text{ y } \varepsilon \searrow 0. \tag{4.37}$$

(ii) Para cada $\alpha > 0$ *y* $\varepsilon > 0$ *existe* $f_{\alpha,\varepsilon} \in \mathbb{F}$ *tal que para cada* $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} e^{\lambda V_{\alpha,\varepsilon}(x)} = & e^{\lambda C(x,f_{\alpha,\varepsilon}(x))} \int_{[0,B]} e^{\lambda \int_0^s \rho_{x,a}(t)\,dt} \\ & \times \sum_{y\in\mathbb{X}} p_{x,y}(f_{\alpha,\varepsilon}(x)) e^{\lambda \alpha^{s\vee\varepsilon} V_{\alpha,\varepsilon}(y)} F_{x,f_{\alpha,\varepsilon}(x)}(ds). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Más aún, si f^* *es un punto límite en* $\mathbb{F}$ *de la familia* $\{f_{\alpha,\varepsilon}\}$ *cuando* $\alpha \nearrow 1$ *y* $\varepsilon \searrow 0$, *entonces* f^* *es promedio óptima.*

Demostración. *(i)* Sea $(g, h(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}(\mathbb{X})$ el par ordenado la única solución de la EO (4.1) tal que $h(x_0) = 0$. Para garantizar que se cumple (4.37) será suficiente probar que:

$$\text{Si } \{\alpha_n\} \subset (0,1) \text{ y } \{\varepsilon_n\} \subset (0,\infty) \text{ cumplen (4.11), entonces}$$
$$\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x) = h(x),\ x \in \mathbb{X},\ \text{y} \lim_{n\to\infty} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) = g. \tag{4.39}$$

Para lograr esto, suponer que $\{(\alpha_n, \varepsilon_n)\} \subset (0,1) \times (0,\infty)$ satisface la ecuación (4.11). Usando que las sucesiones $\{g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0)\}$ y $\{\|h_{\alpha_n,\varepsilon_n}\|\}$ son acotadas, por los Teoremas 4.1 y 4.2, respectivamente, y para establecer la convergencia en (4.39), será suficiente probar que cualquier punto límite de la sucesión $\{(h_{\alpha_n,\varepsilon_n}, g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0))\}$ en $\mathbb{B}(\mathbb{X}) \times \mathbb{R}$ coincide con (h, g). Así que, sea $(h^*, g^*) \in \mathbb{B}(\mathbb{X}) \times \mathbb{R}$ el punto límite de $\{(h_{\alpha_n,\varepsilon_n}, g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0))\}$, por lo que existe una subsucesión, *denotada por* $\{(\alpha_n, \varepsilon_n)\}$, tal que satisface lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x) = h^*(x),\ x \in \mathbb{X}, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) = g^*. \tag{4.40}$$

Más aún, como $\mathbb{F}$ es un espacio métrico compacto, suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{f_{\alpha_n,\varepsilon_n}\}$ converge a $f^* \in \mathbb{F}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x) = f^*(x), \quad x \in \mathbb{X}. \tag{4.41}$$

En este caso, el Lema 4.3*(iii)* asegura que (h^*, g^*) satisface la EO (4.1); como $h^*(x_0) = 0$, por la Definición 4.2 y la ecuación (4.40), se sigue del Lema 4.1*(iii)* que $(h^*, g^*) = (h, g)$, por lo que se cumple la convergencia de (4.39).

