Teorema de la Medida Producto en Espacios de Probabilidad

Rei Israel Ortega Gutiérrez.

Marzo 2008

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se estudiará el concepto de la medida producto en el contexto de medidas probabilísticas. Se expone tanto el caso finito como el caso infinito numerable para una colección de espacios probabilísticos. En cada uno de estos casos se presentan ejemplos los cuales muestran el uso del teorema de la medida producto, y en muchos de ellos se encuentra de forma explícita el espacio producto. En la literatura revisada sobre este tema (véase [1], [2] y [10]) se encontraron distintas versiones del teorema de la medida producto y resultados relacionados con ella, pero en cambio, se notó la carencia de ejemplos sobre este tema. Dicha carencia fue una de las principales razones que motivó este trabajo de tesis. También es importante señalar la importancia que tiene el teorema de la medida producto en áreas como estadística, procesos estocásticos, finanzas, procesos de control, entre otros; en cada una de estas áreas se encuentra presente el uso de la medida producto, ya sea para la construcción de procesos ó para el cálculo de probabilidades conjuntas.

Inicialmente la tesis aborda el teorema de extensión de Caratheodory (TC), para ello se hace un estudio de algunos conceptos básicos de teoría de la medida. La tesis incluye un apéndice de algunos conceptos y teoremas de teoría de la medida (véase Apéndice B y C). El TC es usado para extender una medida definida en un álgebra $\mathcal{A}$ a una medida en una sigma álgebra $\mathcal{B}$ que contiene a $\mathcal{A}$, para hacer dicha extensión se hace uso del concepto de medida exterior. Este procedimiento de extensión es utilizado para la construcción de la medida de Lebesgue y la medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$. En particular, en esta tesis se usa el TC para construir la medida producto. Una vez estudiado el TC se presenta la medida producto para el caso de un número finito de espacios de medida. Las referencias que se siguieron en la tesis fueron los textos de Ash [1] y Shiryaev [10], dichos textos abordan el teorema de la medida producto desde un punto de vista probabilístico, ya que cada espacio de medida se encuentra condicionado con respecto a otro (véase Capítulos 3 y 4). Esta fue una de las principales razones por las que se decidió seguir estos textos, además, el caso independiente se obtiene como un caso particular del primero.

En la tesis se presentan una serie de ejemplos los cuales muestran el uso que tiene el teorema de la medida producto, en particular, a modelos probabilísticos. En el Capítulo 3 de medida producto (caso numerable), se presentan una serie de ejemplos, los cuales se analizan de forma empírica en los libros básicos de probabilidad, en este caso se presenta un enfoque más teórico dando los espacios de medida de cada uno de los experimentos. También en este capítulo se dan ejemplos clásicos, como el de muestreo con sustitución y muestreo sin sustitución, aunque estos ejemplos han sido analizados bajo distintas perspectivas, aquí lo que se pretende hacer es mostrar el uso de la medida producto.

Una aplicación del teorema de la medida producto es la construcción de un proceso estocástico (véase [1]). En este caso suponemos que tenemos una infinidad de variables aleatorias y se quiere conocer la medida de probabilidad conjunta, como consecuencia de ello damos la medida de probabilidad para cadenas de Markov, la ley de los grandes números y el teorema del límite central (véase [7]). Después para variables aleatorias Bernoulli, Binomial y Poisson (véase [6]), se sabe que este problema es abordado en la mayor parte de textos de probabilidad básica, pero en esta tesis se analiza vía la medida producto. Finalmente se da un ejemplo a teoría de confiabilidad (véase [11]).

Esta tesis está organizada de la siguiente manera, capítulo 2. Preliminares, capítulo 3. Medida producto: caso finito y sus ejemplos, capítulo 4. Medida producto: caso numerable y sus ejemplos, capítulo 5. Conclusiones y un apéndice.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Extensión de Medidas

Definición 2.1.1 *Sea X un conjunto. Una medida exterior es una función $\mu^* : \mathcal{P}ot(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ (donde $\overline{\mathbb{R}}$ denota los reales extendidos i.e. $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$) tal que*

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

b) Si $A, B \subseteq X$ y $A \subseteq B$, entonces $\mu^*(A) < \mu^*(B)$ (monotonía),

c) Si $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con E_i y $E \in Pot(X)$, $i = 1, 2, \ldots$ entonces $\mu^*(E) \leq$

$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ (subaditividad).

Observación 2.1.2 *Sea $E_i \subseteq X$, $i = 1, 2, \ldots$ tal que $E_n \cap E_m = \emptyset$, si $m \neq n$. Entonces la propiedad c) puede modificarse para esta clase de E_i's, de la forma siguiente*

c') Si $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_n \cap E_m = \emptyset$, cuando $m \neq n$ entonces $\mu^*(L) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$.

Ahora veamos que c) y c)' son equivalentes.

Demostración. c) $\Longrightarrow$ c)' Como $L \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, si $m \neq n$, entonces

$$\mu^*(L) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

c)'$\Longrightarrow$ c) Defínase

$$\begin{aligned}
B_1 &= E_1 \\
B_2 &= E_2 - E_1 = E_2 \cap E_1' \subseteq E_2 \\
B_3 &= E_3 - (E_1 \cup E_2) \subseteq E_3 \\
&\vdots \\
B_n &= E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \subseteq E_n.
\end{aligned}$$

Note que $B_n \cap B_m = \emptyset$, si $m \neq n$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Así

$$\mu^*(E) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

■

Definición 2.1.3 *Un conjunto $E \subseteq X$ es medible con respecto a μ^* si para cada conjunto $A \subseteq X$ se tiene que*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'). \tag{2.1}$$

Observación 2.1.4 *La igualdad en (2.1) sólo es necesaria probarla para el caso "$\geq$"(i.e. $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$), ya que la otra desigualdad se cumple por (c') (i.e. $A = (A \cap E) \cup (A \cap E') \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$).*

Sea
$$\mathfrak{B} = \{B \subseteq X \mid B \text{ es medible}\}.$$

Teorema 2.1.5 $\mathfrak{B}$ *es una σ-álgebra.*

Demostración.

i) $\emptyset \in \mathfrak{B}$, ya que para cada $A \subseteq X$ se tiene que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap X).$$

ii) Si $E \in \mathfrak{B}$, entonces $E' \in \mathfrak{B}$. Sea $A \subseteq X$,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E') \\ &= \mu^*(A \cap E') + \mu^*(A \cap E) \end{aligned}$$

Por simetría de la ecuación (2.1) la afirmación es verdadera.

iii) Si $E_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, 2, ...,$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{B}$. Para demostrar esta afirmación, sean E_1, $E_2 \in \mathfrak{B}$. Entonces para cada $A \subseteq X$

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2') \qquad (2.2) \\ &= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2' \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2' \cap E_1') \end{aligned}$$

Como

$$A \cap (E_1 \cap E_2) = (A \cap E_1 \cap E_2') \cup (A \cap E_2)$$

entonces

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) \leq \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2') + \mu^*(A \cap E_2)$$

usando la desigualdad en (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) - \mu^*(A \cap (E_1 \cap E_2')) \\ &\quad + \mu^*(A \cap (E_2' \cap E_1)) + \mu^*(A \cap (E_1' \cap E_2')) \\ &= \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1' \cap E_2')) \\ &= \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)'). \end{aligned}$$

Entonces, $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{B}$. Por inducción se tendría el mismo resultado para n conjuntos.

Para demostrar el caso numerable, sean $\{E_i\} \subseteq \mathfrak{B}$ disjuntos dos a dos y defínase para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} G_n &= \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \\ E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i. \end{aligned}$$

Entonces, para cada $A \subseteq X$ y $n \geq 1$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap G'_n). \tag{2.3}$$

Como $G_n \subseteq E$ entonces $G'_n \supseteq E'$ de lo cual se tiene que $A \cap G'_n \supseteq A \cap E'$, usando la subaditividad de μ^* se llega a que

$$\mu^*(A \cap E') \leq \mu^*(A \cap G'_n) \tag{2.4}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap G_n) &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E_{n-1}) + \mu^*(A \cap G_{n-1}) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E_{n-1}) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E_{n-2}) + \mu^*(A \cap G_{n-2}). \end{aligned}$$

continuando de forma

$$\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i). \tag{2.5}$$

Usando (2.4) y (2.5) en (2.3) resulta que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E') + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

Así cuando $n \to \infty$ en la relación anterior

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \mu^*(A \cap E') + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) \\ &\geq \mu^*(A \cap E') + \mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i) \\ &\quad \mu^*(A \cap E') + \mu^*(A \cap E). \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.6 *Si* $\overline{\mu} = \mu^* \mid_{\mathfrak{B}}$ *con* $\overline{\mu} : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^+$ *entonces* $\overline{\mu}$ *es una medida en* $\mathfrak{B}$.

