



**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**“ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE CONTROL DE MARKOV VÍA PRINCIPIO DEL MÁXIMO  
DE PONTRYAGIN Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA”**

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA

**RUY ALBERTO LÓPEZ RÍOS**

DIRECTOR DE TESIS

**DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ**





**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**RUY ALBERTO LÓPEZ RÍOS**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 16 de diciembre de 2016, con la tesis titulada:

*Análisis de Problemas de Control de Markov vía Principio del Máximo de Pontryagin y Programación Dinámica*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 16 de diciembre de 2016.

**DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO**  
**COORDINADOR DEL POSTGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



Cep. Archivo.  
DRA. LAHR/mtrv

**60**  
**AÑOS DE**  
**AUTONOMÍA**  
UNIVERSITARIA

Facultad  
de Ciencias  
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,  
Ciudad Universitaria, Col. San  
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>1</b>
<b>Simbología</b>	<b>7</b>
<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Procesos de control de Markov . . . . .	11
1.2. Problema de control óptimo . . . . .	15
<b>2. Principio de Pontryagin</b>	<b>17</b>
2.1. Formulación del principio de Pontryagin . . . . .	17
2.2. Problema del punto terminal libre . . . . .	18
2.3. Verificación del principio de Pontryagin . . . . .	22
<b>3. Ejemplos</b>	<b>25</b>
3.1. Aeronave alunizando con mínimo combustible . . . . .	25
3.1.1. Planteamiento del problema . . . . .	25
3.1.2. Condiciones de optimalidad de Pontryagin . . . . .	27
3.1.3. Solución . . . . .	30
3.1.4. Simulación . . . . .	38
3.2. Modelo de Ramsey . . . . .	39
3.2.1. Planteamiento del problema . . . . .	40
3.2.2. Solución. . . . .	40
3.3. Problema del regulador lineal (PRL) . . . . .	43
3.3.1. Planteamiento del problema . . . . .	43
3.3.2. Solución . . . . .	43
<b>4. Programación dinámica</b>	<b>47</b>
4.1. Versión determinista . . . . .	47
4.2. Versión estocástica . . . . .	51
4.3. Procesos de difusión . . . . .	54

<b>5. Ejemplos</b>	<b>59</b>
5.1. Problema del regulador lineal . . . . .	59
5.1.1. Solución . . . . .	59
5.1.2. Simulación . . . . .	60
5.2. Selección de portafolio óptimo . . . . .	63
5.2.1. Planteamiento del problema . . . . .	63
5.2.2. Utilidad esperada de riqueza terminal . . . . .	64
5.2.3. Utilidad total descontada esperada de consumo . . . . .	67
<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>A. Apéndices</b>	<b>73</b>
A.1. Apéndice I . . . . .	73
A.2. Apéndice II . . . . .	76
<b>Referencias</b>	<b>79</b>

# Dedicatoria

Indiscutiblemente, dedico esta tesis a mi mamá<sup>†</sup>, quien vio iniciado este sueño y que desde donde está me ha dado una ayudadita para empezar otro.

A mi papá, y a mis hermanos: Yenía, Ana Laura y Pepín.

A Yaritza Inés, Zuleima, Xóchilt, Lucy, Gaby, Camilo, Germán, Miguel Ángel, José Juan e Israel.  
¡Ah!, y también a Karen Gabriela.

Gracias a todos. Les dejo el siguiente mensaje:

*"Estar a favor de los derechos humanos,  
estar a favor de los derechos de la naturaleza,  
estar a favor de los derechos de los animales,  
es ser, en el siglo XXI, una persona civilizada."*

Carlos Monsiváis Aceves

Sinceramente, Ruy Alberto.



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor el Dr. Hugo Adán Cruz Suárez por la paciencia y tiempo dedicados en la realización de esta tesis de maestría.

A quienes fungieron como sinodales por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis. Gracias Dra. Hortensia Reyes Cervantes, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara, Dr. Francisco Tajonar Sanabria y Dr. Fernando Velasco Luna.

A la Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Dra. Lidia Hernández Rebollar, Dr. Fernando Macías Romero, y a Tere. Gracias.

No está de más agradecer al Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo y al Dr. David Villa Hernández. Recordaré siempre sus provechosos cursos.

Agradezco, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado durante los años de estudio de la maestría.

De igual manera, a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por el apoyo dedicado a la impresión de esta tesis, bajo el proyecto "Procesos de Decisión de Markov con Factores de Descuento Generalizados" con clave de proyecto CRSH-EXC16-G.



# Simbología

Con la finalidad de favorecer la lectura, se muestra una breve lista de la simbología y notación utilizada a lo largo del escrito:

$\mathbb{P}\{\cdot\}$	Medida de probabilidad.
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Esperanza.
$\mathbb{E}_{s,x}\{\cdot\} = \mathbb{E}\{\cdot x(s) = x\}$	Esperanza condicional.
$\mathbb{V}ar\{\cdot\}$	Varianza.
$I_d$	Operador Identidad.
$\mathcal{T}_t$	Operador Transición.
$W(t), W_t$	Proceso de Wiener.
$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	Vector $n$ -dimensional.
$\mathbf{f}(\cdot), \phi(\cdot)$	Funciones vectoriales.
$\frac{d^+}{dt}(\cdot)$	Derivada por la derecha con respecto al tiempo.
$\mathbf{f}_i(t, \mathbf{x})$	$i$ -ésima componente de la función vectorial $\mathbf{f}$ .
$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$	Derivada con respecto al vector $\mathbf{x}$ de la función vectorial $\mathbf{f}$ .
$\mathbf{x}_0$	Estado inicial del vector $\mathbf{x}$ .
$\dot{\mathbf{P}}(t)$	Derivada con respecto al tiempo de la función vectorial $\mathbf{P}$ .
$\ddot{h}(t)$	Segunda derivada con respecto al tiempo de la función $h(t)$ .
$\mathbb{M}_{m \times n}$	Espacio de matrices $m \times n$ – dimensionales.
$[\mathbf{A}(t)]^T$	Traspuesta de la matriz $\mathbf{A}$ .
$Tr[\mathbf{A}(t)]$	Traza de la matriz $\mathbf{A}$ .
$\mathbb{H}(\cdot)$	Hamiltoniano de una función vectorial.
$PCO$	Problema de Control Óptimo.
$PCM$	Proceso de Control de Markov.
$PPTL$	Problema del Punto Terminal Libre.
$PD$	Programación Dinámica.
$EPD$	Ecuación de Programación Dinámica.
$EDE$	Ecuación Diferencial Estocástica.
$PRL$	Problema Regulador Lineal.
$e.o.c.$	En otro caso.
$i.e.$	Es decir.



# Introducción

El Control óptimo es una herramienta matemática utilizada para resolver problemas de Optimización cuya evolución en el tiempo es susceptible a ser influenciado por fuerzas externas.

La teoría del Control óptimo inicia en los años 50's, cuando en la incipiente era espacial se pretendía llevar una aeronave de la Tierra a un punto en el espacio en un tiempo mínimo y consumiendo la menor cantidad de combustible posible.

Pontryagin y un equipo de matemáticos rusos desarrollaron la teoría de Control óptimo integrando el Principio de Optimalidad de Bellman, resultados fundamentales en la teoría moderna de la Optimización [Ver 1]. Pontryagin, Bellman y Kalma fueron los primeros matemáticos en estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias como un modelo de sistemas de control. En el presente, la teoría de Control óptimo abarca disciplinas tan diversas como Ingeniería mecánica, Electrónica, Economía, Comunicaciones, Navegación espacial, etc.

En este trabajo se aborda el Control óptimo desde dos enfoques distintos en construcción y que se conjuntan de manera paralela: el *Principio de Pontryagin* y la *Programación Dinámica*.

El objetivo de este trabajo consiste entonces en dos partes: revisar la teoría referente al Principio del Máximo de Pontryagin y la teoría de la Programación Dinámica en tiempo continuo mostrando los principales resultados, y exhibir problemas de Control óptimo resueltos con estos dos métodos mostrando la diversidad de aplicaciones posibles de la teoría.

El contenido se desglosa de la manera siguiente:

En el Capítulo 1 se detallan definiciones y terminología a utilizar a lo largo de la tesis. El Principio de Pontryagin consiste esencialmente en dar las condiciones necesarias de optimalidad para un problema de control óptimo. En el Capítulo 2, después de enunciarse el Principio del Máximo de Pontryagin se demuestra, primeramente en un caso particular y simple: el Problema del Punto Terminal Libre. Si no es el caso, cuando se tienen condiciones fijas de frontera se tiene una versión ampliada del Principio de Pontryagin requiriéndose ecuaciones de transversalidad para esta frontera. Esta versión del Principio del Máximo se demuestra auxiliándose de dos resultados: la regla abstracta del multiplicador y el cono de variaciones generado por unos vectores particulares [Ver 7]. En el Capítulo 3 se dan ejemplos que son resueltos vía el Principio de Pontryagin.

El Capítulo 4 se dedica a la teoría de la Programación Dinámica. A través de resultados importantes se deduce la Ecuación de la Programación Dinámica [Ver 7], para finalmente extenderla al caso estocástico obteniendo la Ecuación de Programación Dinámica de Hamilton-Jacobi-

Bellman [Ver 10]. La Programación Dinámica consiste esencialmente en resolver la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman, cuya solución produce el costo óptimo para un criterio de rendimiento con una función de costo asociada para un sistema dado. En el Capítulo 5 se muestran ejemplos de problemas de control que son resueltos vía Programación Dinámica.

Los problemas de Control óptimo que se revisan en este trabajo y que aparecen en diversa literatura [Ver 3, 4, 11, 15] se desarrollan y se simulan por medio de programas de código propio en Mathematica®<sup>®</sup>, donde además de resolverse, se estudia el comportamiento del sistema involucrado.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se presenta la teoría básica requerida para capítulos posteriores.

La primer sección *Procesos de Markov* tendrá continuación en el Capítulo 4, donde queda determinada la Ecuación de Programación Dinámica (Sección 4.2 y 4.3). En la segunda sección *Control Óptimo* se define la terminología utilizada en el Capítulo 3, al formular el Principio del Máximo de Pontryagin (Sección 3.1, 3.2 y 3.3).

### 1.1. Procesos de control de Markov

En este capítulo se designará como  $X$  a un espacio de Borel, y como  $\mathcal{B}(X)$  a su  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definición 1.1.1** Una función  $\mathbb{P}\{s, x, t, B\}$  definida para  $s, t \in \mathbb{R}^+$ , con  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in X$  y  $B \in \mathcal{B}(X)$  es llamada una probabilidad de transición si:

- (a)  $\mathbb{P}\{s, x, t, \cdot\}$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{B}(X)$  para cada  $s, x, t$  fijos;
- (b)  $\mathbb{P}\{s, x, s, \cdot\} = \delta_x(\cdot)$ , la unidad de masa en  $x$ , para cada  $s, x$ ;
- (c)  $\mathbb{P}\{s, x, t, B\}$  es conjuntamente medible en  $x \in X$  y  $s \leq t$  para cada  $s \geq 0$  fijo y  $B \in \mathcal{B}(X)$ ;
- (d) si  $s \leq t \leq r$ , entonces

$$\mathbb{P}\{s, x, r, B\} = \int_X \mathbb{P}\{t, y, r, B\} \mathbb{P}\{s, x, t, dt\} \quad (1.1.1)$$

resultado conocido como Ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Sea  $\mathcal{M}$  un espacio lineal de funciones medibles  $v$  con valores reales sobre  $\tilde{X} := [0, \infty) \times X$  tal que

$$\int_X |v(t, y)| \mathbb{P}\{s, x, t, dy\} < \infty$$

para cada  $s, x, t$ .

**Definición 1.1.2** Para cada  $t \geq 0$  y  $v \in \mathcal{M}$ , definimos el operador transición sobre  $\tilde{X}$  como

$$\mathcal{T}_t v(s, x) := \int_X v(s+t, y) \mathbb{P}\{s, x, s+t, dy\}. \quad (1.1.2)$$

De las propiedades de la Definición 1.1.1, es claro que  $\mathcal{T}_t$  ( $t \geq 0$ ) forma un semigrupo de operadores sobre  $\mathcal{M}$ ; ya que  $\mathcal{T}_0 = I_d$ , cada  $\mathcal{T}_t$  mapea el espacio  $\mathcal{M}$  a sí mismo y  $\mathcal{T}_{t+r} = \mathcal{T}_t \mathcal{T}_r$ .

Sea  $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$  consistente de aquellas funciones  $v \in \mathcal{M}$  que satisfacen lo siguiente:

- $\lim_{t \downarrow 0} \mathcal{T}_t v(s, x) = v(s, x), \quad (s, x) \in \tilde{X},$
- Existen  $t_0 > 0$  y  $u \in \mathcal{M}$  tales que

$$\mathcal{T}_t |v|(s, x) \leq u(s, x) \quad \forall (s, x) \in \tilde{X}, \quad \text{y } 0 \leq t \leq t_0.$$

Sea  $\mathcal{D}(L)$  un subconjunto de  $\mathcal{M}_0$  tal que para  $v \in \mathcal{D}(L)$  las siguientes condiciones se satisfacen:

- El límite

$$Lv(s, x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x)}{t} \quad (1.1.3)$$

existe para todo  $(s, x) \in \tilde{X}$ ;

- $Lv \in \mathcal{M}_0$ ;
- Existen  $t_0 > 0$  y  $u \in \mathcal{M}$  tales que

$$\frac{|\mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x)|}{t} \leq u(s, x), \quad \forall (s, x) \in \tilde{X}, \quad \text{y } 0 \leq t \leq t_0.$$

El operador  $L$  en (1.1.3) será llamado *generador extendido* del semigrupo  $\mathcal{T}_t$ . El conjunto  $\mathcal{D}(L)$  es llamado *dominio* de  $L$ .

**Lema 1.1.3** Si  $v \in \mathcal{D}(L)$ , entonces las siguientes afirmaciones son válidas:

(a)  $\frac{d^+}{dt} \mathcal{T}_t v := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_{t+h} v - \mathcal{T}_t v}{h} = \mathcal{T}_t \{Lv\}.$

(b)  $\mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x) = \int_0^t \mathcal{T}_r \{Lv\}(s, x) dr.$

Además, si  $\rho > 0$  y  $v_\rho(s, x) := e^{-\rho s} v(s, x)$ , entonces  $v_\rho \in \mathcal{D}(L)$  y

(c)  $L\{v_\rho(s, x)\} = e^{-\rho s} [Lv(s, x) - \rho v(s, x)].$

**Demostración.**

(a)  $\frac{d^+}{dt} \mathcal{T}_t v := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_{t+h} v - \mathcal{T}_t v}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t \mathcal{T}_h v - \mathcal{T}_t v}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \mathcal{T}_t \left\{ \frac{\mathcal{T}_h v - v}{h} \right\} = \mathcal{T}_t \left\{ \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_h v - v}{h} \right\} = \mathcal{T}_t \{Lv\}.$

$$(b) \int_0^t \mathcal{T}_r\{Lv\}(s, x)dr = \int_0^t \frac{d^+}{dr} \mathcal{T}_r\{v(s, x)\}dr = \mathcal{T}_t v(s, x) - \mathcal{T}_0 v(s, x) = \mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x).$$

$$(c) L\{v_\rho(s, x)\} = L\{e^{-\rho s}v(s, x)\} \\ = \lim_{t \downarrow 0} \left[ \frac{\mathcal{T}_t\{e^{-\rho s}v(s, x)\} - e^{-\rho s}v(s, x)}{t} \right] \\ = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \int_X e^{-\rho(s+t)}v(s+t, y)\mathbb{P}\{s, x, s+t, dy\} - e^{-\rho s}v(s, x) \right] \\ = e^{-\rho s} \left[ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \int_X e^{-\rho t}v(s+t, y)\mathbb{P}\{s, x, s+t, dy\} - v(s, x) \right] \right] \\ = e^{-\rho s} \left[ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[ e^{-\rho t}\mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x) + e^{-\rho t}v(s, x) - e^{-\rho t}v(s, x) \right] \right] \\ = e^{-\rho s} \left[ \lim_{t \downarrow 0} \left[ \frac{1}{t} e^{-\rho t}(\mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x)) \right] + \lim_{t \downarrow 0} \left[ \frac{1}{t}(e^{-\rho t}v(s, x) - v(s, x)) \right] \right] \\ = e^{-\rho s} \left[ \lim_{t \downarrow 0} \left[ \frac{\mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x)}{t} \right] + \lim_{t \downarrow 0} \left[ \frac{-\rho e^{-\rho t}v(s, x)}{1} \right] \right] \\ = e^{-\rho s} [Lv(s, x) - \rho v(s, x)]. \blacksquare$$

**Definición 1.1.4** Una probabilidad de transición se dice homogénea en el tiempo si

$$\mathbb{P}\{s, x, s+t, B\} = \mathbb{P}\{0, x, t, B\} =: \mathbb{P}\{t, x, B\}$$

para todo  $s, t \geq 0$ ,  $x \in X$  y  $B \in \mathcal{B}(X)$ .

**Observación 1.1.5** Sea  $x(\cdot) = \{x(t), t \geq 0\}$  un proceso de Markov  $X$ -valuado con probabilidad de transición  $\mathbb{P}\{s, x, t, B\}$ , es decir,

$$\mathbb{P}\{x(t) \in B | x(r), 0 \leq r \leq s\} = \mathbb{P}\{s, x(s), t, B\}$$

para todo  $t \geq s \geq 0$  y  $B \in \mathcal{B}(X)$ . Entonces la ecuación (1.1.2) puede escribirse como:

$$\mathcal{T}_t v(s, x) = \mathbb{E}_{s,x}\{v(s+t, x(s+t))\}. \quad (1.1.4)$$

donde  $\mathbb{E}_{s,x}\{\cdot\} := \mathbb{E}\{\cdot | x(s) = x\}$ . Similarmente, podemos reescribir la parte (b) del Lema 1.1.3 como:

$$\mathbb{E}_{s,x}\{v(s+t, x(s+t))\} - v(s, x) = \mathbb{E}_{s,x} \left\{ \int_0^t Lv(s+r, x(s+r))dr \right\}, \quad (1.1.5)$$

si  $v \in \mathcal{D}(L)$ .

**Definición 1.1.6** Se define un Proceso de Control de Markov (PCM) a tiempo continuo a la cuádrupla  $(X, A, L^a, c)$ , cuyas componentes son:

(a)  $X$  un espacio de Borel, llamado **espacio de estados**.

(b)  $A$  un espacio de Borel, llamado **espacio de acciones** o **controles**.

(c) Una **ley de movimiento**: correspondiente a cada acción  $a \in A$ . Existe un operador lineal  $L^a$ , que es el generador extendido de un proceso de Markov  $X$ -valuado con probabilidad de transición  $\mathbb{P}\{s, x, t, B\}$ .

(d) Una **función de costo**  $c(s, x, a)$ , es una función medible que toma valores reales definida sobre  $[0, \infty) \times X \times A$ . Asumimos que  $c$  es no negativa.

**Definición 1.1.7** Las funciones medibles  $\pi$  de  $\tilde{X} := [0, \infty) \times X$  a  $A$  tales que  $a^\pi := \pi(s, x)$  denota la acción de control prescrita por  $\pi$  cuando el estado  $x \in X$  es observado al tiempo  $s$ , son llamadas **políticas de control de Markov**.

**Definición 1.1.8** Una política de Markov se dice **estacionaria** si es independiente del tiempo, i.e.,  $\pi(s, x) = \pi(x)$  para todo  $(s, x) \in \tilde{X}$ .

Consideramos una clase de políticas de Markov  $\Pi$  que cumplen las siguientes suposiciones.

**Suposición 1.1.9** Para cada  $\pi \in \Pi$ , existe un proceso estocástico  $\{x^\pi(t) = x(t), t \geq 0\}$  tal que:

- (a) Casi todas las trayectorias muestrales de  $x(\cdot)$  son continuas por la derecha, con límites por la izquierda, y tienen discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito de tiempo;
- (b)  $x(\cdot)$  es un proceso fuerte de Markov con probabilidad de transición denotada por  $\mathbb{P}^\pi\{s, x, t, B\}$  y su semigrupo asociado por  $\mathcal{T}_t^\pi$ ;
- (c) El generador extendido  $L^\pi$  de  $x(\cdot)$  satisface la propiedad de sustitución:

$$L^\pi = L^a \quad \text{si} \quad \pi(s, x) = a; \quad (1.1.6)$$

- (d) El proceso  $x(\cdot)$  es conservativo, i.e.,  $\mathcal{T}_t^\pi 1 = 1$  para todo  $t \geq 0$ , y  $L^\pi 1 = 0$ .

Las políticas de Markov en  $\Pi$  que satisfagan la Suposición 1.1.9 son llamadas *admisibles*. A menos que explícitamente se indique lo contrario, siempre asumimos que una política  $\pi \in \Pi$  es admisible.

Para cada  $\pi \in \Pi$  los conjuntos de funciones  $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{D}(L)$  dependen de la política  $\pi$  usada, así que se escribirán como  $\mathcal{M}^\pi$ ,  $\mathcal{M}_0^\pi$ , y  $\mathcal{D}(L^\pi)$ , respectivamente.