(ii) Notar que el Lema 4.2*(ii)* asegura que una política $f_{\alpha,\varepsilon} \in \mathbb{F}$, que satisfaga la ecuación (4.38), existe. Ahora, sea f^* un punto límite de la familia $\{f_{\alpha,\varepsilon}\}$ conforme α incrementa a 1 y ε decrece a 0. En este caso, existen sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\varepsilon_n\}$, que satisfacen la ecuación (4.11), tal que cumplen (4.41); como $h_{\alpha_n,\varepsilon_n}(\cdot) \to h(\cdot)$ y $g_{\alpha_n,\varepsilon_n}(x_0) \to g$ cuando $n \to \infty$, (por la parte *(i)*), el Lema 4.3*(ii)* implican que, para cada $x \in \mathbb{X}$, $f^*(x)$ es un minimizador del lado derecho de la Ecuación de Optimalidad (4.1), por lo que $J^*_\lambda(\cdot) = J^*_\lambda(\cdot, f^*) = g$, esto por el Lemma 4.1, finalizando la prueba del teorema. $\square$

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se consideraron cadenas de decisión semi-Markovianas sobre un espacio de estados comunicante y finito. Se consideró el criterio de costo promedio sensible al riesgo y se trabajó bajo dos enfoques: caso no-controlado y controlado. En el primer caso, se introdujo una ecuación de Poisson donde, bajo ciertas condiciones, el criterio de costo promedio se caracterizó por una solución de la ecuación de Poisson, esta parte se basó en [9]. Para el segundo caso, el espacio de estados es comunicante bajo la acción de cualquier política estacionaria, esto permitió garantizar que el costo promedio óptimo sensible al riesgo esté caracterizado vía la ecuación de optimalidad a través de una familia bi-paramétrica de operadores contractivos.

Es importante mencionar que, el Teorema 4.3 provee una extensión al enfoque de costos descontados en la teoría de procesos de decisión de Markov al contexto de los procesos semi-Markovianos sensibles al riesgo. En contraste al caso Markoviano, donde una familia de operadores de un sólo parámetro son en general no-contractivos, el uso de dos parámetros en el presente trabajo fue esencial para asegurar la propiedad de contracción de los operadores en la Definición 4.1. Por último, como una extensión de los resultados de este trabajo, se puede considerar como trabajo futuro el estudio para tiempos de permanencia no-acotados.

Apéndice A

Resultados Auxiliares

A.1. Definiciones

Definición A.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, la mínima* σ*-álgebra de subconjuntos de* X *que contiene a todos los conjuntos abiertos en* X *es la* σ*-álgebra de Borel, es decir, la* σ*-álgebra generada por* τ*. La denotaremos por* $\mathfrak{B}(X)$.

Así, cuando se hable de conjuntos o funciones medibles, se entenderán como *Borel-medibles.*

Definición A.2. X *es un espacio de Borel, si* X *es un subconjunto de Borel de un espacio métrico separable y completo. Un subconjunto de Borel de un espacio de Borel es por sí mismo un espacio de Borel.*

Definición A.3. *Un kérnel estocástico definido sobre* $\mathbb{X}$ *dado* $\mathbb{Y}$ *es una función* $Q(\cdot \mid \cdot)$ *tal que:*

1. $Q(\cdot \mid y)$ *es una medida de probabilidad en* $\mathbb{X}$ *para cada* $y \in \mathbb{Y}$.

2. $Q(B \mid \cdot)$ *es una variable aleatoria (función medible) en* $\mathbb{Y}$ *para cada* $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$.

A.2. Teoremas Auxiliares

Teorema A.1. ***(de C. Ionescu-Tulcea)***
Sea $\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1, \ldots$ una sucesión de espacios de Borel y, para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase

$$\mathbb{Y}_n := \mathbb{X}_0 \times \mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_n$$

y

$$\mathbb{Y} := \mathbb{X}_0 \times \mathbb{X}_1 \times \cdots$$

Sea v una medida de probabilidad arbitraria en $\mathbb{X}_{n+1}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Q_n(dx_{n+1} \mid y_n)$ un kérnel estocástico sobre $\mathbb{X}_{n+1}$ dado $\mathbb{Y}_n$. Entonces existe una única medida de probabilidad Q_v sobre $\mathbb{Y}$ tal que, para cada rectángulo medible $B_0 \times \cdots \times B_n$ en $\mathbb{Y}_n$,