Demostración. Sean E_1 y E_2 conjuntos medibles y ajenos. Usando la medibilidad de E_2 tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E_1 \cup E_2) &= \mu^*((E_1 \cap E_2) \cap E_2) + \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_2') \\ &= \mu^*(E_2) + \mu^*((E_1 \cap E_2') \cap (E_1 \cap E_2')) \\ &= \overline{\mu}(E_2) + \overline{\mu}(E_1).\end{aligned}$$

Por inducción se tiene que la aditividad finita se cumple.

Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, donde $\{E_i\} \subset \mathfrak{B}$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$, si $n \neq m$. Entonces

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(E_i).$$

Cuando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior se tiene que

$$\overline{\mu}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i)$$

y como

$$\overline{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i)$$

entonces $\overline{\mu}$ es σ-aditiva. Además, $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$.

Por lo tanto, $\overline{\mu}$ es una medida. ∎

Definición 2.1.7 *Un espacio de medida $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ es completo si $\mathfrak{F}$ contiene a todos los subconjuntos de conjuntos de medida cero ó nula, i.e. si para cada $B \in \mathfrak{F}$ con $\mu(B) = 0$ y $A \subseteq B$ implica que $A \in \mathfrak{F}$.*

Lema 2.1.8 *El espacio $(X, \mathfrak{B}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completo.*

Demostración. Sea $B \in \mathfrak{B}$ con $\overline{\mu}(B) = 0$ y $A \subseteq B$. Ahora, sea $C \in Pot(X)$, con $\overline{\mu}(C) < +\infty$.

Se quiere demostrar que

$$\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A').$$

Como

$$\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A') = \mu^*(C \cap A') \leq \mu^*(C),$$

ya que $C \cap A' \subseteq C$. Luego, por hipótesis $A \subseteq B$ entonces $C \cap A \subseteq C \cap B \subseteq B$. De esto se obtiene que

$$\mu^*(C \cap A) \leq \mu^*(C \cap B) \leq \mu^*(B) = 0.$$

Así $A \in \mathfrak{B}$. Por lo tanto $(X, \mathfrak{B}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completo. ■

Ahora, sea μ una medida en un álgebra $\mathfrak{U}$ (véase Apéndice A), y defínase

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathfrak{U},\ i = 1, 2, ... \right\},$$

para $A \in Pot(X)$.

Lema 2.1.9 *Sea $A \in \mathfrak{U}$, donde $\mathfrak{U}$ es una álgebra y sea $\{A_i\} \subset \mathfrak{U}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces*

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Demostración. Sean

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & A_1 \\ B_2 & = & A_2 - A_1 \subseteq A_2 \\ B_3 & = & A_3 - (A_1 \cup A_2) \subseteq A_3 \\ & & \vdots \\ B_n & = & A_n - (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}) \subseteq A_n \end{array}$$

y hagamos $C_n = A \cap B_n$, $n \geq 1$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} A & = & \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \\ \mu(A) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \end{array}$$

■

Corolario 2.1.10 *Si $A \in \mathfrak{U}$ entonces $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Demostración. Por definición se cumple que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Ahora como $A \in \mathfrak{U}$ entonces

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

con $A = B_1$ y $B_i = \emptyset$, para $i = 2, 3, ...$ Así $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(A)$. Por lo tanto $\mu^*(A) = \mu(A)$. ■

Lema 2.1.11 μ^* *es una medida exterior.*

Demostración.

(i) Claramente $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Sea $A \subseteq B$ con A, $B \in Pot(X)$. Entonces

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ y } A_i \in \mathfrak{U},\ i = 1, 2, ..., \right\} \geq \mu^*(A).$$

(iii) Sea $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y supóngase que $\mu^*(E_i) < +\infty$, para todo i. Entonces dado $\varepsilon > 0$, para cada i existe $\{A_{i,j}\} \subset \mathfrak{U}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{i,j}) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

■

Lema 2.1.12 *Si $A \in \mathfrak{U}$ entonces A es medible con respecto a μ^*.*

Demostración. Sea $E \subseteq X$ un conjunto arbitrario de medida exterior finita y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\{E_i\} \subset \mathfrak{U}$ tal que

(i) $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

Por otro lado, usando la aditividad de μ se tiene que

$$\mu(E_i) = \mu(E_i \cap A) + \mu(E_i \cap A').$$

Entonces por (ii)

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [\mu(E_i \cap A) + \mu(E_i \cap A')] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A') \\ &\geq \mu^*(E_i \cap A) + \mu^*(E_i \cap A'). \end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ en la relación anterior se concluye que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E_i \cap A) + \mu^*(E_i \cap A').$$

■

Definición 2.1.13 *Sea $\mathfrak{U}_\sigma$ el conjunto cuyos elementos son uniones de elementos de $\mathfrak{U}$. Es decir, si $A \in \mathfrak{U}_\sigma$ entonces existe $\{E_i\} \subset \mathfrak{U}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.*

Sea $\mathfrak{U}_{\sigma\delta}$ el conjunto cuyos elementos son intersecciones de $\mathfrak{U}_\sigma$. Es decir, si $B \in \mathfrak{U}_{\sigma\delta}$ entonces existe $\{L_i\} \subset \mathfrak{U}_\sigma$ tal que $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$.

Proposición 2.1.14 *Si μ es una medida en un álgebra $\mathfrak{U}$, μ^* la medida exterior inducida por μ y $E \in Pot(X)$, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathfrak{U}_\sigma$ con $E \subset A$ tal que $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Además, existe un conjunto $B \in \mathfrak{U}_{\sigma\delta}$ con $E \subset B$ y $\mu^*(B) = \mu^*(E)$.*

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{E_n\} \subset \mathfrak{U}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

con $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{U}_\sigma$ y

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

Para $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, ...$ existe $A_k \in \mathfrak{U}_\sigma$ con $E \subset A_k$ y $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k}$. Sea $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{U}_{\sigma\delta}$ entonces

i) $E \subset B$, ya que $E \subset A_k$, $k = 1, 2, ...$, de lo cual se tiene $E \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = B$.

ii) $\mu^*(E) = \mu^*(B)$, para demostrar este hecho note que

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A_k) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k},$$

de lo cual se infiere que

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{k}.$$

Luego cuando $k \to \infty$

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(E).$$

Por otro lado, como $E \subset B$ entonces $\mu^*(E) \leq \mu^*(B)$. Por lo tanto, $\mu^*(E) = \mu^*(B)$.

■

Teorema 2.1.15 *(Teorema de Caratheodory)*

Sea μ una medida en un álgebra $\mathfrak{U}$ definida en un conjunto X y μ^* la medida exterior inducida por μ. Entonces la restricción $\overline{\mu}$ de μ^* a los medibles es una extensión de μ a la σ-álgebra conteniendo a $\mathfrak{U}$. Si μ es σ-finita entonces $\overline{\mu}$ es la única medida en la σ-álgebra generada por $\mathfrak{U}$.

Demostración. En esta prueba solamente se probará la unicidad, debido a que las demás conclusiones ya se han probado en los resultados anteriores.

Sea $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{U})$ y $\widetilde{\mu}$ alguna medida definida en $\mathfrak{F}$ que coincide con μ en $\mathfrak{U}$. Sea $A \in \mathfrak{U}_\sigma$ entonces $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ con $\{A_i\} \subset \mathfrak{U}$ ajenos. Entonces

$$\widetilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^\infty \widetilde{\mu}(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) = \mu(A) = \overline{\mu}(A).$$

Sea $B \in \mathfrak{F} \subset Pot(X)$ con $\mu^*(B) < +\infty$. Entonces de acuerdo a la Proposición 2.1.14 existe $A \in \mathfrak{U}_\sigma$ tal que $B \subseteq A$ y $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.

De donde

$$\widetilde{\mu}(B) \leq \widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

como ε es arbitrario

$$\widetilde{\mu}(B) \leq \mu^*(B),$$

$B \in \mathfrak{F}$.

Notemos que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ y

$$\widetilde{\mu}(B) \leq \mu^*(B) = \overline{\mu}(B).$$

Como $B \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ (B es medible)

$$\mu^*(B' \cap A) = \mu^*(B) + \mu^*(A - B)$$

se tiene que

$$\mu^*(A - B) = \mu^*(A) - \mu^*(B).$$

Así

$$\mu^*(A - B) = \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \varepsilon.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(A) = \widetilde{\mu}(A) \\ &= \widetilde{\mu}(B) + \widetilde{\mu}(A - B) \\ &\leq \widetilde{\mu}(B) + \varepsilon \end{aligned}$$

y como ε es arbitrario
$$\mu^*(B) \leq \widetilde{\mu}(B),$$
$B \in \mathfrak{F}$. Entonces
$$\widetilde{\mu}(B) = \mu^*(B) = \overline{\mu}(B),$$
$B \in \mathfrak{F}$, con $\mu^*(B) < +\infty$.

