Aplicación del Problema de la Ruina del Jugador en Opciones Financieras

Susana Carvajal Martínez

18 de julio de 2008

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Los juegos de azar son de las prácticas que más han causado interés en la población, y más aún cuando está en riesgo una fortuna mediante una apuesta. Por ejemplo, es común preguntarse entre los apostadores: ¿Cuál es la probabilidad de llegar a la ruina?; ¿Cuánto se espera ganar?; ¿Cuantos juegos se espera jugar hasta ganar por primera vez?, etc.. Por muchos años este tema ha sido objeto de estudio dentro de la probabilidad y se han desarrollado teorías para dar respuestas a las preguntas anteriores.

El presente trabajo se encuentra relacionado con la teoría de cadenas de Markov (ver [12] y [18]). Una cadena de Markov se encarga de modelar fenómenos aleatorios los cuales son observados de forma discreta, i.e. en instantes de tiempo $t = 0, 1, \ldots$. Formalmente, una cadena de Markov es una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad común, con la propiedad de que dado el estado presente, los estados pasados no tienen influencia en el futuro. La propiedad anterior es llamada la propiedad de Markov. El comportamiento de sistemas con la propiedad de Markov se pueden encontrar en muchas aplicaciones, como por ejemplo: sistemas de colas, tráfico de Internet, comunicaciones inalámbricas, redes genéticas, ingeniería financiera, entre otras (ver [4], [9], [15] y [21]).

Por otro lado una de las herramientas matemáticas para analizar este tipo de juegos de azar es la Teoría de Martingalas en procesos estocásticos (ver [14] y [16]). Cuyo surgimiento fue motivado precisamente al modelar estos juegos. Por lo que en el ambiente de los juegos de azar la palabra martingala se asocia con estrategias para ganarle al contrincante. Matemáticamente esto se logra estudiando sucesiones de variables aleatorias, en las que los valores alcanzados por las primeras variables influyen, restringen o determinan el comportamiento futuro de las restantes y por tanto, su distribución.

Un ejemplo clásico en la teoría de cadenas de Markov es conocido como el problema de la ruina del jugador (RJ) (ver [2], [10] y [12]). En el presente trabajo estamos interesados en hacer una aplicación del problema de la ruina del jugador en el área de opciones financieras (ver [3], [6], [15] y [16]). Una opción financiera es un contrato entre dos partes (un comprador y un vendedor), en el cual, quien compra la opción adquiere el derecho a ejercer lo que indica el contrato, aunque no tendrá la obligación de hacerlo. En el problema RJ se tiene un jugador que empieza con una fortuna inicial fija y hace apuestas de una unidad monetaria contra otro jugador, también con cierto capital. En cada juego gana una unidad ó la pierde con las probabilidades p y $1-p$, respectivamente. El proceso que estamos interesados en analizar es el capital del jugador en cada apuesta, y la probabilidad de ruina del jugador, así como la estrategia que debe seguir para ganar el juego. En el caso de finanzas se tiene la participación de inversionistas y suscriptores de opciones, quienes hacen especulaciones por el resultado de la bolsa de valores. Ambos esperan hacerse ricos ganándose la fortuna del adversario. Uno de los objetivos de trabajo de tesis es vincular ambas situaciones: el de la ruina del jugador y el de opciones financieras.

El presente trabajo está organizado en 4 capítulos, que proporcionaran las componentes principales En el primero se presentan algunos conceptos referentes a Cadenas de Markov y en particular se plantea el problema de la ruina del jugador, acompañado de algunos otros ejemplos. En el segundo se introduce una serie de conceptos que permiten establecer el Teorema de Paro Opcional para Martingalas, para posteriormente dar una aplicación al problema de apuestas. A continuación, se dan los términos más importantes que conllevan las Opciones Financieras aunado al Modelo Binomial para adquirir las herramientas fundamentales. Y por último se presenta un análisis de opciones financieras mediante cadenas de Markov, en particular, usando el problema de la ruina del jugador, así como también un pequeño análisis del Modelo Binomial en opciones Financieras. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

CADENAS DE MARKOV

2.1. Definiciones Básicas y Ejemplos

Algunas veces nos interesa saber cómo cambia una variable aleatoria a través del tiempo. Por ejemplo, se desea conocer cómo evoluciona el precio de las acciones de una empresa en el mercado a través del tiempo. El estudio de cómo evoluciona una variable aleatoria incluye, el concepto de procesos estocásticos.

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ definidas en un espacio de probabilidades, con el conjunto de índices T el cual describe la evaluación de algún sistema (ver [18]).

Un tipo especial de procesos estocásticos de tiempo discreto se llama Cadena de Markov (CM). Para simplificar nuestra presentación supondremos que en cualquier tiempo, el proceso estocástico de tiempo discreto puede estar en un estado de un espacio de estados finito $S = \{1,2, ..., s\}$.

Un proceso de Markov es un proceso aleatorio que tiene la propiedad de no tener memoria de la información pasada, formalmente.

Definición 2.1.1 *Una* ***Cadena de Markov*** *(CM) en tiempo discreto es un proceso estocástico que consiste de un número finito o numerable de variables aleatorias colocadas en una sucesión. Es decir, sea* (Ω, F, P) *un espacio de probabilidad y un conjunto* E *no vacío, finito o numerable. Una sucesión de variables aleatorias*

$$\{X_t : \Omega \to E, t = 0, 1, 2, ...\}$$

se llama Cadena de Markov con espacio de estados E *si satisface la Propiedad Markoviana, esto es, si para todo* $n \geq 1$ *y toda sucesión* $x_0, x_1, ...x_{t-1}, x, y \in E$

se cumple:

$$P\left(X_t = y | X_{t-1} = x, ..., X_0 = x_0\right) = P(X_t = y | X_{t-1} = x) \tag{2.1}$$

En esencia, la ecuación (2.1) dice que la distribución de probabilidad del estado en el tiempo t depende del estado en el tiempo $t-1$ y no depende de los estados por los cuales pasó la cadena antes de x para llegar a y.

En el estudio de las cadenas de Markov se hará la hipótesis adicional que para todos los estados x, y, y toda t, $P\left(X_t = y | X_{t-1} = x\right)$ es independiente de t. Esta hipótesis permite escribir

$$P(X_t = y | X_{t-1} = x) = p_{xy} \tag{2.2}$$

donde p_{xy} es la probabilidad de que dado que el sistema está en el estado x en el tiempo $t-1$, el sistema estará en el estado y en el tiempo t. Si el sistema pasa del estado x durante un periodo al estado y durante el siguiente, se dice que ha ocurrido una transición de x a y. A (2.2) le llamaremos **probabilidades de transición,** las cuales satisfacen para cada $x \in E$ la siguiente relación:

$$\sum_y p_{xy} = 1 \tag{2.3}$$

La ecuación (2.2) indica que la ley de probabilidad que relaciona el estado del siguiente periodo con el estado actual no cambia o que permanece estacionaria, en el tiempo. Toda cadena de Markov que cumple con la ecuación (2.2) se llama **cadena estacionaria de Markov**.

El estudio de las cadenas de Markov también necesita que se definan p_x como la probabilidad de que la cadena se encuentre en el estado x en el tiempo 0; en otras palabras, $P(X_0 = x) = p_x$. Al vector $p = [p_1, p_2, ..., p_t]$ se le llama distribución inicial de probabilidad de la cadena de Markov.

En la mayoría de las aplicaciones, las probabilidades de transición se presentan como una matriz P de probabilidad de transición $s \times s$. La matriz de probabilidad de transición P se puede escribir como

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

También se sabe que cada elemento de la matriz P debe ser no negativo. Por lo tanto, todos los elementos de la matriz de probabilidad de transición son no negativos y los elementos de cada renglón deben sumar 1 debido a (2.3).

Ejemplo 2.1.2 ***Un Modelo de Inventario.***
Supóngase un stock que se maneja a dos niveles, $0 < s < S$*, de manera que si lo almacenado es menor o igual a* s *entonces inmediatamente se repone hasta el nivel* S*, en caso contrario ninguna reposición se hace. La inspección se realiza en una cierta unidad de tiempo discreta (por ejemplo al final de cada semana). Ahora bien, si la demanda para cada período de tiempo se distribuye de forma Poisson con parámetro* λ *en forma independiente, esto es si* α_n *es la demanda en la* n*-ésima semana, entonces*

$$Pr\{\alpha_n = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!},$$

para toda n*. Se supone además que si el stock, en un determinado período, no alcanza para una demanda en el mismo período entonces ésta es satisfecha parcialmente y no difiere del resto (se entrega lo que haya sin compromiso para el próximo período). Para modelar esta situación defínase como* X_n *el nivel del stock al final del período* n*. Nótese que este proceso es claramente markoviano, puesto que lo que ocurra en la semana* n*-ésima dependerá de lo que ha sucedido en la semana* $n-1$*.Nótese que* $p_{ij} = 0$ *si* $i < j$ *siendo* $s < i < S$*. Con estos antecedentes se puede construir fácilmente la matriz de Markov asociado a este modelo de inventario. Una manera alternativa de definir este proceso de Markov es como sigue*

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - \alpha_{n+1})^+ & si \quad s < X_n \leq S \\ (S - \alpha_{n+1})^+ & si \quad X_n \leq s \end{cases}$$

donde $f^+ = max\{f, 0\}$*.*
Considerando el caso particular de $s = 0$ *y* $S = 2$*. Supóngase ahora que se tiene una simple distribución de demandas en algún periodo,*

$$P[\alpha_1 = 0] = 0.5, \quad P[\alpha_1 = 1] = 0.4, \quad P[\alpha_1 = 2] = 0.1.$$

Por la recursión definida por el modelo del inventario se trata de una Cadena de Markov, se puede ver claramente que el conjunto de estados es $\{0, 1, 2\}$*.*

Se puede construir fácilmente la matriz de transición.

$$\begin{aligned}
P(0,0) &= P(X_{n+1}=0|X_n=0)=P((S-\alpha_{n+1})^+=0)=0.1\\
P(0,1) &= P(X_{n+1}=1|X_n=0)=P((S-\alpha_{n+1})^+=1)=0.4\\
P(0,2) &= P(X_{n+1}=2|X_n=0)=P((S-\alpha_{n+1})^+=2)=0.5\\
P(1,0) &= P(X_{n+1}=0|X_n=1)=P((X_n-\alpha_{n+1})^+=0)=0.5\\
P(1,1) &= P(X_{n+1}=1|X_n=1)=P((X_n-\alpha_{n+1})^+=1)=0.5\\
P(1,2) &= P(X_{n+1}=2|X_n=1)=P((X_n-\alpha_{n+1})^+=2)=0\\
P(2,0) &= P(X_{n+1}=0|X_n=2)=P((S-\alpha_{n+1})^+=0)=0.1\\
P(2,1) &= P(X_{n+1}=1|X_n=2)=P((S-\alpha_{n+1})^+=1)=0.4\\
P(2,2) &= P(X_{n+1}=2|X_n=2)=P((S-\alpha_{n+1})^+=2)=0.5
\end{aligned}$$

Entonces

$$P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0\\ 0.1 & 0.4 & 0.5\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.1.3 *Suponga que se observa una partícula la cual puede estar en cualquier estado de $\{0,1,2...\}$. Ahora, cada vez que se encuentre, al tiempo n en el estado i para el próximo tiempo $n+1$ solo puede quedarse en el mismo estado o "saltar" a los estados adyacentes $i+1$, $i-1$. Es decir*

$$\begin{aligned}
Pr\{X_{n+1} &= i+1|X_n=i\}=p_i; \quad i\geq 1\\
Pr\{X_{n+1} &= i-1|X_n=i\}=q_i; \quad i\geq 1\\
Pr\{X_{n+1} &= i|X_n=i\}=r_i; \quad i\geq 1\\
Pr\{X_{n+1} &= j|X_n=i\}=0; \quad |j-i|\, i>1
\end{aligned}$$

para el caso en que $i=0$ se tiene

$$\begin{aligned}
Pr\{X_{n+1} &= 0|X_n=0\}=r_0\\
Pr\{X_{n+1} &= 1|X_n=0\}=p_0
\end{aligned}$$

donde $p_i+q_i+r_i=1$ para $i\geq 1$ y $r_0+p_0=1$.
La designación de paseo aleatorio viene del hecho de que se asemeja a una trayectoria de una partícula que aleatoriamente avanza hacia atrás o hacia

adelante. La matriz de Markov o de transición de este proceso es

$$\begin{pmatrix} ro & q1 & 0 & 0 & ... \\ p0 & r1 & q2 & 0 & ... \\ 0 & p1 & r2 & q3 & ... \\ 0 & 0 & p2 & r3 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Este modelo sirve para describir, entre otros, el siguiente juego.

Ejemplo 2.1.4 ***La Ruina del Jugador***
Supóngase que se tiene la siguiente situación, al tiempo 0 *se tienen* 2 *dólares y en los tiempos* $1, 2....$ *se participa en un juego el cual consiste en apostar un dólar, en cada etapa. En cada etapa se tiene probabilidad* p *de ganar , y por lo tanto, probabilidad* $1-p$ *de perder. La finalidad es aumentar el capital a* 4 *dólares, y una vez logrado ese objetivo terminar el juego, claramente si el capital del jugador es cero el juego termina. Sea* X_t *el capital del jugador al tiempo* t*. La sucesión* $\{X_t\}$ *es un proceso estocástico a tiempo discreto. Nótese que* $X_0 = 2$ *es una constante conocida, pero que* X_1 *y las demás* X_t*, son aleatorios. Por ejemplo,* $X_1 = 3$ *con probabilidad* p *y* $X_1 = 1$ *con probabilidad* $1-p$*. Además si* $X_t = 4$*, entonces* X_{t+1} *y todas las demás* X_t*, también serán igual a* 4*. Igualmente, si* $X_t = 0$*, entonces* X_{t+1} *y todas las demás* X_t *serán cero también. A esta situación se le conoce como problema de la ruina del jugador.*
Como la cantidad de dinero que se tiene después de $t+1$ *jugadas depende de los antecedentes del juego sólo hasta la cantidad de efectivo que se tendrá después de t jugadas, es posible ver que se trata de una cadena de Markov. Como las reglas del juego no varían con el tiempo, también se tiene una cadena de Markov estacionaria. La matriz de transición es la siguiente (el estado i quiere decir que se tiene i dólares):*

Estados	*0 dólares*	*1 dólar*	*2 dólares*	*3 dólares*	*4 dólares*
0 dólares	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
1 dólar	*1-p*	*0*	*p*	*0*	*0*
2 dólares	*0*	*1-p*	*0*	*p*	*0*
3 dólares	*0*	*0*	*1-p*	*0*	*p*
4 dólares	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*

Si el estado es 0 *dólares o* 4 *dólares no se juega más y, por lo tanto, el estado no puede cambiar; entonces* $p_{44} = 1$*. Para los demás estados se sabe que, con* *probabilidad p, el estado del siguiente periodo será mayor que el estado actual en 1, y con probabilidad $1-p$, el estado del siguiente periodo será menor en 1 que el estado actual.*

Una Cadena de Markov con espacio de estados finitos se puede representar con una gráfica en la que cada nodo representa un estado y arco (i,j) representa la probabilidad de transición p_{ij}. La Figura 1 es una representación gráfica de la matriz de probabilidad de transición para este ejemplo.