$$Q_v(B_0 \times \cdots \times B_n) = \int_{B_0} v(dx_0) \int_{B_1} Q_0(dx_1 \mid x_0) \int_{B_2} Q_1(dx_2 \mid x_0, x_1) \cdots \int_{B_n} Q_{n-1}(dx_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Más aún, para cada función medible no-negativa u en $\mathbb{Y}$, la función

$$x \longmapsto \int u(y) Q_x(dy)$$

es medible sobre $\mathbb{X}_0$, donde Q_x denota a Q_v cuando v es la probabilidad concentrada en $x \in \mathbb{X}_0$.

Demostración. Vea [2]. □

Teorema A.2. ***(de la Convergencia Monótona)***
Sea $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espacio medible y $g_1, g_2, \ldots, g, h$ funciones medibles

(a) Si $g_n \geq h$ para toda n, donde $\int_X h d\mu > -\infty$, y $g_n \uparrow g$, entonces

$$\int_X g_n d\mu \uparrow \int_X g d\mu.$$

(b) Si $g_n \leq h$ para toda n, donde $\int_X h d\mu < \infty$, y $g_n \downarrow g$, entonces

$$\int_X g_n d\mu \downarrow \int_X g d\mu.$$

Demostración. Para una demostración vea [2]. □

Lema A.1. ***(una extensión del Lema de Fatou)***
Sea $\{u_n\}$ un sucesión acotada en $\mathbb{B}_w(\mathbb{S})$, esto es, existe una constante K tal que $\|u_n\|_w \leq K$ para toda n, y defina

$$u^I(s) := \liminf_{n\to\infty} u_n(s), \quad y \quad u^S(s) := \limsup_{n\to\infty} u_n(s).$$

Entonces para cada $s \in \mathbb{S}$ y cualquier sucesión $\{a^n\}$ en $\mathbb{A}(s)$ tal que $a^n \to a$ en $\mathbb{A}(s)$, tenemos

$$\liminf_{n\to\infty} \int u_n(s')\hat{Q}(ds'|s,a^n) \geq \int u^I(s')\hat{Q}(ds'|s,a),$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \int u_n(s')\hat{Q}(ds'|s,a^n) \leq \int u^S(s')\hat{Q}(ds'|s,a).$$

Por tanto, si $u_n \to u$ (esto es, $u^I = u^S$), entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n(s')\hat{Q}(ds'|s,a^n) = \int u(s')\hat{Q}(ds'|s,a).$$

Demostración. Vea [14], (pág. 48) □

Bibliografía

[1] Arapostathis A., Borkar V.S., Fernández-Gaucherand, E. et al., *"Discrete-time controlled Markov processes with average cost criteria: A survey"*. J. Contr. Optim. **31**, 282-334. 1993.

[2] Ash, R.B. y Doléans-Dade C.A., *"Probability and measure theory"*. Academic Press Elsevier. 2005.

[3] Bäuerle, N y Reider, U., *"More risk-sensitive Markov decision processes"*. Math. Oper. Res. **39**(1), 105–120. 2014.

[4] Bhabak, A. y Saha, S., *"Risk-sensitive semi-Markov decision problems with discounted cost and general utilities"*. Math. Opt. Cont. 2021.

[5] Bellman, R.E., *"Dynamic programming"*. Dover Publications. 2003.

[6] Camilo-Garay, C., Cavazos-Cadena, R. y Cruz-Suárez, H., *"Contractive approximations in risk-sensitive average semi-Markov decision chains on a finite state space"*. J. Optim. Theory Appl. 2021.

[7] Camilo-Garay, C., *"Análisis de una línea de espera usando procesos de decisión semi-markovianos"*. Tesis licenciatura. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP. 2014.

[8] Cavazos-Cadena, R., *"Solutions of the average cost optimality equation for finite Markov decision chains: risk-sensitive and risk-neutral criteria"*. Math. Methods Oper. Res. **70**(3), 541-566. 2009.