**Suposición 1.1.10** Para los conjuntos  $\mathcal{M}^\pi \supset \mathcal{M}_0^\pi \supset \mathcal{D}(L^\pi)$  definidos anteriormente,

- (a) Existen conjuntos no vacíos  $M \supset M_0 \supset D$  tal que

$$M \subset \bigcap_{\pi} \mathcal{M}^\pi, \quad M_0 \subset \bigcap_{\pi} \mathcal{M}_0^\pi, \quad D \subset \bigcap_{\pi} \mathcal{D}(L^\pi)$$

donde las intersecciones son sobre  $\pi \in \Pi$ .

- (b) La función de tasa de costo  $c(s, x, a)$  es tal que  $c^\pi(\cdot, \cdot) \in M_0$  para todo  $\pi \in \Pi$ , donde  $c^\pi(s, x) := c(s, x, \pi(s, x))$ .

**Definición 1.1.11** Un PCM  $(X, A, L^a, c)$  se dice ser homogéneo en el tiempo si su probabilidad de transición es homogénea en el tiempo, i.e.,

$$\mathbb{P}^a\{s, x, t, B\} = \mathbb{P}^a\{t - s, x, B\}, \quad \forall t \geq s, x \in X, B \in \mathcal{B}(X). \quad (1.1.7)$$

**Observación 1.1.12** Si la tasa de costo es invariante en el tiempo, escribimos  $c(s, x, a) \equiv c(x, a)$ . Si (1.1.7) se satisface y  $\pi \in \Pi$  es una política estacionaria, entonces el estado del proceso  $x(\cdot) = x^\pi(\cdot)$  es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo.

**Notación 1.1.13** Dada una política  $\pi \in \Pi$  y tasa de costo  $c(s, x, a)$ , usaremos la notación

$$c^\pi(s, x) = c(s, x, \pi) = c(s, x, \pi(s, x)) \quad \text{si} \quad x(s) = x. \quad (1.1.8)$$

Ahora, si  $c(s, x, a) = c(x, a)$  es independiente del parámetro tiempo  $s$ , entonces (1.1.8) se convierte en:

$$c^\pi(s, x) = c(s, x, \pi) = c(x, \pi(s, x)) \quad \text{si} \quad x(s) = x. \quad (1.1.9)$$

Si además,  $\pi$  es estacionaria, (1.1.9) se convierte en:

$$c^\pi(x) = c(x, \pi) = c(x, \pi(x)). \quad (1.1.10)$$

**Notación 1.1.14** Cuando usamos una política  $\pi \in \Pi$ , esperanzas tales como (1.1.4) serán escritas como:

$$\mathcal{T}_t^\pi v(s, x) = \mathbb{E}_{s,x}^\pi \{v(s+t, x(s+t))\} = \int_X v(s+t, y) \mathbb{P}^\pi \{s, x, s+t, dy\} \quad (1.1.11)$$

o por la propiedad de sustitución,

$$\mathcal{T}_t^a v(s, x) = \mathbb{E}_x^a \{v(s+t, x(s+t))\} = \int_X v(s+t, y) \mathbb{P}^a \{s, x, s+t, dy\}, \quad (1.1.12)$$

si  $\pi(s, x) = a$ . En particular, para un PCM homogéneo y una función  $v(s, x) \equiv v(x)$  en  $D$ , (1.1.6), (1.1.7), (1.1.11) y (1.1.12) producen

$$\mathcal{T}_t^\pi v(s, x) = \mathcal{T}_t^a v(x) \quad \text{si} \quad \pi(s, x) = a,$$

así que

$$L^\pi v(s, x) = L^a v(s, x) \quad \text{si} \quad \pi(s, x) = a.$$

## 1.2. Problema de control óptimo

Considere las siguientes componentes:

Sea  $U$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^m$ ;  $t$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  variables en  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente.

Sea  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  una función vectorial  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y con derivadas parciales continuas con respecto a las coordenadas de  $\mathbf{x}$ .

Sea  $\phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$  una función vectorial  $\phi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  de clase  $C^1$ .

**Definición 1.2.1** Sea  $\mathcal{U}$  una clase de funciones continuas a trozos  $\mathbf{u}(t)$  con valores en  $U$ , con cada función  $\mathbf{u}(t)$  definida sobre  $[t_0, t_1]$ . Una función  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$  será llamada control.

Si el conjunto  $\mathcal{U}$  de controles satisface:

- Si  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$  para  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,
- $\mathbf{v}_i \in U$  para  $i = 1, \dots, p$ ,
- $\tau_i - h_i < t \leq \tau_i$  son intervalos disjuntos que intersectan a  $[t_0, t_1]$ ,

definiendo

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_i, & \text{si } t \in (\tau_i - h_i, \tau_i], \\ \mathbf{u}(t), & \text{si } t \in [t_0, t_1] \text{ y } t \notin (\tau_i - h_i, \tau_i], \end{cases}$$

entonces  $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in \mathcal{U}$ .

Para un control  $\mathbf{u}(t)$  definido sobre  $[t_0, t_1]$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (1.2.1)$$

sobre el intervalo  $[t_0, t_1]$  con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  será llamada la *trayectoria* correspondiente al control  $\mathbf{u}(t)$  con condición inicial  $\mathbf{x}_0$ .

La ecuación (1.2.1) es llamada *ecuación de movimiento* del sistema.

El valor de  $\mathbf{x}(t)$  en el tiempo  $t$  es llamado el *estado* del sistema al tiempo  $t$ .

La primer componente de  $\phi$  evaluada en  $\mathbf{e} := (t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1))$ , donde  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de (1.2.1) es llamada *criterio de rendimiento*:

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) := \phi_1(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) = \phi_1(\mathbf{e}). \quad (1.2.2)$$

Las siguientes  $k - 1$  componentes de  $\phi$  llamadas *condiciones terminales* de las trayectorias del sistema están definidas a través de las ecuaciones:

$$\phi_j(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) = 0, \quad j = 2, \dots, k. \quad (1.2.3)$$

Una pareja  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$  conformada por una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  y un control  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  será llamada *admisibile* si existe una solución  $\mathbf{x}(t)$  de (1.2.1) sobre  $[t_0, t_1]$  con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , y las condiciones terminales (1.2.3) son satisfechas por  $\mathbf{x}(t)$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) : (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \text{ es admisible}\}$ .

El problema de control óptimo consiste en encontrar un elemento  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \in \mathcal{F}$  tal que el correspondiente criterio de rendimiento (1.2.2) sea optimizado.

Una pareja  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$  en la clase  $\mathcal{F}$  que alcance este mínimo será llamado *condición inicial óptima* y *control óptimo*, respectivamente.

# Capítulo 2

## Principio de Pontryagin

La obtención de las condiciones necesarias de optimalidad para el Problema de Control Óptimo las ofrece el Principio de Pontryagin, algunas de ellas se describen en forma resumida a través del *Hamiltoniano* de una función vectorial  $\mathbf{f}$ , definido como

$$\mathbb{H}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

con  $\mathbf{P}(t)$  una función vectorial  $n$ -dimensional.

Las condiciones del Principio de Pontryagin reducen el cálculo de un control óptimo a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con dos puntos frontera y un problema de optimización.

### 2.1. Formulación del principio de Pontryagin

**Teorema 2.1.1** (*Principio de Pontryagin*) Las condiciones necesarias para que  $(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{u}^*(t))$  sea admisible y óptima son la existencia de:

- 1) un vector  $l$ -dimensional  $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$  con  $\lambda_1 \leq 0$  y
- 2) una función vectorial  $\mathbf{P}(t)$   $n$ -dimensional tal que para  $t \in [t_0, t_1]$  se satisfaga:

$$[\dot{\mathbf{P}}(t)]^T = -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (C1)$$

y para  $t \in (t_0, t_1)$  y  $\mathbf{u} \in C$ ,

$$\mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}) \leq \mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (C2)$$

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \quad (C3)$$

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T = -[\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}) \quad (C4)$$

$$\mathbb{H}(t_1, \mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1)) = -[\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_1}(\mathbf{e}) \quad (C5)$$

$$\mathbb{H}(t_0, \mathbf{x}^*(t_0), \mathbf{u}^*(t_0)) = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_0}(\mathbf{e}). \quad (C6)$$

Si  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  tiene derivada parcial continua  $\mathbf{f}_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ , entonces, para cada  $t \in [t_0, t_1]$  se satisface la condición

$$\mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_0}(t_0, t_1, \mathbf{x}^*(t_0), \mathbf{x}^*(t_1)) + \int_{t_0}^t [\mathbf{P}(s)]^T \mathbf{f}_t(s, \mathbf{x}^*(s), \mathbf{u}^*(s)) ds. \quad (\text{C7})$$

**Observación 2.1.2** La condición (C2) puede ser expresada en términos del Hamiltoniano como

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{\mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u})\} = \mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)). \quad (\text{C2}^*)$$

(C2\*) es llamada *Principio del Máximo de Pontryagin*.

(C3-6) son llamadas *condiciones de transversalidad*.

(C1) son las *ecuaciones adjuntas*.

## 2.2. Problema del punto terminal libre

Para motivar la demostración del Principio de Pontryagin se construyen dos derivaciones de las condiciones necesarias de optimalidad en el caso especial del PCO cuando el tiempo y estado inicial son fijos y no hay condiciones sobre el estado final. Este problema es llamado *Problema del Punto Terminal Libre*.

Sean  $t_0$  y  $t_1$  denotando el tiempo inicial fijo y el tiempo terminal, respectivamente. El espacio  $\mathcal{V}$  [Ver Apéndice II] será el espacio de todas las funciones a trozos continuas por la izquierda definidas sobre  $[t_0, t_1]$  con valores en  $\mathbb{R}^m$ , llamado espacio de funciones de control. El subconjunto  $\mathcal{K}$  [Ver Apéndice II] será el conjunto de funciones de control  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{u}(t) \in U$  para cada  $t \in [t_0, t_1]$  y  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$  es una pareja admisible para el estado inicial fijo  $\mathbf{x}_0$ .

Hay muchas maneras de construir mapeos de  $\zeta$  hacia  $\mathcal{K}$ . Consideraremos dos de estos mapeos:

(a) Si  $U$  es convexo y  $\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \in U$  para cada  $t \in [t_0, t_1]$  entonces  $\mathbf{u}(t) + \varepsilon \mathbf{v}(t) \in U$  para cada  $t \in [t_0, t_1]$  y  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Los teoremas de dependencia continua de soluciones de ecuaciones diferenciales sobre parámetros implican que  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v})$  es una pareja admisible para  $0 \leq \varepsilon \leq \eta$  para algún  $\eta > 0$ . Por lo tanto, podemos construir el mapeo

$$\zeta : 0 \leq \varepsilon \leq \eta \rightarrow \mathcal{K}$$

sobre los controles  $\mathbf{u}$  tal que  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$  es admisible, definiendo

$$\zeta(\varepsilon) = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}. \quad (2.2.1)$$

Si  $\mathbf{x}^\varepsilon$  denota la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  correspondiente a  $\zeta(\varepsilon)$  y  $\mathbf{x}$  la solución correspondiente a  $\mathbf{u}$ . Entonces  $\mathbf{x}^\varepsilon$  para  $\varepsilon$  pequeño, queda en una

vecindad débil de  $\mathbf{x}$  [Ver Apéndice II]. El mapeo (2.2.1) es llamado una *variación débil* del control.

(b) Supongamos que  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ ,  $\mathbf{v} \in U$  y  $\tau \in (t_0, t_1]$ . Para  $\mathbf{v}$  fijo,  $\eta$  suficientemente pequeño y  $0 < \varepsilon < \eta$ , los teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales implican que existe una solución  $\mathbf{x}^\varepsilon$  de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \quad (2.2.2)$$

sobre el intervalo  $\tau - \varepsilon \leq t \leq \tau$  con la condición

$$\mathbf{x}^\varepsilon(\tau - \varepsilon) = \mathbf{x}(\tau - \varepsilon). \quad (2.2.3)$$

El teorema de dependencia continua de soluciones de ecuaciones diferenciales sobre condiciones iniciales implican que para  $\eta$  suficientemente pequeño,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  tiene una solución sobre  $[\tau, t_1]$  con condición inicial  $\mathbf{x}^\varepsilon(\tau)$ . Definamos el control  $\mathbf{u}^\varepsilon$  por

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \begin{cases} \mathbf{v}, & \text{si } \tau - \varepsilon \leq t \leq \tau, \\ \mathbf{u}(t), & \text{para otros valores de } t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Por lo tanto, para  $\eta$  suficientemente pequeño podemos definir un mapeo

$$\zeta : 0 \leq \varepsilon \leq \eta \rightarrow \mathcal{K}$$

sobre los controles que son admisibles para  $\mathbf{x}_0$  definiendo

$$\zeta(\varepsilon) = \mathbf{u}^\varepsilon. \quad (2.2.6)$$

Para el mapeo (2.2.6),  $\mathbf{x}^\varepsilon$  para  $\varepsilon$  pequeño no necesariamente está contenido en una vecindad débil de  $\mathbf{x}$ . Sin embargo,  $\mathbf{x}^\varepsilon$  está contenido en una vecindad fuerte de  $\mathbf{x}$ . (2.2.5) es llamada *variación fuerte* del control.

Haremos dos derivaciones de las condiciones necesarias de optimalidad, una usando variaciones débiles y la otra usando variaciones fuertes.

Dado que las entradas  $(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$  son fijas, para el PPTL podemos asumir que el criterio de rendimiento

$$\phi_1(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1))$$

es de la forma  $\phi_1(\mathbf{x}(t_1))$ . Las otras componentes del vector  $\phi$  definido en la Sección 1.2. no jugarán un rol importante, así que podemos suprimir el subíndice y escribir el criterio de rendimiento como

$$J(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{x}(t_1)).$$

El siguiente teorema evalúa la derivada direccional del mapeo  $J(\zeta(\varepsilon))$  cuando  $\zeta(\varepsilon)$  es el control correspondiente a una variación débil del tipo (2.2.1).

**Teorema 2.2.1** Sea  $U$  convexo y  $\mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  continua. Sea  $\mathbf{P}(t)$  la solución de las ecuaciones adjuntas de la Ecuación (A.II.7):  $\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_x(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{v}(t)$ , [Ver Apéndice II], esto es,

$$[\dot{\mathbf{P}}(t)]^T = -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_x(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.2.7)$$

con condición de frontera

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T = -\phi_x(\mathbf{x}(t_1)). \quad (2.2.8)$$

Entonces

$$\delta J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \mathbf{v}(t) dt. \quad (2.2.9)$$

**Demostración.** Si  $\delta\mathbf{x}(t)$  es la solución de la ecuación (A.II.7) con condición inicial  $\delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ , la fórmula (A.II.5) [Ver Apéndice II] implica que

$$\phi_x(\mathbf{x}(t_1))\delta\mathbf{x}(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \mathbf{v}(t) dt. \quad (2.2.10)$$

El Teorema A.2.2 [Ver Apéndice II] y la regla de la cadena implican que

$$\delta J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi_x(\mathbf{x}(t_1))\delta\mathbf{x}(t_1). \quad (2.2.11)$$

Finalmente, (2.2.10) y (2.2.11) implican (2.2.9). ■

**Teorema 2.2.2** Bajo las hipótesis del Teorema 2.2.1, una condición necesaria para que un control  $\mathbf{u}$  sea óptimo para el PPTL es que para cada  $t \in (t_0, t_1]$  fijo

$$[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \mathbf{v} \leq 0, \quad (2.2.12)$$

para cada  $\mathbf{v} \in U$  tal que  $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v} \in U$ .

**Demostración.** Dado que  $\mathbf{u}$  se supone que es continua a la izquierda, existe algún intervalo  $t_0 < t - \delta < s \leq t$  en el cual  $\mathbf{u}(s)$  es continua. Definamos una función  $\mathbf{w}$  sobre  $[t_0, t_1]$  por

$$\mathbf{w}(s) = \begin{cases} \mathbf{u}(t) + \mathbf{v} - \mathbf{u}(s), & \text{si } t - \delta < s \leq t, \\ \mathbf{0}, & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Consideraciones similares a las de (2.2.2) con (2.2.6) implican que para  $\delta$  suficientemente pequeño se tiene que  $\mathbf{u}(s) + \mathbf{w}(s) \in \mathcal{K}$ . Por lo que, para  $\delta$  suficientemente pequeño, por el Teorema 2.2.1 y el Teorema A.1.2 [Ver Apéndice II]

$$\delta J(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{t-\delta}^t [\mathbf{P}(s)]^T \mathbf{f}_u(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(s)] ds \geq 0. \quad (2.2.14)$$

Dado que el integrando es continua por la izquierda, dividiendo (2.2.14) entre  $\delta$  y tomando límite cuando  $\delta$  tiende a cero implica (2.2.12). ■

El siguiente teorema es el análogo de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2.

**Teorema 2.2.3** Si  $\mathbf{x}^\varepsilon$  son soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  correspondiente a los controles  $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$  dados por (2.2.5) con la misma condición inicial  $\mathbf{x}^\varepsilon(t_0) = \mathbf{x}_0$ , entonces

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{o}(t, \varepsilon), \quad (2.2.15)$$

donde  $\delta \mathbf{x}(t)$  es la solución de

$$\delta \mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } t_0 \leq t < \tau, \\ [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))] + \int_\tau^t \mathbf{f}_\mathbf{x}(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) \delta \mathbf{x}(s) ds, & \text{si } \tau \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

**Demostración.** De (2.2.5),  $\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \mathbf{u}(t)$  si  $t_0 \leq t \leq \tau - \varepsilon$ . Por lo tanto,  $\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t)$  si  $t_0 \leq t \leq \tau - \varepsilon$ . Esto es, (2.2.16) es verdadero con  $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  si  $t_0 \leq t \leq \tau - \varepsilon$ .

Por otro lado, si  $\tau - \varepsilon \leq t \leq \tau$  tenemos que

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) - \int_{\tau-\varepsilon}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds + \int_{\tau-\varepsilon}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}^\varepsilon(s), \mathbf{v}) ds. \quad (2.2.17)$$

Sea, para  $\eta > 0$ ,

$$A = \{(\varepsilon, t) : 0 \leq \varepsilon \leq \eta, \tau - \varepsilon \leq t \leq \tau\}. \quad (2.2.18)$$

El teorema de dependencia continua de soluciones continuas en ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales implica, para algún  $\eta > 0$ , que el mapeo

$$(\varepsilon, t) \rightarrow \mathbf{x}^\varepsilon(t)$$

de  $A$  a  $\mathbb{R}^n$  es continuo. De aquí que

$$|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}^\varepsilon(s), \mathbf{v})|$$

está acotada. Entonces (2.2.17) implica

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{O}(t, \varepsilon) \quad \text{si } \tau - \varepsilon \leq t \leq \tau. \quad (2.2.19)$$

Aplicando (2.2.19) en (2.2.17) y usando la continuidad por la izquierda de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  da

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) + [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))] \varepsilon + \mathbf{o}(t, \varepsilon). \quad (2.2.20)$$

El Teorema A.2.3 [Ver Apéndice II] y (2.2.20) completa la derivación de (2.2.16). ■

**Teorema 2.2.4** Para  $0 \leq \varepsilon \leq \eta$ , sea

$$J(\mathbf{u}^\varepsilon) = \phi(\mathbf{x}^\varepsilon(t_1)) \quad (2.2.21)$$

donde  $\mathbf{u}^\varepsilon$  es el control definido en (2.2.5). Sea  $\mathbf{P}(t)$  la solución de (2.2.7) con condición frontera (2.2.8). Entonces

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{u}^\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -[\mathbf{P}(\tau)]^T [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))]. \quad (2.2.22)$$

**Demostración.** Las fórmulas (A.II.5) [Ver Apéndice II], (2.2.7), (2.2.8) y (2.2.16) implican

$$-[\mathbf{P}(\tau)]^T [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))] = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_1))\delta\mathbf{x}(t_1) \quad (2.2.23)$$

donde  $\delta\mathbf{x}(t_1)$  es la solución de (2.2.16). Las fórmulas (2.2.21), (2.2.15) y la regla de la cadena implican (2.2.22) ■

Finalmente, la fórmula (A.II.3) [Ver Apéndice II] y el Teorema 2.2.4 implican el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.5** (*Principio de Pontryagin para el Problema del Punto Terminal Libre*). Una condición necesaria de optimalidad de un control  $\mathbf{u}$  para el PPTL es que

$$[\mathbf{P}(t)]^T [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))] \leq 0 \quad (2.2.24)$$

para cada  $\mathbf{v} \in U$  y  $t \in (t_0, t_1]$ , donde  $[\mathbf{P}(t)]^T$  es la solución de

$$[\dot{\mathbf{P}}(t)]^T = -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.2.25)$$

con condición frontera

$$[\mathbf{P}(t)]^T = -\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_1)). \quad (2.2.26)$$

### 2.3. Verificación del principio de Pontryagin

Los Teoremas A.2.4 y A.2.5 [Ver Apéndice II] implican la existencia de un vector  $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ , ( $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ ) con

$$\lambda_1 \leq 0 \quad (2.3.1)$$

$$[\boldsymbol{\lambda}]^T \mathbf{d} \leq 0 \quad (2.3.2)$$

para vectores  $\mathbf{d}$  generadores del cono convexo  $D$ , listados a continuación:

- i)*  $\phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e})\delta\mathbf{x}(t_1)$
- ii)*  $\phi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e})\mathbf{y} + \phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e})\delta\mathbf{x}(t_1)$
- iii)*  $\pm [\phi_{t_1}(\mathbf{e}) + \phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e})\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1))]$
- iv)*  $\pm [\phi_{t_0}(\mathbf{e}) + \phi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e})\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))]$

donde  $\delta\mathbf{x}(t)$  es la solución de

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\delta\mathbf{x}(t) \quad (2.3.3)$$

en *i)* con condición frontera  $\delta\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$  para  $\tau \in (t_0, t_1]$  y  $\mathbf{u} \in U$ , y en *ii)* con condición inicial  $\delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}$ .