Ahora usemos la información de que μ es σ-finita entonces existen $X_i \subset \mathfrak{U}$ ajenos, con $\mu(X_i) < +\infty$ y $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Sea $B \in \mathfrak{F}$, se sigue que
$$\widetilde{\mu}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(B \cap X_i)$$
y
$$\overline{\mu}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(B \cap X_i).$$

Por lo tanto, de acuerdo al caso anteriormente probado,
$$\widetilde{\mu}(B) = \overline{\mu}(B).$$

■

Capítulo 3

Medida Producto: Caso Finito

3.1. Espacios Producto

Supóngase que $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, \mu_i)$ son espacios de medida $i = 1, 2, .., n$. Sea $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, queremos encontrar una σ-álgebra $\mathfrak{F}$ y una medida μ, definidas en Ω.

Considérese el caso en que $n = 2$. Sea $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ un espacio de medida. Se realiza el siguiente experimento: seleccionar un elemento $\omega_1 \in \Omega_1$. Se busca caracterizar la ocurrencia de que $\omega_1 \in A \in \mathfrak{F}_1$. Supóngase que se eligió un $\omega_1 \in A$ y se repite nuevamente el experimento en un espacio medible $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$. En este último caso estamos interesados en la ocurrencia de que el punto seleccionado se encuentre en $B \in \mathfrak{F}_2$. Si $\widehat{\mu}(\cdot, \omega_1)$ es una medida en $\mathfrak{F}_2$ condicionada a que $\omega_1 \in A$ entonces

$$\begin{aligned} \mu\left(\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in A, \omega_2 \in B\}\right) &= \mu(A \times B) \\ &= \int_A \widehat{\mu}(B, \omega_1)\mu_1(d\omega_1). \end{aligned}$$

El experimento anterior presenta una posibilidad para definir a la medida producto. En lo subsecuente se formalizará esta idea.

Definición 3.1.1 *Sean* $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ *espacios medibles. Defínase*

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \\ &= \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i,\ i = 1, 2, ..., n\}. \end{aligned}$$

Para $A_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, se define el rectángulo medible, como

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Sea $\mathcal{C} = \{A : A$ es rectángulo medible$\}$. La σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ será llamada la σ-álgebra producto, dicha σ-álgebra se denota por $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_n$. Cuando $\mathfrak{F}_i = \mathcal{L}$, para todo $i = 1, 2, ..., n$ entonces denotamos a la σ-álgebra por $\mathcal{L}^n$.

De esta manera inducimos un espacio medible $(\Omega, \mathfrak{F})$ a partir de los espacios medibles $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observación 3.1.2 *Considérese la pareja $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ $i = 1, 2, .., n$. En el ejemplo A.0.15 (3) del Apéndice A se define a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ como la generada por todos los hipercubos en $\mathbb{R}^n$. En cambio ahora en la definición 3.1.1 se define la σ-álgebra de $\mathbb{R}^n$ como la generada por los rectángulos medibles. Ambas definiciones son equivalentes, para una prueba de ello se considerará el Lema A.0.17 del Apéndice A. Dicha afirmación se basa en la siguiente identidad $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Veamos que el resultado es cierto para $n = 2$. Como $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, es suficiente demostrar que para cada rectángulo medible $B_1 \times B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$. Sea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$, donde $\mathbb{R}_1$ y $\mathbb{R}_2$ son la primera y segunda recta real, respectivamente. Sea $\widetilde{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}_1 \times \mathbb{R}_2$ y $\widetilde{\mathfrak{B}}_2 = \mathbb{R}_1 \times \mathfrak{B}_2$ donde $\mathfrak{B}_1 \times \mathbb{R}_2$ (ó $\mathbb{R}_1 \times \mathfrak{B}_2$) es una colección de conjuntos de la forma $B_1 \times \mathbb{R}_2$ (ó $\mathbb{R}_1 \times B_2$) con $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ (ó $B_2 \in \mathfrak{B}_2$). También sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ los conjuntos de intervalos en $\mathbb{R}_1$ y $\mathbb{R}_2$ con $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 = \mathfrak{L}_1 \times \mathbb{R}_2$, $\widetilde{\mathfrak{L}}_2 = \mathbb{R}_1 \times \mathfrak{L}_2$. Entonces por (A.2),*

$$B_1 \times B_2 = \widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2 \in \widetilde{\mathfrak{B}}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{B}}_2$$

como

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{B}}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{B}}_2 &= \sigma(\widetilde{\mathfrak{L}}_1) \cap \widetilde{B}_2 = \sigma(\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \cap \widetilde{B}_2) \subset \sigma(\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \cap \widetilde{\mathfrak{L}}_2) \\ &= \sigma(\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \times \widetilde{\mathfrak{L}}_2). \end{aligned}$$

Así se obtiene lo que se quería probar. Para demostrar el caso $n > 2$ se procede por inducción.

Teorema 3.1.3 *(Teorema de la Medida Producto)*
Sea $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ un espacio de medida σ-finito. Suponga también que $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ es un espacio medible y que para cada $\omega_1 \in \Omega_1$ definimos una medida $\mu(\cdot, \omega_1)$

en $\mathfrak{F}_2$, σ-finita tal que para cada $B \in \mathfrak{F}_2$, $\mu(\cdot, B)$ es Borel medible. Entonces existe una única medida $\widehat{\mu}$ en $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ tal que para cada $F \in \mathfrak{F}$

$$\widehat{\mu}(F) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F(\omega_1))\mu_1(d\omega_1)$$

donde $F(\omega_1) = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in F\}$. En particular, si $F = A \times B$ con $A \in \mathfrak{F}_1$ y $B \in \mathfrak{F}_2$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(A \times B) &= \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, (A \times B)(\omega_1))\mu_1(d\omega_1) \\ &= \int_A \mu(\omega_1, B)\mu_1(d\omega_1).\end{aligned}$$

Demostración. Supongamos primero que los espacios Ω_1 y Ω_2 son de medida finita.

La prueba está basada en las siguientes afirmaciones:

1. Si $C \in \mathfrak{F}$ entonces $C(\omega_1) \in \mathfrak{F}_2$ para cada $\omega_1 \in \Omega_1$.

   Sea $\mathcal{C} = \{C \in \mathfrak{F} : C(\omega_1) \in \mathfrak{F}_2\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra, ya que

   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)(\omega_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[C_n(\omega_1)] \text{ y } C_n'(\omega_1) = [C_n(\omega_1)]' \text{ para todo } n.$$

   Si $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$, entonces

   $$(A \times B)(\omega_1) = \begin{cases} B \text{ si } \omega_1 \in A \\ \emptyset \text{ si } \omega_1 \notin A \end{cases}.$$

   Así $\mathcal{C}$ contiene a todos los rectángulos medibles. Como $\mathfrak{F}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a los rectángulos medibles y ya que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra contenida en $\mathfrak{F}$, se concluye que $\mathcal{C} = \mathfrak{F}$.

2. Si $C \in \mathfrak{F}$ entonces $\mu(\omega_1, C(\omega_1))$ es Borel medible para cada $\omega_1 \in \Omega_1$.

   Sean $\omega_1 \in \Omega_1$ fijo y $\mathcal{C} = \{C \in \mathfrak{F} : \mu(\omega_1, C(\omega_1))$ es Borel medible en $\mathfrak{F}_1\}$. Inicialmente, nótese que los rectángulos medibles están contenidos en $\mathcal{C}$, ya que, si $C = A \times B$ con $A \in \mathfrak{F}_1$ y $B \in \mathfrak{F}_2$ entonces

   $$\mu(\omega_1, C(\omega_1)) = \begin{cases} \mu(\omega_1, B) & \text{si } \omega_1 \in A, \\ \mu(\omega_1, \emptyset) = 0 & \text{si } \omega_1 \notin A. \end{cases}$$

Así $\mu(\omega_1, C(\omega_1)) = \mu(\omega_1, B)I_A(\omega_1)$, la cual es una función Borel medible. Por lo tanto los rectángulos medibles pertenecen a $\mathcal{C}$.

Por otro lado, si $C_1, ..., C_n$ son rectángulos medibles disjuntos,

$$\mu(\omega_1, (\bigcup_{i=1}^{n} C_i)(\omega_1)) = \mu(\omega_1, \bigcup_{i=1}^{n} C_i(\omega_1)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\omega_1, C_i(\omega_1))$$

es una suma finita de funciones Borel medibles, y por lo tanto es Borel medible en ω_1. Así $\mathcal{C}$ contiene el álgebra de uniones disjuntas de rectángulos medibles. Además, $\mathcal{C}$ es una clase monótona, debido a que si $C_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, ...$, y $C_n \uparrow C$, entonces $C_n(\omega_1) \uparrow C(\omega_1)$. Por lo tanto, debido a la propiedad de la continuidad de la medida se tiene que $\mu(\omega_1, C_n(\omega_1)) \to \mu(\omega_1, C(\omega_1))$. Así $\mu(\omega_1, C(\omega_1))$ es límite de funciones medibles, i.e. es medible en $\mathfrak{F}_1$. Análogamente cuando $C_n \downarrow C$ se tiene la misma conclusión. Por lo tanto debido al Teorema A.0.24 (Apéndice A) se concluye que $\mathcal{C} = \mathfrak{F}$.