[9] Cavazos-Cadena, R., *"A Poisson equation for the risk-sensitive average cost in semi-Markov chains"*. J. Optim. Theory Appl. **26**, 633-656. 2016.

[10] Chávez-Rodríguez, S., Cavazos-Cadena, R. y Cruz-Suárez, H., *"Controlled semi-Markov chains with risk-sensitive average cost criterion"*. J. Optim. Theory Appl. **170**, 670-686. 2016.

[11] Di Masi, G.B. y Stettner, L. *"Infinite horizon risk sensitive control of discrete time Markov processes with small risk"*. Systems Control Lett. 2000.

[12] Doshi, B., *"Queueing systems with vacations - a survey"*. Queueing Syst. **1**, 29-66. 1986.

[13] Hernández-Lerma, O. y Lasserre, J.B., *"Discrete-time Markov control processes: Basic optimality criteria"*. Springer-Verlag. 1996.

[14] Hernández-Lerma, O. y Lasserre, J.B., *"Further topics on discrete-time Markov control processes"*. Springer-Verlag. 1999.

[15] Howard, R.A., *"Semi-Markovian decision processes"*. Proc. Intern. Stat. Inst. 1963.

[16] Huang, Y. y Lian, Z., *"Risk-sensitive semi-Markov processes with general utilities and multiple criteria"*. Adv. Appl. Prob. **50**, 783-804. 2018.

[17] Hue, Q. y Yue, W., *"Optimal replacement of a system according to a semi-Markov decision process in a semi-Markov environment"*. Optimization Methods and Software. **18**, 181-196. 2003.

[18] Jaśkiewicz, A., *"A fixed point approach to solve the average cost optimality equation for semi-Markov decision processes with Feller transition probabilities"*. Commun. Stat. Theory Methods. **36**, 2559-2575. 2007.

[19] Kella, O., *"Optimal control of the vacation scheme in an M/G/1 queue"*. Oper. Res. **38**, 724-728. 1988.

[20] Luque-Vásquez, F. y Hernández-Lerma, O., *"Semi-Markov control models with average costs"*. Appl. Math. **26**, 315-331. 1999.

[21] Munkres, J.R., *"Topology"*. Prentice-Hall, Upper Sanddle River. 2000.

[22] Pinedo, M., *"Scheduling: Theory, Algorithms and systems"*. Prentice Hall. 2008.

[23] Pitera, M. y Stettner, L., *"Long run risk sensitive portfolio with general factors"*. Math. Meth. Oper . Res. **82**(2), 265-293. 2016.

[24] Puterman, M.L., *"Markov decision processes: Discrete stochastic dynamic programming"*. Wiley. 1994.

[25] Saucedo-Zul, J., Cavazos-Cadena, R. y Cruz-Súarez, H., *"A Discounted approach in communicating average Markov decision chains under risk-aversion"*. J. Optim. Theory Appl. **187**(2), 585-606. 2020.

[26] Sennot, L.I., *"Stochastic dynamic programming and the control of queueing systems"*. Wiley. 1999.

[27] Sladký, K., *"Growth rates and average optimality in risk-sensitive Markov decision chains"*. Kybernetika. **44**(2) 205–226. 2008.

[28] Sladký, K., *"Risk-sensitive average optimality in Markov, decision processes"*. Kybernetika. **54**(6): 1218–1230. 2018.

[29] Stettner, L., *"Risk sensitive portfolio optimization"*. Math. Meth. Oper. Res. **50**(3), 463-474. 1999.

[30] Stidham, Jr.S., Weber, R.R., *"A survey of Markov decision models for control of networks of queues"*. Queueing Systems, **13**. 291-314. 1993.

[31] Teghem, J., *"Control of the service process in a queueing system"*. European J. Op. Res. **23**, 141-158. 1986.

[32] Tijms, H.C., *"A First Course in Stochastic Models"*. Wiley. 2003.