Sea  $\mathbf{P}(t)$  solución de

$$[\dot{\mathbf{P}}(t)]^T = -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (\text{C1})$$

con condición frontera

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}), \quad (\text{C3})$$

Aplicando la fórmula (A.II.5) [Ver Apéndice II]:

$$[\mathbf{P}(\tau_2)]^T \mathbf{y}(\tau_2) - [\mathbf{P}(\tau_1)]^T \mathbf{y}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{G}(t) dt \quad (\text{A.II.5})$$

con  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{y}(t) = \delta \mathbf{x}(t)$  que es solución  $\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \delta \mathbf{x}(t)$  con condición de frontera  $\delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$ , implican que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}(\tau)]^T \delta \mathbf{x}(\tau) - [\mathbf{P}(t_1)]^T \delta \mathbf{x}(t_1) &= 0 \\ [\mathbf{P}(\tau)]^T (\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))) - [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{x}(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{2.3.4})$$

Por (2.3.2), para el vector  $i$ ) se tiene que:

$$[\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{x}(t_1) \leq 0. \quad (\text{2.3.5})$$

Finalmente, (2.3.4) y (2.3.5) implican que:

$$[\mathbf{P}(\tau)]^T (\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))) \leq 0. \quad (\text{C2})$$

Por otro lado, aplicando (A.II.5) [Ver Apéndice II] con  $\mathbf{y}(t) = \delta \mathbf{x}(t)$  solución de  $\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \delta \mathbf{x}(t)$  con  $\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}$  produce que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}(t_0)]^T \delta \mathbf{x}(t_0) - [\mathbf{P}(t_1)]^T \delta \mathbf{x}(t_1) &= 0 \\ [\mathbf{P}(t_0)]^T \mathbf{y} - [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{x}(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{2.3.6})$$

Por (2.3.2), para el vector  $ii$ ) implica que:

$$[\boldsymbol{\lambda}]^T (\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}) \mathbf{y} + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{x}(t_1)) \leq 0. \quad (\text{2.3.7})$$

Sumando (2.3.6) y (2.3.7) obtenemos

$$([\mathbf{P}(t_0)]^T + [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e})) \mathbf{y} \leq 0, \quad (\text{2.3.8})$$

como esto debe satisfacerse para cada  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T = -[\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}). \quad (\text{C4})$$

Por otro lado, por (2.3.2) para el vector  $iii$ ) implica que:

$$\pm [\boldsymbol{\lambda}]^T [\boldsymbol{\phi}_{t_1}(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1))] \leq 0. \quad (\text{2.3.9})$$

Este resultado con

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \quad (\text{C3})$$

implican que:

$$\begin{aligned} \pm ([\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_1}(\mathbf{e}) + [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1))) &\leq 0 \\ \pm ([\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_1}(\mathbf{e}) + [\mathbf{P}(t_1)]^T \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1))) &\leq 0 \\ [\mathbf{P}(t_1)]^T \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) &= -[\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_1}(\mathbf{e}). \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

Un argumento similar es utilizado para el vector  $iv$ ) teniendo que

$$\pm [\boldsymbol{\lambda}]^T [\boldsymbol{\phi}_{t_0}(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}) \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))] \leq 0 \quad (2.3.10)$$

con

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T = -[\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}) \quad (\text{C4})$$

implican que:

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0)) = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{t_0}(\mathbf{e}). \quad (\text{C6})$$

La condición (C7) se deduce de (C2) y (C6), a través del corolario siguiente derivado del Lema A.2.6 [Ver Apéndice II].

**Corolario 2.3.1** *Si  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  y  $\mathbf{u}(t)$  son como en el Teorema 2.1.1 (Principio de Pontryagin), la condición (C7) del Teorema 2.1.1 es implicada por las condiciones (C1), (C2) y (C6).*

**Demostración.** Aplicando el Lema A.2.6 [Ver Apéndice II] para el hamiltoniano  $\mathbb{H}(t, \mathbf{u}) = [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u})$ . Entonces

$$\mathbb{H}_t(t, \mathbf{u}(t)) = [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_t(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).$$

Por lo tanto, (C7) se sigue directamente de (A.II.18) [Ver Apéndice II] y de (C6). ■

# Capítulo 3

## Ejemplos

El presente capítulo se dedica a mostrar algunos problemas resueltos mediante el Principio de Pontryagin.

### 3.1. Aeronave alunizando con mínimo combustible

#### 3.1.1. Planteamiento del problema

Considere el problema de una aeronave intentando alunizar suavemente usando una cantidad mínima de combustible en condiciones normales (Figura 1).

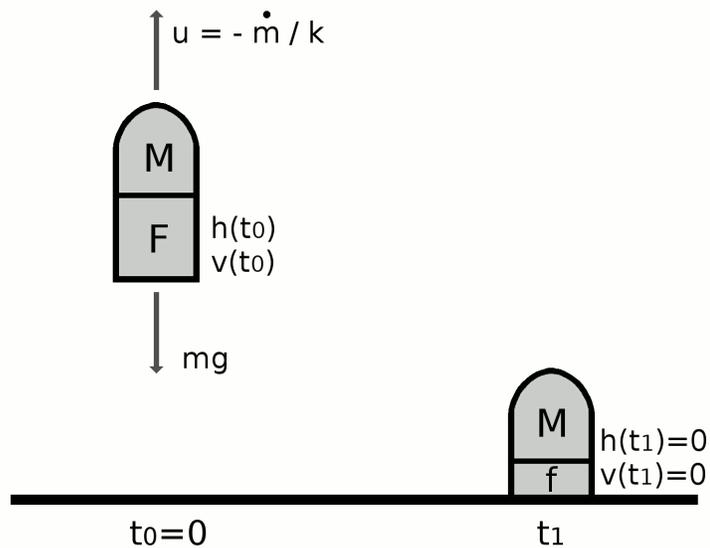


Figura 1. Diagrama de alunizaje.

Para definir una versión simplificada del problema, considérese:

- $m$ : masa total de la aeronave.  
 $h$ : altura de la aeronave a la luna.  
 $v$ : velocidad vertical de la aeronave sobre la luna.  
 $M$ : masa de la aeronave sin combustible.  
 $F$ : cantidad inicial de combustible.  
 $h_0$ : altura inicial de la aeronave sobre la luna.  
 $v_0$ : velocidad vertical inicial de la aeronave.  
 $\alpha$ : máxima propulsión de la aeronave.  
 $k$ : constante de consumo de combustible.  
 $g$ : aceleración de la gravedad sobre la luna.  
 $f$ : cantidad final de combustible al alunizar.

Obtendremos las ecuaciones de movimiento de la aeronave a partir de leyes físicas.

Notación:  $\frac{dh}{dt} = \dot{h}$ .

La pérdida de masa es proporcional a la propulsión de la aeronave, es decir,  $u = -(\frac{1}{k})\dot{m}$ .

Además,  $v = \frac{dh}{dt} = \dot{h}$ .

Se tiene de la Tercera Ley de Newton:

$$m(t)\dot{v}(t) = m(t)\dot{\dot{h}}(t) = -gm(t) + u(t) = -gm(t) - \frac{\dot{m}}{k}$$

por lo que

$$\dot{v}(t) = -g - \left(\frac{1}{m(t)}\right) \frac{\dot{m}}{k}.$$

Las ecuaciones de movimiento de la aeronave son:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= v \\ \dot{v} &= -g + \frac{u}{m} \\ \dot{m} &= -ku. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

La propulsión del motor de la aeronave  $u(t)$  es el control del problema. Suponga que la clase  $\mathcal{U}$  de funciones de control son todas las funciones a trozos continuas  $u(t)$  definidas sobre el intervalo  $[t_0, t_1]$  tales que  $0 \leq u(t) \leq \alpha$ .

Es natural tomar como tiempo inicial  $t_0 = 0$ , y tiempo final  $t_1$  igual al primer momento en el que la aeronave toca a la luna.

Las condiciones terminales que deben satisfacerse en el tiempo inicial y final son:

$$\begin{aligned} h(t_0) - h_0 &= 0 \\ v(t_0) - v_0 &= 0 \\ m(t_0) - M - F &= 0 \\ h(t_1) &= 0 \\ v(t_1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

El objetivo es minimizar el combustible consumido,  $F - f$ .

Pero  $(M + F) - m(t_1) = m(t_0) - m(t_1) = (M + F) - (M + f) = F - f$ .

Así, el problema es alunizar consumiendo una mínima cantidad de combustible, o equivalentemente, minimizar  $-m(t_1)$  sobre la clase  $\mathcal{U}$ .

Consideremos entonces  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} h \\ v \\ m \end{pmatrix}$  donde las condiciones iniciales en forma vectorial en el tiempo inicial  $t_0 = 0$  son:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} h(t_0) \\ v(t_0) \\ m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \\ M + F \end{pmatrix}$$

y en el tiempo final  $t_1$ :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} h(t_1) \\ v(t_1) \\ m(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m(t_1) \end{pmatrix}.$$

La función vectorial de las ecuaciones de movimiento de la aeronave es:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u) = \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{v} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -g + \frac{u}{m} \\ -ku \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Sea  $\phi(t_0, t_1, h(t_0), v(t_0), m(t_0), h(t_1), v(t_1), m(t_1)) = \phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \phi(\mathbf{e})$  correspondiendo al criterio de rendimiento (1.2.2) y las condiciones terminales (1.2.3), tenemos:

$$\phi(t_0, t_1, h(t_0), v(t_0), m(t_0), h(t_1), v(t_1), m(t_1)) = \begin{pmatrix} -m(t_1) \\ t_0 \\ h(t_0) - h_0 \\ v(t_0) - v_0 \\ m(t_0) - M - F \\ h(t_1) \\ v(t_1) \end{pmatrix}. \quad (3.1.4)$$

### 3.1.2. Condiciones de optimalidad de Pontryagin

#### (C1) Ecuaciones adjuntas

$$[\dot{\mathbf{P}}(t)]^T = -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)).$$

Para este ejemplo, la condición (C1) que debe satisfacerse es:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \\ \dot{P}_3(t) \end{pmatrix}^T = - \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{u(t)}{[m(t)]^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}\dot{P}_1(t) &= 0 \\ \dot{P}_2(t) &= -P_1(t) \\ \dot{P}_3(t) &= \frac{P_2(t)u(t)}{[m(t)]^2}.\end{aligned}\tag{C1}$$

### (C2) Principio del máximo de Pontriagyn

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), u)\} = [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)).$$

$$\begin{aligned}& \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \left\{ P_1(t)v(t) + P_2(t) \left( \frac{u}{m(t)} - g \right) - P_3(t)ku \right\} \\ &= P_1(t)v(t) + P_2(t) \left( \frac{u(t)}{m(t)} - g \right) - P_3(t)ku(t).\end{aligned}\tag{C2}$$

### (C3) Condición de transversalidad

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T = [\boldsymbol{\lambda}]^T \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}).$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t_1) \\ P_2(t_1) \\ P_3(t_1) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \frac{\partial\{-m(t)\}}{\partial m(t)} \Big|_{t=t_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\{h(t)\}}{\partial h(t)} \Big|_{t=t_1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial\{v(t)\}}{\partial v(t)} \Big|_{t=t_1} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} P_1(t_1) \\ P_2(t_1) \\ P_3(t_1) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}^T.\tag{C3}$$

**(C4) Condición de transversalidad**

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T = -[\boldsymbol{\lambda}]^T \phi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}).$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t_0) \\ P_2(t_0) \\ P_3(t_0) \end{pmatrix}^T = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\{h(t)-h\}}{\partial h(t)} \Big|_{t=t_0} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial\{v(t)-v\}}{\partial v(t)} \Big|_{t=t_0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial\{m(t)-M-F\}}{\partial m(t)} \Big|_{t=t_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} P_1(t_0) \\ P_2(t_0) \\ P_3(t_0) \end{pmatrix}^T = - \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}^T. \quad (\text{C4})$$

**Nota:** El símbolo  $\dot{\phantom{x}}$  indica que la entrada es 0.

**(C5) Condición de transversalidad**

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}^*(t_1), u^*(t_1)) = -[\boldsymbol{\lambda}]^T \phi_{t_1}(\mathbf{e}).$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t_1) \\ P_2(t_1) \\ P_3(t_1) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v(t_1) \\ -g + \frac{u(t_1)}{m(t_1)} \\ -ku(t_1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que implica

$$P_1(t_1)v(t_1) + P_2(t_1) \left( \frac{u(t_1)}{m(t_1)} - g \right) - P_3(t_1)ku(t_1) = 0. \quad (\text{C5})$$

**(C6) Condición de transversalidad**

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}^*(t_0), u^*(t_0)) = [\boldsymbol{\lambda}]^T \phi_{t_0}(\mathbf{e}).$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t_0) \\ P_2(t_0) \\ P_3(t_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v(t_0) \\ -g + \frac{u(t_0)}{m(t_0)} \\ -ku(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que implica

$$P_1(t_0)v(t_0) + P_2(t_0) \left( \frac{u(t_0)}{m(t_0)} - g \right) - P_3(t_0)ku(t_0) = \lambda_2. \quad (\text{C6})$$

**(C7) Condición**

$$[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) = [\boldsymbol{\lambda}]^T \phi_{t_0}(t_0, t_1, \mathbf{x}^*(t_0), \mathbf{x}^*(t_1)) + \int_{t_0}^t [\mathbf{P}(s)]^T \mathbf{f}_t(s, \mathbf{x}^*(s), u^*(s)) ds.$$

$$P_1(t)v(t) + P_2(t) \left( \frac{u(t)}{m(t)} - g \right) - P_3(t)ku(t) = cte. \quad (\text{C7})$$

De (C5), (C6) y (C7):

$$cte = \lambda_2 = 0.$$

**3.1.3. Solución**

i) La condición  $\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{\mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u})\} = \mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ , y las

ii) Condiciones necesarias para un máximo en  $u^*$  para

$$q(t, u) = \mathbb{H}(t, \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) = \left( \frac{P_2(t)}{m(t)} - P_3(t)k \right) u(t) + P_1(t)v(t) - P_2(t)g,$$

$$q'(t, u) = \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t),$$

$$q''(t, u) = 0.$$

determinan que

$$q'(t, u) = \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t) \leq 0, \text{ si } u^* = 0,$$

$$q'(t, u) = \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t) \geq 0, \text{ si } u^* = \alpha.$$

Resumiendo:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t) < 0, \\ \alpha, & \text{si } \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t) > 0, \\ \text{Indeterminado,} & \text{si } \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t) = 0. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

**Caso 1.**  $u(t) = 0$ .

Sobre  $[s_1, s_2]$ , cuando  $\mathbb{H}'(t, \mathbf{x}, u) < 0$  se tiene que  $u(t) = 0$  y:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), u(t) = 0) = \begin{pmatrix} v \\ -g \\ 0 \end{pmatrix},$$

integrando:

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{s_1}^t 0 ds = 0 + m(s_1) = m(s_1), \\ v(t) &= \int_{s_1}^t -g ds = -gs \Big|_{s_1}^t + v(s_1) = -g(t - s_1) + v(s_1), \\ h(t) &= \int_{s_1}^t v(s) ds = \int_{s_1}^t (-g(s - s_1) + v(s_1)) ds = -g \frac{(s - s_1)^2}{2} \Big|_{s_1}^t + v(s_1)s \Big|_{s_1}^t + h(s_1). \end{aligned}$$

Resumiendo se tendrían las ecuaciones de movimiento de la aeronave para  $u(t) = 0$ , es decir, bajo *caída libre*

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1), \\ v(t) &= -g(t - s_1) + v(s_1), \\ m(t) &= m(s_1). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

**Caso 2.**  $u(t) = \alpha$

Sobre  $[s_1, s_2]$ , cuando  $\mathbb{H}'(t, \mathbf{x}, u) > 0$  se tiene que  $u(t) = \alpha$  y:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), u(t) = \alpha) = \begin{pmatrix} v \\ -g + \frac{\alpha}{m} \\ -k\alpha \end{pmatrix},$$

integrando:

$$m(t) = \int_{s_1}^t -k\alpha ds = -k\alpha s \Big|_{s_1}^t + m(s_1) = -k\alpha(t - s_1) + m(s_1).$$

Por otro lado, expresando  $v(t)$ ,

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{s_1}^t \left( -g + \frac{\alpha}{m(s)} \right) ds \\ &= \int_{s_1}^t \left( -g + \frac{\alpha}{-k\alpha(s - s_1) + m(s_1)} \right) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Haciendo } z = -k\alpha(s - s_1) + m(s_1), \quad dz = -k\alpha ds, \quad ds = -\frac{dz}{k\alpha},$$

$$\begin{aligned} v(t) &= -gs \Big|_{s_1}^t - \frac{1}{k} \int_{s_1}^t \left( \frac{1}{z(s)} \right) dz + v(s_1) \\ &= -g(t - s_1) - \frac{1}{k} \text{Ln} \{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)\} \Big|_{s_1}^t + v(s_1) \\ &= -g(t - s_1) - \frac{1}{k} (\text{Ln} \{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)\} - \text{Ln} \{m(s_1)\}) + v(s_1) \\ &= -g(t - s_1) - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} + v(s_1). \end{aligned}$$

A su vez, buscando una expresión para  $h(t)$ ,

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{s_1}^t v(s) ds \\ &= \int_{s_1}^t \left( -g(s - s_1) - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)} \right\} + v(s_1) \right) ds \\ &= -g \frac{(s - s_1)^2}{2} \Big|_{s_1}^t - \frac{1}{k} \int_{s_1}^t \text{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)} \right\} ds + v(s_1) s \Big|_{s_1}^t + h(s_1) \\ &= -\frac{g(t - s_1)^2}{2} - \frac{1}{k} \int_{s_1}^t \text{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)} \right\} ds + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1). \end{aligned}$$

$$\text{Haciendo } w = \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)}, \quad dw = \frac{-k\alpha}{m(s_1)} ds, \quad ds = -\frac{m(s_1)}{k\alpha} dw,$$

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{g(t - s_1)^2}{2} + \frac{m(s_1)}{k^2\alpha} \int_{s_1}^t \text{Ln} \{w(s)\} dw + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1) \\ &= -\frac{g(t - s_1)^2}{2} + \frac{m(s_1)}{k^2\alpha} (w \text{Ln} \{w\} - w) \Big|_{s=s_1}^{s=t} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1) \\ &= \frac{m(s_1)}{k^2\alpha} \left( \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)} \text{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)} \right\} - \frac{m(s_1) - k\alpha(s - s_1)}{m(s_1)} \right) \Big|_{s_1}^t \\ &\quad - \frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m(s_1)}{k^2\alpha} \left( \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} - \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right) \\
&\quad - \frac{m(s_1)}{k^2\alpha} \left( \frac{m(s_1) - k\alpha(s_1 - s_1)}{m(s_1)} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(s_1 - s_1)}{m(s_1)} \right\} - \frac{m(s_1) - k\alpha(s_1 - s_1)}{m(s_1)} \right) \\
&\quad - \frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1) \\
&= \frac{1}{k^2\alpha} \left( (m(s_1) - k\alpha(t - s_1)) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} - m(s_1) + k\alpha(t - s_1) \right) \\
&\quad - \frac{1}{k^2\alpha} \left( m(s_1) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1)}{m(s_1)} \right\} - m(s_1) \right) \\
&\quad - \frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1) \\
&= \frac{1}{k^2\alpha} \left( (m(s_1) - k\alpha(t - s_1)) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} + k\alpha(t - s_1) \right) \\
&\quad - \frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1) \\
&= \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{k^2\alpha} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} + \frac{(t - s_1)}{k} \\
&\quad - \frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1).
\end{aligned}$$

Resumiendo, las ecuaciones de movimiento de la aeronave para  $u(t) = \alpha$  son:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{k^2\alpha} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} + \frac{(t - s_1)}{k} - \frac{g(t - s_1)^2}{2} + v(s_1)(t - s_1) + h(s_1), \\
v(t) &= -g(t - s_1) - \frac{1}{k} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(t - s_1)}{m(s_1)} \right\} + v(s_1), \\
m(t) &= -k\alpha(t - s_1) + m(s_1).
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Como paso siguiente, determinemos los puntos  $(h, v)$  que pueden ser puntos iniciales en la parte donde  $u(t) = \alpha$ , y en donde  $h = 0$  y  $v = 0$  sean satisfechas en el tiempo terminal. Definimos para  $t \in [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}
h(s_2) &= 0, \\
v(s_2) &= 0, \\
h(s_1) &= h, \\
v(s_1) &= v, \\
m(s_1) &= m = M + F, \\
s_2 - s_1 &= s,
\end{aligned}$$

en las ecuaciones (3.1.7), obteniéndose

$$h(s_2) = \frac{m - k\alpha(s_2 - s_1)}{k^2\alpha} \text{Ln} \left\{ \frac{m - k\alpha(s_2 - s_1)}{m} \right\} + \frac{(s_2 - s_1)}{k} - \frac{g(s_2 - s_1)^2}{2} + v(s_1)(s_2 - s_1) + h(s_1),$$

lo que implica que:

$$0 = \frac{m - k\alpha s}{k^2\alpha} \text{Ln} \left\{ \frac{m - k\alpha s}{m} \right\} + \frac{s}{k} - \frac{gs^2}{2} + vs + h,$$

es decir,

$$h = \frac{gs^2}{2} - \frac{m - k\alpha s}{k^2\alpha} \text{Ln} \left\{ \frac{m - k\alpha s}{m} \right\} - \frac{s}{k} - vs. \quad (3.1.8)$$

De la misma manera

$$v(s_2) = -g(s_2 - s_1) - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m(s_1) - k\alpha(s_2 - s_1)}{m(s_1)} \right\} + v(s_1),$$

lo que implica que:

$$0 = -gs - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m - k\alpha s}{m} \right\} + v,$$

es decir,

$$v = gs + \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m - k\alpha s}{m} \right\}. \quad (3.1.9)$$

Las ecuaciones (3.1.8) y (3.1.9) describen la altura y velocidad iniciales desde las cuales un aterrizaje suave ( $h = 0, v = 0$ ) es posible usando la máxima propulsión  $\alpha$  para el tiempo  $s$ .