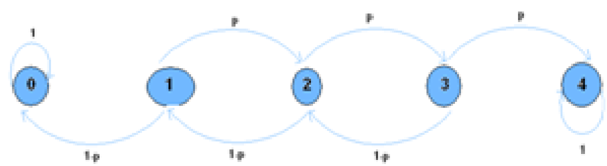


Figura 1.

2.2. Probabilidades de Transición de n Etapas

Suponga que se estudia una cadena de Markov con matriz P de probabilidad de transición conocida. Una pregunta de interés es: si una cadena de Markov está en el estado i en el tiempo m, ¿cuál es la probabilidad que n periodos después la cadena de Markov este en el estado j?. Como se trata de una cadena de Markov estacionaria, esta probabilidad será independiente de m y, por lo tanto, puede escribirse como

$$P(X_{m+n}=j|X_m=i)=P(X_n=j|X_0=i)=p_{ij}^{(n)},$$

donde $P_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad de ir del estado i al estado j en n etapas.

Ahora si se consideran las p_{ij}, se puede calcular las $p_{ij}^{(k)}$ haciendo el siguiente razonamiento: si al cabo de $m<k$ pasos, encontrándose en el estado e, la probabilidad de alcanzar el estado j después de $k-e$ pasos será:

$$p_{ie}^{(m)}\cdot p_{ej}^{(k-m)}.$$

Como el estado e intermedio puede ser cualquiera, puede determinarse una expresión para la probabilidad de transición de k pasos:

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{e=1}^{n} p_{ie}^{(m)} \cdot p_{ej}^{(k-m)},$$

Haciendo $m = 1$ y $m = k - 1$ se obtienen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, que permite obtener expresiones de las propiedades de transición en el estado k a partir de las de $k - 1$.

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{e=1}^{n} p_{ie} \cdot p_{ej}^{(k-1)};$$

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{e=1}^{n} p_{ie}^{(k-1)} \cdot p_{ej}.$$

Lo que indican las ecuaciones es que pueden obtenerse las matrices $P^{(k)}$ de transición de k pasos a partir de las potencias de la matriz

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= P \cdot P = P^2; \\ P^{(3)} &= P^{(2)} \cdot P = P \cdot P^2 = P^2 \cdot P = P^3; \\ P^{(k)} &= P^{(k-1)} \cdot P = P \cdot P^{k-1} = P^{k-1} \cdot P = P^k. \end{aligned}$$

Es decir, que las sucesivas potencias de la matriz P indican las probabilidades de transición en tantas transiciones como se indica en el índice de la potencia, (ver la Figura 2). Esto puede generalizarse aún más observando que P^1 representa la probabilidad de una transición y que $P^0 = I$ es la probabilidad en cero transiciones: si no ha habido transición, el estado es el mismo y por lo tanto, la matriz que representa la no-transición es la matriz identidad.

Ejemplo 2.2.1 *Representación de la transición de i a j en dos pasos*

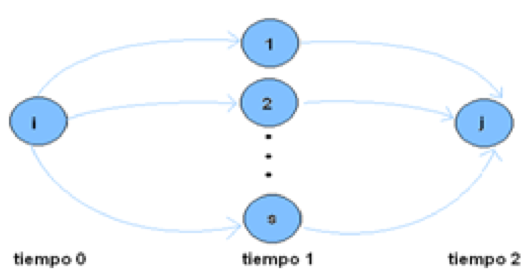


Figura 2.

2.3. Clasificación de Estados de una Cadena de Markov

En esta sección se hará una clasificación de los estados de una cadena de Markov, con la finalidad de entender mejor su comportamiento. En el transcurso se utilizará la siguiente matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

para ejemplificar algunas definiciones.

Representación gráfica de la matriz de transición

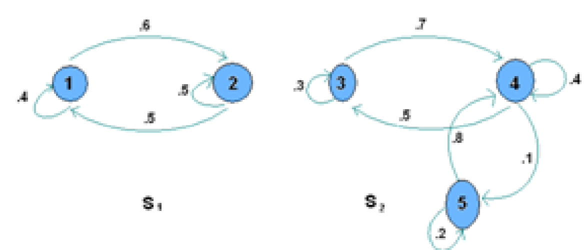


Figura 3.

Definición 2.3.1 *Dados dos estados i y j,* ***la trayectoria de i a j*** *es la sucesión de transiciones que comienza en i y termina en j, de modo que cada transición de la secuencia tenga probabilidad positiva. Otra manera de ver esta definición es que el tiempo del primer pasaje es un número finito, es decir, que la probabilidad de llegar a j, dado que se está en i, en una cantidad finita de pasos sea positiva:*

$$P_i(T_j < \infty) > 0$$

Donde $T_j = \inf\{n \geq 0 : x_n = j\}$.

i) *Un estado es alcanzable desde i si hay una trayectoria que vaya de i a j.*

ii) *Se dice que dos estados i y j se comunican si j es alcanzable desde i, e i es alcanzable desde j.*

Para la matriz P de probabilidad de transición representada en la Figura 3, el estado 5 es alcanzable desde el estado 3 (a través de la trayectoria $3 - 4 - 5$), pero el estado 5 no es alcanzable desde el estado 1 (no hay trayectoria que vaya de 1 a 5). También, los estados 1 y 2 se comunican: puede pasarse de 1 a 2 y de 2 a 1.

Definición 2.3.2 *Un conjunto de estados S en una cadena de Markov es* ***conjunto cerrado*** *si ningún estado fuera de S es alcanzable desde un estado en S.*

De la cadena de Markov con la matriz P, tanto $S_1 = \{1, 2\}$ como $S_2 = \{3, 4, 5\}$ son conjuntos cerrados. Observe que una vez que entra a un conjunto cerrado no puede dejarlo nunca. En la Figura 3 ningún arco comienza en S_1 y termina en S_2 o principia en S_2 y termina en S_1.

Definición 2.3.3 *Un estado i es un estado* ***absorbente*** *si $p_{ii} = 1$. Es decir, $P_i(T_i = 1) = 1$. En palabras, siempre que se entra a un estado de absorción, nunca se podrá dejar.*

En el Ejemplo 2.1.6, la ruina del jugador, los estados 0 y 4 son absorbentes.

Definición 2.3.4 *Un estado i es un estado* ***transitorio*** *si hay un estado j alcanzable desde i, pero el estado i no es alcanzable desde el estado j. Esto es lo mismo que afirmar que $P_j(T_j < \infty) < 1$, no siempre existe una cantidad finita de pasos para alcanzar a j desde i. En otras palabras, un estado i es transitorio si hay manera de dejar el estado i de tal modo que nunca se regrese a él.*

En el ejemplo de la ruina del jugador, los estados $1, 2$ y 3 son estados transitorios. Por ejemplo (Figura 1), desde el estado 2 es posible pasar por la trayectoria $2 - 3 - 4$. Pero no hay modo de regresar al estado 2 desde el estado 4.

Definición 2.3.5 *Si un estado no es transitorio, se llama estado* ***recurrente****. Esto es lo mismo que afirmar que $P_j(T_j < \infty) = 1$, es decir, existe una cantidad finita de pasos de regresar a j si se inicio en j.*

Para la matriz de transición P del ejemplo, todos los estados son recurrentes.

Capítulo 3

MARTINGALAS

Se estudia en este capítulo sucesiones de variables aleatorias, en las que los valores alcanzados por las primeras variables influyen, restringen o determinan el comportamiento futuro de las restantes y por tanto, su distribución (ver [14]).

En esta parte juegan un papel fundamental la probabilidad y la esperanza condicional. El número de dependencias entre variables de una sucesión es incontable. Un tipo particular de dependencia es el que describen las martingalas.

El término martingala nace de los juegos de azar, más particularmente, de los sistemas de juego. Considérese una sucesión de variables aleatorias (v.a.) independientes $\{Y_n\}$ con distribución común:

$$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = 1/2. \tag{3.1}$$

Esta sucesión permite describir los lanzamientos sucesivos de una moneda. Supóngase un sistema de juegos que consiste en efectuar una apuesta por cara o cruz y ganar la cantidad apostada si se acierta. La cantidad ganada después de cada partida puede representarse por $a_n Y_n$, donde los valores positivos de a_n corresponden a apuestas por cara y los negativos a las apuestas por cruz, $a_n = 0$ puede interpretarse como que el jugador deja pasar su turno y espera otro lanzamiento.

Las apuestas no son necesariamente constantes, si el jugador no posee ningún don premonitorio. La decisión de apostar a_n antes del n-ésimo lanzamiento debe basarse en la información disponible hasta el momento, es decir, los resultados obtenidos en los $(n-1)$ primeros lanzamientos.

Esto se resume diciendo que a_n debe ser una función medible respecto de $\sigma(Y_1, ..., Y_{n-1})$ (la $\sigma-$álgebra generada por las v.a's. $Y_1, ..., Y_{n-1}$).

La ganancia o pérdida acumulada hasta el n-ésimo lanzamiento está dada por:

$$X_n = a_1Y_1 + ... + a_nY_n = X_{n-1} + a_nY_n$$

Suponga que se han jugado $(n-1)$ partidas; la ganancia acumulada por el jugador es X_{n-1} y su ganancia esperada tras el n-ésimo lanzamiento será:

$$\begin{aligned} E(X_n|Y_1, ..., Y_{n-1}) &= E(X_{n-1} + a_nY_n|Y_1, ..., Y_{n-1}) \\ &= X_{n-1} + a_nE(Y_n|Y_1, ..., Y_{n-1}) \\ &= X_{n-1} + a_nE(Y_n) = X_{n-1} \end{aligned}$$

por ser Y_n independientes de $Y_1, ..., Y_{n-1}$ y debido a que $E(Y_n) = 0$ por (3.1). En conclusión ningún juego no-conocido puede incrementar la fortuna esperada, respecto a la inicial.

3.1. Definiciones y propiedades.

Definición 3.1.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio probabilístico. Sean $\{\mathcal{F}_n\}$ una sucesión creciente de $\sigma-$álgebras las cuales están contenidas en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ $(\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F})$ y $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. tales que X_n es $\mathcal{F}_n$-medible.*

*Se dirá que $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ es una **martingala** si cumple:*

a) $E(|X_n|) < \infty$*, para cada* n*,*

b) $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$*, para cada* n*.*

Observación 3.1.2 *La sucesión $\{\mathcal{F}_n\}$ de $\sigma-$álgebras dada en la definición anterior es conocida como filtración.*

En las mismas condiciones de la definición anterior, si se cumple a) y en lugar de b) se verifica:

i) $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$, para cada n, se dirá que es una **submartingala**.

ii) $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$, para cada n, se dirá que es una **supermartingala**.

Observación 3.1.3 *El estudio de las supermartingalas se reduce al estudio de las submartingalas, debido a que si $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ es una supermartingala, entonces $\{-X_n, \mathcal{F}_n\}$ es una submartingala.*

3.1.1. Ejemplos

1. Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_n] = 1$ para todo n. Sea $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ entonces $\{Y_n : n \geq 1\}$ es una martingala con respecto a $\{X_n\}$. En efecto:

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}|X_1, X_2, ..., X_n] &= E[Y_n X_{n+1}|X_1, X_2, ...X_n] \\ &= Y_n E[X_{n+1}|X_1, ..., X_n] \\ &= Y_n E[X_{n+1}] = Y_n \end{aligned}$$

2. **Martingala de Doob**

Sean $X, Y_1, Y_2, ...$ variables aleatorias tales que $E[|X|] < \infty$ y $X_{n+1} = E(X|Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. Entonces $\{X_n, n \geq 1\}$ es una martingala con respecto a $\{Y_n\}$. En efecto:

$$\begin{aligned} E[|X_n|] &= E[|E[X|Y_1, Y_2, ..., Y_n]|] \\ &\leq E[E[|X||Y_1, Y_2, ..., Y_n]] \\ &= E[|X|] < +\infty \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}|Y_1, ..., Y_n] &= E[E(X|Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1})|Y_1, ..., Y_n] \\ &= E[X|Y_1, ..., Y_n] = X_n \end{aligned}$$

Proposición 3.1.4 *Si $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ es martingala, entonces se verifica que:*

a) $E(X_{n+1}) = E(X_n)$, para cada n.

b) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa y $g(x)$ es integrable para cada n se verifica que $\{g(X_n), \mathcal{F}_n\}$ es una submartingala.

En el caso particular de (b), se tiene que si $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ es una martingala, se verifica que $\{|X_n|, \mathcal{F}_n\}$ es una submartingala.

En particular de la *Proposición 3.1.4*, se tienen los siguientes ejemplos:

1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. independientes tales que $E(X_n) = 0$ con $n \geq 1$. Sea $S_k = \sum_{j-1}^{k} X_k$ Entonces, $\{S_n, \mathcal{F}_n\}$ es una martingala.

2. Sea $E(X) < \infty$ y $\{\mathcal{B}_n : n \geq 0\}$ una filtración (i.e. $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset ... \subset \mathcal{B}_n \subset ...$) de sub-álgebras de $\mathcal{B}$. Definimos $X_n = E(X/\mathcal{B}_n)$ para $n \geq 0$. Entonces $\{(X, \mathcal{B}_n) : n \geq 0\}$ es una martingala.

Una forma de inducir martingalas es la siguiente.

Sea $\{\mathcal{F}_n\}$ una sucesión no decreciente de sub-σálgebras de $\mathcal{F}$ y X una v.a. tal que $E(|X|) \leq \infty$. Entonces, la sucesión dada por:

$$X_n = E(X|\mathcal{F}_n),$$

para todo $n \geq 1$, es una martingala.

Descomposición de una submartingala.

Sea $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ una submartingala. Entonces, X_n admite una descomposición del siguiente modo:

$$X_n = \widetilde{X}_n + \widehat{X}_n$$

donde:

a) $\{\widetilde{X}_n, \mathcal{F}_n\}$ es una martingala

b) $\{\widehat{X}_n\}$ es una sucesión no decreciente de v.a. no negativas tales que X_n es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible, para $n \geq 2$. Un proceso con estas características es llamado proceso creciente.