3. Sea

$$\widehat{\mu}(F) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F(\omega_1))\mu_1(d\omega_1),$$

$F \in \mathfrak{F}$. Nótese que la integral anterior se encuentra bien definida debido a la afirmación 2. Entonces $\widehat{\mu}$ es medible en $\mathfrak{F}$, y

$$\widehat{\mu}(A \times B) = \int_A \mu(\omega_1, B)\mu_1(d\omega_1)$$

para todo $A \in \mathfrak{F}_1, B \in \mathfrak{F}_2$.

Para probar está afirmación, sean $F_1, F_2, ...$ conjuntos disjuntos en $\mathfrak{F}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) &= \int_{\Omega_1} \mu\left(\omega_1, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\omega_1)\right)\mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\omega_1, F_n(\omega_1)\right)\mu_1(d\omega_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F_n(\omega_1))\mu_1(d\omega_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n),
\end{aligned}$$

la tercera igualdad es debida al Corolario B.0.39 (Apéndice B). De lo cual se tiene que $\widehat{\mu}$ es una medida. Ahora, sean $A \in \mathfrak{F}_1$ y $B \in \mathfrak{F}_2$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(A \times B) &= \int\limits_{\Omega_1} \mu(\omega_1, (A \times B)(\omega_1))\mu_1(d\omega_1) \\
&= \int\limits_{\Omega_1} \mu(\omega_1, B) I_A(\omega_1)\mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_A \mu(\omega_1, B)\mu_1(d\omega_1),
\end{aligned}$$

como se requería.

Supóngase que $\mu(\omega_1, \cdot)$ es uniformemente σ-finita. Sea $\Omega_2 = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde los B_n son conjuntos disjuntos en $\mathfrak{F}_2$ y $\mu(\omega_1, B_n) \leq k_n < \infty$ para todo $\omega_1 \in \Omega_1$. Si

$$\mu_n'(\omega_1, B) = \mu(\omega_1, B \cap B_n),$$

$B \in \mathfrak{F}_2$.

Entonces, la medida $\mu_n'(\omega_1, \cdot)$ es finita, y por la construcción anterior existe una medida μ_n' en $\mathfrak{F}$ tal que

$$\mu_n'(F) = \int_{\Omega_1} \mu_n'(\omega_1, F(\omega_1))\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F(\omega_1) \cap B_n)\mu_1(d\omega_1),$$

en particular,

$$\begin{aligned}
\mu_n'(A \times B) &= \int_A \mu_n'(\omega_1, B)\mu_1(d\omega_1) \\
&= \int_A \mu(\omega_1, B \cap B_n)\mu_1(d\omega_1).
\end{aligned}$$

Tomando $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n'$ se tiene la propiedad deseada.

Sólo resta probar que la medida $\widehat{\mu}$ es única. Para esto, sea λ otra medida en $\mathfrak{F}$ tal que

$$\lambda(A \times B) = \int_A \mu(\omega_1, B)\mu_1(d\omega_1)$$

para todo $A \in \mathfrak{F}_1$ y $B \in \mathfrak{F}_2$ entonces $\lambda = \mu$ en el álgebra $\mathfrak{F}_0$ de uniones disjuntas de rectángulos medibles. Ahora, como μ_1 es σ-finita en Ω_1, se tiene que $\Omega_1 = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$, donde $A_m \in \mathfrak{F}_1$ y $\mu(A_m) < \infty$. También $\mu_1(\omega_1, \cdot)$ es uniformemente σ-finita así $\Omega_2 = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ con $B_n \in \mathfrak{F}_2$ y $\mu(\omega_1, B_n) \leq k_n < \infty$ para todo $\omega_1 \in \Omega_1$. Entonces $\Omega_1 \times \Omega_2 = \cup_{m,n=1}^{\infty}(A_m \times B_n)$ y

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(A_m \times B_n) &= \int_{A_m} \mu(\omega_1, B_m)\mu_1(d\omega_1) \leq k_n \int_{A_m} d\mu_1(\omega_1) \\
&\leq k_n \mu_1(A_m) < +\infty.
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que $\widehat{\mu}$ es σ-finita en $\mathfrak{F}_0$, por lo tanto en $\mathfrak{F}$. Así $\lambda = \mu$ en $\mathfrak{F}$ debido al Teorema de extensión de Caratheodory. ■

Corolario 3.1.4 *(Teorema clásico de la medida producto)*
Sea $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, \mu_i)$ espacios medibles para $i = 1, 2$, con μ_i σ-finita en $\mathfrak{F}_i$. Si $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, para cada $F \in \mathfrak{F}$ la función dada por

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} \mu_2(F(\omega_1))d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(F(\omega_2))d\mu_2(\omega_2) \tag{3.1}$$

es la única medida en $\mathfrak{F}$ tal que $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ para todo $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$. Además,
(a) μ σ-finita en $\mathfrak{F}$.
(b) Si μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad entonces μ es una medida de probabilidad.
La medida μ es llamada el producto de μ_1 y μ_2 y se denota por $\mu = \mu_1 \times \mu_2$.

Demostración. La demostración de este resultado esta basada en el Teorema 3.1.3, para ello tómese $\mu(\omega_1, \cdot) = \mu_2$ para todo ω_1 y en este caso se tiene que

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} \mu_2(F(\omega_1))d\mu_1(\omega_1)$$

para $F \in \mathfrak{F}$. En particular si $F = A \times B$ con $A \in \mathfrak{F}_1$ y $B \in \mathfrak{F}_2$

$$\begin{aligned}
\mu(A \times B) &= \int_{\Omega_1} \mu_2((A \times B)(\omega_1))d\mu_1(\omega_1) \\
&= \int_A \mu_2(B(\omega_1))d\mu_1(\omega_1) \\
&= \mu_1(A)\mu_2(B).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad en (3.1) es obtenida intercambiando μ_1 y μ_2 en el razonamiento anteriormente dado. Cuando μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad se tiene que μ es una medida de probabilidad debido a que: $\mu(\Omega) = \mu_1(\Omega_1)\mu_2(\Omega_2) = 1$ ∎

Teorema 3.1.5 *(Teorema de Fubini)*

Suponga que las hipótesis del Teorema de la medida producto se cumplen y sea $f : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

(a) *Si f es no negativa entonces* $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)$ *existe y define una función Borel medible de* ω_1. *Además,*

$$\int_{\Omega} f d\widehat{\mu} = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2) \right) \mu_1(d\omega_1).$$

(b) *Si* $\int_{\Omega} f d\widehat{\mu}$ *existe entonces* $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)$ *existe para μ_1-casi donde quiera (μ_1-a.e.) y define una función Borel medible de* ω_1. *Además*

$$\int_{\Omega} f d\widehat{\mu} = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2) \right) \mu_1(d\omega_1).$$

Demostración. (a) Para demostrar este inciso nótese lo siguiente.

Para cada ω_1 fijo se tiene que $f(\omega_1, \cdot) : (\Omega_2, \mathfrak{F}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. En otras palabras, si f es conjuntamente medible (i.e. relativamente medible con respecto a la σ-álgebra $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$), es medible con respecto a $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ por separado. La afirmación anterior se debe a que, si $B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $\{\omega_2 : f(\omega_1, \omega_2) \in B\} = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in f^{-1}(B)\} = f^{-1}(B)(\omega_1) \in \mathfrak{F}_2$ por la parte (1) del Teorema 3.1.3. Así $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu(\omega_1, \omega_2)$ existe.