Para ser acordes a la realidad, la relación

$$\alpha > (M + F)g \quad (3.1.10)$$

debe satisfacerse. Esto implica que si la propulsión se inicia a tasa máxima, la propulsión sobre la masa inicial es mayor que la aceleración de la gravedad.

Si la aeronave quema combustible a razón  $k\alpha$ , la cantidad total de combustible será consumida en un tiempo  $\frac{F}{k\alpha}$ . Graficando (3.1.8) y (3.1.9) bajo la condición (3.1.10) para  $0 \leq s \leq \frac{F}{k\alpha}$  genera la curva en el segundo cuadrante en el plano  $h-v$ . Esta curva es llamada *curva de transición* (Figura 2).

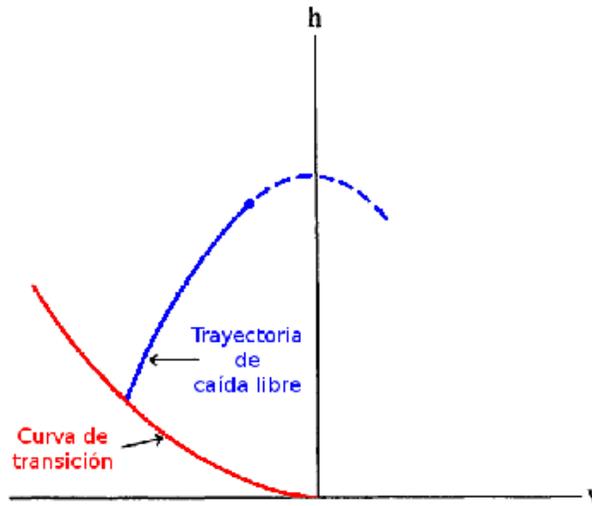


Figura 2. Caída libre y Curva de transición.

La interpretación de esta curva es que si la aeronave está en el punto  $(h, v)$  sobre la curva correspondiente al parámetro  $s$  y si se propulsa a la máxima tasa  $\alpha$ , entonces llegará a  $v = 0$  y  $h = 0$  en un tiempo  $s$ .

Si la aeronave cae libremente seguirá las ecuaciones (3.1.6):

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{g(t-s_1)^2}{2} + v(s_1)(t-s_1) + h(s_1), \\ v(t) &= -g(t-s_1) + v(s_1), \\ m(t) &= m(s_1). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Si en  $s_1 = 0$  la aeronave está en  $(h_0, v_0) = (h(s_1), v(s_1))$  e inicia una trayectoria de caída libre, las primeras dos ecuaciones de (3.1.6) implican que:

$$\begin{aligned} v(t) &= -gt + v_0, \\ h(t) &= -\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= (-gt + v_0)^2 = v_0^2 - 2v_0gt + g^2t^2, \\ v^2 - v_0^2 &= -2v_0gt + g^2t^2, \\ \frac{v^2 - v_0^2}{-2g} &= v_0t - \frac{gt^2}{2}, \\ \frac{v^2 - v_0^2}{-2g} &= h(t) - h_0, \end{aligned}$$

es decir,

$$h(t) = h_0 - \frac{v^2 - v_0^2}{2g}. \tag{3.1.11}$$

Sea  $(h_0, v_0)$  un punto en el plano  $h$ - $v$  tal que (3.1.11) intersecta a la curva de transición en un punto  $(h, v)$  parametrizado por un valor de  $s$  con  $0 \leq s \leq \frac{F}{k\alpha}$ . Sea  $\tau$  denotando el tiempo en que la aeronave dejaría su trayectoria de caída libre. Podemos mostrar que el control

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \tau, \\ \alpha, & \text{si } \tau \leq t \leq \tau + s, \end{cases} \quad (3.1.12)$$

es un control extremal.

Esto resultará si se muestra que una elección de  $\lambda$  puede ser hecha de tal manera que (C1-C7) y las condiciones terminales sean satisfechas.

Refiriendo a la Figura 2 vemos que la velocidad de la aeronave al tiempo  $\tau$  usando el control (3.1.12) es  $v_0 - g\tau$ . Las condiciones (C1), (C3) y (C4) son satisfechas por:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= -\lambda_3 = \lambda_6 \\ P_2(t) &= \lambda_3 t - \lambda_4 = \lambda_3(t_1 - t) + \lambda_7 \\ P_3(t) &= \begin{cases} -\lambda_5, & \text{si } t_0 \leq t \leq \tau, \\ -\lambda_5 + \int_{\tau}^t \frac{(\lambda_3 \tilde{\tau} - \lambda_4)\alpha}{m(\tilde{\tau})^2} d\tilde{\tau}, & \text{si } \tau \leq t \leq t_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Definiendo

$$r(t) = \frac{P_2(t)}{m(t)} - kP_3(t).$$

De (C1) y (C4)

$$\dot{r}(t) = \frac{\lambda_3}{m(t)}.$$

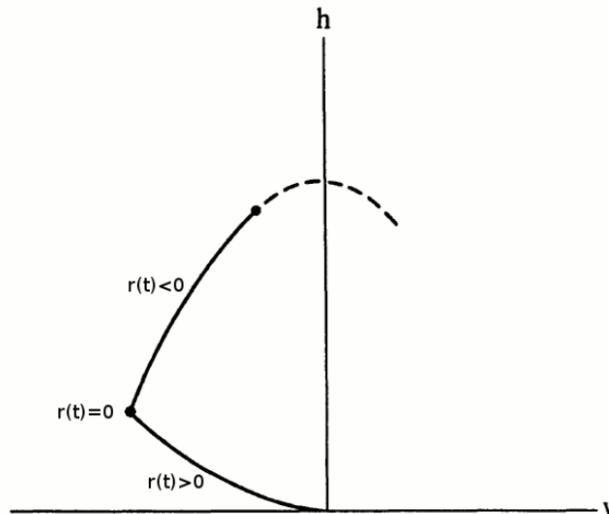


Figura 3. Gráfica de  $r(t)$

De (3.1.13) y (3.1.5) tenemos

$$r(\tau) = \frac{\lambda_3\tau - \lambda_4}{M + F} + \lambda_5k = 0, \quad (3.1.14)$$

De (C5), (C6), (C7) y (3.1.12)

$$-\lambda_3v_0 + \lambda_4g = 0. \quad (3.1.15)$$

Las ecuaciones (3.1.14) y (3.1.15) tienen como solución:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{\lambda_5kg(M + F)}{v_0 - g\tau} \\ \lambda_4 &= \frac{\lambda_5kv_0(M + F)}{v_0 - g\tau}. \end{aligned}$$

Cuando las sustituimos en (3.1.13) se tiene que

$$P_3(t) = \lambda_5 \left[ -1 + \frac{k(M + F)}{v_0 - g\tau} \int_{\tau}^t \frac{(g\tilde{\tau} - v_0)\alpha}{m(\tilde{\tau})^2} d\tilde{\tau} \right], \quad \text{si } \tau \leq t \leq t_1.$$

Si son hechas las elecciones

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= -1 \text{ y} \\ \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

entonces  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ ,  $\lambda_6$  y  $\lambda_7$  están dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{-kg(M + F)}{v_0 - g\tau}, \\ \lambda_4 &= \frac{-kv_0(M + F)}{v_0 - g\tau}, \\ \lambda_6 &= \frac{kg(M + F)}{v_0 - g\tau}, \\ \lambda_7 &= -\lambda_4 - \lambda_6t_1. \end{aligned}$$

$P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  y  $P_3(t)$  están dadas por (3.1.13).

Podemos calcular la pérdida de masa de la aeronave mediante (3.1.7) o definiendo un funcional de la masa:

$$\Lambda(u) = - \int_{t_0}^{t_1} m'(t)dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dm(t)}{dt} dt = m(t_0) - m(t_1).$$

Como

$$\dot{v}(t) = -g + \frac{d}{dt} \left( -\frac{Ln\{m(t)\}}{k} \right),$$

integrando de  $t_0$  a  $t_1$ :

$$\dot{h}(t_1) = -g(t_1 - t_0) - \frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m(t_1)}{m(t_0)} \right\} + \dot{h}(t_0),$$

con  $\dot{h}(t_1) = v(t_1) = 0$  se tiene que:

$$\frac{1}{k} \text{Ln} \left\{ \frac{m(t_1)}{m(t_0)} \right\} = \dot{h}(t_0) - gt_1,$$

por lo que

$$m(t_1) = m(t_0)e^{k[v(t_0)-gt_1]}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Lambda(u) &= m(t_0) - m(t_1) \\ &= m(t_0) - m(t_0)e^{k[v(t_0)-gt_1]} \\ &= m(t_0) (1 - e^{k[v(t_0)-gt_1]}). \end{aligned}$$

### 3.1.4. Simulación

Con los datos de entrada:

$$h_0 = 50000, v_0 = -100, g = 1.63, \alpha = 8950, k = 0.0005, M = 2000, F = 700.$$

Al intersectar las ecuaciones de estado cuando  $u(t) = 0$  y  $u(t) = \alpha$ , se obtienen los tiempos críticos:

$$t_0 = 0, \quad \tau = 127.975, \quad t_1 = 271.222$$

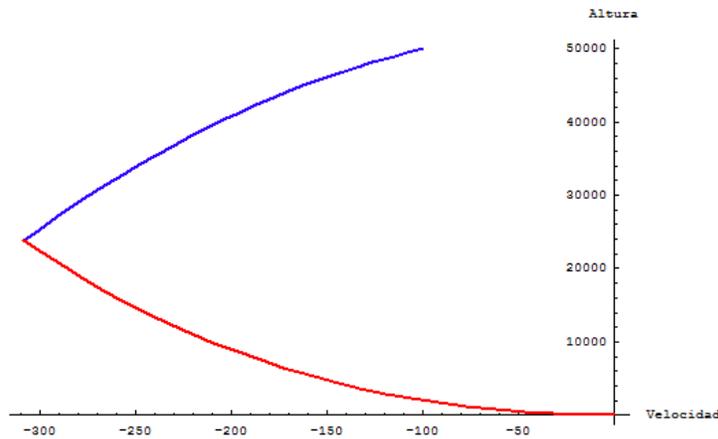


Figura 4. Altura vs velocidad de la aeronave.

Se representan gráficamente las ecuaciones de estado de la aeronave:

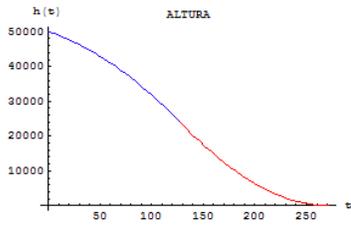


Fig 5.1 Altura de la aeronave.

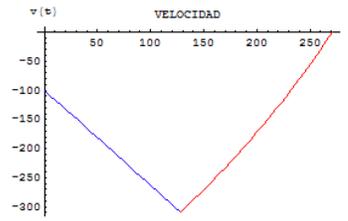


Fig. 5.2 Velocidad de la aeronave.

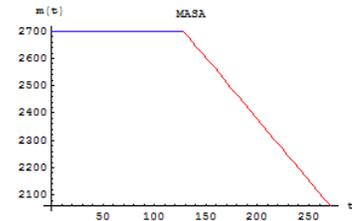


Fig. 5.3 Velocidad de la aeronave.

$$\begin{aligned} h(t_0) &= 50000 \\ h(\tau) &= 23854.8 \\ h(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t_0) &= -100 \\ v(\tau) &= -308.6 \\ v(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(t_0) &= 2700 \\ m(\tau) &= 2700 \\ m(t_1) &= 2058.97. \end{aligned}$$

Del comportamiento del estado de la aeronave, graficadas en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, desde el tiempo inicial al tiempo del alunizaje se analiza lo siguiente:

**Altura.** Partiendo de una altura inicial de 50000 metros, la aeronave va disminuyendo su altura con respecto a la luna debido a la caída libre hasta el tiempo de transición  $\tau = 127.975$ , encontrándose en ese momento a 23854.8 metros. Luego, se aplica el control  $u = \alpha$  hasta los 271.222 segundos, consiguiendo una altura final  $h(t_1) = 0$ .

**Velocidad.** Desde la velocidad inicial  $v(t_0) = -100\text{m/s}$ , la aeronave va aumentando su velocidad (en sentido negativo) debido a la caída libre hasta el tiempo de transición  $\tau$ , encontrándose en ese momento con una velocidad de  $-308.6\text{m/s}$ . Finalmente, se aplica la máxima propulsión para ir reduciendo su velocidad y conseguir una velocidad final deseada  $v(t_1) = 0$ .

**Masa.** Puesto que en  $t_0 = 0$  la aeronave de masa 2000kg tiene suministrado 700kg de combustible, esta masa total de  $m = 2700\text{kg}$  no se altera bajo condiciones de caída libre. Una vez activada la máxima propulsión  $u = \alpha$ , la nave comienza a consumir combustible, y por tanto, a disminuir la masa total de la aeronave. En el momento del alunizaje en  $t_1 = 271.222$  se observa una masa total de 2058.97kg, es decir, 2000kg de la aeronave y un sobrante de 58.97kg de combustible. Es necesario condicionar que  $m(t_1) > M$ .

## 3.2. Modelo de Ramsey

En Economía se presenta la siguiente situación llamada modelo de Ramsey.

El Modelo de crecimiento de Ramsey es un modelo de crecimiento económico creado por Frank P. Ramsey (1928) y perfeccionado por Cass (1965) y Koopmans (1965).

El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans también es conocido como el modelo de horizonte infinito, y para los economistas, este modelo es la continuación del modelo de Solow, donde se

consideran tasas de ahorro constantes, pero desarrollado en un contexto de optimización de los agentes económicos.

### 3.2.1. Planteamiento del problema

El problema estándar del modelo de Ramsey es:

- Un agente económico quiere controlar una serie de variables: variables de control.
- Un agente económico quiere maximizar una función objetivo (de utilidad, beneficio, etc.) sujeto a determinadas restricciones.
- Las restricciones son dinámicas, y explican la evolución de las variables de estado, las cuales describen el estado de la economía.
- La tasa de ingreso  $y(t)$  de un agente económico y el capital  $K(t)$  están relacionados a través de la función

$$y(t) = F(K(t)), \quad t \geq 0.$$

- La tasa de consumo  $c(t)$  es una proporción  $u(t)$  de una función del capital  $K(t)$ :

$$c(t) = u(t)G(K(t))$$

donde  $0 \leq u(t) \leq 1$ .

Entonces, la razón de cambio en el capital es

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= y(t) - c(t) \\ &= F(K(t)) - u(t)G(K(t)). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Sea  $H(c)$  una función que representa la utilidad del sistema de consumo a tasa  $c$ . Considere el rendimiento del agente económico dado por la integral de la función de utilidad:

$$\int_{t_0}^{t_1} H(u(t)G(K(t)))dt. \tag{3.2.2}$$

El problema es elegir la proporción a consumir,  $u(t)$ , de tal manera que el capital satisfaga la ecuación diferencial (3.2.1) desde un valor inicial  $K(t_0) = K_0$  a un valor final deseado  $K(t_1) = K_1$  y además, que la integral (3.2.2) sea maximizada.

### 3.2.2. Solución.

La función de producción neoclásica con labor y capital como entradas es:

$$Y = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

o en términos per cápita ( $y = Y/L$ ,  $k = K/L$ ),

$$y = k^\alpha. \tag{3.2.3}$$

Consideremos que la tasa de crecimiento poblacional es constante, es decir,

$$\eta = \frac{\dot{L}}{L} = cte. \quad (3.2.4)$$

y si  $\delta$  es la tasa de depreciación de capital:

$$\text{PRODUCCIÓN: } Y(t) = C(t) + I(t). \quad (3.2.5)$$

$$\text{CAPITAL: } \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t). \quad (3.2.6)$$

De tal manera que la producción per cápita es:

$$\begin{aligned} \frac{Y(t)}{L(t)} &= \frac{C(t)}{L(t)} + \frac{I(t)}{L(t)} \\ y(t) &= c(t) + \frac{I(t)}{L(t)} \\ y(t) &= c(t) + \frac{\dot{K}(t) + \delta K(t)}{L(t)}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{K(t)}{L(t)} \right\} = \frac{L(t)\dot{K}(t) - K(t)\dot{L}(t)}{[L(t)]^2}, \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \left( \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right), \\ \dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \eta k(t). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Así que, de (3.2.1),

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t) + \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta \frac{K(t)}{L(t)} \\ &= c(t) + \dot{k}(t) + \eta k(t) + \delta k(t) \\ y(t) &= c(t) + \dot{k}(t) + (\eta + \delta)k(t). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

La restricción del recurso económico es

$$\dot{k} = y - c - (\eta + \delta)k, \quad (3.2.10)$$

con depreciación de capital  $\delta$ , y tasa de crecimiento poblacional  $\eta$ .

Una función de utilidad individual del tipo CIES (Constant Intertemporal Elasticity of Substitution) es, por ejemplo:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \text{con } \sigma > 0. \quad (3.2.11)$$

Un agente económico desea resolver

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{(\eta-\rho)t} dt \\ \text{sujeto a } \dot{k} = y - c - (\eta + \delta)k \quad \text{con } k(0) = k_0. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

El Hamiltoniano del valor actual de este problema es

$$\mathbb{H} = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda(k^\alpha - c - (\eta + \delta)k), \quad (3.2.13)$$

las condiciones necesarias de primer orden están dadas por

$$\mathbb{H}_c = 0 \iff c^{-\sigma} = \lambda, \quad (3.2.14)$$

$$\mathbb{H}_\lambda = \dot{k} \iff \dot{k} = y - c - (\eta + \delta)k,$$

$$\mathbb{H}_k + (\eta - \rho)\lambda = -\dot{\lambda} \iff -\dot{\lambda} = (\alpha k^{\alpha-1} - (\eta + \delta))\lambda + (\eta - \rho)\lambda, \quad (3.2.15)$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t)\lambda(t) = 0. \quad (3.2.16)$$

Tomando logaritmos de (3.2.14) y diferenciando con respecto al tiempo, se obtiene que

$$-\sigma \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}.$$

Reordenando (3.2.15) se tiene

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\alpha k^{\alpha-1} + \delta + \rho.$$

De donde obtenemos la regla de Keynes-Ramsey [Ver 5, 16]:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\sigma}. \quad (3.2.17)$$

El comportamiento del modelo dinámico es sintetizado por el sistema

$$\dot{c} = \frac{c}{\sigma}(\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho) \quad (3.2.18)$$

$$\dot{k} = k^\alpha - c - (\eta + \delta)k \quad (3.2.19)$$

$$k(0) = k_0. \quad (3.2.20)$$

La condición de transversalidad asegura la convergencia hacia el estado interior estable. El estado interior estable puede ser calculado como:

$$k^* = \left( \frac{\alpha}{\delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.2.21)$$

$$c^* = (k^*)^\alpha - (\eta + \delta)k^*. \quad (3.2.22)$$

Cabe señalar, que el sistema anterior no tiene solución explícita, por lo que es común realizar un análisis cuantitativo a través de diagramas de fase [Ver 5, 16].