Definición 3.1.5 *Una función $\nu : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ ($\bar{\mathbb{N}} = \{0, 1, ..., +\infty\}$) es un Tiempo de Paro si $\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Notación 3.1.6 *Un caso particular de Tiempo de Paro es el Tiempo de Markov a continuación se tiene la definición.*

Definición 3.1.7 *Una v.a. T se llama Tiempo de Markov con respecto a $\{Y_n\}$ si T toma los valores en $\{0, 1, 2, ...\infty\}$ y si, para cada $n = 0, 1, ...$ el evento $\{T = n\}$ es determinado por $(Y_0, ..., Y_n)$. Es decir, $T = n$ o $T \neq n$ se pueden describir conociendo los valores del proceso $Y_0, Y_1..., Y_n$:*

$$\begin{aligned} I_{\{T=n\}} &= I_{\{T=n\}}(Y_0, ..., Y_n) \\ &= \begin{cases} 1, & si \quad T = n, \\ 0, & si \quad T \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

A menudo se omite la mención de $\{Y_n\}$ y se dice "T es un tiempo de Markov". Si T es un tiempo de Markov, entonces para cada n los eventos $\{T \leq n\}$, $\{T > n\}$, $\{T \geq n\}$, y $\{T < n\}$ también son determinados por $(Y_0, ..., Y_n)$. De hecho, se tiene

$$
\begin{aligned}
I_{\{T \leq n\}} &= \sum_{k=0}^{n} I_{\{T=k\}}(Y_0, ..., Y_k), \\
I_{\{T > n\}} &= 1 - I_{\{T \leq n\}}(Y_0, ..., Y_k),
\end{aligned}
$$

y análogamente para los otros casos.

Recíprocamente, si para cada n, el evento $\{T \leq n\}$ es determinado por $\{Y_0, ..., Y_n\}$, entonces T es un tiempo de Markov. O bien, si para cada n, el evento $\{T > n\}$ es determinado por $(Y_0, ..., Y_n)$, entonces T es un tiempo de Markov.

Si $\{X_n\}$ es una martingala con respecto a $\{Y_n\}$, entonces para cada n, X_n es determinado por $(Y_0, ..., Y_n)$. Entonces cada Tiempo de Markov con respecto a $\{X_n\}$ también es un tiempo de Markov con respecto a $\{Y_n\}$. Lo mismo pasa con supermartingalas y submartingalas.

Algunos ejemplos de Tiempos de Markov son los siguientes:

1. El tiempo fijo $T = k$ (es decir, constante) es un tiempo de Markov. Para todo $Y_0, Y_1, ...$, se tiene

$$
I_{\{T=n\}}(Y_0, ..., Y_n) = \begin{cases} 0, & si \quad n \neq k, \\ 1, & si \quad n = k. \end{cases}
$$

2. La primera vez que el proceso $Y_0, Y_1, ...$ alcanza un subconjunto A del espacio de estados es un tiempo de Markov. Es decir, para

$$
T(A) = min\{n : Y_n \in A\},
$$

se tiene

$$
I_{\{T(A)=n\}}(Y_0, ..., Y_n) = \begin{cases} 1, \quad si \quad Y_j \notin A, \quad para & \begin{matrix} j = 0, ..., n-1, \\ Y_n \in A, \end{matrix} \\ 0, \quad en \quad otro \quad caso. & \end{cases}
$$

Las siguientes son algunas propiedades elementales referentes a tiempos de Markov:

(a) Si S y T son tiempos de Markov, entonces también es $S+T$. Debido a la siguiente identidad

$$I_{\{S+T=n\}} = \sum_{k=0}^{n} I_{\{S=k\}} I_{\{T=n-k\}}$$

(b) El más pequeño de dos Tiempo de Markov S, T, denotado

$$S \wedge T = min\{S, T\},$$

también es un tiempo de Markov. Esto es claro de la relación

$$I_{\{S \wedge T > n\}} = I_{\{S>n\}} I_{\{T>n\}}.$$

Así, si T es un tiempo de Markov, entonces también es $T \wedge n = min\{T, n\}$, para cualquier $n = 0, 1, ..$ fijo.

(c) Si S y T son Tiempos de Markov, entonces también es $S \vee T = max\{S, T\}$, dado que

$$I_{\{S \vee T \leq n\}} = I_{\{S \leq n\}} I_{\{T \leq n\}}.$$

3.2. Teorema de Paro Opcional

Suponga que $\{X_n\}$ es una martingala y T es un Tiempo de Markov con respecto a $\{Y_n\}$. Se verificará más adelante que

$$E[X_0] = E[X_{T \wedge n}] = lim_{n \to \infty} E[X_{T \wedge n}].$$

Si $T < \infty$, entonces $lim_{n \to \infty} X_{T \wedge n} = X_T$.

Así, siempre que pueda justificarse el intercambio de límite y esperanza, se puede deducir la siguiente identidad

$$\begin{aligned} E[X_0] &= lim_{n \to \infty} E[X_{T \wedge n}] \\ &= E[lim_{n \to \infty} X_{T \wedge n}] = E[X_T]. \end{aligned}$$

Se dan varias condiciones más adelante donde, de hecho, este intercambio es permitido (*Lema 3.2.3*).

Lema 3.2.1 *Sea $\{X_n\}$ una (super)martingala y T un tiempo de Markov con respecto a $\{Y_n\}$. Entonces para todo $n \geq k$,*

$$E[X_n I_{\{T=k\}}](\leq) = E[X_k I_{\{T=k\}}]. \tag{3.2}$$

Demostración. Por una propiedad de esperanza condicional (Véase Apéndice A, *Proposición 7.1.1*) y por la definición de (super) martingala,

$$\begin{array}{rcl} E[X_n I_{\{T=k\}}]) & = & E\{E[X_n I_{\{T=k\}}(Y_0,...,Y_k)|Y_0,...,Y_k]\} \\ & = & E\{I_{\{T=k\}}E[X_n|Y_0,...,Y_k]\} \\ (\leq) & = & E[X_k I_{\{T=k\}}] \end{array}$$

■

Lema 3.2.2 *Si $\{X_n\}$ es un (super) martingala y T un tiempo de Markov, entonces para todo $n = 1, 2, ...$*

$$E[X_0]\,(\geq) = E[X_{T\wedge n}]\,(\geq) = E[X_n]. \tag{3.3}$$

Demostración. Este resultado se verifica tomando

$$\begin{array}{rcl} E[X_{T\wedge n}] & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} E[X_T I_{\{T=k\}}] + E[X_n I_{\{T\geq n\}}] \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} E[X_k I_{\{T=k\}}] + E[X_n I_{\{T\geq n\}}] \end{array}$$

y ahora por *Lema 3.2.1*, se tiene

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n-1} E[X_k I_{\{T=k\}}] + E[X_n I_{\{T\geq n\}}]\,(\geq) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} E[X_n I_{\{T=k\}}] + E[X_n I_{\{T\geq n\}}] \\ & = & E[X_n] = E[X_0]. \end{array}$$

La última igualdad se sigue debido a que X_n es una martingala, con lo cual se concluye la prueba en este caso.

En el caso de tener una supermartingala, se ha mostrado que $E[X_{T\wedge n}] \geq E[X_n]$. Faltando establecer que $E[X_0] \geq E[X_{T\wedge n}]$, para toda n. Considérese la siguiente sucesión

$$\widetilde{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \{X_k - E[X_k|Y_0,...,Y_{k-1}]\},$$

claramente dicha sucesión es una martingala ($\widetilde{X}_0 = 0$). Así,

$$\begin{aligned}
0 &= E[\widetilde{X}_{T\wedge n}] \\
&= \sum_{k=1}^{T\wedge n}\{X_k - E[X_k|Y_0,...,Y_{k-1}]\} \\
&\geq E[\sum_{k=1}^{T\wedge n}\{X_k - X_{k-1}\}] \\
&= E[X_{T\wedge n}] - E[X_0],
\end{aligned}$$

y por consiguiente

$$E[X_0] \geq E[X_{T\wedge n}],$$

lo cual completa la prueba. ■

Lema 3.2.3 *Sean W una variable aleatoria que satisface $E[|W|] < \infty$, y T un tiempo de Markov para el cual $Pr\{T < \infty\} = 1$. Entonces*

$$lim_{n\to\infty} E[WI_{\{T>n\}}] = 0 \tag{3.4}$$

y

$$lim_{n\to\infty} E[WI_{\{T\leq n\}}] = E[W]. \tag{3.5}$$

Demostración. Primeramente obsérvese que

$$\begin{aligned}
E\left[|W|\right] &\geq E[|W|I_{\{T\leq n\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} E[|W||T=k]Pr\{T=k\}
\end{aligned}$$

y cuando $n \to \infty$ se obtiene que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} E[|W||T=k]Pr\{T=k\} = E[|W|].$$

De tal manera

$$lim_{n\to\infty} E[|W|I_{\{T\leq n\}}] = E[|W|]$$

y

$$lim_{n\to\infty} E[|W|I_{\{T>n\}}] = 0.$$

Ahora nótese que

$$\begin{aligned}
0 &\leq |E[W] - E[WI_{\{T\leq n\}}]| \\
&\leq E[|W|I_{\{T>n\}}] \to 0,
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba. ■

El siguiente teorema de paro opcional para las martingalas, es una consecuencia directa de los resultados anteriores.

Teorema 3.2.4 *Suponga que $\{X_n\}$ es una martingala y T es un tiempo de Markov. Si $Pr\{T < \infty\} = 1$ y $E[sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n}|] < \infty$, entonces*

$$E[X_T] = E[X_0].$$

Demostración. Sea $W = sup_{n\geq 0}|X_{T\wedge n}|$. Empezando con la descomposición

$$X_T = \sum_{k=0}^{\infty} X_k I_{\{T=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{T\wedge k} I_{\{T=k\}},$$

la cual es válida en virtud de la suposición de que $Pr\{T < \infty\} = 1$, se tiene que $|X_T| \leq W$, y por consiguiente $E[|X_T|] \leq E[W] < \infty$, así la esperanza de X_T está bien defina. Sólo necesita mostrarse que $lim_{n\to\infty}[X_{T\wedge n}] = E[X_T]$. Se tiene

$$\begin{aligned} |E[X_{T\wedge n}] - E[X_T]| &\leq E[|(X_{T\wedge n} - X_T)|I_{\{T>n\}}] \\ &\leq 2E[WI_{\{T>n\}}]. \end{aligned}$$

Pero $lim_{n\to\infty}E[WI_{\{T>n\}}] = 0$ por *Lema 3.2.3*. Utilizando la ecuación (3.3) para el caso de martingala la prueba se completa. ■

Corolario 3.2.5 *Suponga que $\{X_n\}$ es una martingala y T es un tiempo de Markov con respecto a $\{Y_n\}$. Si*

$$(i) \quad E[T] < \infty, \tag{3.6}$$

y existe una constante $S < \infty$, tal que

$$(ii) \qquad E[|X_{n+1} - X_n||Y_0, ..., Y_n] \leq S, \tag{3.7}$$

para $n < T$, entonces $E[X_T] = E[X_0]$.

Demostración. Sean $Z_0 = |X_0|$, $Z_n = |X_n - X_{n-1}|$, $n = 1, 2, ...,$ y

$$W = Z_0 + ... + Z_T.$$

Entonces $W \geq |X_T|$, y

$$\begin{aligned}
E[W] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} E[Z_k I_{\{T=n\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} E[Z_k I_{\{T=n\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[Z_k I_{\{T\geq k\}}].
\end{aligned}$$

Notando que

$$I_{\{T\geq k\}} = 1 - I_{\{T\leq k-1\}}$$

es función sólo de $\{Y_0, ..., Y_{k-1}\}$, y por (ii)

$$E[Z_k|Y_0, ..., Y_{k-1}] \leq S$$

si $k \leq T$. Así

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} E[Z_k I_{\{T\geq k\}}] &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{E[Z_k I_{\{T\geq k\}}|Y_0, ..., Y_{k-1}]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\{I_{\{T\geq k\}} E[Z_k|Y_0, ..., Y_{k-1}]\} \\
&\leq S \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{T \geq k\} \\
&\leq S(1 + E[T]) < \infty.
\end{aligned}$$

Entonces $E[W] < \infty$. Como $|X_{T\wedge n}| \leq W$ para toda n por la definición de W, el resultado se sigue del *Teorema 3.2.4*. ■

Teorema 3.2.6 *(Teorema de Paro Opcional). Sea $\{X_n\}$ una martingala y T un tiempo de Markov. Si*

i. $Pr\{T < \infty\} = 1$,

ii. $E[|X_T|] < \infty$,

iii. $lim_{n\to\infty} E[X_n I_{\{T>n\}}] = 0$,

entonces $E[X_T] = E[X_0]$.

Demostración. Se tiene que para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} E[X_T] &= E[X_T I_{\{T \leq n\}}] + E[X_T I_{\{T>n\}}] \\ &= E[X_{T\wedge n}] - E[X_n I_{\{T>n\}}] + E[X_T I_{\{T>n\}}]. \end{aligned}$$

Como

$$E[X_{T\wedge n}] = E[X_0],$$

se tiene que

$$E[X_T] = E[X_0] - E[X_n I_{\{T>n\}}] + E[X_T I_{\{n>T\}}],$$

además, debido al *Lema 3.2.1*, y a que $lim_{n\to\infty} E[X_n I_{\{T>n\}}] = 0$,

$$E[X_T] = E[X_0] - E[X_T I_{\{T>n\}}]$$

Por último, usando *Lema 3.2.3* con $W = X_T$ y (ii) se puede concluir que $lim_{n\to\infty} E[X_T I_{\{T>n\}}] = 0$. Así

$$E[X_T] = E[X_0].$$

■

Proposición 3.2.7 *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con probabilidades de transición p_{xy}, $x, y \in X$, y sea $h(x)$ una función acotada del estado x tal que*

$$h(x) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy} h(y).$$

Entonces el proceso $\{M_n\}$, donde $M_n = h(X_n)$, es una martingala respecto a X.

Demostración. Este resultado se sigue de la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|X_n &= x, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] \\ &= E[h(X_{n+1})|X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} h(y) P[X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} h(y) P[X_{n+1} = y | X_n = x] \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy} h(y) = h(x) = h(X_n) = M_n \end{aligned}$$

De aquí

$$E[M_{n+1}|X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0] = h(X_n) = M_n.$$

■

Los resultados antes mencionados se utilizaran en capítulos posteriores.

Capítulo 4

FINANZAS

4.1. Opciones

En este capítulo se abordara parte de la teoría de instrumentos financieros que comúnmente se denominan derivados. Estos instrumentos consisten por lo general en contratos cuyo precio depende de las características salientes de uno o más activos. Una vez definido el tipo del contrato, la tarea mayor es encontrar el precio justo de dicho contrato. Las estrategias para encontrar el precio por lo general se basa en las propiedades estocásticas del precio del contrato que se derivan del activo principal.

Existen varios tipos de opciones, las más simples le dan el **derecho** al portador de comerciar en el futuro, a un precio previamente pactado entre las partes, pero sin tener **obligación** de comerciar llegado el momento en el que dicha transacción puede tomar lugar (el vencimiento). A continuación se presentará los dos tipos de opciones más simples.

Definición 4.1.1 *Una* ***opción de compra (Call)*** *es un contrato que da el derecho a comprar un activo particular, a un precio previamente determinado, en un momento futuro especificado.*

El mecanismo que sigue el call es el siguiente: el poseedor de un call tiene el derecho a comprar un activo a tiempo $T > t$ donde el precio al cual se va a comprar ese activo se fija en el día de la compra del call.