Para probar el resto del Teorema se procederá por etapas. Supóngase inicialmente para I_F, la función indicadora de un conjunto $F \in \mathfrak{F}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} I_F(\omega_1, \omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2) &= \int_{\Omega_2} I_{F(\omega_1)}(\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2) \\ &= \mu(\omega_1, F(\omega_1)), \end{aligned}$$

la cual es una función Borel medible en ω_1 por la parte (2) del Teorema 3.1.3, también

$$\begin{aligned}\int_\Omega I_F d\widehat{\mu} &= \widehat{\mu}(F) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F(\omega_1))\mu_1(d\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} I_F(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)\mu_1(d\omega_1).\end{aligned}$$

En caso de tener una función simple, i.e. $f = \sum_{i=1}^n x_i I_{F_i}$, con $x_i \in \mathbb{R}^+$ y F_i conjuntos disjuntos en $\mathfrak{F}$, se tiene que

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(\omega_1, F_i(\omega_1)),$$

es Borel medible en ω_1. Además, debido a lo que hemos probado para indicadoras se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\widehat{\mu} &= \sum_{i=1}^n x_i \int_\Omega I_{F_i} d\mu = \sum_{i=1}^n x_i \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} I_{F_i}(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)\mu_1(d\omega_1).\end{aligned}$$

Finalmente, si $f : (\Omega, \mathfrak{F}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$, es una función no negativa, considérese una sucesión de funciones simples tales que $0 \leq f_n \uparrow f$. Entonces

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,\omega_2) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,\omega_2)$$

la cual es Borel medible en ω_1, y usando el paso anterior junto con el teorema de convergencia monótona se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\widehat{\mu} &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\widehat{\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)\mu_1(d\omega_1).\end{aligned}$$

(b) Supóngase que $\int_\Omega f^- d\widehat{\mu} < \infty$. Por (a),

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f^-(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1, d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) = \int_\Omega f^- d\widehat{\mu} < \infty.$$

Así $\int_{\Omega_2} f^-(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,d\omega_2)$ es μ_1-integrable, por lo tanto finita μ_1-a.e.; de lo cual se tiene, para μ_1-a.e.

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,d\omega_2) = \int_{\Omega_2} f^+(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,d\omega_2) - \int_{\Omega_2} f^-(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,d\omega_2). \tag{3.2}$$

Nótese que si $\int_{\Omega} f d\widehat{\mu}$ es finita entonces ambas integrales del lado derecho de (3.2) son finitas. Si integramos (3.2) con respecto a μ_1, por (a) y el teorema de aditividad para integrales, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) &= \int_{\Omega} f^+ d\widehat{\mu} - \int_{\Omega} f^- d\widehat{\mu} \\ &= \int_{\Omega} f d\widehat{\mu}.\end{aligned}$$

■

Observación 3.1.6 *En el Teorema 3.1.5 la notación*

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu(\omega_1,d\omega_2)$$

indica que para un ω_1 fijo, la función dada por $g(\omega_2) = f(\omega_1,\omega_2)$ es integrable con respecto a la medida $\mu(\omega_1,\cdot)$.

Corolario 3.1.7 *Si $f : (\Omega,\mathfrak{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ y la integral iterada*

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} |f(\omega_1,\omega_2)|\, \mu(\omega_1,d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) < \infty,$$

entonces $\int_{\Omega} f d\widehat{\mu}$ es finita, y así el Teorema de Fubini es válido.

Como un caso especial, se obtiene el siguiente resultado clásico.

Teorema 3.1.8 *(Teorema clásico de Fubini)*

Sea $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ *y* $\mu := \mu_1 \times \mu_2$, μ_i *es una medida* σ*-finita en* $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. *Si* f *es una función Borel medible en* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *tal que* $\int_\Omega f d\mu$ *existe, entonces*

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f d\mu_2 d\mu_1 \\ &= \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f d\mu_2 d\mu_1.\end{aligned}$$

Demostración. El resultado de este teorema es una consecuencia del Teorema 3.1.5 con $\mu(\omega_1, \cdot) = \mu_2(\cdot)$ para todo ω_1. ■

Observación 3.1.9 *El Teorema 3.1.8 implica el teorema de la convergencia monótona. Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones monótonas crecientes que converge a* f, *el teorema de la convergencia monótona garantiza que*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu. \tag{3.3}$$

Definiendo $g_k = f_k - f_{k-1}$, $k > 1$ *y* $f_0 = 0$ *se tiene que la afirmación (3.3) es equivalente a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \int g_k d\mu &= \int \sum_{k=1}^{\infty} g_k d\mu, \\ \textstyle\iint g_k d\mu d\mu_2 &= \textstyle\iint g_k d\mu_2 d\mu\end{aligned}$$

la cual es válida debido al Teorema de Fubini, donde μ_1 *es la medida* μ *y* μ_2 *es la medida de conteo.*

A continuación se presenta una generalización del los Teoremas 3.1.3 y 3.1.5 para el caso de n espacios medibles.

Teorema 3.1.10 *Sea* $\mathfrak{F}_i$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω_i, $i = 1, 2, ..., n$. *Sea* μ_1 *una medida* σ*-finita en* $\mathfrak{F}_1$, *y para cada* $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_i$, *sea* $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \cdot)$ *una medida uniformemente* σ*-finita y suponga que* $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, C)$ *es una función medible en* $(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_i, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_i)$ *para cada* $C \in \mathfrak{F}_{i+1}$. *Sea* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ *y* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_n$, *entonces:*

(a) Existe una única medida $\widehat{\mu}$ *en* $\mathfrak{F}$ *tal que para cada rectángulo medible* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \in \mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \int_{A_1} \mu_1(d\omega_1) \int_{A_2} \mu(\omega_1, d\omega_2) \\ &\cdots \int_{A_{n-1}} \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}) \int_{A_n} \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, d\omega_n). \end{aligned}$$

La medida $\widehat{\mu}$ *es* σ*-finita en* $\mathfrak{F}$*, y es una medida de probabilidad si* μ_1 *y todas las* $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \cdot)$ *son medidas de probabilidad.*

(b) Sea $f : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$*,* $f \geq 0$ *entonces*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\widehat{\mu} &= \int_{\Omega_1} \mu_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} \mu(\omega_1, d\omega_2) \cdots \int_{\Omega_{n-1}} \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}) \\ & \int_{\Omega_n} f(\omega_1, ..., \omega_n) \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, d\omega_n), \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde, después de haber integrado con respecto a $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \cdot)$ $(i = n - 1, n-2, ..., 1)$*, la cual es una función Borel medible de* $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$.

Si $\int_{\Omega} f d\widehat{\mu}$ *existe, la ecuación (3.4) se satisface en el sentido de que para cada* $i = n-1, n-2, ..., 1$ *la integral con respecto a* $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \cdot)$ *existe, excepto para* $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$ *en un conjunto de* λ_i*-a.e., donde* λ_i *es la medida determinada por* μ_1 *y la medida* $\mu(\omega_1, \cdot), ..., \mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-1}, \cdot)$.

Demostración. Por los Teoremas 3.1.3 y 3.1.5 el resultado es válido para $n = 2$. Supongamos que los incisos (a) y (b) de este Teorema son válidos para $n-1$, demostraremos para el caso n-dimensional. Por hipótesis de inducción, existe una única medida λ_{n-1} en $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{n-1}$ tal que para cada $A_1 \in \mathfrak{F}_1, ..., A_{n-1} \in \mathfrak{F}_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) &= \int_{A_1} \mu_1(d\omega_1) \int_{A_2} \mu(\omega_1, d\omega_2) \\ &\cdots \int_{A_{n-1}} \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}), \end{aligned}$$

y λ_{n-1} es σ-finito. Por el caso $n = 2$, existe una única medida $\widehat{\mu}$ en $(\mathfrak{F}_1 \times$

$\mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{n-1}) \times \mathfrak{F}_n$ tal que para cada $A \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{n-1}$, $A_n \in \mathfrak{F}_n$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(A \times A_n) &= \int_A \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, A_n) d\lambda_{n-1}(\omega_1, ..., \omega_{n-1}) \qquad (3.5) \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_{n-1}} I_A(\omega_1, ..., \omega_{n-1}) \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, A_n) \\ &\quad d\lambda_{n-1}(\omega_1, ..., \omega_{n-1}). \end{aligned}$$

Si A es un rectángulo medible $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$, entonces $I_A(\omega_1, ..., \omega_{n-1}) = I_{A_1}(\omega_1) \cdots I_{A_{n-1}}(\omega_{n-1})$. Así (3.5) se cumple, usando la de hipótesis de inducción de inciso (b), se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \int_{A_1} \mu_1(d\omega_1) \\ &\quad \cdots \int_{A_{n-1}} \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, A_n) \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}). \end{aligned}$$

De lo anterior se prueba la existencia de la medida $\widehat{\mu}$ en $\mathfrak{F}$. Para probar la unicidad de $\widehat{\mu}$ se probará que $\widehat{\mu}$ es σ-finita en $\mathfrak{F}_0$, donde $\mathfrak{F}_0$ es el álgebra de uniones finitas disjuntas de rectángulos medibles. Sea $\Omega_i = \cup_{r=1}^{\infty} A_{ir}$, $i = 1, 2, .., n$ donde $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-1}, A_{ir}) \leq k_{ir} < \infty$ para todo $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-1}$, $i = 2, ..., n$ y $\mu_1(A_{1r}) = k_{1r} < \infty$. Entonces

$$\Omega = \bigcup_{i_1, ..., i_n = 1}^{\infty} (A_{1i_1} \times A_{2i_2} \times \cdots \times A_{ni_n})$$

con

$$\widehat{\mu}(A_{1i_1} \times A_{2i_2} \times \cdots \times A_{ni_n}) \leq k_{1i_1} k_{2i_2} \cdots k_{ni_n} < \infty.$$

Lo anterior prueba (a).