### 3.3. Problema del regulador lineal (PRL)

#### 3.3.1. Planteamiento del problema

Un problema de optimización aplicado a un gran número de problemas de diseño en ingeniería es el Problema Regulador Lineal [Ver 7, 8].

Sean  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{M}(t)$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{M}_{n \times m}$  y  $\mathbf{N}(t) \in \mathbb{M}_{m \times m}$ ; todas matrices con entradas funciones continuas.

Sea  $\mathbf{u}(t)$  un vector  $m$ -dimensional de funciones a trozos continuas definidas sobre  $[t_0, t_1]$ .

Sea  $\mathbf{x}(t)$  un vector  $n$ -dimensional de funciones que es la correspondiente solución de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (3.3.1)$$

con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

Suponga que  $\mathbf{M}(t)$ ,  $\mathbf{N}(t)$  y  $\mathbf{D}$  son simétricas, con  $\mathbf{M}(t)$  y  $\mathbf{D}$  definidas no negativas y  $\mathbf{N}(t)$  definida positiva.

Considere el problema de elegir  $\mathbf{u}(t)$  tal que

$$[\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D} \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} ([\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x}(t) + [\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.3.2)$$

sea minimizado.

El control óptimo del PRL es una función lineal de  $\mathbf{x}(t)$ . Debido a esto, los controles han sido diseñados para muchos problemas no lineales como problemas lineales.

#### 3.3.2. Solución

El Problema del Regulador Lineal está formulado en forma Bolza, y se reduce en forma Mayer [Ver Apéndice A.1] introduciendo una coordenada extra  $x_{n+1}$  y una ecuación diferencial

$$\dot{x}_{n+1}(t) = [\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x}(t) + [\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}(t).$$

Entonces, el criterio de rendimiento resulta ser:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= [\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D} \mathbf{x}(t_1) + x_{n+1}(t_1) \\ &= [\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D} \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} ([\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x}(t) + [\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Para reescribir las condiciones del Principio de Pontryagin, definimos

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(t) \\ P_{n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \\ P_{n+1}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.3.4)$$

donde  $\mathbf{P}(t)$  es una función vectorial  $n$ -dimensional y  $P_{n+1}(t)$  es una función escalar.

Usando fórmulas de diferenciación de formas cuadráticas, las ecuaciones adjuntas (C1)  $[\dot{\tilde{\mathbf{P}}}(t)]^T = -[\tilde{\mathbf{P}}(t)]^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  son

$$\begin{aligned} [\dot{\tilde{\mathbf{P}}}(t)]^T &= -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{A}(t) - 2P_{n+1}(t)[\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \quad y \\ \dot{P}_{n+1}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (C1)$$

Las condiciones de transversalidad (C3-C6) son:

$$[\mathbf{P}(t_1)]^T = 2\lambda_1[\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D}, \quad (C3)$$

$$P_{n+1}(t_1) = \lambda_1,$$

$$[\mathbf{P}(t_0)]^T = -(\lambda_4, \dots, \lambda_{n+3}), \quad (C4)$$

$$P_{n+1}(t_0) = -\lambda_{n+4},$$

$$\mathbb{H}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) = -\lambda_3, \quad (C5)$$

$$\mathbb{H}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0)) = \lambda_2. \quad (C6)$$

Note que  $\lambda_1 \neq 0$ , ya que si no lo fuera, como  $\tilde{\mathbf{P}}(t_1) = \mathbf{0}$ , se tendría que  $\tilde{\mathbf{P}}(t) \equiv \mathbf{0}$ , y por lo tanto,  $\lambda = 0$ .

Debido a que las ecuaciones del Principio de Pontryagin son homogéneas en  $\lambda$  y  $\lambda_1 \neq 0$  podemos dividir estas ecuaciones por un número positivo apropiado para obtener  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ . Con esta normalización

$$P_{n+1}(t) = cte = \lambda_1 = -\frac{1}{2}.$$

El Hamiltoniano  $\mathbb{H}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = [\tilde{\mathbf{P}}(t)]^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  es

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) &= [\mathbf{P}(t)]^T (\mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}) + P_{n+1}(t) ([\mathbf{x}]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x} + [\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}) \\ &= [\mathbf{P}(t)]^T (\mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}) - \frac{1}{2} ([\mathbf{x}]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x} + [\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

El único  $\mathbf{u}$  que maximiza  $\mathbb{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  puede ser encontrado:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{\mathbf{u}} &= [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{B}(t) - \frac{1}{2} (2[\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(t)) \\ &= [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{B}(t) - [\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(t).\end{aligned}$$

Cuando  $\mathbb{H}_{\mathbf{u}} = 0$  :

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(t) &= [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{B}(t), \\ [\mathbf{N}(t)]^T \mathbf{u} &= [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t), \\ \mathbf{N}(t) \mathbf{u} &= [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t), \\ \mathbf{u}(t) &= [\mathbf{N}(t)]^{-1} [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t).\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

Sustituyendo  $P_{n+1}(t) = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$  en las ecuaciones adjuntas:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t)^T &= -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{A}(t) + [\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \quad y \\ \dot{P}_{n+1}(t) &= 0.\end{aligned}$$

Sustituyendo  $\mathbf{u}(t) = [\mathbf{N}(t)]^{-1} [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t)$  en  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)$  :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) [\mathbf{N}(t)]^{-1} [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t).\tag{3.3.7}$$

Sintetizamos el problema de encontrar controles extremos para el PRL a encontrar soluciones  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{P}(t)$  del sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) [\mathbf{N}(t)]^{-1} [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t),\tag{3.3.8}$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -[\mathbf{A}(t)]^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{x}(t),\tag{3.3.9}$$

con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , y condición terminal  $\mathbf{P}(t_1) = -\mathbf{D} \mathbf{x}(t_1)$ .

Dada una solución del sistema anterior, con esas condiciones iniciales y terminales, el control extremo es dado por  $\mathbf{u}(t) = [\mathbf{N}(t)]^{-1} [\mathbf{B}(t)]^T \mathbf{P}(t)$ .

En el Capítulo 5 se retoma este problema resolviéndose mediante la Programación Dinámica, donde se obtienen mismos resultados.



# Capítulo 4

## Programación dinámica

En este capítulo se estipula la Ecuación de Programación Dinámica, principal herramienta en este trabajo.

En la Sección 4.1 se revisa la versión determinista, en la Sección 4.2 se obtienen resultados a partir de la terminología utilizada en la Sección 1.1, para que con ellos, finalmente se determine la versión estocástica de la Ecuación de Programación Dinámica en la Sección 4.3.

### 4.1. Versión determinista

Considere problemas de optimización como los anteriores.

Sean  $t_0$  y  $\mathbf{x}_0$  el tiempo inicial y estado inicial fijos, y las condiciones terminales involucran sólo el tiempo final  $t_1$  y el estado final  $\mathbf{x}_1$ .

Estas condiciones terminales requieren que

$$(t_1, \mathbf{x}_1) \in M$$

donde  $M$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . A  $M$  le llamamos *conjunto terminal*.

Dado el dato inicial  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , definimos

$$\mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0} = \{\text{Clase de funciones continuas a trozos definidas sobre } [t_0, t_1] \text{ iniciando en un tiempo fijo } t_0 \text{ que son admisibles para } \mathbf{x}_0\}.$$

Suponemos una función  $\phi_1(t_1, \mathbf{x}(t_1))$  del tiempo y estado terminales dada como un criterio de rendimiento. El problema de optimización es minimizar el criterio de rendimiento sobre todos los controles  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$ .

**Definición 4.1.1** *Definimos una función objetivo como*

$$V(s, \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{F}_{s, \mathbf{y}}} \phi_1(t_1, \mathbf{x}(t_1)). \quad (4.1.1)$$

El método de la Programación Dinámica estudia las propiedades de esta función.

**Teorema 4.1.2** *La función objetivo evaluada a lo largo de cualquier trayectoria correspondiente a un control admisible para su estado inicial es una función no decreciente del tiempo.*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{u}$  definida sobre  $[t_0, t_1]$  admisible para  $\mathbf{x}_0$ , y  $\mathbf{x}$  la correspondiente solución de  $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ . Debemos mostrar que, para  $t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_1$  que

$$V(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1)) \leq V(\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)).$$

Para cualquier  $t$  tal que  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $\mathcal{F}_{t, \mathbf{x}(t)} \neq \emptyset$  dado que la restricción de  $\mathbf{u}$  al intervalo  $[t, t_1]$  es admisible para  $\mathbf{x}(t)$ .

Sea  $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in \mathcal{F}_{\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)}$ . Definimos el control  $\mathbf{u}^\dagger$  sobre  $[\tau_1, \tilde{t}_1]$  por

$$\mathbf{u}^\dagger(r) = \begin{cases} \mathbf{u}(r), & \text{si } \tau_1 \leq r \leq \tau_2, \\ \tilde{\mathbf{u}}(r), & \text{si } \tau_2 \leq r \leq \tilde{t}_1. \end{cases}$$

Entonces  $\mathbf{u}^\dagger \in \mathcal{F}_{\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1)}$ . Por lo tanto

$$V(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1)) \leq \phi_1(\tilde{t}_1, \mathbf{x}(\tilde{t}_1)).$$

Dado que  $\tilde{\mathbf{u}}$  fue cualquier control en  $\mathcal{F}_{\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)}$ , tomando el ínfimo sobre los controles en  $\mathcal{F}_{\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)}$  da

$$V(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1)) \leq V(\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)).$$

Como se deseaba. ■

**Teorema 4.1.3** *La función objetivo evaluada a lo largo de cualquier trayectoria óptima es constante.*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{u}^*$  definida sobre  $[t_0, t_1]$  un control óptimo para el problema iniciando en  $\mathbf{x}_0$ .

Por el Teorema 4.1.2  $V(t, \mathbf{x}^*(t))$  es no decreciente. Para  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $\mathbf{u}^*$  restringido a  $[t, t_1]$  es un control admisible para  $\mathbf{x}^*(t)$

$$V(t, \mathbf{x}^*(t)) \leq \phi_1(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)).$$

La optimalidad de  $\mathbf{u}^*$  para el problema con condiciones iniciales  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  implica

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \phi_1(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)).$$

Como  $V(t, \mathbf{x}^*(t))$  es no decreciente, tenemos que  $V(t, \mathbf{x}^*(t)) \equiv \phi_1(t_1, \mathbf{x}^*(t_1))$  en  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

■

**Teorema 4.1.4** Sea  $W(s, \mathbf{y})$  una función con valores reales definida sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que si  $(s, \mathbf{y}) \in M$  definimos  $W(s, \mathbf{y}) = \phi_1(s, \mathbf{y})$ .

Sean  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  condiciones iniciales dadas. Supongamos que para cada trayectoria  $\mathbf{x}$  correspondiente a un control  $u \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$  que  $W(t, \mathbf{x}(t))$  es finita y no decreciente sobre  $[t_0, t_1]$ .

Si  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$  tal que para la correspondiente trayectoria  $\mathbf{x}^*$ ,  $W(t, \mathbf{x}^*(t))$  es constante, entonces  $\mathbf{u}^*$  es un control óptimo. Además,  $W(t_0, \mathbf{x}_0) = V(t_0, \mathbf{x}_0)$ .

**Demostración.** Para cualquier control  $\mathbf{u} \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$

$$W(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \phi_1(t_1, \mathbf{x}(t_1)).$$

Para el control  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$

$$W(t_0, \mathbf{x}_0) = \phi_1(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)),$$

así que,  $\mathbf{u}^*$  es óptimo y  $W(t_0, \mathbf{x}_0) = V(t_0, \mathbf{x}_0)$ . ■

Definimos el siguiente conjunto:

$$Q_0 = \{(s, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathcal{F}_{s, \mathbf{y}} \neq \emptyset\}.$$

Esto es,  $Q_0$  es el conjunto de puntos  $(s, \mathbf{y})$  desde el cual es posible alcanzar el conjunto terminal  $M$  con alguna trayectoria correspondiente a un control continuo a trozos. Llamamos a  $Q_0$  el *conjunto factible*.

**Teorema 4.1.5** Sea  $(s, \mathbf{y})$  un punto interior del conjunto factible  $Q_0$  en el cual la función  $V(s, \mathbf{y})$  es diferenciable. Entonces  $V(s, \mathbf{y})$  satisface la desigualdad diferencial parcial

$$V_s + V_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}, \mathbf{v}) \geq 0$$

para todo  $\mathbf{v} \in U$ .

Si existe un control óptimo  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{F}_{s, \mathbf{y}}$ , entonces se satisface la ecuación diferencial parcial

$$\min_{\mathbf{v} \in U} \{V_s + V_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}, \mathbf{v})\} = 0. \quad (4.1.2)$$

El mínimo es alcanzado por el límite por la derecha  $\mathbf{u}^*(s)^+$  del control óptimo en  $s$ . La ecuación (4.1.2) es conocida como Ecuación de la Programación Dinámica.

**Demostración.** Como  $(s, \mathbf{y})$  es un punto interior de  $Q_0$ , si un control arbitrario constante  $\mathbf{v} \in U$  es usado sobre un intervalo  $[s, s+k]$ ,  $k$  suficientemente pequeño, la correspondiente trayectoria  $\mathbf{x}(t) \in Q_0$  para  $s \leq t \leq s+k$ .

Si  $\tilde{\mathbf{u}}$  es un control definido en  $[s+k, t_1]$  admisible para  $\mathbf{x}(s+k)$ , el control  $\mathbf{u}_k$  definido sobre  $[s, t_1]$  por

$$\mathbf{u}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{v}, & \text{si } s \leq t \leq s+k, \\ \tilde{\mathbf{u}}(t), & \text{si } s+k \leq t \leq t_1. \end{cases} \in \mathcal{F}_{s, \mathbf{y}}$$

$\mathbf{x}_k$  denota la solución de (1.2.1):  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  con condición inicial  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{y}$  correspondiente a  $\mathbf{u}_k$ .  $D^+g(t)$  denota la derivada por la derecha de una función  $g(t)$ . Como  $\mathbf{u}_k$  es una función a trozos

$$D^+\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k(t), \mathbf{u}_k(t)^+)$$

donde  $\mathbf{u}_k(t)^+$  es el límite por la derecha de  $\mathbf{u}_k$  en  $t$ . Del Teorema 4.1.2,  $V(t, \mathbf{x}_k(t))$  es no decreciente, por lo que  $D^+V(t, \mathbf{x}_k(t)) \geq 0$  para cualquier valor de  $t$  para el cual esta derivada exista. Calculando esta derivada en  $t = s$ , usando la regla de la cadena para la diferenciación, tenemos

$$V_s + V_y \mathbf{f}(s, \mathbf{y}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (4.1.3)$$

Si existe un control óptimo  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{F}_{s, \mathbf{y}}$ , con correspondiente trayectoria  $\mathbf{x}^*$ , el Teorema 4.1.3 implica que

$$V(t, \mathbf{x}^*(t)) = \phi_1(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)),$$

para  $s \leq t \leq t_1$ . Por lo que, si  $V(s, \mathbf{y})$  es diferenciable en  $(s, \mathbf{y})$ ,

$$D^+V(s, \mathbf{x}^*(s)) = V_s + V_y \mathbf{f}(s, \mathbf{y}, \mathbf{u}^*(s)^+) = 0. \quad (4.1.4)$$

Por lo tanto, (4.1.3) y (4.1.4) dan la Ecuación de Programación Dinámica (4.1.2) y el límite por la derecha del control óptimo  $\mathbf{u}^*(s)^+$  alcanza el mínimo en (4.1.2). ■

**Teorema 4.1.6** (Teorema de Verificación) Sea  $W(s, \mathbf{y})$  una solución de la ecuación diferencial parcial de Programación Dinámica (4.1.2) que satisface la condición de frontera

$$W(s, \mathbf{y}) = \phi_1(s, \mathbf{y}), \quad \text{para } (s, \mathbf{y}) \in M. \quad (4.1.5)$$

Sea  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in Q_0$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$  y  $\mathbf{x}$  la correspondiente solución de (1.2.1):  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ .

Entonces  $W(t, \mathbf{x}(t))$  es una función no decreciente de  $t$ .

Si  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$  definida sobre  $[t_0, t_1^*]$  con correspondiente solución  $\mathbf{x}^*$  de (1.2.1) tal que para  $t \in [t_0, t_1^*]$

$$W_s(t, \mathbf{x}^*(t)) + W_y(t, \mathbf{x}^*(t)) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0 \quad (4.1.6)$$

entonces  $\mathbf{u}^*$  es un control óptimo en  $\mathcal{F}_{t_0, \mathbf{x}_0}$  y  $W(s, \mathbf{y}) = V(s, \mathbf{y})$  donde  $V(s, \mathbf{y})$  es la función objetivo.

**Demostración.** De la Ecuación de la Programación Dinámica (4.1.2),

$$\frac{d}{dt} W(t, \mathbf{x}(t)) = W_t + W_y \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0.$$

Por lo que  $W(t, \mathbf{x}(t))$  es no decreciente.

La ecuación (4.1.6) implica que

$$\frac{d}{dt} W(t, \mathbf{x}^*(t)) = 0,$$

y como  $W(t, \mathbf{x}^*(t))$  es una función a trozos, continua, diferenciable que es constante. Por el Teorema 4.1.4,  $\mathbf{u}^*$  es un control óptimo, y  $W = V$ . ■

## 4.2. Versión estocástica

La siguiente proposición elemental será utilizada posteriormente.

**Proposición 4.2.1** Sean  $c(x, s)$  y  $K(x, s)$  funciones medibles sobre  $G := [0, T) \times X$ , donde  $T > 0$  es un tiempo dado fijo. Suponga que  $c \in \mathcal{M}_0$ , y suponga que  $v \in \mathcal{D}(L)$  satisface la ecuación

$$Lv(s, x) + c(s, x) = 0, \quad \forall (s, x) \in G,$$

y la condición terminal

$$v(T, x) = K(T, x), \quad x \in X.$$

Entonces, para todo  $(s, x) \in G$

$$v(s, x) = \mathbb{E}_{s,x} \left\{ \int_s^T c(t, x(t)) dt + K(T, x(T)) \right\}. \quad (4.2.1)$$

**Demostración.** En (1.1.5), tomamos  $t = T - s$  para obtener

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{s,x} \{v(T, x(T))\} - v(s, x) &= \mathbb{E}_{s,x} \left\{ \int_0^{T-s} Lv(s+r, x(s+r)) dr \right\} \\ &= \mathbb{E}_{s,x} \left\{ \int_s^T Lv(r, x(r)) dr \right\} \end{aligned}$$

y (4.2.1) se obtiene directamente de las suposiciones de la proposición. ■

**Proposición 4.2.2** Sea  $c \in \mathcal{M}_0$  una función no negativa y  $\rho > 0$ . Si  $v = v_\rho$  es una función en  $\mathcal{D}(L)$  que satisface la ecuación

$$\rho v(s, x) = c(s, x) + Lv(s, x) \quad (4.2.2)$$

y la condición

$$e^{-\rho t} \mathbb{E}_{s,x} \{v(s+t, x(s+t))\} = e^{-\rho t} \mathcal{T}_t v(s, x) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad (4.2.3)$$

para todo  $(s, x) \in [0, \infty) \times X$ , entonces  $v = v_\rho$  satisface

$$\begin{aligned} v_\rho(s, x) &= \mathbb{E}_{s,x} \left\{ \int_s^\infty e^{-\rho(t-s)} c(t, x(t)) dt \right\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \mathcal{T}_t c(s, x) dt. \end{aligned}$$

**Demostración.** Con las suposiciones  $v \in \mathcal{D}(L)$  y  $\rho > 0$ , se tiene de (4.2.2) y el Lema 1.1.3 (c) que la función  $v_\rho(s, x) := e^{-\rho s} v(s, x)$  está en  $\mathcal{D}(L)$  y satisface

$$Lv_\rho(s, x) = -e^{-\rho s} c(s, x).$$

Por el Lema 1.1.3 (b) aplicado a  $v_\rho$  queda:

$$\mathcal{T}_t v_\rho(s, x) - v_\rho(s, x) = - \int_0^t e^{-\rho(s+r)} \mathcal{T}_r c(s, x) dr,$$

que puede ser reescrito como:

$$e^{-\rho t} \mathcal{T}_t v(s, x) - v(s, x) = - \int_0^t e^{-\rho r} \mathcal{T}_r c(s, x) dr.$$

El resultado deseado se sigue de (4.2.3) cuando  $t \rightarrow \infty$ . ■

### Problemas con horizonte finito

Consideremos un PCM  $(X, A, L^a, c)$  que satisfaga la Definición 1.1.6 y las Suposiciones 1.1.9 y 1.1.10, con sus respectivas notaciones, hemos de considerar el funcional de costo

$$J(s, x, \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left\{ \int_s^T c^\pi(t, x(t)) dt + K(T, x(T)) \right\}, \quad (4.2.4)$$

en donde  $0 \leq s \leq T$ ,  $x \in X$ ,  $\pi \in \Pi$ ,  $T > 0$  el tiempo terminal fijo, y  $K \in M$  una función no negativa que represente un costo terminal.