El precio predeterminado que se pacta pagar por el activo se conoce como **Precio de Ejecución** (Strike Price). El día en el cual se puede ejecutar la opción se llama **Día de Expiración.** Finalmente el activo sobre el cual se escribe la opción se conoce como **Recurso Subyacente** (Underlying Asset). Ahora bien, al tiempo T (día de expiración), si:

1. El underlying asset vale más que el strike price se ejecutará la opción, pues de esta manera, se puede comprar el activo a un precio menor que el de mercado (y hacer una posible ganancia vendiéndolo más caro).

2. En caso de que el underlying asset valga menos que el strike price, la opción no se va a ejecutar, porque es más barato comprar el activo en el mercado que ejecutar el contrato call.

Denotando a S_t como el precio de la acción (el precio del underlying asset) y a X como el strike price, entonces en la fecha de expiración la opción se ejerce con el valor C del call dado por:

$$C = \max(S_T - X, 0).$$

Esta función se conoce como función de liquidación (**pay-off**). El operador "max" se usa debido a que el individuo no tiene la obligación de comprar el activo cuando $S_T - X < 0$, por lo que en dicho caso la opción no tiene valor y por lo tanto no será ejecutada. Implícitamente el operador max representa la posibilidad de elegir ejecutar el call. El poseedor de un call está interesado en que S_t suba pues de esa manera subirá el valor de su opción.

Definición 4.1.2 *Una* ***opción de venta (Put)*** *es un contrato que da el derecho a vender un activo, a un precio determinado previamente, en un momento futuro especificado.*

El poseedor de un Put está interesado en que el precio del underlying asset baje, así puede venderlo (a tiempo T) a un precio mayor que su valor de mercado. La función de liquidación P (pay-off) del Put a tiempo T es la siguiente

$$P = \max(X - S_T, 0).$$

Calls y Puts son las dos formas más simples de opciones.

Observación 4.1.3 *Al tiempo T, el precio del Stock en el momento que expira la opción, S_T , no es conocido. Como en tiempo t se determina el strike price X, el precio de la opción (a tiempo t) dependerá de la posible evolución del proceso estocástico S_t. Por lo tanto los Calls o Puts son contratos que se planean bajo incertidumbre.*

Para dar una mejor idea del comportamiento de estas opciones se presentará en la Figura 4 un diagrama del pay-off neto de los costos de la opción al tiempo T. Si $S_T - X > 0$ el Call tiene un comportamiento similar al del underlying asset (se gana si el precio sube); pero si $S_T - X < 0$, el Call vale cero y el poseedor del call incurre en la pérdida del valor actualizado del precio, que pago por el call al momento que lo compro. En este caso el strike price es igual a 10, y la pendiente del pay-off es igual a 1. En el caso de un Put (Figura 5), el razonamiento es análogo.

Estos diagramas reflejan los beneficios que toma en cuenta el costo de comprar una opción con un strike price X a un día de expiración T .

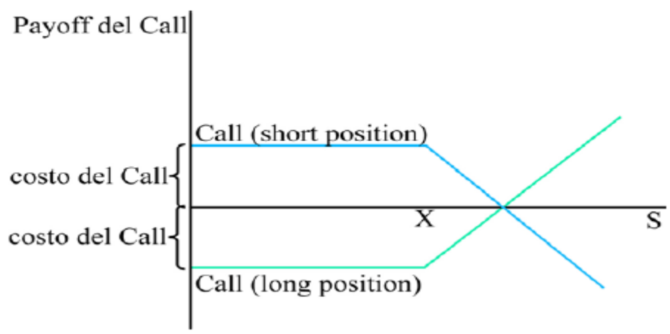


Figura 4. Payoff de un Call a tiempo $t = T$.

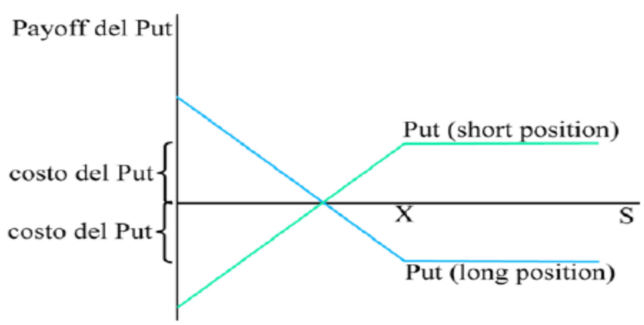


Figura 5. Payoff de un Put a tiempo $t = T$.

La contraparte del comprador de la opción, es la persona que la ofrece; si un individuo compra un call (el derecho para en un futuro adquirir un stock) debe existir una persona que le venda (hoy) la opción y que por lo tanto se comprometa a vender dicho stock en el futuro. Esta **persona** se conoce como el suscriptor (el que **escribe la opción**).

El suscriptor de la opción se compromete a vender el activo (en caso de que sea un Call) o a comprar el stock (en caso de que sea un Put). El suscriptor de la opción por lo tanto recibe un premio (el costo de la opción). La simetría entre el comprador y vendedor de la opción es clara; el comprador entrega un pago a cambio de derechos y de un resultado incierto, el suscriptor de la opción recibe hoy el pago de la opción pero entra en una obligación bajo incertidumbre.

Las opciones más comunes son las siguientes:

a) *Las* Opciones Europeas *son aquellas que tienen la característica de que sólo se pueden ejercer en el día de expiración.*

b) *Las* Opciones Americanas *son aquellas que pueden ser ejecutadas en cualquier momento del tiempo antes del día de expiración.*

4.2. Modelo Binomial

A continuación se presentará la forma más simple de derivar el precio de una opción bajo el supuesto que los stocks tienen una **distribución binomial.**

El Precio del stock S_0 puede:

i) Subir a un nivel uS_0 con probabilidad q,

ii) Bajar a un nivel dS_0 con probabilidad $1-q$,

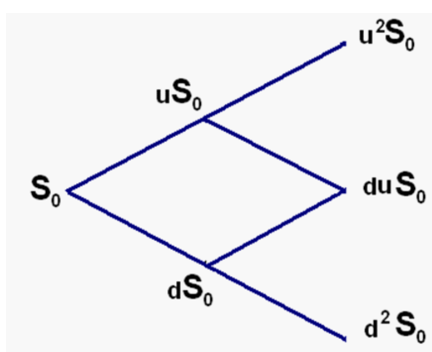


Figura 6.

Con $d < r < u$ donde r es igual a 1 mas la tasa de interés y u y d son factores proporcionales de crecimiento (de esta manera ni el riesgoso ni el libre de riesgo es mejor estocásticamente).

Claramente, los movimientos del precio accionarios son mucho más complicados que el modelo presentado anteriormente. Se considera a este modelo por las siguientes razones: en primer lugar, dentro de este modelo el concepto de precio de arbitraje y su relación al precio de riesgo-neutral se transmite claramente; en segundo, el modelo se usa en la práctica porque con un número suficiente de pasos, éste proporciona una buena aproximación computacional.

Imaginarse que se está lanzando una moneda, y cuando consigue un "Sol," los movimientos del precio accionarios aumentan, pero cuando consigue un "Águila," el precio baja. Denote el precio en el momento 1 por $S_1(H) = uS_0$ si el lanzamiento produce sol (H), y por $S_1(T) = dS_0$ si sale águila (T). Después del segundo lanzamiento, el precio será:

$$\begin{aligned} S_2(HH) &= uS_1(H) = u^2S_0, \quad S_2(HT) = dS_1(H) = duS_0, \\ S_2(TT) &= dS_1(H) = d^2S_0, \quad S_2(TH) = dS_1(H) = udS_0. \end{aligned}$$

Después de tres lanzamientos, hay ocho posibles sucesiones de la moneda, aunque no para todos ellos el resultado en los precios de la acción son diferentes en el momento 3.

Suponga que el tercer lanzamiento es el último entonces el conjunto de todos los posibles resultados es el siguiente:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HHT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

Denótese la $k - \textit{ésima}$ componente por ω_k. El precio accionario S_k en el tiempo k depende de los lanzamientos de la moneda. Para dar énfasis a esto comúnmente se escribe $S_k(\omega)$. En general el proceso no depende de toda la historia, por ejemplo S_3 depende de todos los ω, pero S_2 depende sólo de los primeros dos componentes de ω, S_1 depende sólo del primer componente de ω, y S_0 no depende en absoluto de ω. Pero en ocasiones se usará la notación $S_2(\omega_1, \omega_2)$ sólo para indicar que S_2 depende de $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Para completar el modelo, se introduce a un **mercado de valores** con la proporción de interés r; \$1 invertido en el mercado de valores se vuelve $\$(1+r)$ en el próximo período. Tomando r como la proporción de interés por pedir prestado y prestar. Supóngase que:

$$d < 1 + r < u. \tag{4.1}$$

El modelo no tendría el sentido si no hubiera esta condición.

Con la acción como el recurso subyacente, se considera una opción europea call con el precio de ejecución $K > 0$ al tiempo de expiración 1. Esta opción confiere el derecho de comprar la acción en el momento 1 a K dólares. Denótese por

$$V_1(\omega) = (S_1(\omega) - K)^+ = max\{S_1(\omega) - K, 0\}$$

el valor (payoff) de esta opción a la expiración. Claramente, $V_1(\omega)$ sólo depende de ω_1, aunque, como se menciono anteriormente, escribimos $V_1(\omega_1)$ como $V_1(\omega)$. La primera tarea es calcular el precio de arbitraje de esta opción al tiempo cero.

Suponga que en $t = 0$ se vende la opción a V_0 dólares, dónde V_0 es necesario determinarlo. En el instante $t = 1$ se tiene la obligación de pagar $(uS_0 - K)^+$ si $\omega_1 = H$ ó $(dS_0 - K)^+$ si $\omega_1 = T$. En el momento que vende la opción, no sabe todavía qué valor ω_1 tomará. Cubre su posición corta en la opción comprando Δ_0 acciones dónde Δ_0 se tiene que determinar. Puede usar los beneficios V_0 de la venta de la opción para este propósito, y pedir préstamo si es necesario a una tasa de interés r para completar la compra. Si V_0 es suficiente para comprar las Δ_0 acciones entonces decide invertir el dinero restante a una tasa de interés r. En cualquier caso, tendrá $V_0 - \Delta_0$ dólares invertidos en el mercado de valores dónde esta cantidad podría ser negativa. También poseerá Δ_0 acciones.

Si la acción sube, el valor del portafolio (excluyendo la posición corta en la opción) es

$$\Delta_0 S_1(H) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$

y necesita tener $V_1(H)$. Así, se escoge V_0 y Δ_0 tales que

$$V_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0), \tag{4.2}$$

Si la acción baja, el valor de su portafolio es

$$\Delta_0 S_1(T) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0).$$

En este caso necesita tener $V_1(T)$, así, escoge V_0 y Δ_0, tales que

$$V_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \tag{4.3}$$

Éstas son dos ecuaciones con dos incógnitas. Entonces restando (4.3) de (4.2), se obtiene

$$V_1(H) - V_1(T) = \Delta_0(S_1(H) - S_1(T)) \tag{4.4}$$

despejando

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \tag{4.5}$$

Para completar la solución de (4.2) y (4.3), debemos sustituir (4.5) en (4.2) y resolver para V_0. Simplificando se obtiene que

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_1(H) + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1(T)\right]. \tag{4.6}$$

La expresión (4.6) es el precio del arbitraje para la opción europea call con el pago V_1 en el momento 1. Para simplificar esta fórmula, se define

$$\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \qquad \widetilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1 - \widetilde{p}, \tag{4.7}$$

con lo cual se puede expresar (4.6) de la forma siguiente

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_1(H) + \widetilde{q}V_1(T)\right]. \tag{4.8}$$

Debido a que $d < u$, $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ se encuentran bien definidos, es decir, los denominadores en (4.7) no son cero. También a causa de (4.1), $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ están en el intervalo $(0,1)$, y como suman 1, se pueden considerar como las probabilidades de H y T, respectivamente. Las cuáles son llamadas las probabilidades de riesgo-neutral. Estas probabilidades aparecen cuando se resuelve las ecuaciones (4.2) y (4.3), y no tiene que ver con las probabilidades reales de conseguir H o T en los lanzamientos de la moneda.

Ahora considérese una opción europea call que paga K dólares en $t = 2$. En la expiración, el pago de esta opción es $V_2 = (S_2 - K)^+$ dónde V_2 y S_2 dependen de ω_1 y ω_2, el primero y segundo lanzamiento de la moneda. Se quiere determinar el precio del arbitraje para esta opción en $t = 0$. Suponga que un agente vende la opción en $t = 0$ a V_0 dólares dónde V_0 todavía será determinado. Y compra entonces Δ_0 acciones, invirtiendo $V_0 - \Delta_0 S_0$ dólares en el mercado. En el momento 1, el agente tiene un portafolio (excluyendo la posición corta en la opción) estimado por

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{4.9}$$

Aunque no está indicado en la notación, S_1 y por consiguiente X_1 dependen de ω_1. Así, hay dos ecuaciones implícitas en (4.9):

$$\begin{aligned} X_1(H) &= \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \\ X_1(T) &= \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \end{aligned}$$

Después del primer lanzamiento de la moneda, el agente tiene X_1 dólares. Suponga que decide sostener Δ_1 acciones dónde Δ_1 depende de ω_1, porque el agente sabe qué valor ha tomado ω_1. Invierte el resto de su riqueza, $X_1 - \Delta_1 S_1$ en el mercado y en el período siguiente, V_2 está dado por

$$V_2 = \Delta_0 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1). \tag{4.10}$$

Considerando los cuatro posibles resultados, (4.10) puede escribirse

$$\begin{aligned}
V_2(HH) &= \Delta_0(H)S_2(HH) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)), \quad (4.11)\\
V_2(HT) &= \Delta_0(H)S_2(HT) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)),\\
V_2(TH) &= \Delta_0(T)S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(H)S_1(T)),\\
V_2(TT) &= \Delta_0(T)S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)).
\end{aligned}$$

Ahora se tienen seis ecuaciones, las dos representadas por (4.9) y las cuatro representadas por (4.11). En las seis se desconoce V_0, Δ_0, $\Delta_1(H)$, $\Delta_1(T)$, $X_1(H)$, y $X_1(T)$.