Para probar (b), note que la construcción de la medida $\widehat{\mu}$ en (a) es determinada por λ_{n-1} y la medida $\mu(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-1}, \cdot)$. Así por el caso $n = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\widehat{\mu} &= \int_{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1}} \int_{\Omega_n} f(\omega_1, ..., \omega_n) \mu(\omega_1, ..., \omega_{n-1}, d\omega_n) \\ &\quad d\lambda_{n-1}(\omega_1, ..., \omega_{n-1}) \end{aligned}$$

donde la integral interior es Borel medible en $(\omega_1, ..., \omega_{n-1})$. El resultado deseado se sigue de la hipótesis de inducción. ■

Los resultados anteriores nos dan una forma de encontrar la medida producto para el caso cuando se tienen un número finito de espacios de medida. En la siguiente sección daremos algunos ejemplos de cómo utilizar estos resultados en el caso de medidas de probabilidad y ver la utilidad que tienen en las aplicaciones.

3.2. Ejemplos

3.2.1. Ejemplos clásicos en probabilidad

Ejemplo 3.2.1 *Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0, 1. Considérese el siguiente experimento: si $X = x$, $x \in (0,1)$, una moneda con probabilidad x de cara se lanza n veces de forma independiente. Un problema interesante en este experimento consiste en determinar el número resultante de caras. Sea Y la variable que cuenta este número de caras, se requiere determinar la distribución de Y (i.e. $P\{Y = k\}$, $k = 0, 1, ..., n$.).*

Para resolver este problema sea $\Omega_1 = [0,1]$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{B}[0,1]$ y

$$P_x(A) = \int_A dx = \text{la medida de Lebesgue de A},$$

para $A \in \mathfrak{F}_1$.

Para el segundo espacio considérese $\Omega_2 = \{0, 1, ..., n\}$, $\mathfrak{F}_2 = Pot(\Omega_2)$ y

$$p(x, \{k\}) = \binom{n}{x} x^k (1-x)^{n-k}$$

donde $k = 0, 1, ..., n$.

En este caso el espacio producto se encuentra dado por: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, y P la única medida determinada por P_x y la $P(x, \cdot)$ inducida por el Teorema 3.1.3, la cual satisface

$$P(C) = \int_0^1 P(x, C(x)) dP_x(x) = \int_0^1 P(x, C(x)) dx,$$

donde $C(x) = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in C\}$.

La relación anterior permitirá determinar la distribución de Y, para ello considérese las proyecciones $X(x,y)=x$ y $Y(x,y)=y$. Entonces

$$\begin{aligned}\Pr\{Y=k\} &= P(\Omega_1\times\{k\}) = \int_0^1 P(x,\{k\})dx \\ &= \int_0^1 \binom{n}{x} x^k(1-x)^{n-k}dx = \binom{n}{x}\beta(k+1,n-k+1),\end{aligned}$$

donde $\beta(r,s)=\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx$, $r,s>0$, es la función de densidad Beta con parámetros r y s. En particular, se tiene que

$$\beta(r,s)=\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

En este caso $\Gamma(r)=\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $r>0$, es la función gamma, como $\Gamma(n+1)=n!$, $n=0,1,...$, se llega a que

$$p\{Y=k\}=\frac{\binom{n}{k}k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

con $k=0,1,...,n$.

Ejemplo 3.2.2 *Sea X_1 una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0, 1. Considere el siguiente experimento: Seleccionar un número $x_1\in(0,1)$, i.e, $X_1=x_1$, sea X_2 una distribución uniforme entre 0 y x_1. Otra vez se selecciona de forma aleatoria un número $x_2\in(0,x_1)$, i.e, $X_2=x_2$. En general, si $X_1=x_1,...,X_k=x_k$, sea X_{k+1} una distribución uniforme entre 0 y x_k, $k=1,...,n-1$. En este problema estamos interesados en analizar el comportamiento del proceso $\{X_k,\ k=1,..,n\}$. Al igual que en el ejemplo anterior inicialmente se determinara el espacio de probabilidad de este experimento aleatorio.*

Sean $\Omega_j=\mathbb{R}$ y $\mathfrak{F}_j=\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $j=1,2,...,n$. Defínase P_1 =medida de Lebesgue en $(0,1)$ para cada $x_1\in(0,1)$ y $B\in\mathfrak{F}_2$

$$P(x_1,B)=\frac{1}{x_1}\int_{B\cap(0,x_1)}dx_2.$$

En general, para cada $x_1, ..., x_k \in (0,1)$, $k = 1, ..., n-1$ y $B \in \mathfrak{F}_k$

$$P(x_1, ..., x_k, B) = \frac{1}{x_k} \int_{B \cap (0, x_k)} dx_{k+1}.$$

En este caso el espacio producto esta dado por: $\Omega = \prod_{j=1}^{n} \Omega_j$, $\mathfrak{F} = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{F}_j$ y P la única medida en $\mathfrak{F}$ determinada por P_1 y por las medidas de probabilidad $P(x_1, ..., x_k, \cdot)$. La cual está dada por

$$P(F) = \int_{\Omega_1} P_1(dx_1) \int_{\Omega_2} P(x_1, dx_2) \cdots \int_{\Omega_n} I_F(x_1, ..., x_n) P(x_1, ..., x_{n-1}, dx_n)$$

para cada $F \in \mathfrak{F}$.

Ahora, usando el Teorema de Fubini se tiene que para una función Borel medible $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega} g dP = \int_{\Omega_1} P_1(dx_1) \int_{\Omega_2} \mu(x_1, dx_2) \cdots \int_{\Omega_n} g(x_1, ..., x_n) \mu(x_1, ..., x_{n-1}, dx_n)$$

en este caso tomando $g(x_1, ..., x_n) = X_n(x_1, ..., x_n) = x_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} \frac{1}{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} \frac{x_n}{x_{n-1}} dx_n \\ &= \int_0^1 \frac{x_1}{2^{n-1}} dx_1 = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3 *Sea X una variable aleatoria discreta, tomando valores enteros positivos 1,2,... con probabilidades $p_1, p_2, ...$ (i.e. $p_i = P(X = i)$ para $i = 1, 2, ...$). Considérese el siguiente experimento, si $X = n$, un número no negativo Y es seleccionado de acuerdo con una función de densidad f_n.*

En este caso el espacio de probabilidad esta dado por $\Omega_1 = \{0, 1, ...\}$, $\mathfrak{F}_1 = Pot(\Omega_1)$, $P_1(k) = p_k \quad k = 1, 2, ...$ y el espacio inducido por este, esta dado por $\Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$P(n, B) = \int_B f_n(x) dx$$

El espacio producto inducido es el siguiente: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ y

$$\begin{aligned} P(F) &= \int_{\Omega_1} P(\omega_1, F(\omega_1)) P_1(\omega_1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(n, F(n)) p_n, \end{aligned}$$

$F \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

En particular, si $F = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq 3\}$ entonces $F(n) = \{\omega_2 : 1 - n \leq \omega_2 \leq 3 - n\}$. Sea $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$, $Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$

$$\begin{aligned} P(F) &= P\{1 \leq X + Y \leq 3\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_{1-n}^{3-n} f_n(x) dx \\ &= p_1 \int_0^2 f_1(x) dx + p_2 \int_0^1 f_2(x) dx \end{aligned}$$

ya que $f_n(x) = 0$ para $x < 0$.

3.2.2. Ejemplo de Jerarquías

Ejemplo 3.2.4 *Supóngase que un mosquito pone un cierto número de huevos. Un problema interesante es calcular en promedio cuántos huevos sobreviven.*

El análisis del problema anterior se puede trabajar considerando los casos siguientes.

Caso 1. Construyamos los siguientes espacios de probabilidad. Sea $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = Pot(\Omega_1) = Pot(\Omega_2)$,

$$P_0(A) = \sum_{y \in A} \frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!},$$

$A \in \mathfrak{F}_1$, $\lambda > 0$ y

$$P_1(y, B) = \sum_{x \in B} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x}$$

para cada $B \in \mathfrak{F}_2$, $y \in \Omega_1$. Los parámetros $\lambda > 0$ y $p \in (0, 1)$ representan el número promedio de huevos que pone el mosquito y la probabilidad de sobrevivencia de un huevo, respectivamente.

En particular, si $B = \{x\} \subset \Omega_2$ se tiene que

$$P_1(y, \{x\}) = \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x},$$

para $y \in \Omega_1$. En este caso se esta suponiendo que si $y < x$, $P_1(y, \{x\}) = 0$.