El Problema de Control Óptimo es encontrar una política  $\pi \in \Pi$  tal que

$$J(s, x, \pi^*) = \inf_{\pi} J(s, x, \pi) =: J^*(s, x), \quad \forall (s, x) \in G, \quad (4.2.5)$$

en donde  $G := [0, T] \times X$ . Si (4.2.5) se satisface, entonces decimos que  $\pi^*$  es una política óptima, y la función  $J^*(s, x)$  es llamada la función objetivo (o costo óptimo).

Las condiciones suficientes de la Programación Dinámica para optimalidad están estipuladas en el siguiente *teorema de verificación*:

**Teorema 4.2.3** *Suponga que  $v \in D$  satisface la ecuación*

$$\inf_{a \in A} [L^a v(s, x) + c(s, x, a)] = 0, \quad \forall (s, x) \in G, \quad (4.2.6)$$

con condición de frontera

$$v(T, x) = K(T, x), \quad x \in X, \quad (4.2.7)$$

en el tiempo terminal  $T$ . Entonces:

- (a)  $v(s, x) \leq J(s, x, \pi)$ ,  $\forall (s, x) \in G$ ,  $\pi \in \Pi$ ;  
 (b) Si  $\pi^* \in \Pi$  es una política de Markov tal que  $\pi^*(s, x) \in A$  minimiza (4.2.6), i.e.,

$$L^{\pi^*} v(s, x) + c^{\pi^*}(s, x) = 0, \quad \forall (s, x) \in G, \quad (4.2.8)$$

entonces  $J(s, x, \pi^*) = v(s, x)$ .

Por la parte (a),  $\pi^*$  es una política óptima y  $v = J^*$  es la función objetivo.

**Demostración.** Supongamos que  $v$  satisface (4.2.6) y (4.2.7), y sea  $\pi \in \Pi$  una política admisible arbitraria. Entonces

$$L^\pi v(s, x) + c^\pi(s, x) \geq 0, \quad \forall (s, x) \in G. \quad (4.2.9)$$

Entonces, por (1.1.5) con  $t = T - s$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{s,x}^\pi \{v(T, x(T))\} - v(s, x) &= \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left\{ \int_s^T L^\pi v(r, x(r)) dr \right\} \\ &\geq -\mathbb{E}_{s,x}^\pi \left\{ \int_s^T c^\pi(r, x(r)) dr \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

De esta desigualdad y (4.2.7) obtenemos

$$v(s, x) \leq \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left\{ \int_s^T c^\pi(r, x(r)) dr + K(T, x(T)) \right\} = J(s, x, \pi), \quad (4.2.11)$$

lo cual prueba la parte (a).

Por otro lado, si (4.2.8) se satisface, entonces tendríamos la igualdad con (4.2.9) y (4.2.11) con  $\pi = \pi^*$ . Por lo tanto,  $v(s, x) = J(s, x, \pi^*)$ , y de (a),  $v(s, x) = J^*(s, x)$ . ■

Sea  $\rho > 0$  un factor de descuento dado, y en vez del funcional de costo (4.2.4) consideramos el costo esperado descontado

$$V_T(s, x, \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left\{ \int_s^T e^{-\rho(t-s)} c^\pi(t, x(t)) dt + e^{-\rho(T-s)} K(T, x(T)) \right\}, \quad (4.2.12)$$

con  $K \in M$ . El siguiente resultado es un caso especial del Teorema 4.2.3, o puede probarse directamente con los mismos argumentos de la demostración de la Proposición 4.2.2 y el Teorema 4.2.3.

**Teorema 4.2.4** *Suponga que  $v \in D$  satisface la ecuación*

$$\rho v(s, x) = \inf_{a \in A} [L^a v(s, x) + c(s, x, a)], \quad \forall (s, x) \in G, \quad (4.2.13)$$

con condición de frontera

$$v(T, x) = K(T, x), \quad x \in X, \quad (4.2.14)$$

en el tiempo terminal  $T$ . Entonces:

(a)  $v(s, x) \leq V_T(s, x, \pi)$ ,  $\forall (s, x) \in G$ ,  $\pi \in \Pi$ ;

(b) Si  $\pi^* \in \Pi$  es una política de Markov tal que  $\pi^*(s, x) \in A$  minimiza (4.2.13), i.e.,

$$\rho v(s, x) = L^{\pi^*} v(s, x) + c^{\pi^*}(s, x), \quad \forall (s, x) \in G, \quad (4.2.15)$$

entonces  $v(s, x) = V_T(s, x, \pi^*)$ .

Así que, por la parte (a),  $\pi^*$  es una política óptima para la función de costo descontado (4.2.12).

La conclusión del Teorema 4.2.4 (b) puede ser escrita como  $v(s, x) = V_T(s, x)$ , en donde

$$V_T(s, x) := \inf_{\pi} V_T(s, x, \pi)$$

es la función objetivo para (4.2.12).

### 4.3. Procesos de difusión

Consideremos procesos de Markov  $\mathbb{R}^d$ -valuados  $\{\mathbf{x}(t), t \geq 0\}$  que son solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE) de la forma

$$d\mathbf{x}(t) = \mu(t, \mathbf{x}(t))dt + \sigma(t, \mathbf{x}(t))dW(t), \quad (4.3.1)$$

donde  $\mu(t, \mathbf{x}(t)) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\sigma(t, \mathbf{x}(t)) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$  son funciones dadas, y  $\{W(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener  $n$ -dimensional. Impondremos condiciones en los coeficientes  $\mu$  y  $\sigma$  para asegurar que exista y sea única la solución de (4.3.1).

**Condición 4.3.1** *Las funciones  $\mu(t, \mathbf{x})$  y  $\sigma(t, \mathbf{x})$  son medibles, y satisfacen:*

(a) *Para todo  $T > 0$ , existe una constante  $K = K(T)$  tal que, para todo  $0 \leq t \leq T$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\begin{aligned} |\mu(t, \mathbf{x})| &\leq K(1 + |\mathbf{x}|), \\ |\sigma(t, \mathbf{x})| &\leq K(1 + |\mathbf{x}|) \end{aligned}$$

(donde, para una matriz  $A = (a_{ij})$ ,  $|A|^2 := \text{Tr}(AA^T) = \sum a_{ij}^2$ ).

(b) *Para todo  $T > 0$  y  $r > 0$ , existe una constante  $K^1 = K^1(T, r)$  tal que*

$$\begin{aligned} |\mu(t, \mathbf{x}) - \mu(t, \mathbf{y})| &\leq K^1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ |\sigma(t, \mathbf{x}) - \sigma(t, \mathbf{y})| &\leq K^1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq t \leq T$  y  $|\mathbf{x}| \leq r, |\mathbf{y}| \leq r$ .

Bajo las condiciones anteriores, conocidas en la literatura como condiciones de Itô, la EDE (4.3.1) tiene una única solución continua  $\mathbf{x}(t)$  que es un proceso de Markov con probabilidades de transición

$$\mathbb{P}\{s, \mathbf{x}, t, B\} = \mathbb{P}\{\mathbf{x}(t) \in B | \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}\} = \mathbb{P}\{\mathbf{x}(t; s, \mathbf{x}) \in B\}.$$

**Condición 4.3.2**  *$\mu(t, \mathbf{x})$  y  $\sigma(t, \mathbf{x})$  son funciones continuas sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ .*

Las Condiciones 4.3.1 y 4.3.2 implican que la solución  $\mathbf{x}(\cdot)$  de la ecuación diferencial estocástica (4.3.1) es un proceso de difusión con coeficiente de tendencia  $\mu(t, \mathbf{x})$  y matriz de difusión  $D(t, \mathbf{x}) := \sigma(t, \mathbf{x})[\sigma(t, \mathbf{x})]^T$ .

**Definición 4.3.3** Sea  $C^{1,2} \equiv C^{1,2}([0, \infty] \times \mathbb{R}^d)$  una clase de funciones  $v(s, \mathbf{x})$  continuas con valores reales sobre  $[0, \infty] \times \mathbb{R}^d$  tal que  $v$  es de clase  $C^1$  en  $s$  y de clase  $C^2$  en  $\mathbf{x}$ , i.e., las derivadas parciales  $C^1$  en  $v_s, v_{x_i}, v_{x_i x_j}$ , (para  $i, j = 1, \dots, d$ ), son continuas. Si  $v \in C^{1,2}$ , definamos

$$\mathcal{L}v(s, \mathbf{x}) := v_s(s, \mathbf{x}) + v_{\mathbf{x}}(s, \mathbf{x})\mu(s, \mathbf{x}) + \frac{1}{2}\text{Tr}[v_{\mathbf{xx}}(s, \mathbf{x})D(s, \mathbf{x})], \quad (4.3.2)$$

donde  $v_{\mathbf{x}} := (v_{x_1}, \dots, v_{x_d})$  es el gradiente de  $v$  (en las variables  $\mathbf{x}$ ); y  $v_{\mathbf{xx}} = (v_{x_i x_j})$  es la matriz hessiana.

En términos de  $\mathcal{L}$  podemos escribir la regla diferencial de Itô:

**Teorema 4.3.4** Sea  $\mathbf{x}(\cdot)$  solución de (4.3.1). Si  $v \in C^{1,2}$ , entonces el proceso  $v(t, \mathbf{x}(t))$  satisface la EDE

$$dv(t, \mathbf{x}(t)) = \mathcal{L}v(t, \mathbf{x}(t))dt + v_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t))\sigma(t, \mathbf{x}(t))dW(t). \quad (4.3.3)$$

En forma integral, podemos escribir (4.3.3) para  $t \geq s \geq 0$ , dado  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}$ , como

$$v(t, \mathbf{x}(t)) - v(s, \mathbf{x}) = \int_s^t \mathcal{L}v(r, \mathbf{x}(r))dr + \int_s^t v_{\mathbf{x}}(r, \mathbf{x}(r))\sigma(r, \mathbf{x}(r))dW(r). \quad (4.3.4)$$

Si  $v$  y  $\sigma$  son tales que, para cada  $t > s$ ,

$$\mathbb{E}_{s, \mathbf{x}} \left\{ \int_s^t |v_{\mathbf{x}}(r, \mathbf{x}(r))\sigma(r, \mathbf{x}(r))|^2 dr \right\} < \infty, \quad (4.3.5)$$

entonces el valor esperado de la última integral en (4.3.4) es 0. Adicionalmente a (4.3.5), tenemos que

$$\mathbb{E}_{s, \mathbf{x}} \left\{ \int_s^t |\mathcal{L}v(r, \mathbf{x}(r))| dr \right\} < \infty. \quad (4.3.6)$$

Entonces, tomando esperanzas  $\mathbb{E}_{s, \mathbf{x}}$  en (4.3.4) obtenemos:

$$\mathbb{E}_{s, \mathbf{x}} \{v(t, \mathbf{x}(t))\} - v(s, \mathbf{x}) = \mathbb{E}_{s, \mathbf{x}} \left\{ \int_s^t \mathcal{L}v(r, \mathbf{x}(r))dr \right\}. \quad (4.3.7)$$

En términos de la notación de semigrupo (1.1.2), y sea  $h := t - s$ , podemos reescribir (4.3.7) como

$$\mathcal{T}_h v(s, \mathbf{x}) - v(s, \mathbf{x}) = \int_0^h \mathcal{T}_r(\mathcal{L}v)(r, \mathbf{x}(r))dr. \quad (4.3.8)$$

Finalmente, multiplicando por  $\frac{1}{h}$  y  $h \downarrow 0$ , obtenemos, de (1.1.3),  $Lv = \mathcal{L}v$ . Explícitamente, se ha demostrado lo siguiente:

**Teorema 4.3.5** Si  $v \in C^{1,2}$  es tal que (4.3.5) y (4.3.6) se satisfacen, entonces  $v \in \mathcal{D}(L)$  y  $Lv$  es dado por

$$Lv(s, \mathbf{x}) = v_s(s, \mathbf{x}) + v_{\mathbf{x}}(s, \mathbf{x})\mu(s, \mathbf{x}) + \frac{1}{2}Tr[v_{\mathbf{xx}}(s, \mathbf{x})D(s, \mathbf{x})]. \quad (4.3.9)$$

**Observación 4.3.6** Sea  $v \in C^{1,2}$  como en el Teorema 4.3.5, y sea  $\tau$  un tiempo de paro para  $\mathbf{x}(\cdot)$  tal que  $\mathbb{E}_{s, \mathbf{x}}\{\tau\} < \infty$  entonces (4.3.7) se satisface cuando  $t = \tau$ .

Sea  $A$  el conjunto de controles (o acciones), un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^m$ , y en vez de la EDE (3.3.1) consideramos la siguiente EDE controlada

$$d\mathbf{x}(t) = \mu(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{a}(t))dt + \sigma(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{a}(t))dW(t), \quad (4.3.10)$$

con coeficientes  $\mu : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times A \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times A \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ , y  $\mathbf{a}(t) \in A$  para  $t \geq 0$ , el proceso de control.

**Definición 4.3.7** Una política de control de Markov  $\pi$  se dice que es admisible ( $\pi \in \Pi$ ) si

- (a) Las funciones  $\mu^\pi(t, \mathbf{x}) := \mu(t, \mathbf{x}, \pi(t, \mathbf{x}))$  y  $\sigma^\pi(t, \mathbf{x}) := \sigma(t, \mathbf{x}, \pi(t, \mathbf{x}))$  satisfacen las Condiciones 4.3.1 y 4.3.2. La correspondiente solución  $\mathbf{x}(\cdot)$  de (4.3.10) es escrita como  $\mathbf{x}^\pi(\cdot)$ ;
- (b) El generador  $L^\pi$  de  $\mathbf{x}^\pi(\cdot)$  satisface que  $L^\pi = L^{\mathbf{a}}$  si  $\pi(\mathbf{x}, s) = \mathbf{a}$ , donde

$$L^{\mathbf{a}}v(s, \mathbf{x}) = v_s(s, \mathbf{x}) + v_{\mathbf{x}}(s, \mathbf{x})\mu(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2}Tr[v_{\mathbf{xx}}(s, \mathbf{x})D(s, \mathbf{x}, \mathbf{a})] \quad (4.3.11)$$

con  $D(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sigma(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})[\sigma(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})]^T$ .

Para los procesos de difusión controlados determinados por (4.3.10), el Teorema de la Programación Dinámica 4.2.3 es válido cuando  $v$  satisface las condiciones del Teorema 4.3.5 (i.e.,  $v \in C^{1,2}$ , (4.3.6) y (4.3.7)). En este caso, el generador  $L^{\mathbf{a}}$  en (4.2.6) es dado por (4.3.11), así que (4.2.6) resulta ser:

$$v_s(s, \mathbf{x}) + \min_{\mathbf{a} \in A} \{v_{\mathbf{x}}(s, \mathbf{x})\mu(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2}Tr[v_{\mathbf{xx}}(s, \mathbf{x})D(s, \mathbf{x}, \mathbf{a})] + c(s, \mathbf{x}, \mathbf{a})\} = 0 \quad (4.3.12)$$

para  $(s, \mathbf{x}) \in G := [0, T] \times \mathbb{R}^d$ , con la condición de frontera

$$v(T, \mathbf{x}) = K(T, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (4.3.13)$$

La ecuación (4.3.12) y (4.3.13) es llamada Ecuación de la Programación Dinámica de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) con su respectiva condición frontera.

Además, una forma más general del Teorema 4.2.3 es como sigue. Sea  $Q$  un subconjunto abierto de  $G$ , y sea  $\zeta$  el tiempo de salida de  $(t, \mathbf{x}(t))$  de  $Q$ , dada la condición inicial  $(s, \mathbf{x}) \in Q$ , i.e.,

$$\zeta := \inf\{t > s \mid (t, \mathbf{x}(t)) \notin Q\}. \quad (4.3.14)$$

En particular, si  $Q = (0, \tau) \times \mathbb{R}^d$ , entonces  $\zeta = \tau$ . Finalmente, sea  $\partial^*Q$  un subconjunto cerrado de la frontera  $\partial Q$  de  $Q$  tal que  $(\zeta, \mathbf{x}(\zeta)) \in \partial^*Q$  con probabilidad 1 para toda condición inicial  $(s, \mathbf{x}) \in Q$  y toda política admisible  $\pi$ . Finalmente, en la definición (4.2.4) del costo funcional  $J(s, \mathbf{x}, \pi)$  reemplazando  $T$  por  $\zeta$ , obtenemos:

$$J(s, \mathbf{x}, \pi) := \mathbb{E}_{s, \mathbf{x}}^\pi \left\{ \int_s^\zeta c^\pi(t, \mathbf{x}(t)) dt + K(\zeta, \mathbf{x}(\zeta)) \right\}. \quad (4.3.15)$$

Entonces el Teorema 4.2.3 es válido si (4.3.12) es reescrito para satisfacerse cuando  $(s, \mathbf{x}) \in Q$  y de la condición frontera (4.2.7) tomamos

$$v(s, \mathbf{x}) = K(s, \mathbf{x}), \quad \forall (s, \mathbf{x}) \in \partial^*Q. \quad (4.3.16)$$



# Capítulo 5

## Ejemplos

En este capítulo se muestran y resuelven algunos problemas mediante Programación Dinámica, como el PRL revisado en el Capítulo 3, y dos problemas de Finanzas relacionados con la selección de portafolio óptimo.

### 5.1. Problema del regulador lineal

Recordando el planteamiento del PRL revisado en la Sección 3.3:

Sea  $\mathbf{x}(t)$  un vector  $n$ -dimensional de funciones que es la correspondiente solución de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

Agregamos la ecuación diferencial:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = [\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x}(t) + [\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}(t),$$

para tener el criterio de rendimiento:

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = [\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D} \mathbf{x}(t_1) + x_{n+1}(t_1).$$

#### 5.1.1. Solución

Sea  $\tilde{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) = (\mathbf{y}, y_{n+1})$ , entonces la Ecuación de la Programación Dinámica correspondiente es:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{V_s + V_{\mathbf{y}}(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + V_{y_{n+1}}([\mathbf{y}]^T \mathbf{M}(s)\mathbf{y} + [\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(s)\mathbf{u})\} = 0. \quad (5.1.1)$$

Como  $x_{n+1}(t)$  representa la contribución al criterio de rendimiento

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= [\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D} \mathbf{x}(t_1) + x_{n+1}(t_1) \\ &= [\mathbf{x}(t_1)]^T \mathbf{D} \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} ([\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{M}(t) \mathbf{x}(t) + [\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{N}(t) \mathbf{u}(t)) dt, \end{aligned}$$

el problema es lineal con criterio cuadrático. Proponemos que la función objetivo es lineal en  $y_{n+1}$  y cuadrática en  $\mathbf{y}$ . Esto es, suponemos que la función objetivo tiene la forma

$$W(s, \tilde{\mathbf{y}}) = y_{n+1} + [\mathbf{y}(t)]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{y}(t), \quad (5.1.2)$$

en donde  $\mathbf{K}(s)$  es una matriz simétrica  $C^1$  con  $\mathbf{K}(t_1) = \mathbf{D}$ , y veremos si  $W(s, \tilde{\mathbf{y}})$  es solución de (5.1.1).

Para la función  $W(s, \tilde{\mathbf{y}})$ , la expresión entre corchetes de (5.1.1) es

$$[\mathbf{y}]^T \dot{\mathbf{K}}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{y}]^T [\mathbf{A}(s)]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{u}]^T [\mathbf{B}(s)]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{y}]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{A}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{y}]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u} + [\mathbf{y}]^T \mathbf{M}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{u}]^T \mathbf{N}(s) \mathbf{u}.$$

Tomando gradiente con respecto a  $\mathbf{u}$  e igualando a 0, el mínimo es alcanzado en

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{N}(s)]^{-1} [\mathbf{B}(s)]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{y}. \quad (5.1.3)$$

El valor del mínimo es dado por

$$[\mathbf{y}]^T \dot{\mathbf{K}}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{y}]^T ([\mathbf{A}(s)]^T \mathbf{K}(s) + \mathbf{K}(s) \mathbf{A}(s)) \mathbf{y} - [\mathbf{y}]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{B}(s) [\mathbf{N}(s)]^{-1} [\mathbf{B}(s)]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{y} + [\mathbf{y}]^T \mathbf{M}(s) \mathbf{y}.$$

Una condición suficiente para que esta cantidad sea igual a 0 es que  $\mathbf{K}(s)$  satisfaga la ecuación matricial de Riccati:

$$\dot{\mathbf{K}}(s) = -[\mathbf{A}(s)]^T \mathbf{K}(s) - \mathbf{K}(s) \mathbf{A}(s) + \mathbf{K}(s) \mathbf{B}(s) [\mathbf{N}(s)]^{-1} [\mathbf{B}(s)]^T \mathbf{K}(s) - \mathbf{M}(s). \quad (5.1.4)$$

Por lo tanto, las condiciones del Teorema 4.1.6 son satisfechas.

### 5.1.2. Simulación

Consideramos el caso escalar  $d = n = m = 1$  [Ver 10].