Para resolver estas ecuaciones, se empieza con las últimas dos ecuaciones de (4.11):

$$\begin{aligned}
V_2(TH) &= \Delta_0(T)S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(H)S_1(T)),\\
V_2(TT) &= \Delta_0(T)S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)).
\end{aligned}$$

Substrayendo una de éstas en la otra y resolviendo para $\Delta_1(T)$, se obtiene

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)} \tag{4.12}$$

y sustituyendo esto en cualquier ecuación de (4.11), se obtiene que

$$X_1(T) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_2(TH) + \widetilde{q}V_2(TT)\right]. \tag{4.13}$$

La ecuación (4.13), da el valor del portafolio cubierto en el momento 1 si la acción baja en el intervalo 0 y 1. Se define esta cantidad para ser el valor del arbitraje de la opción en el momento 1 si $\omega_1 = T$, denotándolo por $V_1(T)$. Se ha mostrado simplemente que

$$V_1(T) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_2(TH) + \widetilde{q}V_2(TT)\right]. \tag{4.14}$$

Los dueños deben elegir su portafolio para que su riqueza $X_1(T)$ si $\omega_1 = T$ está de acuerdo con $V_1(T)$ definido por (4.14). Esta fórmula es análoga a la fórmula (4.8), pero adelantada por un paso. Las primeras dos ecuaciones implícitas en (4.10) llevan de una manera similar a las fórmulas

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} \tag{4.15}$$

y $X_1(H) = V_1(H)$, dónde $V_1(H)$ es el valor de la opción en momento 1 si $\omega_1 = H$, definido por

$$V_1(H) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_2(HH) + \widetilde{q}V_2(HT)\right]. \tag{4.16}$$

Ésta es una fórmula análoga a (4.8), adelantado por un paso. Finalmente, se han encontrado los valores $X_1(H) = V_1(H)$ y $X_1(T) = V_1(T)$ en las dos ecuaciones implícitas en (4.9). La solución de estas ecuaciones para Δ_0 y V_0 son igual que la solución de (4.2) y (4.3), y resulta de nuevo en (4.5) y (4.8).

Si V_k denota el valor al momento k de una seguridad derivada, y esta depende de los primeros k lanzamientos de una moneda ω_1,...ω_k, entonces en el momento $k-1$, después de los primeros $k-1$ lanzamientos son conocidos ω_1,...ω_{k-1}, el portafolio cubierto con posición corta debe mantener Δ_{k-1} (ω_1, ..., ω_{k-1}) acciones, donde

$$\Delta_{k-1}(\omega_1, ..., \omega_{k-1}) = \frac{V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}H) - V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)}{S_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) - S_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)} \tag{4.17}$$

y el valor en el momento $k-1$ de la seguridad derivada, cuando los primeros $k-1$ lanzamientos de la moneda en los resultados ω_1, ..., ω_{k-1}, se da por

$$V_{k-1}(\omega_1, ..., \omega_{k-1}) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) + \widetilde{q}V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)\right] \tag{4.18}$$

Ahora se considera una **opción americana.** De nuevo una función g es especifica. En cualquier período k, el poseedor de la seguridad derivada puede "ejercer" y recibe el pago $g(S_k)$. Así, el portafolio cubierto debe crear un proceso de riqueza que satisface

$$X_k \geq g(S_k)$$

para todo k. La desigualdad anterior es debido a que el valor de la seguridad derivada en el momento k es por lo menos $g(S_k)$, y las riquezas calculan el valor en ese momento debiendo igualar el valor de la seguridad derivada.

El algoritmo americano.

$$\begin{aligned} v_n(x) &= g(x) \\ v_k(x) &= max\left\{\frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}v_{k+1}(ux)+\widetilde{q}v_{k+1}(dx)\right], g(x)\right\}. \end{aligned}$$

Entonces $v_k(S_k)$ es el valor de la opción en el momento k.

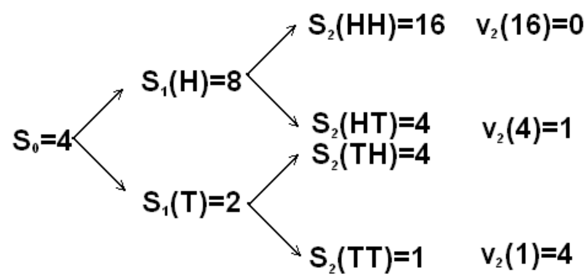


Figura 7.

Ejemplo 4.2.1 *Ver Figura 7.* $S_0 = 4, u = 2, d = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}, \widetilde{p} = \widetilde{q} = \frac{1}{2}, n = 2.$ *Sea* $v_2(x) = g(x) = (5-x)^+$. *Entonces*

$$\begin{aligned} v_1(8) &= \max\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1\right], (5-8)^+\right\} \\ &= \max\left\{\frac{2}{5}, 0\right\} \\ &= 0.40, \\ v_1(2) &= \max\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4\right], (5-2)^+\right\} \\ &= \max\{2, 3\} \\ &= 3.00, \\ v_0(4) &= \max\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 0.4+\frac{1}{2}\cdot 3{,}0\right], (5-4)^+\right\} \\ &= \max\{1.36, 1\} \\ &= 1.36. \end{aligned}$$

Ahora se construye el portafolio de esta opción. Empezando con la riqueza inicial $X_0 = 1.36$ *y calculando* Δ_0 *como sigue:*

$$\begin{aligned} 0.40 &= \upsilon_1(S_1(H)) \\ &= S_1(H)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= 8\Delta_0 + \frac{5}{4}(1.36 - 4\Delta_0) \\ &= 3\Delta_0 + 1.70 \end{aligned}$$

entonces $\Delta_0 = -0.43$

$$\begin{aligned} 3.00 &= \upsilon_1(S_1(T)) \\ &= S_1(T)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= 2\Delta_0 + \frac{5}{4}(1.36 - 4\Delta_0) \\ &= -3\Delta_0 + 1.70 \end{aligned}$$

entonces $\Delta_0 = -0.43$. *Usando* $\Delta_0 = -0.43$ *resulta que*

$$X_1(H) = \upsilon_1(S_1(H)) = 0.40, \qquad X_1(T) = \upsilon_1(S_1(T)) = 3.00.$$

Ahora calculando Δ_1 *con* $S_1(T) = 2$

$$\begin{aligned} 1 &= \upsilon_2(4) \\ &= S_2(TH)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)) \\ &= 4\Delta_1(T) + \frac{5}{4}(3 - 2\Delta_1(T)) \\ &= 1.5\Delta_1(T) + 3.75 \end{aligned}$$

entonces $\Delta_1(T) = -1.83$

$$\begin{aligned} 4 &= \upsilon_2(1) \\ &= S_2(TT)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)) \\ &= \Delta_1(T) + \frac{5}{4}(3 - 2\Delta_1(T)) \\ &= -1.5\Delta_1(T) + 3.75 \end{aligned}$$

entonces $\Delta_1(T) = -0.16$. *Se consiguieron respuestas diferentes para* $\Delta_1(T)$, *pero el objetivo es escoger* V_1 *y* Δ_1 *sin tener en cuenta que la acción sube o* *baja, pero en este caso se llega a que el $\Delta_1(T)$ toma dos posibles valores para el caso cuando sube o baja la acción. Si se tuviera $X_1(T) = 2$, el valor de la opción europea put, se tendría*

$$\begin{aligned}
\text{Si } 1 &= 1.5\Delta_1(T) + 2.5 \quad \textit{entonces} \quad \Delta_1(T) = -1, \\
\text{Si } 4 &= -1.5\Delta_1(T) + 2.5 \quad \textit{entonces} \quad \Delta_1(T) = -1.
\end{aligned}$$

El valor del portafolio cubierto de una Opción americana es

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - C_k - \Delta_k S_k) \\
&= (1+r)X_k + \Delta_k(S_{k+1} - (1+r)S_k) - (1+r)C_k
\end{aligned}$$

Aquí, C_k es la cantidad "consumida" en el momento k.

i) El valor descontado del portafolio es una supermartingala.

ii) El valor satisface $X_k > g(S_k)$, $k = 0, 1, .., n$.

iii) El valor del proceso es el proceso más pequeño con estas propiedades.

¿En qué momento consume? Si

$$\widetilde{E}\left[(1+r)^{-(k+1)}\upsilon_{k+1}(S_{k+1})|F_k\right] < (1+r)^{-k}\upsilon_k(S_k),$$

o, equivalentemente,

$$\widetilde{E}\left(\frac{1}{1+r}\upsilon_{k+1}(S_{k+1})|F_k\right) < \upsilon_k(S_k)$$

y el poseedor de la opción americana no ejerce, entonces el vendedor de la opción puede consumir para cerrar la diferencia. Haciendo esto, él puede asegurar que $X_k = \upsilon_k(S_k)$ para todo k, dónde el υ_k es el valor definió por el algoritmo americano en la parte anterior.

En el ejemplo anterior, $\upsilon_1(S_1(T)) = 3$, $\upsilon_2(S_2(TH)) = 1$ y $\upsilon_2(S_2(TT)) = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}\left(\frac{1}{1+r}\upsilon_2(S_2)|F_1\right)(T) &= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 4\right] \\
&= \frac{4}{5}\left[\frac{5}{2}\right] \\
&= 2, \\
\upsilon_1(S_1(T)) &= 3.
\end{aligned}$$

hay una diferencia de tamaño 1. Si el dueño de la opción no la ejerce en el tiempo 1 en el estado $\omega_1 = T$, entonces el vendedor puede consumir 1 en el momento 1. Después de esto, él usa el portafolio cubierto

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(u\,\mathrm{S}_k) - V_{k+1}(d\,\mathrm{S}_k)}{(u-d)S_k}.$$

En el ejemplo, se tiene $v_1(S_1(T)) = g(S_1(T))$. Es óptimo para el dueño de la opción americana ejerza siempre que su valor $v_k(S_k)$ está de acuerdo con su valor intrínseco $g(S_k)$.

Definición 4.2.2 *(Tiempo de Paro) Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y el* $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$ *una filtración. Un tiempo de paro es una variable aleatoria:* $\tau : \Omega \to \{0, 1, 2, ...n\} \cup \{\infty\}$ *con la propiedad que:*

$$\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k,$$

para todo $k = 0, 1, ..., n, \infty$.

Ejemplo 4.2.3 *Considérese el modelo binomial con* $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$, $\tilde{p} = \tilde{q} = \frac{1}{2}$, $n = 2$. *Sean* ω_0, ω_1, ω_2 *funciones de valor definidas para la opción americana put con precio de ejecución 5. Sea*

$$\tau(\omega) = min\{k; \nu_k(S_k) = (5 - S_k)^+\},$$

el tiempo de paro τ *que corresponde a "detener el valor de la opción la primera vez que está de acuerdo con su valor intrínseco". Este sería un tiempo de ejecución óptimo. Notando que*

$$\tau(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & \omega \in A_T \\ 2 & si & \omega \in A_H \end{array} \right. .$$

Donde $A_H = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$ *y* $A_T = \{THH, THT, TTH, TTT\}$ *Ahora verifíquese que* τ *es de hecho un tiempo de paro:*

$$\begin{aligned} \{\omega; \tau(\omega) &= 0\} = \varnothing \in \mathcal{F}_0, \\ \{\omega; \tau(\omega) &= 1\} = A_T \in \mathcal{F}_1, \\ \{\omega; \tau(\omega) &= 2\} = A_H \in \mathcal{F}_2. \end{aligned}$$

Capítulo 5

EJEMPLO

5.1. Problema de la Ruina del Jugador

Sean A, B dos jugadores de póker. Supóngase que el jugador A tiene probabilidad p de ganar una ronda (q de perder). En cada ronda apuestan una unidad monetaria. Sea X_n la fortuna total del jugador A en la n-ésima mano. Suponga que inicialmente $X_0 = 2$.

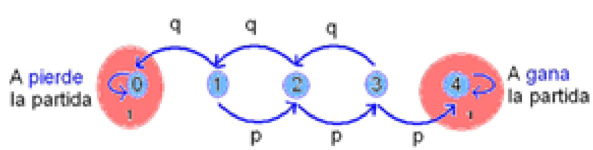


Figura 8.

Las probabilidades de transición en el caso $X_n = 2$ están dadas por:

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+1} &= 4|X_n = 2) = 0,\\
P(X_{n+1} &= 3|X_n = 2) = p,\\
P(X_{n+1} &= 2|X_n = 2) = 0,\\
P(X_{n+1} &= 1|X_n = 2) = q,\\
P(X_{n+1} &= 0|X_n = 2) = 0.
\end{aligned}
$$

De esta manera la matriz de transición está dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el caso general el objetivo del jugador es alcanzar una fortuna total de N unidades y se dirá que el jugador tiene éxito. Suponga que empieza con i unidades dónde $0 < i < N$. El juego termina cuando $X_n = 0$ ó $X_n = N$. El problema que se trabajara en esta sección es determinar la probabilidad de ruina del jugador. A continuación se presentan dos métodos de solución del problema. En el primero se utilizara la teoría de Cadenas de Markov (ver Capítulo 2) y el Método 2 consiste en aplicar el Teorema de Paro Opcional, visto en el Capítulo 3.

METODO 1:

Sea p la probabilidad de ganar una unidad en cada jugada y X_n la fortuna acumulada hasta la n-ésima jugada. Además se supone que la fortuna inicial del jugador es $X_0 = x$. El objetivo es calcular la probabilidad de que el jugador incremente su fortuna a cierta cantidad b antes de que disminuya a una cantidad a $(0 \leq a \leq b \leq N)$. En particular, el caso $a = 0$ se le conoce como problema de la ruina del jugador.

Considerando p como la probabilidad de ganar una unidad, q la de perder una unidad y r de quedar igual. Entonces la función de transición es la siguiente

$$P_{xy} = \begin{cases} q, & y = x - 1 \\ r, & y = x \\ p & y = x + 1 \end{cases}$$

$x \in S$, donde $S = \{0, 1, 2, \ ...N\}$ es el conjunto de estados, y $p, q, r \geq 0$ con $p + q + r = 1$. En este caso la matriz está dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & r & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & r & p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sean a y $b \in S$ con $a < b$ y sea

$$U(x) = P_x(T_a < T_b)$$

con $a < x < b$ con $U(a) = 1$ y $U(b) = 0$.