Usando el Teorema de la medida producto es posible construir el siguiente espacio de probabilidad, sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = Pot(\Omega_1 \times \Omega_2)$ y la medida de probabilidad dada por

$$P(F) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} P_1(\omega_1, F(\omega_1)) P_0(\{\omega_1\}),$$

para todo $F \in \mathfrak{F}$ y $F(\omega_1) = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in F\}$. En particular, si $F = A \times B$ se tiene que

$$P(F) = \sum_{\omega_1 \in A} P_1(\omega_1, B) P_0(\{\omega_1\}).$$

También consideremos las variables $Y : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_1$ y $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2$, donde $Y(y, x) = y$ y $X(y, x) = x$. En este caso Y tiene una distribución Poisson con parámetro λ y la variable X es una v.a. condicionada la cual se puede representar por $Z \mid Y$, dicha variable tiene una distribución Binomial con parámetros (Y, p). La v.a Z representa el número de huevos que sobreviven, su distribución se puede calcular de la siguiente manera, para $z \in \{0, 1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= P(\Omega_1 \times \{z\}) = \sum_{y=z}^{\infty} P_1(y, \{z\}) P_0(\{y\}) \\
&= \left[\sum_{y=z}^{\infty} \binom{y}{z} p^z (1-p)^{y-z} \right] \left[\frac{\exp(-\lambda)\lambda^y}{y!} \right] \\
&= \exp(-\lambda) p^z \sum_{y=z}^{\infty} \frac{\lambda^y y! (1-p)^{y-z}}{y!(y-z)!z!} \\
&= \frac{\exp(-\lambda) p^z}{z!} \sum_{y=z}^{\infty} \frac{\lambda^y (1-p)^{y-z} \lambda^z}{(y-z)! \lambda^z} \\
&= \frac{\exp(-\lambda)(\lambda p)^z}{z!} \sum_{y=z}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{y-z}}{(y-z)!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\lambda p)^z \exp(-\lambda p)}{z!}.$$

De lo cual se concluye que Z tiene una distribución Poisson con parámetro λp. Entonces

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \sum_{z=0}^{\infty} zP(Z=z) \\
&= \sum_{z=1}^{\infty} z\frac{(\lambda p)^z \exp(-\lambda p)}{z!} \\
&= (\lambda p)\exp(-\lambda p)\sum_{z=1}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{z-1}}{(z-1)!} \\
&= (\lambda p)\exp(-\lambda p)\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{t}}{t!} \text{ (donde } t = z-1) \\
&= \lambda p
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número promedio de huevos que sobreviven es λp.

Caso 2. Ahora supondremos que el promedio de huevos que pone un mosquito es una cantidad aleatoria. Para el análisis de este caso, sean $\Omega_1 = [0,\infty)$, $\Omega_2 = \Omega_3 = \{0,1,2,...\}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \cap [0,\infty)$, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = Pot(\Omega_2) = Pot(\Omega_3)$,

$$P_0(A) = \int I_A(x)dF(x)$$

para cada $A \in \mathfrak{F}_1$, donde

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta}\exp(-\frac{t}{\beta})dt,$$

$x \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ parámetro. Luego, para cada $B \in \mathfrak{F}_2$, $C \in \mathfrak{F}_3$, $x \in \Omega_1$ y $y \in \Omega_2$ defínase

$$\begin{aligned}
P_1(x,B) &= \sum_{y\in B}\frac{\exp(-x)x^y}{y!} \\
P_2(y,C) &= \sum_{z\in C}\binom{y}{z}p^z(1-p)^{y-z}.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de la medida producto podemos construir el siguiente espacio $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3$ y la medida de probabilidad dada por

$$P(F) = \int \sum_{y \in B} \sum_{z \in C} \binom{y}{z} p^z (1-p)^{y-z} \frac{\exp(-x)x^y}{y!} I_A(x) dG(x),$$

para todo $F \in \mathfrak{F}$ con $F = A \times B \times C$.

También consideremos las variables $U : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \to \Omega_1$, $V : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \to \Omega_2$ y $W : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \to \Omega_3$ donde $U(x, y, z) = x$, $V(x, y, z) = y$ y $W(x, y, z) = z$. En este caso W tiene una distribución Exponencial con parámetro β, la variable V es una v.a. condicionada la cual se puede representar por $Z \mid W$ con distribución Poisson de parámetro W y la variable U es una v.a condicionada $L \mid V$ la cual tiene una distribución Binomial con parámetro (V, p). La variable W es el promedio de huevos que pone el mosquito, la variable V representa el número de huevos que pone el mosquito condicionada a una ocurrencia de la variable W y la variable U es usada para modelar el número de huevos que sobreviven bajo la condición de que se ha observado una realización de la variable V. Las distribuciones de las variables Z y L se pueden calcular de la forma siguiente:

Para $z \in \{0, 1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned}
P(Z &= z) = P(\Omega_1 \times \{z\}) \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{\exp(-x)x^z}{z!} \right] \left[\frac{1}{\beta} \exp(-\frac{x}{\beta}) \right] dx \\
&= \frac{1}{\beta z!} \int_0^\infty x^z \exp\left[-x(1-\beta^{-1})\right] dx \\
&= \frac{1}{\beta z!} \Gamma(z+1) \left(\frac{1}{1+\beta^{-1}} \right)^{z+1} \\
&= \left(\frac{1}{1+\beta} \right) \left(1 - \frac{1}{1+\beta} \right)^z,
\end{aligned}$$

de lo cual se tiene que Z tiene una distribución Binomial Negativa con parámetro $(1, 1/(1+\beta))$. Análogamente se puede hacer el cálculo de la distribución de la v.a L, sea $l \in \{0, 1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned}
P\left(L=l\right) &= P(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \{l\}) \\
&= \int \sum_{y \in \Omega_2} P_2(y, \{l\}) P_1(x, \{y\}) dP_0(x) \\
&= \int_0^\infty \sum_{y \in \Omega_2} \binom{y}{l} p^l (1-p)^{y-l} \frac{\exp(-x) x^y}{y!} dG(x) \\
&= \sum_{y \in \Omega_2} \binom{y}{l} p^l (1-p)^{y-l} \int_0^\infty \left[\frac{\exp(-x) x^y}{y!}\right] \left[\frac{1}{\beta} \exp(-\frac{x}{\beta})\right] dx \\
&= \left[\sum_{y \in \Omega_2} \binom{y}{l} p^l (1-p)^{y-l}\right] \left(\frac{1}{1+\beta}\right) \left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right)^y \\
&= \frac{p^l (1-p)^{-l}}{1+\beta} \sum_{y=l}^\infty \binom{y}{l} (1-p)^y \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^y \\
&= \frac{p^l (1-p)^{-l}}{1+\beta} \sum_{y=l}^\infty \binom{y}{l} \left(\frac{(1-p)\beta}{1+\beta}\right)^y \\
&= \frac{p^l (1-p)^{-l}}{1+\beta} \cdot \frac{(1+\beta)\left(-\frac{\beta(p-1)}{1+\beta}\right)^l \left(\frac{1+\beta p}{1+\beta}\right)^{-l} \Gamma(l+1)}{(1+\beta p) l!} \\
&= \frac{p^l (1-p)^{-l} \beta^l (1-p)^l (1+\beta p)^{-l}}{1+\beta p} \\
&= (p\beta)^l (1+\beta p)^{-(l+1)} \\
&= \left(\frac{p\beta}{1+\beta p}\right)^l \left(\frac{1}{1+\beta p}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\beta p}\right) \left(1 - \frac{1}{1+\beta p}\right)^l.
\end{aligned}$$

Entonces L tiene una distribución Binomial Negativa con parámetro $(1, 1/(1+\beta p))$. Por lo tanto el número promedio de huevos que sobreviven es

$$E[L] = \frac{1 - \frac{1}{1+\beta p}}{\frac{1}{1+\beta p}} = \frac{\frac{1+\beta p - 1}{1+\beta p}}{\frac{1}{1+\beta p}} = \beta p$$

3.2.3. Muestreo con sustitución y muestreo sin sustitución

Muestreo con sustitución

Supóngase que tenemos n objetos en una caja y se realiza el siguiente experimento: se extrae un objeto de la caja, y se devuelve nuevamente a la caja. Este experimento se puede modelar utilizando la medida producto, para ello supongamos que los elementos que conforman la caja son $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Notación: $\#A$ denotará el número de elementos del conjunto A.