El estado  $x(\cdot) \in \mathbb{R}$  del sistema se supone satisface la ecuación diferencial estocástica lineal

$$dx(t) = [\gamma(t)x(t) + \beta(t)a(t)]dt + \sigma(t)dW(t),$$

con coeficientes  $\gamma(\cdot)$ ,  $\beta(\cdot)$ , y  $\sigma(\cdot)$  en  $C^1[0, T]$ , y con costo funcional

$$J(s, x, \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^{\pi} \left\{ \int_s^T [q(t)x^2(t) + r(t)a^2(t)] dt + q_T x^2(T) \right\},$$

en donde  $q(\cdot) \geq 0$  y  $r(\cdot) \geq 0$  son funciones continuas;  $q_T \geq 0$ .

La tasa de costo y el costo terminal son dados, respectivamente, por

$$c(s, x, a) := q(t)x^2 + r(t)a^2 \quad \text{y} \quad K(s, x) := q_T x^2. \quad (5.1.5)$$

Suponemos que no hay restricciones de control:  $A = \mathbb{R}$ . Note que los coeficientes de tendencia y de difusión de la EDE

$$\mu(t, x, a) := \gamma(t)x + \beta(t)a \quad \text{y} \quad \sigma(t, x, a) := \sigma(t) \quad (5.1.6)$$

satisfacen las Condiciones de Itô.

Ahora, de (5.1.5) y (5.1.6), la Ecuación de la Programación Dinámica (4.3.12) y (4.3.13) es

$$v_s + \gamma(s)xv_x + \frac{1}{2}\sigma^2(s)v_{xx} + q(s)x^2 + \min_{a \in \mathbb{R}}\{\beta(s)v_x a + r(s)a^2\} = 0 \quad (5.1.7)$$

con

$$v(T, x) = q_T x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.1.8)$$

El mínimo en (5.1.7) es alcanzado en  $a^* = \pi^*(s, x)$  dado por

$$\pi^*(s, x) = -\frac{\beta(s)v_x}{2r(s)}, \quad (5.1.9)$$

que insertado en (5.1.7) se obtiene

$$v_s + \gamma(s)xv_x + \frac{1}{2}\sigma^2(s)v_{xx} + q(s)x^2 - \frac{(\beta(s)v_x)^2}{4r(s)} = 0. \quad (5.1.10)$$

La cuestión es ahora obtener la solución de (5.1.10). Por la forma de esta ecuación, podemos probar una solución de la forma

$$v(s, x) = k(s)x^2 + g(s), \quad (5.1.11)$$

con  $k(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  de clase  $C^1$ , y  $k(\cdot) \geq 0$ . Además, para satisfacer (5.1.8) requerimos que

$$k(T) = q_T \quad \text{y} \quad g(T) = 0. \quad (5.1.12)$$

Con este valor de  $v(s, x)$ , la ecuación (5.1.10) resulta

$$\left[ k'(s) + q(s) + 2\gamma(s)k(s) - \frac{\beta^2(s)k^2(s)}{r(s)} \right] x^2 + g'(s) + \sigma^2(s)k(s) = 0$$

así que, para que  $v$  en (5.1.11) sea solución de (5.1.10) es suficiente que  $k(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  satisfagan

$$k'(s) = -q(s) - 2\gamma(s)k(s) + \frac{\beta^2(s)k^2(s)}{r(s)} \quad \text{y} \quad (5.1.13)$$

$$g'(s) = -\sigma^2(s)k(s), \quad (5.1.14)$$

para  $s < T$ . Por lo tanto, combinado con la condición frontera (5.1.12),  $g(\cdot)$  está dado por

$$g(s) = \int_s^T \sigma^2(t)k(t) dt, \quad s \leq T,$$

y  $k(\cdot)$  es determinado de manera única por la ecuación de Riccati (5.1.13) con la condición terminal  $K(T) = q_T$ .

Finalmente, de (5.1.9) y (5.1.11), la política óptima  $\pi^*$  es

$$\pi^* = -\frac{\beta(s)k(s)}{r(s)}x. \quad (5.1.15)$$

Supongamos entonces que el estado  $x(\cdot) \in \mathbb{R}$  del sistema satisface la EDE

$$dx(t) = [(2-t)x(t) + \sqrt{2}a(t)]dt + \frac{1}{\sqrt{2-t}}dW(t), \quad x(0) = x_0$$

con costo funcional a minimizar

$$J(s, x, \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^{\pi} \left\{ \int_s^T [x^2(t) + a^2(t)] dt + x^2(T) \right\}$$

con  $s = 0$ ,  $T = 1$ .

Con esta dinámica y este criterio de rendimiento, la Ecuación de la Programación Dinámica es:

$$v_s + (2-s)xv_x + \frac{1}{2(2-s)}v_{xx} + x^2 + \min_{a \in \mathbb{R}} \{ \sqrt{2}v_x a + a^2 \} = 0$$

con

$$v(1, x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La cuestión es ahora obtener la solución de la EPD que tiene la forma

$$v(s, x) = k(s)x^2 + g(s).$$

Además, se requiere que

$$k(T=1) = q_1 = 1, \quad \text{y} \quad g(1) = 0.$$

Las funciones

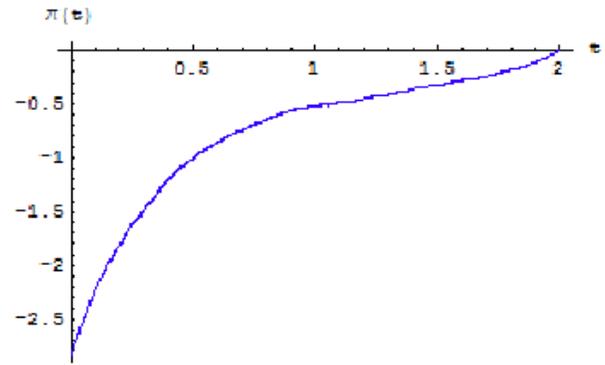
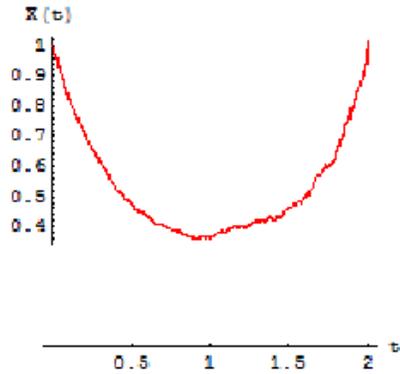
$$\begin{aligned} k(s) &= 2 - s, \\ g(s) &= 1 - s \end{aligned}$$

satisfacen las ecuaciones diferenciales (5.1.13) y (5.1.14) con su respectiva condición terminal.

La política óptima  $\pi^*$  es

$$\pi^* = \sqrt{2}(s-2)x.$$

Se muestran las siguientes gráficas del comportamiento de la dinámica promedio que siguen  $x$  y  $\pi$ , respectivamente graficados en Fig. 6.1 y 6.2. Observe que  $\pi^* = \pi^*(0, x_0) = -2\sqrt{2}$ . Además, se obtiene que  $v(0, x_0) = 3$ .

Fig. 6.1 Comportamiento promedio simulado de  $x$ .Fig. 6.2 Comportamiento promedio simulado de  $\pi$ .

## 5.2. Selección de portafolio óptimo

Consideramos un ejemplo formulado en el contexto de mercados financieros con dos activos: uno libre de riesgo llamado *bono*, y el otro con riesgo llamado *acción*.

En un problema de consumo/inversión, conocido como problema de selección de portafolio óptimo, un agente económico cuyas acciones no influyen en los precios del mercado, puede elegir un portafolio (estrategia de inversión) y una estrategia de consumo que determinan la evolución de su riqueza. El problema es elegir estas estrategias para maximizar un criterio de utilidad.

En los siguientes ejemplos, el problema será el de maximizar la utilidad esperada de riqueza terminal y el de maximizar la utilidad total descontada esperada de consumo. [Ver 9, 10, 12, 14].

### 5.2.1. Planteamiento del problema

Sea  $x(t)$  la riqueza al tiempo  $t$ , tendremos las siguientes consideraciones:

$P(t) \equiv$  Precio del activo sin riesgo.

$Q(t) \equiv$  Precio del activo con riesgo.

dados por

$$dP(t) = rP(t)dt \quad (5.2.1)$$

$$dQ(t) = Q(t)[\mu dt + \sigma dW(t)] \quad (5.2.2)$$

donde  $W(\cdot)$  es un proceso de Wiener estándar unidimensional.  $r$ ,  $\alpha$ , y  $\sigma$  son constantes con  $r < \mu$ , y  $\sigma > 0$ .

Una política  $\pi$  de consumo/inversión es un par  $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$  consistente en un proceso de portafolio  $a_1(\cdot)$  y un proceso de consumo  $a_2(\cdot)$ .

Esto es,  $a_1(t)$  (respectivamente  $1 - a_1(t)$ ) es la fracción de riqueza invertida en la acción (respectivamente bono) al tiempo  $t$ . Y  $a_2(t)$  es la tasa de consumo. Ambas satisfaciendo las restricciones de control

$$0 \leq a_1(t) \leq 1, \quad a_2(t) \geq 0. \quad (5.2.3)$$

Cuando usamos una política  $\pi$  de consumo/inversión, la riqueza  $x(\cdot) = x^\pi(\cdot)$  cambia de acuerdo a la EDE

$$dx(t) = \underbrace{(1 - a_1(t))x(t)rdt}_{\text{ganancia inversión bono}} + \underbrace{a_1(t)x(t)[\mu dt + \sigma dW(t)]}_{\text{ganancia inversión acción}} - \underbrace{a_2(t)dt}_{\text{pérdida por consumo}}$$

Reescribiendo la ecuación anterior en su forma estándar tenemos

$$dx(t) = [(r + (\mu - r)a_1(t))x(t) - a_2(t)]dt + \sigma a_1(t)x(t)dW(t). \quad (5.2.4)$$

### 5.2.2. Utilidad esperada de riqueza terminal

Sea  $U$  una función de utilidad, i.e,  $U$  es una función no negativa en  $[0, \infty)$ , de clase  $C^2$ , estrictamente creciente, estrictamente cóncava, y tal que  $U'(0) = +\infty$ .

Supongamos ahora que no hay consumo, es decir,  $a_2(\cdot) = 0$ , así que la ecuación de riqueza (5.2.4) se convierte en

$$dx(t) = [(r + (\mu - r)a_1(t))x(t)]dt + \sigma a_1(t)x(t)dW(t). \quad (5.2.5)$$

Además, deseamos maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal

$$J(s, x; \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^\pi \{U[x(\zeta)]\}. \quad (5.2.6)$$

Supondremos que la función de utilidad es  $U(x) = x^\gamma$ , con  $0 < \gamma < 1$ , (notar que  $U(0) = 0$ ), y  $\zeta$  es el primer momento de salida del conjunto abierto  $Q = (0, T) \times (0, \infty)$ .

El criterio de utilidad (5.2.6) es de la forma

$$J(s, x; \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left\{ \int_s^\zeta c^\pi(t, x(t))dt + K(\zeta, x(\zeta)) \right\}$$

con  $c(s, x, a_1) = 0$  y  $K(s, x) = U(x) = x^\gamma$ .

Entonces, la ecuación HJB (3.3.12)-(3.3.13) es

$$v_s + \max_{0 \leq a_1 \leq 1} \left\{ [r + (\mu - r)a_1]xv_x + \frac{1}{2}(\sigma a_1 x)^2 v_{xx} \right\} = 0 \quad (5.2.7)$$

con la condición frontera

$$v(s, x) = K(s, x) = U(x) = x^\gamma, \quad \forall (s, x) \in \partial^* Q, \quad (5.2.8)$$

donde  $\partial^*Q = ([0, T] \times \{0\}) \cup (\{T\} \times [0, \infty))$ .

Ignorando momentáneamente la restricción  $0 \leq a_1(t) \leq 1$  encontramos que la función entre corchetes de (5.2.7) es maximizada cuando

$$a_1^* = \pi^*(s, x) = \frac{-(\mu - r)v_x}{\sigma^2 x v_{xx}}, \quad (5.2.9)$$

si  $v_x > 0$  y  $v_{xx} < 0$ .

La sustitución de (5.2.9) en (5.2.7) produce

$$v_s + r x v_x - \frac{(\mu - r)^2 v_x^2}{2\sigma^2 v_{xx}} = 0 \quad (5.2.10)$$

sobre  $G = [0, T] \times \mathbb{R}$ , con

$$v(s, x) = x^\gamma, \quad \text{para } s = T \text{ o } x = 0. \quad (5.2.11)$$

Para resolver (5.2.10)-(5.2.11) proponemos una solución de la forma

$$v(s, x) = h(s)x^\gamma, \quad \text{con } h(T) = 1. \quad (5.2.12)$$

Con esta elección de  $v$ , la ecuación (5.2.10) queda

$$h'(s) + C\gamma h(s) = 0, \quad (5.2.13)$$

con  $C := r + \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)}$ . Por lo tanto,  $h(s) = e^{C\gamma(T-s)}$  para  $s \leq T$ , así que

$$v(s, x) = e^{C\gamma(T-s)} x^\gamma, \quad (5.2.14)$$

$$\pi^*(s, x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \gamma)}. \quad (5.2.15)$$

Por lo que, si  $\frac{\mu-r}{\sigma^2(1-\gamma)} \leq 1$ , entonces concluimos que la función (5.2.14) corresponde a la función objetivo óptima  $J^*(s, x) = v(s, x)$ , y la función (5.2.15) a la política de control óptima (o proceso portafolio)  $\pi^*$ , que es constante.

## Simulación

La simulación consistirá en recrear las dinámicas de precios de dos activos (uno libre de riesgo y otro con riesgo) y la dinámica de la riqueza con condiciones iniciales. Tomando en cuenta el criterio de rendimiento (5.2.6), el objetivo es maximizar una utilidad esperada de la riqueza terminal encontrándose una fracción de inversión óptima.

Consideremos entonces dos activos con dinámica de precios

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{P(t)} &= 0.5dt, \\ \frac{dQ(t)}{Q(t)} &= 0.6dt + 0.9dW(t) \end{aligned}$$

para  $s = 0 \leq t \leq T = 1$ , con condiciones iniciales en  $t_0 = 0$ ,  $P(0) = 10$ ,  $Q(0) = 15$ . Identificándose  $r = 0.5$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $\sigma = 0.9$ .

La ecuación de riqueza es

$$dx(t) = [(r + (\mu - r)a_1(t))x(t)]dt + \sigma a_1(t)x(t)dW(t), \quad x(0) = 250.$$

El propósito es maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal

$$J(s, x; \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^{\pi} \{U[x(\zeta)]\}$$

cuando  $U = x^\gamma$ , con  $\gamma = 0.8$ .

La fracción de inversión óptima sobre la acción es

$$a_1^* = \mathbf{0.617284}.$$

La fracción de inversión óptima sobre el bono, por ende es  $1 - a_1^* = 0.382716$ .

La función objetivo óptima  $J^*(s, x)$  con los parámetros dados es

$$v(s, x) = \mathbf{126.705}.$$

El comportamiento de los precios de la acción y de la riqueza pueden ser comparados con sus valores esperados, representados en Fig 7.1 y 7.2.

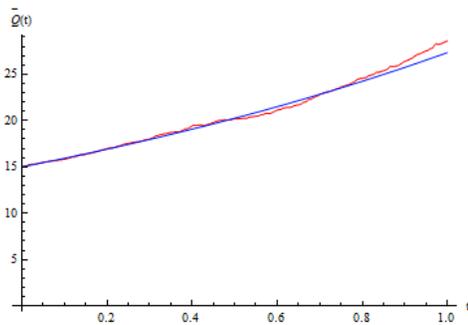


Fig. 7.1 Simulación del precio del activo.

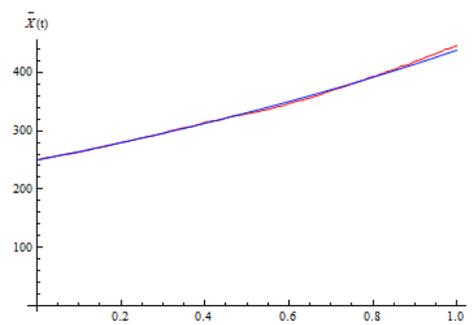
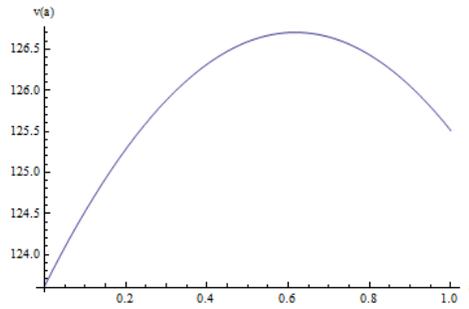


Fig. 7.2 Simulación de la riqueza.

Natural es plantearse invertir únicamente en el bono ( $a_1 = 0$ ), o únicamente invertir la acción ( $a_1 = 1$ ) donde se tienen los siguientes valores respectivos para  $v$

$$\begin{aligned} v_0(s, x) &= 123.615 \\ v_1(s, x) &= 125.508. \end{aligned}$$

La función de rendimiento máximo  $v(s, x) = e^{C\gamma(T-s)}x^\gamma$  es representada en la sig. figura, donde se observa su comportamiento con respecto a la variable de control  $a_1$ . (Figura 8).

Figura 8. Función objetivo  $v(a_1)$ .

### 5.2.3. Utilidad total descontada esperada de consumo

En el contexto del ejemplo anterior, consideremos que ahora el problema de consumo/inversión en el que estamos interesados es maximizar la utilidad total descontada esperada del consumo

$$J(s, x; \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^{\pi} \left\{ \int_s^T e^{-\rho t} U(a_2(t)) dt \right\} \quad (5.2.16)$$

con tasa de descuento  $\rho > 0$ .

Supongamos que la función de utilidad es  $U(a_2) = a_2^\gamma$ , con  $0 < \gamma < 1$ . En este caso, las EPD de HJB (3.3.12, 3.3.13) resultan ser

$$v_s + \max_{\mathbf{a}} \left\{ e^{-\rho s} a_2^\gamma + [(r + (\mu - r)a_1)x - a_2]v_x + \frac{1}{2}(\sigma a_1 x)^2 v_{xx} \right\} = 0 \quad (5.2.17)$$

con condición terminal

$$v(T, x) = 0 \quad (5.2.18)$$

y la maximización es sobre el conjunto de parejas  $a = (a_1, a_2)$  satisfaciendo (5.2.3).

Ignorando momentáneamente tales restricciones, la función dentro de los corchetes de (5.2.17) es maximizada por  $a^* = (a_1^*, a_2^*)$  tal que

$$a_1^* = \frac{-(\mu - r)v_x}{\sigma^2 x v_{xx}} \quad (5.2.19)$$

$$a_2^* = \left[ \frac{1}{\gamma} e^{\rho t} v_x \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.2.20)$$

si  $v_x > 0$  y  $v_{xx} < 0$ .

Proponemos una solución de (5.2.17) de la forma

$$v(s, x) = h(s)x^\gamma, \quad \text{con } h(T) = 0. \quad (5.2.21)$$

En este caso, (5.2.19) y (5.2.20) resultan ser

$$a_1^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \gamma)}, \quad (5.2.22)$$

$$a_2^* = x[e^{\rho t}h(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (5.2.23)$$

y reemplazando los valores en (5.2.17) obtenemos

$$\left[ h'(s) + C\gamma h(s) + (1 - \gamma)h(s)[e^{\rho s}h(s)]^{\frac{1}{\gamma-1}} \right] x^\gamma = 0, \quad (5.2.24)$$

donde  $C := r + \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)}$ .

Dado que (5.2.24) se satisface para todo  $x > 0$ , la función entre corchetes debe ser 0. Resulta una ecuación diferencial para  $h$ , que puede ser resuelta haciendo  $g = [e^{\rho s}h(s)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$  para resolver la ecuación diferencial

$$g'(s) + \frac{C\gamma - \rho}{\gamma - 1}g(s) = [g(s)]^2 \quad (5.2.25)$$

con  $\beta := \frac{C\gamma - \rho}{\gamma - 1}$ .

Se tiene que la solución es

$$g(s) = \frac{\beta}{1 - e^{-\beta(T-s)}} \quad (5.2.26)$$

y por ende que:

$$h(s) = e^{-\rho s} \left[ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta(T-s)} \right]^{1-\gamma}. \quad (5.2.27)$$

Con esta función  $h$ , y si  $\mu - r \leq \sigma^2(1 - \gamma)$ , la política óptima de inversión/consumo está dada por

$$a_1^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \gamma)}, \quad (5.2.28)$$

$$a_2^* = x \left[ \frac{\beta}{1 - e^{-\beta(T-s)}} \right]. \quad (5.2.29)$$

Note que  $a_1^*$  es constante, y  $a_2^*$  es una función lineal de  $x$ .

## Simulación

La simulación consistirá, como en el ejemplo anterior, en recrear las dinámicas de precios de dos activos y la dinámica de la riqueza con condiciones iniciales. Tomando en cuenta el criterio de rendimiento (5.2.16), el objetivo es maximizar una utilidad total descontada esperada de consumo, encontrándose los correspondientes controles óptimos (consumo e inversión).