Si la cadena empieza en y entonces en un paso va a $y-1$, $y+1$ o se queda en donde mismo, con respecto a las probabilidades q, p ó r. De esto se sigue que:

$$U(y) = qU(y-1) + rU(y) + pU(y+1) \tag{5.1}$$

Dado que $r = 1 - p - q$, (5.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} U(y) &= qU(y-1) + (1-p-q)U(y) + pU(y+1) \\ &= qU(y-1) + U(y) - pU(y) - qU(y) + pU(y+1) \\ &= -q[U(y) - U(y-1)] + p[U(y+1) - U(y)] + U(y), \end{aligned}$$

de lo cual se tiene que

$$p[U(y+1) - U(y)] = q[U(y) - U(y-1)].$$

Entonces

$$U(y+1) - U(y) = \frac{q}{p}[U(y) - U(y-1)], \tag{5.2}$$

con $a < y < b$. Sea

$$\gamma_y = \begin{cases} 1 & si \quad y = 0 \\ \frac{q_1 \ldots q_y}{p_1 \ldots p_y} & si \quad y \geq 1 \end{cases}. \tag{5.3}$$

Usando (5.3) se puede escribir (5.2) de la forma siguiente

$$U(y+1) - U(y) = \left[\left(\frac{q_1 \ldots q_y}{p_1 \ldots p_y} \right) \left(\frac{q_1 \ldots q_{y-1}}{p_1 \ldots p_{y-1}} \right)^{-1} \right] \left[U(y) - U(y-1) \right],$$

$$U(y+1) - U(y) = \frac{\gamma_y}{\gamma_{y-1}} \left[U(y) - U(y-1) \right], \tag{5.4}$$

donde $a < y < b$. Usando (5.4) de forma iterativa de tiene que

$$\begin{aligned} U(y+1) - U(y) &= \frac{\gamma_y}{\gamma_{y-1}} \frac{\gamma_{y-1}}{\gamma_{y-2}} \left[U(y-1) - U(y-2) \right] \\ &= \ldots \\ &= \frac{\gamma_y}{\gamma_a} \left[U(a+1) - U(a) \right], \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$U(y+1) - U(y) = \frac{\gamma_y}{\gamma_a}\left[U(a+1) - U(a)\right].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -[U(y+1) - U(y)] &= -\frac{\gamma_y}{\gamma_a}\left[U(a+1) - U(a)\right], \\ U(y) - U(y+1) &= \frac{\gamma_y}{\gamma_a}\left[U(a) - U(a+1)\right], \end{aligned} \tag{5.5}$$

Sumando desde $y = a$, hasta $y = b-1$, mediante la relación (5.5),

$$U(a) - U(b) = \frac{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y}{\gamma_a}\left[U(a) - U(a+1)\right]. \tag{5.6}$$

Sustituyendo en (5.6) $U(a) = 1$ y $U(b) = 0$, se llega a

$$1 + 0 = \frac{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y}{\gamma_a}\left[U(a) - U(a+1)\right],$$

de lo cual

$$\frac{1}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y} = \frac{1}{\gamma_a}\left[U(a) - U(a+1)\right].$$

Así, sustituyendo a por y en (5.5) se tiene que

$$U(y) - U(y+1) = \frac{\gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y},$$

donde $a \le y < b$. Sumando la ecuación anterior de $y = x$ a $y = b-1$, se obtiene que

$$U(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1}\gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y},$$

como $U(b) = 0$ y $U(x) = P_x(T_a < T_b)$ entonces

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1}\gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y}. \tag{5.7}$$

Multiplicando por -1 y sumando 1 en ambos lados se llega a

$$1 - P_x(T_a < T_b) = 1 - \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y},$$

equivalentemente

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}, \tag{5.8}$$

donde $a < x < b$ y $\gamma_y = (q_1 q_2 \cdots q_y)(p_1 p_2 \cdots p_y)^{-1}$. Como el juego termina cuando $X_n = 0$ ó $X_n = N$, entonces sustituyendo $a = 0$ y $b = N$ en (5.8) se concluye que

$$P_x(T_N < T_0) = \frac{\sum_{y=0}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=0}^{b-1} \gamma_y}. \tag{5.9}$$

La igualdad (5.9) es conocida como *probabilidad de éxito*. Por lo tanto, la probabilidad de ruina está dada por

$$P_x(T_N \geq T_0) = 1 - P_x(T_N < T_0)$$

A continuación, se presenta un método alternativo para resolver el problema de la ruina del jugador. Dicho método hace uso de los resultados trabajados en el Capítulo 3.

METODO 2:

Se requiere calcular, como en el método anterior, la siguiente probabilidad: $P_x[T_b < T_a]$, donde $x \in (a, b)$, a, b, x números enteros no-negativos. Para determinar dicha probabilidad se hará uso del *Teorema 3.1.11*, para ello considérese el tiempo de paro

$$T = \min\{n > 0 : X_n \notin (a, b)\}.$$

Como los eventos $\{X_T = b\}$ y $[T_b < T_a]$ son equivalentes, se tiene

$$P[X_T = b] = P[T_b < T_a]. \tag{5.10}$$

Para poder aplicar el Teorema 3.1.11 es necesario verificar que

$$P_x[T < \infty] = 1.$$

Claramente la ecuación anterior es validad, ya que independientemente del valor de la fortuna inicial $X_0 = x \in (a, b)$ (recuérdese que a, b, x números enteros no-negativos), existe una trayectoria $(x_0, x_1, ..., x_{b-a}, ...)$ del proceso $\{X_n\}$ tal que $P[X_{b-a} \notin (a, b)] > 0$. Por lo tanto, existe $k > 0$ tal que $P_x[T \leq k] \geq \gamma > 0$, lo cual implica que $P_x[T > k] \leq 1 - \gamma$. Ahora, aplicando el hecho de que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov se puede ver que $P_x[T > 2k] \leq (1-\gamma)^2$. En general se tiene

$$P_x[T > nk] \leq (1 - \gamma)^n,$$

para todo $n \geq 1$. Hacie.ndo n tender a infinito en esta expresión se llega a que $P_x[T < \infty] = 1$.

Sólo cuando $p = \frac{1}{2}$ el proceso $\{X_n\}$ es una martingala, es decir,

$$E\left[X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, ..., X_0\right] = X_n.$$

En este sentido, el cálculo de $P_x[T_b < T_a]$ se hará en dos partes.

I.- $p = \frac{1}{2}$

Es claro que $X_{T \wedge n} \in [a, b]$ para todo $n \geq 0$, ya que la cadena incrementa o disminuye una unidad. En otras palabras, si $T \wedge n = T$ se tiene que $X_T \in \{a, b\}$. Por lo tanto $\{X_{T \wedge n}\}$ es una martingala acotada. Ahora utilizando *Teorema 3.1.11* se sigue que

$$x = E_x[X_0] = E_x[X_T] = aP_x[X_T = a] + bP_x[X_T = b],$$

donde $E_x[\cdot] = E_x[\cdot | X_0 = x]$, es decir, $E_x[\cdot]$ es el operador esperanza correspondiente a la probabilidad $P_x(\cdot)$. Ahora, como $P_x[X_T = a] = 1 - P_x[X_T = b]$, se tiene

$$x = a + (b - a)P[X_T = b].$$

Finalmente, por (5.10) se concluye

$$P_x[T_b < T_a] = \frac{x - a}{b - a},$$

para todo $x \in (a, b)$.

II.- $p \neq \frac{1}{2}$

En este caso, $\{S_n\}$ no es una martingala. Sin embargo, por la Proposición 3.1.18, $\{g(X_n)\}$ es una martingala donde $g(y) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^y$. Aún mas, como $X_{T\wedge n} \in [a,b]$ para toda $n \geq 0$, $\{g(X_{T\wedge n})\}$ es una martingala acotada, y por lo tanto del Teorema de Tiempo de Paro Optimo,

$$E_x[g(X_T)] = E_x[g(X_0)] = E_x\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^x\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x. \tag{5.11}$$

Por otro lado, siguiendo argumentos similares al caso $p = \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} E_x[g(X_T)] &= g(a)P_x[X_T = a] + g(b)P_x[X_T = b] \qquad (5.12)\\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^a P_x[X_T = a] + \left(\frac{1-p}{p}\right)^b P_x[X_T = b] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^a + P_x[X_T = b]\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^b - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a\right]. \end{aligned}$$

Combinando (5.10), (5.11) y (5.12), se concluye que

$$P_x[T_b < T_a] = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^b - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}, \tag{5.13}$$

para todo $x \in (a,b)$. Por lo tanto $1 - P_x[T_b < T_a]$ es la probabilidad de ruina.

Como conclusión se puede observar después de que el método 1 y método 2 utilizan diferentes herramientas matemáticas se llega al mismo resultado (5.9) y (5.13) . Notando que de cierta manera fue más sencillo trabajar el método 1 dado que se usa solo la teoría de Cadenas de Markov sin adentrarse a tanta formalidad como en el método 2, al usar Martingalas y el Teorema de Paro Opcional.

5.2. Aplicación (General Electric)

El comercio de opciones se puede interpretar como un juego entre dos jugadores. Este tipo de juego es semejante al problema de la ruina del jugador mencionado anteriormente, considerando al inversionista como el jugador A y al escritor como el jugador B con probabilidad p de que el precio accionario aumente en un día dado, y q de que disminuya.

En esta sección haremos una aplicación del problema de la ruina del jugador en el área de opciones financieras. En particular, para ejemplificar dicha aplicación se utilizaran los datos históricos de la empresa General Electric (GE). GE es una empresa multinacional, con sede central en Fairfield, Connecticut. La empresa se describe a sí misma como compuesta por un número de negocios primarios unidos para "negociar".

Participa en una variedad de mercados, incluyendo la generación, transmisión y distribución de electricidad, bombillas, automatización industrial, motores, locomotoras (trenes), aviones, motores jet, servicios de aviación y materiales plásticos, siliconas, y abrasivos. Está presente en más de 100 países. Hoy en día se centra principalmente en servicios, debido al cambio de estrategia dictado por Jack Welch, quien decidió abandonar sectores industriales y enfocarse principalmente en servicios de todo tipo (financieros, ingeniería, outsourcing, etc.).

GE es una de las mayores empresas de EE.UU. y uno de los símbolos del capitalismo americano, siendo una multinacional presente en todo el mundo y en numerosos sectores de actividad.

En los recientes meses la multinacional General Electric ha comenzado la venta de acciones, y las ha publicado en miles de sitios de venta.

Para el estudio de este problema, se investigaron los precios del cierre en la bolsa de valores de la empresa GE, dado que los precios de las acciones se comportan de forma volátil, haciendo que día a día el cambio sea al azar, tomando los datos accionaros del 01/01/2006 al 20/08/2007 para hacer una aplicación de la probabilidad de ruina de un inversionista. (*Véase Apéndice C*).

Antes de hacer la aplicación del Problema de la Ruina del Jugador se hace uso del Modelo Binomial para derivar el precio de la opción al instante en el que se adquiere, considerando el caso de tener los siguientes datos $S_0 = 35.37$ (*Véase Apéndice C*), $u = 1.0946$, $d = 0.9429$, $r = 1.07$, $\widetilde{p} = 0.838$, $\widetilde{q} = 0.162$, $n = 12$ después de usar la definición del Modelo Binomial y las ecuaciones (4.1) y (4.7). Se tiene que $v_{13}(x) = g(x) = (38 - x)^+$. Entonces usando

$$v_k(x) = max\left\{\frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}v_{k+1}(ux) + \widetilde{q}v_{k+1}(dx)\right], g(x)\right\}.$$

Se encontraron los siguientes valores, considerando al tiempo como el cambio de precio cada 30 días:

$\upsilon_0(35.37) = 2.630$
$\upsilon_1(35.71) = 1.892$
$\upsilon_1(33.35) = 4.650$
$\upsilon_2(42.37) = 1.224$
$\upsilon_2(36.50) = 6.162$
$\upsilon_2(31.44) = 6.554$
$\upsilon_3(46.38) = 0.657$
$\upsilon_3(39.95) = 4.690$
$\upsilon_3(34.42) = 6.961$
$\upsilon_3(29.65) = 8.350$
$\upsilon_4(50.77) = 0.247$
$\upsilon_4(43.73) = 3.058$
$\upsilon_4(37.67) = 5.397$
$\upsilon_4(332.45) = 7.845$
$\upsilon_4(27.95) = 10.043$
$\upsilon_5(55.57) = 0.271$
$\upsilon_5(47.87) = 1.762$
$\upsilon_5(41.24) = 4.295$
$\upsilon_5(35.52) = 7.072$
$\upsilon_5(30.60) = 9.895$
$\upsilon_5(26.35) = 13.144$
$\upsilon_6(60.83) = 0$
$\upsilon_6(52.40) = 0.345$
$\upsilon_6(45.14) = 2.183$
$\upsilon_6(38.88) = 5.061$
$\upsilon_6(33.49) = 8.052$
$\upsilon_6(28.85) = 11.078$
$\upsilon_6(24.85) = 14.563$
$\upsilon_7(66.59) = 0$
$\upsilon_7(57.36) = 0$
$\upsilon_7(49.41) = 0.441$
$\upsilon_7(42.56) = 2.702$
$\upsilon_7(36.66) = 5.940$
$\upsilon_7(31.58) = 9.133$
$\upsilon_7(27.20) = 12.379$
$\upsilon_7(23.43) = 15.902$
$\upsilon_8(72.89) = 0$
$\upsilon_8(62.78) = 0$
$\upsilon_8(54.08) = 0$
$\upsilon_8(46.59) = 0.965$
$\upsilon_8(40.13) = 3.316$
$\upsilon_8(34.57) = 6.269$
$\upsilon_8(29.78) = 9.223$
$\upsilon_8(25.65) = 12.388$
$\upsilon_8(22.09) = 15.902$
$\upsilon_9(79.78) = 0$
$\upsilon_9(68.72) = 0$
$\upsilon_9(59.20) = 0$
$\upsilon_9(50.99) = 0$
$\upsilon_9(43.93) = 0.563$
$\upsilon_9(37.84) = 3.342$
$\upsilon_9(32.59) = 6.939$
$\upsilon_9(28.08) = 10.319$
$\upsilon_9(24.18) = 13.811$
$\upsilon_9(20.83) = 17.163$
$\upsilon_{10}(87.33) = 0$
$\upsilon_{10}(75.23) = 0$
$\upsilon_{10}(64.80) = 0$
$\upsilon_{10}(55.82) = 0$
$\upsilon_{10}(48.08) = 0$
$\upsilon_{10}(41.42) = 0.719$
$\upsilon_{10}(35.68) = 4.128$
$\upsilon_{10}(30.73) = 8{,}062$
$\upsilon_{10}(26.47) = 11{,}618$
$\upsilon_{10}(22.80) = 15{,}192$
$\upsilon_{10}(19.64) = 18{,}353$
$\upsilon_{11}(95.59) = 0$
$\upsilon_{11}(82.34) = 0$
$\upsilon_{11}(70.93) = 0$
$\upsilon_{11}(61.10) = 0$
$\upsilon_{11}(52.63) = 0$
$\upsilon_{11}(45.34) = 0$
$\upsilon_{11}(39.05) = 0{,}918$
$\upsilon_{11}(33.64) = 5{,}093$
$\upsilon_{11}(28.98) = 9{,}309$
$\upsilon_{11}(24.96) = 13.035$
$\upsilon_{11}(21.50) = 16.495$
$\upsilon_{11}(18.52) = 19.475$
$\upsilon_{12}(104.64) = 0$
$\upsilon_{12}(90.13) = 0$
$\upsilon_{12}(77.64) = 0$
$\upsilon_{12}(66.88) = 0$
$\upsilon_{12}(57.61) = 0$
$\upsilon_{12}(49.63) = 0$
$\upsilon_{12}(42.75) = 0$
$\upsilon_{12}(36.82) = 1.173$
$\upsilon_{12}(31.72) = 6.276$
$\upsilon_{12}(27.32) = 10.673$
$\upsilon_{12}(23.53) = 14.460$
$\upsilon_{12}(20.27) = 17.723$
$\upsilon_{12}(17.46) = 20.533$

Ahora se define

$$\tau(\omega) = min\{k; \nu_k(S_k) = (38 - S_k)^+\}.$$

El tiempo de paro τ corresponde a “detener el valor de la opción la primera vez que está de acuerdo con su valor de liquidación”. Este sería un tiempo de ejecución óptimo. Notando que

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{si al primer momento baja el precio.} \\ 3 & \text{si a los primeros dos momentos baja el precio.} \\ 4 \text{ ó } 5 & \text{si a los primeros tres momentos baja el precio.} \\ 6 & \text{si a los primeros cuatro momentos baja el precio.} \\ 7 & \text{si a los primeros cuatro momentos baja ó a los primeros seis sube el precio.} \\ 8 & \text{si a los primeros cinco momentos baja ó los primeros seis sube el precio.} \\ 9 \text{ ó } 10 & \text{si a los primeros seis momentos baja ó sube el precio.} \\ 11 & \text{si a los primeros siete momentos baja ó a los primeros seis sube el precio.} \\ 12 & \text{en cualquier momento que suba o baje el precio.} \end{cases}$$

El ejemplo anterior ayuda a ver que el Modelo Binomial no está necesariamente alejado de la realidad, porque en los mercados las transacciones se realizan con tanta rapidez que resulta una buena aproximación pensar que las acciones solo puede subir o bajar de un instante a otro. Por lo que el procedimiento puede llevar varias iteraciones permitiendo entender el comportamiento esperado de una opción durante cierto tiempo. En este caso se hizo tan solo para 12 días, para tener una primera aproximación a este modelo. Sin embargo, en el Apéndice B se presenta el código realizado en Matlab, el cual permite hacer el cálculo para un número de días dado por el usuario.

Por otra parte ya teniendo el valor de la opción, los datos adquiridos de GE son usados para representar una variable aleatoria como una Cadena de Markov, con probabilidades de transición. Se sabe por otro lado que el Teorema del Límite Central propone que según vayamos incrementando el tamaño y el número de muestreos estadísticos, el promedio se distribuye aproximadamente normal.

Realizando los cálculos pertinentes se encontró:

Diferencia	
Suma	3.17
n	410
Media	0.007731707
S2	0.110511196
S	0.332432243

LN	
Suma	-0.087
n	410
Media	-0.00021118
S2	8.3744E-05
S	0.00915117

(Donde LN representa logaritmo natural)

Posteriormente se hizo una estimación de la probabilidad de que suba o baje el precio accionario. Además para poder aplicar el problema de la ruina del jugador que se basa principalmente en aumentar o disminuir una unidad por ronda, se calcula la diferencia de un día a otro o el cociente también de un día a otro, dando como resultado alrededor de una unidad, cumpliendo la condición, por lo que se obtienen dos estimaciones posibles para p y q, las cuales son muy parecidas,

	Diferencia	LN
p	0.509277806	0.509005502
q	0.490722194	0.490794498

Con los datos obtenidos, el modelo de la ruina del jugador puede llevarse acabo ocupando el resultado del Método 1 o del Método 2 dado que se llego al mismo resultado. En particular usando el Método 1 se aproximaran las probabilidades de éxito y ruina. Para utilizar dicho método se necesitó determinar los valores de N y x, los cuales son determinados por la prima o pago que se debe efectuar a cambio de la opción y por el precio de la acción del día que se lleve a cabo el contrato.

x=21/08/2007	38.35
prima	2.63
N=x+prima	40.98

Resultados al usar la distribución normal, (diferencia de precios):

Éxito

$$P_{38}(T_{41} < T_0) = \frac{\sum_{y=0}^{37} \left(\frac{0.4907221}{0.5092778}\right)^y}{\sum_{y=0}^{40} \left(\frac{0.4907221}{0.5092778}\right)^y} = 0.968632224.$$

Ruina

$$1 - P_{38}(T_{41} < T_0) = 0.031367776.$$

Resultados al usar la distribución lognormal, (logaritmo del cociente de precios):

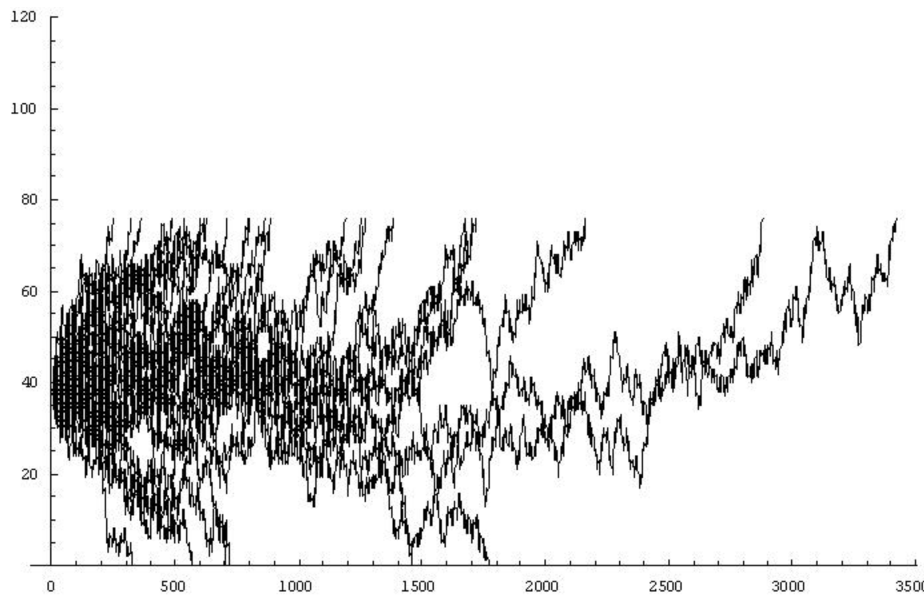
Éxito

$$P_{38}(T_{41} < T_0) = \frac{\sum_{y=0}^{37}\left(\frac{0.490794498}{0.509005502}\right)^y}{\sum_{y=0}^{40}\left(\frac{0.490794498}{0.509005502}\right)^y} = 0.968616043.$$

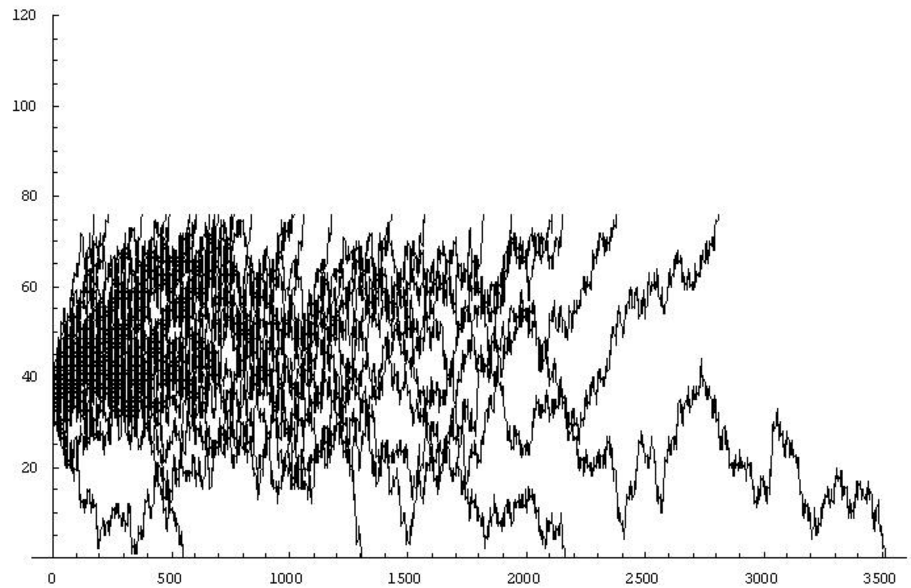
Ruina

$$1 - P_{38}(T_{41} < T_0) = 0.031383957.$$

Adicionalmente se uso Mathematica para simular a este modelo, dando una representación gráfica de los diferentes pasos de la cadena de Markov y entender mejor el análisis que se realizo. A continuación se presentan las graficas correspondiente a la simulación del proceso.



Grafica del proceso considerando la diferencia de un día a otro



Grafica del proceso considerando el cociente de un día a otro.

El modelo matemático ha mostrado que un inversionista que compra un contrato de opción de General Electric a un suscriptor de la opción, gana con probabilidad 0.96. El resultado no determina que al comprar acciones de General Electric se hará rico, al contrario, el modelo sólo muestra como pueden simular el comercio de una opción usando la idea del problema de la Ruina del Jugador.

Capítulo 6

Conclusión

El propósito general de esta tesis fue comprender la importancia y las consecuencias que tiene la teoría de Cadenas de Markov y Martingalas. Para ello se integró en los primeros capítulos un esquema amplio de cada uno de estos temas, es decir, se desarrollo un marco conceptual que incluye los aspectos más importantes, logrando cubrir los objetivos que se plantearon en la introducción.

Se trabajo con un ejemplo clásico conocido como el Problema de la Ruina del Jugador (PRJ), cuyo estudio más concreto de este problema tiene sus orígenes en las Cadenas de Markov. Estas cadenas se usan en distintas aplicaciones, lo que llevo a desarrollar un modelo en el cual se vincula el PRJ con opciones financieras. Esto se logró al hacer una aplicación del problema de la Ruina del Jugador a un inversionista que compra un contrato de opción de General Electric (GE) a un suscriptor de la opción, ganando con una probabilidad aproximadamente de 0.96, al investigar los datos históricos de GE sólo de un año y medio.

En el modelo matemático se usaron dos métodos diferentes de estimar las probabilidades de éxito o ruina. La variación depende de la variable aleatoria usada en el modelo, es decir, una fue con distribución normal, esto puede justificarse porque el cambio diario del cierre de precios de acciones es relativamente el azar. Y la otra se desarrollo como una aproximación de la proporción entre el precio del cierre de un día al próximo obteniendo una distribución lognormal.

Por otra parte se logró también hacer una aplicación del PRJ con ayuda del tema de Martingalas con apoyo del Teorema de Paro Optimo, pues en el modelo, un tiempo de paro podría representar el momento que se llega al éxito o a la ruina, en el tiempo que la fortuna acumulada llega a cierta cantidad específica, como agotarse los recursos o ganar más de lo invertido.

La conclusión de esta parte del trabajo es las herramientas de Cadenas de Markov y Martingalas muy importante para analizar este tipo de situaciones. Notando que en el desarrollo de este estudio, resulto más natural, y en cierto modo más sencillo, el método markoviano a través del estudio de cadenas dado que se trabajo con menos base teórica; y las martingalas no han surgido de forma natural, pero han resuelto de forma muy elegante el estudio del problema de la ruina del jugador.

Este modelo fue creado para dar una primera aproximación del movimiento del mercado de valores, a pesar de que se restringe el número de variables se obtuvieron conclusiones satisfactorias. El estudio realizado en este trabajo abre la posibilidad de hacer un análisis mas amplio del problema a tiempo continuo.

Capítulo 7

APÉNDICE

7.1. Apéndice A

ESPERANZA CONDICIONAL

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{F}$, y ξ una variable aleatoria. Si ξ es P-integrable, entonces definimos a la Esperanza Condicional de ξ dado $\mathcal{G}$, como la variable aleatoria denotada por $E(\xi \mid \mathcal{G})$, y es tal que:

1. $E(\xi \mid \mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$-medible
2. Para todo $A \in \mathcal{G}$, se tiene que $\int\limits_A E(\xi \mid \mathcal{G}) dP = \int\limits_A \xi dP$.

Si $C \in \mathcal{F}$, entonces definimos a la probabilidad condicional de C dado $\mathcal{G}$, como $P(C \mid \mathcal{G}) := E(I_C \mid \mathcal{G})$.

Proposición 7.1.1 *Sean ξ y η variables aleatorias P-integrables sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$, entonces*

a) Si ξ es una constante k, entonces $E(\xi \mid \mathcal{G}) = k$.

b) $E(\xi + \eta \mid \mathcal{G}) = E(\xi \mid \mathcal{G}) + E(\eta \mid \mathcal{G})$.

c) $E[E(\xi \mid \mathcal{G})] = E(\xi)$.

d) Si ξ es $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(\xi\eta \mid \mathcal{G}) = \xi E(\eta \mid \mathcal{G})$, en particular, $.E(\xi \mid \mathcal{G}) = \xi$.

e) Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, entonces $E(\xi \mid \mathcal{G}) = E[E(\xi \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}'] = E[E(\xi \mid \mathcal{G}') \mid \mathcal{G}]$.

f) si $\xi_n \geq 0$, y $\xi_n \uparrow \xi$, entonces $.E(\xi_n \mid \mathcal{G}) \uparrow E(\xi \mid \mathcal{G})$.

g) Si $\xi_n \geq 0$, entonces $E(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mid \mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_n \mid \mathcal{G})$.

7.2. Apéndice B

SIMULACIÓN DE LA CADENA DE LA RUINA DEL JUGADOR

Se simula en el paquete *Mathematica* la cadena de la ruina del jugador hasta el instante en que por primera vez llega a 0 ó 76, con el objetivo de ver como se comporta.

```
m := 38;
n := 38;
p := 0.5092;
g[i_, x_, m_, n_, p_] :=
Which[i == m + n, m + n, i == 0, 0, x < p, i + 1, x >= p, i - 1];

l = {38};
For[i = 1, l[[i]] != 0 && l[[i]] != n + m,
    i++, l = Append[l, g[l[[i]], Random[Real], m, n, p]]]

ListPlot[l, PlotJoined -> True, PlotRange -> {{1, Length[l]}, {0, 100}},
Axes -> {True, True}, AxesOrigin -> {1, 0}]
```

SIMULACIÓN DEL MODELO BINOMIAL

El objetivo de este programa es simular el Modelo Binomial para cualquier instante en el que se desee aproximar el precio de acciones, para esto se uso el paquete *Matlab*.

```
S_0=35.37;
u=1.0946;
```

```
d=0.9429;
días=12;
r=0.07;
p=0.838;
q=0.162;
z=1/(1+r);
K=38;
[G,E]=orden(S_0,u,d,dias,K);
%Cálculos
for i=1:dias
    D(i,[1 2])=[i, 2*i];
end
k=1;
suma=0;
i=0;
j=1;
tama=size(D);
for s=1:tama(1)
    suma=suma+D(s,2);
    j=1;
    for i=i+1:suma
        O(k,j)=G(i,6);
        j=j+1;
    end
    k=k+1;
end
tama=size(O);
k=1;
for i=tama(1):-1:1
    aux1(k,:)=O(i,:);
    k=k+1;
end
O=[];
O=aux1;
V=E;
h=[];
k=[];
```

```
c=find(V(2,:)~=0);
h=length(c);
k=length(V(1,:));
V(2,1)=operacion(z,p,q,O(1,1),O(1,2),O(2,1));
V(2,h)=operacion(z,p,q,O(1,k-1),O(1,k),O(2,h));
for i=2:2:h-1
    T1=[O(1,i+1:i+2);O(2,i:i+1)];
    V(2,i)=operacion(z,p,q,T1(1,2),T1(1,1),O(2,i));
    V(2,i+1)=operacion(z,p,q,T1(1,2),T1(1,1),O(2,i+1));
end
for j=3:dias
    h=[];
    k=[];
    c=find(V(j,:)~=0);
    h=length(c);
    k=length(V(j-1,:));
    V(j,1)=operacion(z,p,q,V(j-1,1),V(j-1,2),O(j,1));
    V(j,h)=operacion(z,p,q,V(j-1,k-1),V(j-1,k),O(j,h));
    for i=2:2:h-1
        T1=[V(j-1,i+1:i+2);V(j,i:i+1)];
        V(j,i)=operacion(z,p,q,T1(1,2),T1(1,1),O(j,i));
        V(j,i+1)=operacion(z,p,q,T1(1,2),T1(1,1),O(j,i+1));
        T1=[];
    end
end
V(1,:)=O(1,:);
%Cálculo final
R(1,1)=S_0;
if K>=R(1,1)
    R(1,2)=K-R(1,1);
else
    R(1,2)=0;
end
R(1,3)=max(z*p*V(dias,1)+z*q*V(dias,2),R(1,2));
disp ('VALOR DE V(0), PRIMA:')
R(1,3)
fid=fopen('modelobinomial.txt','w');
```

```
fprintf(fid,'***Presentación de resultados***');
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'\n');
fprintf(fid,'VALOR DE V(0), PRIMA:');
fprintf('\nThis dates was saved on: modelobinomial.txt\n');
```