Así pues, consideremos como se había venido manejando dos activos con dinámica de precios

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{P(t)} &= 0.5dt, \\ \frac{dQ(t)}{Q(t)} &= 0.6dt + 0.9dW(t),\end{aligned}$$

para  $s = 0 \leq t \leq T = 1$ , con condiciones iniciales en  $t_0 = 0$ ,  $P(0) = 10$ ,  $Q(0) = 15$ .

La ecuación de riqueza es ahora

$$dx(t) = [(r + (\mu - r)a_1(t))x(t) - a_2(t)]dt + \sigma a_1(t)x(t)dW(t), \quad x(0) = 250.$$

El propósito es maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal

$$J(s, x; \pi) := \mathbb{E}_{s,x}^{\pi} \left\{ \int_s^T e^{-\rho t} U(a_2(t)) dt \right\}$$

cuando  $U = x^\gamma$ , con  $\gamma = 0.8$  y  $\rho = 1$ .

La fracción de inversión óptima sobre la acción es

$$a_1^* = \mathbf{0.617284}.$$

La fracción de inversión óptima sobre el bono, por ende es  $1 - a_1^* = 0.382716$ .

La función objetivo óptima  $J^*(s, x)$  con los parámetros dados es  $v(s, x) = h(s)x^\gamma$ , con  $h(s)$  como en (5.2.27):

$$v(s, x) = \mathbf{66.3043}.$$

El comportamiento de los precios de la acción y de la riqueza simulados son representados en las siguientes gráficas (Fig 9.1 y 9.2).

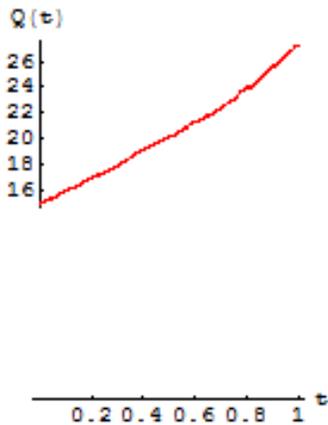


Fig. 9.1 Simulación del precio del activo con riesgo.

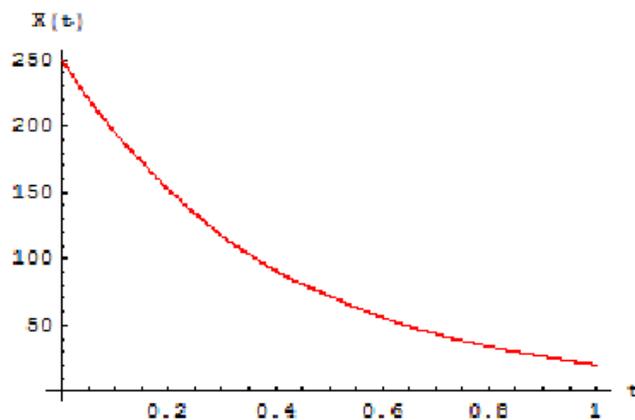


Fig. 9.2 Simulación de la riqueza.

La tasa de consumo óptima está dada, como en (5.2.29), por

$$a_2^* = \mathbf{3.04825x}.$$



# Conclusiones

La teoría del control óptimo se encuentra presente en numerosas aplicaciones, tanto en la vida cotidiana como en sofisticados sistemas tecnológicos.

Al comienzo de este trabajo, se definieron conceptos preliminares y la terminología a utilizar en la teoría del control óptimo. En el desarrollo de esta tesis se revisaron y reelaboraron las demostraciones del Principio de Pontryagin y de la Programación Dinámica en su versión determinista y de su análogo estocástico.

El Principio de Pontryagin nos ofrece las condiciones necesarias de optimalidad de un problema de control óptimo. La Programación Dinámica consiste en resolver una ecuación diferencial parcial, cuya solución determina la función objetivo óptima del problema de control.

Finalmente, se presentan ejemplos de aplicaciones diversas de control óptimo. Problemas que se simulan mediante el desarrollo y ejecución de programas y donde además, se estudia el comportamiento del sistema involucrado.

Un posible problema a futuro es el estudio de problemas a tiempo continuo sensibles al riesgo.



# Apéndice A

## Apéndices

### A.1. Apéndice I

En Cálculo, consideramos el problema de maximizar (o minimizar) una función  $f$  definida en algún intervalo  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Se saben los siguientes resultados:

(i) *Condiciones necesarias para un máximo en  $x^*$* . Supongamos que  $f(x^*) \leq f(x)$  para toda  $a \leq x \leq b$ . Entonces

$$\begin{aligned} f'(x^*) &= 0, \quad f''(x^*) \leq 0, \quad \text{si } a < x^* < b && \text{(Máximo interior)} \\ f'(x^*) &\leq 0, \quad \text{si } x^* = a \\ f'(x^*) &\geq 0, \quad \text{si } x^* = b \end{aligned} \tag{A.I.1}$$

siempre y cuando la derivada exista.

(ii) *Condiciones suficientes para un máximo local en  $x^*$* . Suponga que las desigualdades sobre  $f'$  y  $f''$  en (i) son estrictas. Entonces existe una vecindad  $N(x^*)$  tal que  $f(x^*) < f(x)$  para todo  $x \in N \cap [a, b]$ ,  $x \neq x^*$ .

(iii) *Existencia de un máximo*. Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene un máximo en ese intervalo.

(iv) *Unicidad del máximo*. Si  $f(x)$  es una función estrictamente cóncava en  $[a, b]$  tiene un máximo en un único punto  $x^*$  en  $[a, b]$ . Una condición suficiente para que  $f(x)$  sea estrictamente cóncava es que  $f''(x) < 0$  sobre  $[a, b]$ .

Generalizaremos estos resultados para funciones definidas en un espacio abstracto. Así que consideramos el problema general de optimización: dado un conjunto  $\mathcal{K}$  y una función real  $J$  definida sobre  $\mathcal{K}$ , encontrar un elemento  $u^* \in \mathcal{K}$  tal que  $J(u) \leq J(u^*)$  para todo  $u \in \mathcal{K}$ .

Las condiciones necesarias para un máximo son obtenidas considerando funciones  $\zeta = \zeta(\varepsilon)$  de algún intervalo  $a \leq \varepsilon \leq b$ , tal que la función compuesta  $f(\varepsilon) = J(\zeta(\varepsilon))$  sea diferenciable.

(i') *Condiciones necesarias para un máximo*. Supongamos que  $u^* \in \mathcal{K}$  y  $J(u) \leq J(u^*)$  para cualquier  $u \in \mathcal{K}$ . Si  $\zeta = \zeta(\varepsilon)$  es una función de un intervalo  $[a, b]$  a  $\mathcal{K}$ , tal que  $\zeta(\varepsilon^*) = u^*$ ,

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(\zeta(\varepsilon))|_{\varepsilon=\varepsilon^*} &= 0, \quad \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(\zeta(\varepsilon))|_{\varepsilon=\varepsilon^*} \leq 0, \quad \text{si } a < \varepsilon^* < b. \\ \frac{d}{d\varepsilon} J(\zeta(\varepsilon))|_{\varepsilon=\varepsilon^*} &\leq 0, \quad \text{si } \varepsilon^* = a. \\ \frac{d}{d\varepsilon} J(\zeta(\varepsilon))|_{\varepsilon=\varepsilon^*} &\geq 0, \quad \text{si } \varepsilon^* = b. \end{aligned} \tag{A.I.2}$$

siempre y cuando la derivada indicada exista.

En muchos casos  $\mathcal{K}$  es un subconjunto de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ . Cuando esto ocurre, pueden ser hechas estas definiciones.

**Definición.** Sea  $u \in \mathcal{K}$  y  $v \in \mathcal{V}$ . El punto  $u$  es un punto interno de  $\mathcal{K}$  en la dirección de  $v$  si existe  $\varepsilon(v) > 0$  tal que  $u + \varepsilon v \in \mathcal{K}$  para  $|\varepsilon| < \varepsilon(v)$ .

**Definición.** Sea  $u \in \mathcal{K}$  y  $v \in \mathcal{V}$ . El punto  $u$  es un punto radial de  $\mathcal{K}$  en la dirección de  $v$  si existe  $\varepsilon(v) > 0$  tal que  $u + \varepsilon v \in \mathcal{K}$  para  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon(v)$ .

Si  $u$  es un punto interno (o radial) de  $\mathcal{K}$  en la dirección de  $v$ , entonces

$$\zeta(\varepsilon) = u + \varepsilon v$$

mapea a  $\mathcal{K}$  para  $|\varepsilon| < \varepsilon(v)$  (o  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon(v)$ ). La notación

$$\delta J(u, v) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}$$

denotará la derivada de  $J$  en  $u$  en la dirección de  $v$ .

**Definición.**  $J$  es Gateau diferenciable en  $u$  si  $u$  es un punto interno en la dirección de  $v$  y  $\delta J(u, v)$  existe, para todo  $v \in \mathcal{V}$ .

La notación  $\delta^2 J(u, v)$  es usada para denotar

$$\delta^2 J(u, v) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}$$

siempre y cuando la segunda derivada indicada exista.

Supongamos ahora que  $\mathcal{K}$  es un subconjunto de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ .

**Teorema A.1.1** *Si  $J$  tiene un máximo en  $\mathcal{K}$  en un punto interno  $u^*$  de  $\mathcal{K}$  en la dirección de  $v$  y  $\delta J(u^*, v)$ ,  $\delta^2 J(u^*, v)$  existen, entonces*

$$\delta J(u^*, v) = 0, \quad \delta^2 J(u^*, v) \leq 0.$$

**Teorema A.1.2** *Si  $J$  tiene un máximo en  $\mathcal{K}$  en un punto radial  $u^*$  de  $\mathcal{K}$  en la dirección de  $v$  y  $\delta J(u^*, v)$  existe, entonces*

$$\delta J(u^*, v) \leq 0.$$

**Teorema A.1.3** *Sea  $\mathcal{K}$  convexo, sea  $J$  convexo sobre  $\mathcal{K}$  y  $u^* \in \mathcal{K}$ . Si  $\delta J(u^*, v) \leq 0$  para toda  $v \in \mathcal{V}$  tal que  $u + v \in \mathcal{K}$ , entonces  $J$  tiene un máximo sobre  $\mathcal{K}$  en  $u^*$ .*

Sea  $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  una función continua

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

de clase  $C^1$  en  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ .

Dependiendo del criterio de rendimiento considerado, le designamos un nombre al Problema de Control Óptimo:

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \phi_1(\mathbf{e}) \quad \text{Problema de Mayer} \quad (\text{A.I.3})$$

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad \text{Problema de Lagrange} \quad (\text{A.I.4})$$

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \phi_1(\mathbf{e}) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad \text{Problema de Bolza.} \quad (\text{A.I.5})$$

Los tres problemas de optimización anteriores son equivalentes. Cada uno puede formularse partiendo de algún otro.

Un problema de Lagrange puede ser formulado como un problema de Mayer agregando una nueva componente con su correspondiente ecuación diferencial

$$\dot{x}_{n+1}(t) = L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

con condición inicial  $x_{n+1}(t_0) = 0$  al sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ . Entonces el criterio de rendimiento (A.I.4) está dado por

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \phi_1(\mathbf{e}) = x_{n+1}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt.$$

Un problema de Bolza puede ser convertido a un problema de Mayer de manera similar con (A.I.5) reescrito como  $\phi_1(\mathbf{e}) + x_{n+1}(t_1)$ .

Un problema de Mayer puede ser convertido a un problema de Lagrange agregando una coordenada extra y su correspondiente ecuación diferencial

$$\dot{x}_{n+1} = 0$$

al sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , y agregando una componente extra  $\phi_{k+1}(\mathbf{e})$  a los  $\phi_2(\mathbf{e}), \dots, \phi_k(\mathbf{e})$  con

$$\phi_{k+1}(\mathbf{e}) = x_{n+1}(t_1) - \frac{\phi_1(\mathbf{e})}{t_1 - t_0}.$$

Entonces  $\phi_{k+1}(\mathbf{e}) = 0$  implica

$$\int_{t_0}^{t_1} x_{n+1}(t) dt = \phi_1(\mathbf{e}).$$

Por lo que (A.I.3) puede ser expresado en la forma (A.I.4) con  $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_{n+1}$ .

## A.2. Apéndice II

**Teorema A.2.1** Sea  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{G}(t)$  un vector  $n$ -dimensional de funciones continuas a trozos definidas en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , y  $\mathbf{y}_0$  un vector  $n$ -dimensional. Entonces, si  $\tau \in [t_0, t_1]$  existe una única solución continuamente diferenciable a trozos de la ecuación diferencial vectorial

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{G}(t) \quad (\text{A.II.1})$$

sobre el intervalo  $[t_0, t_1]$  que satisface la condición

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}_0. \quad (\text{A.II.2})$$

El sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales

$$\dot{\mathbf{P}} = -[\mathbf{A}(t)]^T \mathbf{P} \quad (\text{A.II.3})$$

es llamado *Ecuaciones Adjuntas*.

Por el teorema anterior tienen una única solución para una condición frontera dada. Si  $\mathbf{y}(t)$  es una solución de (A.II.1) y  $\mathbf{P}(t)$  es una solución de (A.II.3):

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{y}(t) = -[\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{G}(t). \quad (\text{A.II.4})$$

Para cualesquier tiempos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , una integración de  $\tau_1$  a  $\tau_2$  de (A.II.4) establece la fórmula

$$[\mathbf{P}(\tau_2)]^T \mathbf{y}(\tau_2) - [\mathbf{P}(\tau_1)]^T \mathbf{y}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\mathbf{P}(t)]^T \mathbf{G}(t) dt. \quad (\text{A.II.5})$$

**Teorema A.2.2** Sea  $\mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  continua. Para  $0 \leq \varepsilon \leq \eta$ , sea  $\mathbf{x}^\varepsilon(t)$  las soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  correspondiente a los controles  $\mathbf{u}(t) + \varepsilon \mathbf{v}(t)$  con la misma condición inicial  $\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}_0$ . Entonces

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{o}(t, \varepsilon) \quad (\text{A.II.6})$$

donde  $\delta \mathbf{x}(t)$  es la solución de

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_x(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_u(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \mathbf{v}(t) \quad (\text{A.II.7})$$

con condición inicial

$$\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.II.8})$$

**Teorema A.2.3** Para una variable real  $\varepsilon$ , sea  $\mathbf{x}^\varepsilon(t)$  la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  sobre  $[t_0, t_1]$  correspondiente al control  $\mathbf{u}(t)$  con condición inicial

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t_0) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{y}_0 + \mathbf{o}(\varepsilon). \quad (\text{A.II.9})$$

Entonces

$$\mathbf{x}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{o}(t, \varepsilon) \quad (\text{A.II.10})$$

donde  $\delta \mathbf{x}(t)$  es la solución de

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \delta \mathbf{x}(t) \quad (\text{A.II.11})$$

sobre  $[t_0, t_1]$  con condición inicial

$$\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (\text{A.II.12})$$

**Teorema A.2.4** (Regla del Multiplicador Abstracto) Si  $s^*$  es una solución del problema de programación no lineal abstracta y si  $D$  es un cono de variaciones de  $J$  en  $s^*$ , entonces existe un vector  $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$  ( $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ ) con  $\lambda_1 \leq 0$  y  $[\boldsymbol{\lambda}]^T \mathbf{d} \leq 0$  para todo  $\mathbf{d} \in D$ .

**Teorema A.2.5** (Cono de variaciones de  $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{e})$ ) El cono convexo generado por los vectores i-iv) siguientes es un cono de variaciones del mapeo  $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{e})$  en  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ .

$$i) \phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{x}(t_1) \quad (\text{A.II.13})$$

donde  $\delta \mathbf{x}(t)$  es la solución de

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \delta \mathbf{x}(t)$$

con condición frontera dada para algún  $\tau \in (t_0, t_1]$  y  $\mathbf{u} \in U$

$$\delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)).$$

$$ii) \phi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}) \mathbf{y} + \phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \delta \mathbf{x}(t_1) \quad (\text{A.II.14})$$

donde  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta \mathbf{x}(t)$  es la solución de

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \delta \mathbf{x}(t)$$

con

$$\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}.$$

$$iii) \pm [\phi_{t_1}(\mathbf{e}) + \phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{e}) \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1))] \quad (\text{A.II.15})$$

$$iv) \pm [\phi_{t_0}(\mathbf{e}) + \phi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}) \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))]. \quad (\text{A.II.16})$$

**Lema A.2.6** Sea  $h(t, u)$  una función continua definida en  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$  que tiene derivada parcial continua con respecto a  $t$ .

Sea  $U$  un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $u(t)$  una función a trozos continua por la izquierda definida en  $[t_0, t_1]$  con valores en  $U$ .

Si

$$\max_{u \in U} \{h(t, u)\} = h(t, u(t)) \quad (\text{A.II.17})$$

para cada  $t \in [t_0, t_1]$ , entonces  $h(t, u(t))$  es continuamente diferenciable a trozos sobre  $[t_0, t_1]$  y

$$h(t, u(t)) = \int_{t_0}^t h_t(s, u(s)) ds + h(t_0, u(t_0)). \quad (\text{A.II.18})$$

**Demostración.** Primero demostraremos que (A.II.17) implica que  $h(t, u(t))$  es continua. Dado que es continua a trozos y continua por la izquierda, seguirá mostrar que es continua a la derecha en cada punto interior de  $[t_0, t_1]$ . Para tal punto, (A.II.17) implica que

$$\begin{aligned} h(t, u(t + \tau)) &\leq h(t, u(t)), \\ h(t + \tau, u(t)) &\leq h(t + \tau, u(t + \tau)). \end{aligned}$$

Tomando límites cuando  $\tau$  decrece a cero implica:

$$h(t, u(t)^+) \leq h(t, u(t)) \leq h(t, u(t)^+).$$

Así,  $h(t, u(t))$  es continua.

Sea  $t$  un punto de continuidad de  $u(t)$  y considere la diferencia

$$d(\tau) = h(t + \tau, u(t + \tau)) - h(t, u(t)).$$

De (A.II.17)

$$h(t + \tau, u(t)) - h(t, u(t)) \leq d(\tau) \leq h(t + \tau, u(t + \tau)) - h(t, u(t + \tau)).$$

Por el teorema de la media, existen  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$  tal que

$$h_t(t + \theta_1\tau, u(t)) \leq \frac{d(\tau)}{\tau} \leq h_t(t + \theta_2\tau, u(t + \tau)).$$

Dado que  $t$  es un punto de continuidad de  $u(t)$  tomando límites cuando  $\tau$  se aproxima a 0 tenemos

$$h_t(t, u(t)) = \frac{d}{dt}h(t, u(t)).$$

Por lo tanto,  $h(t, u(t))$  tiene una derivada continua a trozos  $h_t(t, u(t))$ .

De esto y de la continuidad de  $h(t, u(t))$  concluimos que se satisface (A.II.18). ■

# Referencias

- [1] Bellman, R. "*Dynamic programming*". Princeton University Press. USA. (1957).
- [2] Bertsekas, D. "*Dynamic programming and optimal control*". Vol. 1. Athena Scientific. USA. (1995).
- [3] Bressan, A., Piccoli, B. "*Introduction to the mathematical theory of control*". American Institute on Mathematical Sciences. Series on Applied Mathematics Vol. 2. USA. (2007).
- [4] Cesari, L. "*Optimization Theory and applications Problems with ordinary differential equations*". Springer-Verlag. USA. (1983).
- [5] Chiang, A. "*Elements of dynamic optimization*". McGrawHill, Inc. Singapur. (1992).
- [6] Fleming, W., Pang, T. "*A stochastic control model of investment, product and consumption*". (2004).
- [7] Fleming, W., Rishel, R. "*Deterministic and stochastic optimal control*". Springer-Verlag. USA. (1975).
- [8] Fleming, W., Soner, M. "*Controlled Markov processes and viscosity solutions*". Springer. USA. (2006).
- [9] Han, X. Yi, F. "*A stochastic control model of investment, production and consumption on a finite horizon*". Mathematical Methods in the Applied Sciences. Vol. 38. pp. 1070-180. John Wiley & Sons. (2015).
- [10] Hernández-Lerma, O. "*Lectures on continuous-time Markov control processes*". Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana. México. (1994).
- [11] Kirk, D. "*Optimal control theory An introduction*". Dover Publications, Inc. USA. (1998).
- [12] Merton, R. "*Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*". Journal of Economic Theory Vol. 3, pp. 373-413. USA. (1970).
- [13] Muresan, M. "*Soft landing on the Moon with Mathematica*". The Mathematica Journal. Vol. 14. Wolfram Media, Inc. (2012).
- [14] Rogers, L. "*Investment-consumption modeling*". Encyclopedia of Systems and Control. Springer-Verlag. UK. (2014).
- [15] Sethi, S., Thompson, G. "*Optimal control theory Applications to management science and economics*". 2a. ed. Springer. USA. (2006).
- [16] Trimborn, T. "*Dynamic macroeconomic modeling with Matlab*". Danish Graduate Programme in Economics. University of Hannover. Germany. (2009).