7.3. Apéndice C

FECHA	*PRECIO*
03/01/2006	35.37
04/01/2006	35.32
05/01/2006	35.23
06/01/2006	35.47
09/01/2006	35.38
10/01/2006	35.19
11/01/2006	35.43
12/01/2006	35
13/01/2006	35.1
17/01/2006	34.94
18/01/2006	34.82
19/01/2006	34.68
20/01/2006	33.37
23/01/2006	33.29
24/01/2006	32.96
25/01/2006	32.76
26/01/2006	33.02
27/01/2006	32.95
30/01/2006	32.93
31/01/2006	32.75
01/02/2006	33.14
02/02/2006	32.9
03/02/2006	32.85
06/02/2006	32.75
07/02/2006	32.85
08/02/2006	32.74
09/02/2006	32.92
10/02/2006	33.28
13/02/2006	33.25
14/02/2006	33.46
15/02/2006	33.46
16/02/2006	33.35
17/02/2006	33.61
21/02/2006	33.36
22/02/2006	33.64
23/02/2006	33.26
24/02/2006	33.14

FECHA	*PRECIO*
27/02/2006	33.32
28/02/2006	32.87
01/03/2006	32.76
02/03/2006	32.85
03/03/2006	33.06
06/03/2006	33.1
07/03/2006	33.15
08/03/2006	33.43
09/03/2006	33.2
10/03/2006	33.65
13/03/2006	33.67
14/03/2006	33.78
15/03/2006	34.42
16/03/2006	34.38
17/03/2006	34.51
20/03/2006	34.5
21/03/2006	34.34
22/03/2006	34.53
23/03/2006	34.12
24/03/2006	33.95
27/03/2006	33.79
28/03/2006	33.6
29/03/2006	33.93
30/03/2006	34.65
31/03/2006	34.78
03/04/2006	34.69
04/04/2006	34.7
05/04/2006	34.7
06/04/2006	34.51
07/04/2006	34.03
10/04/2006	33.92
11/04/2006	34.05
12/04/2006	34.46
13/04/2006	33.89
17/04/2006	33.29
18/04/2006	33.87
19/04/2006	33.89

FECHA	*PRECIO*	*FECHA*	*PRECIO*
20/04/2006	34.12	13/06/2006	33.73
21/04/2006	33.97	14/06/2006	33.9
24/04/2006	33.93	15/06/2006	34.11
25/04/2006	33.97	16/06/2006	33.93
26/04/2006	34.13	19/06/2006	33.72
27/04/2006	34.43	20/06/2006	33.7
28/04/2006	34.59	21/06/2006	33.67
01/05/2006	34.39	22/06/2006	33.24
02/05/2006	34.48	23/06/2006	33.16
03/05/2006	34.4	26/06/2006	33.21
04/05/2006	34.8	27/06/2006	32.88
05/05/2006	35.16	28/06/2006	32.93
08/05/2006	35	29/06/2006	3.27
09/05/2006	35	30/06/2006	32.96
10/05/2006	34.7	03/07/2006	33.33
11/05/2006	34.51	05/07/2006	33.31
12/05/2006	34.28	06/07/2006	33.5
15/05/2006	34.56	07/07/2006	33.3
16/05/2006	34.79	10/07/2006	33.45
17/05/2006	34.42	11/07/2006	33.45
18/05/2006	34.15	12/07/2006	33.06
19/05/2006	34.16	13/07/2006	32.67
22/05/2006	34.07	14/07/2006	32.11
23/05/2006	34.01	17/07/2006	32.36
24/05/2006	34.26	18/07/2006	32.46
25/05/2006	34.42	19/07/2006	32.88
26/05/2006	34.33	20/07/2006	32.48
30/05/2006	34.05	21/07/2006	32.25
31/05/2006	34.26	24/07/2006	32.62
01/06/2006	34.55	25/07/2006	32.7
02/06/2006	34.66	26/07/2006	32.68
05/06/2006	34.22	27/07/2006	32.65
06/06/2006	34.55	28/07/2006	33.02
07/06/2006	34.4	31/07/2006	32.69
08/06/2006	34.57	01/08/2006	32.56
09/06/2006	34.07	02/08/2006	32.6
12/06/2006	33.87	03/08/2006	32.73

FECHA	*PRECIO*
04/08/2006	32.8
07/08/2006	32.69
08/08/2006	32.34
09/08/2006	32.28
10/08/2006	32.67
11/08/2006	32.5
14/08/2006	32.82
15/08/2006	33.2
16/08/2006	33.71
17/08/2006	33.92
18/08/2006	34
21/08/2006	33.96
22/08/2006	33.96
23/08/2006	33.79
24/08/2006	33.85
25/08/2006	33.84
28/08/2006	33.93
29/08/2006	34.19
30/08/2006	34.27
31/08/2006	34.06
01/09/2006	34.14
05/09/2006	33.97
06/09/2006	33.95
07/09/2006	34.04
08/09/2006	34.01
11/09/2006	34.43
12/09/2006	34.67
13/09/2006	34.84
14/09/2006	34.78
15/09/2006	34.85
18/09/2006	34.87
19/09/2006	34.85
20/09/2006	35.02
21/09/2006	34.44
22/09/2006	34.4
25/09/2006	34.89
26/09/2006	35.44

FECHA	*PRECIO*
27/09/2006	35.34
28/09/2006	35.48
29/09/2006	35.3
02/10/2006	35.5
03/10/2006	35.71
04/10/2006	36.1
05/10/2006	36.29
06/10/2006	36.14
09/10/2006	36.16
10/10/2006	36.3
11/10/2006	36.17
12/10/2006	36.22
13/10/2006	35.98
16/10/2006	35.56
17/10/2006	35.56
18/10/2006	35.56
19/10/2006	35.28
20/10/2006	35.47
23/10/2006	35.53
24/10/2006	35.42
25/10/2006	35.61
26/10/2006	35.59
27/10/2006	35.21
30/10/2006	35.2
31/10/2006	35.11
01/11/2006	34.9
02/11/2006	34.71
03/11/2006	34.77
06/11/2006	35.27
07/11/2006	35.54
08/11/2006	35.58
09/11/2006	35.29
10/11/2006	35.17
13/11/2006	35.36
14/11/2006	35.59
15/11/2006	35.79
16/11/2006	35.96

FECHA	*PRECIO*	*FECHA*	*PRECIO*
17/11/2006	36.25	16/01/2007	38.11
20/11/2006	35.98	17/01/2007	37.98
21/11/2006	35.8	18/01/2007	38
22/11/2006	35.99	19/01/2007	36.95
24/11/2006	35.69	22/01/2007	36.75
27/11/2006	35.45	23/01/2007	36.55
28/11/2006	35.2	24/01/2007	36.64
29/11/2006	35.35	25/01/2007	36.34
30/11/2006	35.28	26/01/2007	36.07
01/12/2006	35.28	29/01/2007	36.19
04/12/2006	35.39	30/01/2007	36.03
05/12/2006	35.27	31/01/2007	36.05
06/12/2006	35.11	01/02/2007	36.23
07/12/2006	35.16	02/02/2007	36.27
08/12/2006	35.27	05/02/2007	36.37
11/12/2006	35.22	06/02/2007	36.31
12/12/2006	35.64	07/02/2007	36.1
13/12/2006	35.5	08/02/2007	35.74
14/12/2006	36.21	09/02/2007	35.53
15/12/2006	37.36	12/02/2007	35.64
18/12/2006	38	13/02/2007	35.77
19/12/2006	38.01	14/02/2007	36.47
20/12/2006	38.15	15/02/2007	36.14
21/12/2006	37.77	16/02/2007	35.87
22/12/2006	37.57	20/02/2007	36.11
26/12/2006	37.71	21/02/2007	35.91
27/12/2006	37.79	22/02/2007	35.4
28/12/2006	37.48	23/02/2007	35.1
29/12/2006	37.21	26/02/2007	35.34
03/01/2007	37.97	27/02/2007	34.66
04/01/2007	37.75	28/02/2007	34.91
05/01/2007	37.56	01/03/2007	35
08/01/2007	37.55	02/03/2007	34.87
09/01/2007	37.55	05/03/2007	34.55
10/01/2007	37.56	06/03/2007	34.72
11/01/2007	37.92	07/03/2007	34.33
12/01/2007	37.89	08/03/2007	34.45

FECHA	*PRECIO*	*FECHA*	*PRECIO*
09/03/2007	34.32	02/05/2007	37.31
12/03/2007	34.44	03/05/2007	37.34
13/03/2007	34.09	04/05/2007	37.15
14/03/2007	34.31	07/05/2007	37.24
15/03/2007	34.52	08/05/2007	37.08
16/03/2007	34.36	09/05/2007	37.26
19/03/2007	34.67	10/05/2007	36.78
20/03/2007	34.77	11/05/2007	36.97
21/03/2007	35.48	14/05/2007	36.6
22/03/2007	35.81	15/05/2007	36.64
23/03/2007	35.82	16/05/2007	36.83
27/03/2007	35.79	18/05/2007	36.96
28/03/2007	35.55	21/05/2007	37.1
29/03/2007	35.55	22/05/2007	37.34
30/03/2007	35.36	23/05/2007	37.6
30/03/2007	35.36	24/05/2007	37.6
03/04/2007	35.32	25/05/2007	37.56
04/04/2007	35.11	29/05/2007	37.4
05/04/2007	35.02	30/05/2007	37.73
09/04/2007	34.78	31/05/2007	37.58
10/04/2007	34.88	01/06/2007	37.45
11/04/2007	34.95	04/06/2007	37.81
12/04/2007	35.18	05/06/2007	37.4
13/04/2007	35.38	06/06/2007	37.29
16/04/2007	35.36	07/06/2007	36.76
17/04/2007	35.2	08/06/2007	37.32
18/04/2007	35.13	11/06/2007	37.46
19/04/2007	35	12/06/2007	37.05
20/04/2007	35.13	13/06/2007	37.64
23/04/2007	34.8	14/06/2007	37.8
24/04/2007	35.41	15/06/2007	38.12
25/04/2007	35.41	18/06/2007	38.07
26/04/2007	35.84	19/06/2007	39.29
27/04/2007	36.84	20/06/2007	39.07
30/04/2007	36.86	21/06/2007	38.8
01/05/2007	37.1	22/06/2007	38.24

FECHA	*PRECIO*	*FECHA*	*PRECIO*
25/06/2007	38.21	24/07/2007	40.22
26/06/2007	38.02	25/07/2007	40.42
27/06/2007	38.06	26/07/2007	39.53
28/06/2007	38.12	27/07/2007	38.79
29/06/2007	38.28	30/07/2007	39.27
02/07/2007	38.26	31/07/2007	38.76
03/07/2007	38.7	01/08/2007	38.95
05/07/2007	38.54	02/08/2007	39.03
06/07/2007	38.48	03/08/2007	38.06
09/07/2007	38.62	06/08/2007	39.1
10/07/2007	37.9	07/08/2007	39.48
11/07/2007	38.2	08/08/2007	40.46
12/07/2007	39	09/08/2007	38.94
13/07/2007	39.5	10/08/2007	38.23
16/07/2007	40.12	13/08/2007	38.17
17/07/2007	40.71	14/08/2007	37.68
18/07/2007	40.45	15/08/2007	36.9
19/07/2007	40.71	16/08/2007	37.2
20/07/2007	40.12	17/08/2007	38.45
23/07/2007	40.82	20/08/2007	38.22

Bibliografía

[1] Ash R. B., Probability and Measure Theory, Academic Press, 2005.

[2] Billingsley P., Convergence of Probability Measures, J. Wiley, New York, NY, 1968.

[3] Bingham, Nicholas, Risk-Neutral Valuation Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Introduction to Financial Mathematics, 1998.

[4] Boukas E. K., Techniques for flow control and preventive maintenance manufacturing systems, Control Dynamic Syst., pp. 327-366, 1991.

[5] Caballero M. E., Rivero V. M., Uribe Bravo G., Velarde C., Cadenas de Markov, Un enfoque Elemental, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] Capinski M. & Zastawniak T., Mathematics for Finance, Springer, 2003.

[7] Carvajal Martínez Susana, El Problema de La Ruina del Jugador en Finanzas, Memorias del XL Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, p. 82, 2007.

[8] Casella G., Berger R. L., Statistical Inference, Duxbury Press, Second Edition, 2001.

[9] Courtois P. J., Decomposability: Queueing and Computer System Applications, Academic Press, New York, NY, 1977.

[10] Hernández-Amador R. G., Minjárez-Sosa J. A., Una Introducción a la Teoría de Martingalas por medio de Estrategias de Apuestas, Arenario, pp. 225-236, 2002.

[11] Hoel P. G., Introduction to Probability Theory, Houghton Mifflin Company, 1971.

[12] Hoel P. G., Port S. C., Stone C. J., Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company, 1987.

[13] http://bigcharts.marketwatch.com/historical/

[14] Karlin Howard S., Taylor D. M, A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, 1975.

[15] Li D. & Ng W. L., Optimal dynamic portfolio selection: Multi-period mean-variance formulation, Math. Finance, pp. 387-406, 2000.

[16] Musiela M. & Rutkowski M., Martingala Methods in Financial Modelling, Springer, 1997

[17] Resnick S. I., A Probability Path (Hardcover), Birkhäuser Boston, 3rd printing edition, 1999.

[18] Resnick S. I., Adventures in Stochastic Processes (Hardcover), Birkhäuser Boston, 1 edition, 1992.

[19] Ross S. M., Stochastic Processes, John Wiley and Sons, Inc.

[20] Shreve S., Stochastic Calculus and Finance, Springer, 1997.

[21] Yin G. G. & Zhang Q., Discrete-Time Markov Chains, Springer, 2005.