El experimento se realiza de la siguiente forma,

Etapa 1. Se extrae un elemento a_{i_1} con $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de la caja. Sea $\Omega_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (i.e $\#\Omega_1 = n$) y $\mathfrak{F}_1 = Pot(\Omega_1)$. Para cada $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ definimos

$$P(A_1) = \frac{\#A_1}{n}.$$

Etapa 2. Se extrae otro elemento a_{i_2} con $i_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de la caja. Ahora, $\Omega_2 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (i.e. $\#\Omega_2 = n$) y $\mathfrak{F}_2 = Pot(\Omega_2)$. Para cada $x_1 \in \Omega_1$ fijo y $A_2 \in \mathfrak{F}_2$

$$P_1(x_1, A_2) = \frac{\#A_2}{n},$$

continuando de esta manera,

Etapa t. Se extrae un elemento a_{i_t} con $i_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de la caja, donde $t \leq n$. De la misma forma que en las etapas anteriores tenemos que $\Omega_t = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (i.e. $\#\Omega_t = n$) y $\mathfrak{F}_t = Pot(\Omega_t)$. Para cada $(x_1, ..., x_{t-1}) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{t-1}$ y $A_t \in \mathfrak{F}_t$.

$$P_1(x_1, ..., x_{t-1}, A_t) = \frac{\#A_t}{n},$$

Ahora, denotemos por $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_n$. Así para cada $F \in \mathfrak{F}$ rectángulo medible ($F = A_1 \times \cdots \times A_n$) la única medida de probabilidad está dada por

$$P(F) = \frac{\#A_1}{n} \cdot \frac{\#A_2}{n} \cdots \frac{\#A_{n-1}}{n} \cdot \frac{\#A_n}{n}.$$

Por lo tanto, para cada $F \in \mathfrak{F}$ rectángulo medible

$$P(F) = \frac{\#A_1 \cdot \#A_2 \cdots \#A_n}{n^n}.$$

Muestreo sin sustitución

Supóngase que tenemos n objetos en una caja y que queremos extraer un objeto sin devolverlo a dicha caja. Este experimento se puede modelar utilizando la medida producto, para ello supongamos que los elementos que conforman la caja son $\{a_1, \dots, a_n\}$

Etapa 1. Se extrae un elemento a_{i_1} con $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ de la caja. Sea $\Omega_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ (i.e $\#\Omega_1 = n$) y $\mathfrak{F}_1 = Pot(\Omega_1)$. Para cada $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, sea

$$P(A_1) = \frac{\#A_1}{n}.$$

Etapa 2. Se extrae otro elemento a_{i_2} con $i_2 \in \{1, 2, \dots, n\} \diagdown \{i_1\}$ de la caja. Ahora, $\Omega_2 = \{a_1, \dots, a_n\} \diagdown \{a_{i_1}\}$ (i.e. $\#\Omega_2 = n - 1$) y $\mathfrak{F}_2 = Pot(\Omega_2)$. Para cada $x_1 \in \Omega_1$ fijo y $A_2 \in \mathfrak{F}_2$

$$P_1(x_1, A_2) = \frac{\#A_2}{(n-1)},$$

continuando de esta manera,

Etapa t. Se extrae un elemento a_{i_t} con $i_t \in \{1, 2, \dots, n\} \diagdown \{i_1, \dots i_{t-1}\}$ de la caja, donde $t \leq n$. De la misma forma que en las etapas anteriores tenemos que $\Omega_t = \{a_1, \dots, a_n\} \diagdown \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{t-1}}\}$ (i.e. $\#\Omega_n = n - t + 1$) y $\mathfrak{F}_t = Pot(\Omega_t)$. Para cada $(x_1, ..., x_{t-1}) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{t-1}$ y $A_t \in \mathfrak{F}_t$.

$$P_1(x_1, ..., x_{t-1}, A_t) = \frac{\#A_t}{n - t + 1},$$

Ahora, denotemos por $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_t$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_t$. Así para cada $F \in \mathfrak{F}$ rectángulo medible ($F = A_1 \times \cdots \times A_t$) la única medida de probabilidad está dada por

$$P(F) = \frac{\#A_1}{n} \cdot \frac{\#A_2}{(n-1)} \cdots \frac{\#A_t}{n - t + 1}.$$

Capítulo 4

Medida Producto: Caso Numerable

4.1. Teorema de Ionescu Tulcea

Definición 4.1.1 *Sean* $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *espacios medibles y defínase* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots$. *Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, *defínase el cilindro* B_n *con base* B^n *como*

$$B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in B^n\}.$$

El cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i$. *En particular, si* $B^n = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *con* $A_i \subset \Omega_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$, *es llamado rectángulo, y si para cada* i, $A_i \in \mathfrak{F}_i$ *entonces* B^n *es llamado rectángulo medible.*

Un cilindro con base n-dimensional, siempre puede ser visto como una base de dimensión superior. Por ejemplo, si

$$B = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in B^3\},$$

entonces

$$\begin{aligned} B &= \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in B^3, \omega_4 \in \Omega_4\} \\ &= \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in B^3 \times \Omega_4\}. \end{aligned}$$

De esto se sigue que los cilindros medibles forman un álgebra. Además, también es cierto que la unión finita de rectángulos medibles forman un álgebra.

La mínima σ-álgebra que contiene los cilindros medibles es llamada σ-álgebra producto, la cual será denotada por $\prod_{i=1}^{\infty}\mathfrak{F}_i$. En particular, si toda $\mathfrak{F}_i$ coincide con la σ-álgebra $\mathfrak{F}$, entonces $\prod_{i=1}^{\infty}\mathfrak{F}_i$ es denotado por $\mathfrak{F}^{\infty}$.

Teorema 4.1.2 *(Teorema de Ionescu Tulcea) Sean $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles arbitrarios. Sean $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ y $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^{\infty}\mathfrak{F}_i$. Supóngase que P_1 es una medida de probabilidad definida en $\mathfrak{F}_1$, y para cada $(\omega_1, \ldots, \omega_i) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_i$ con $i = 1, 2, \ldots$ se define otra de probabilidad $P(\omega_1, \ldots, \omega_i, \cdot)$ en $\mathfrak{F}_{i+1}$, tal que para cada $C \in \mathfrak{F}_{i+1}$, $P(\omega_1, \ldots, \omega_i, C)$ una función medible de $\left(\prod_{j=1}^{i}\Omega_j, \prod_{j=1}^{i}\mathfrak{F}_j\right)$ en $\mathbb{R}$.*

Si $B^n \in \prod_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i$, defínase

$$
\begin{aligned}
P_n(B^n) &= \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1)\int_{\Omega_2} P(\omega_1, d\omega_2)\ldots\int_{\Omega_{n-1}} P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}) \\
&\quad \int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n).
\end{aligned}
$$

Entonces existe una única medida de probabilidad P en $\mathfrak{F}$ tal que

$$P\left\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\} = P_n(B^n)$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$ y $B^n \in \prod_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i$.

Demostración. Primero veamos que P_n es una medida de probabilidad.

$$
\begin{aligned}
& P_n(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n) \\
=& \int_{\Omega_1}\cdots\int_{\Omega_n} I_{\Omega_n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) P_1(\omega_1) P(\omega_1, d\omega_2)\cdots P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n) \\
=& \; 1.
\end{aligned}
$$

Sea $\{A_i^n\} \subset \prod_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i$, entonces

$$
\begin{aligned}
P_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^n\right) &= \int_{\Omega_n}\cdots\int_{\Omega_1} I_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^n} P_1(\omega_1) P(\omega_1, d\omega_2)\cdots P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega_n}\cdots\int_{\Omega_1} I_{A_i^n} P_1(\omega_1) P(\omega_1, d\omega_2)\cdots P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_n\left(A_i^n\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto P_n es una medida de probabilidad.

Ahora, sea $B^n \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i$, entonces $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$ es un cilindro medible. Defínase $P(B_n) = P_n(B^n)$, $n \geq 1$. Inicialmente se probará que P está bien definida sobre los cilindros medibles, i.e. que el representante de la base no influye en la definición. Para ello, supóngase que B_n puede ser también expresado como $\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in C^m\}$ donde $C^m \in \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{F}_i$. Se debe probar que $P_n(B^n) = P_m(C^m)$. Supóngase que $m < n$, entonces $(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in C^m$ si y sólo si $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in C^n$, por lo tanto $B^n = C^m \times \Omega_{m+1} \times \cdots \times \Omega_n$. Así de la definición de P_n y usando que es una medida de probabilidad se obtiene que $P_n(B^n) = P_m(C^m)$.

Como P_n es una medida en $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i$, entonces P es finitamente aditiva en el álgebra $\mathfrak{F}_0$ de cilindros medibles. Ahora, si demostramos que P es continua por arriba en el conjunto vacío el Teorema A.0.23(b) (véase Apéndice A) implica que P es numerablemente aditiva en $\mathfrak{F}_0$, y usando el Teorema de extensión de Carathéodory P se extiende a una medida de probabilidad en $\prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$; por construcción, P coincide con P_n en un cilindro n-dimensional.

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cilindros medibles tal que $B_n \downarrow \emptyset$. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} P(B_n) > 0$. Entonces para cada $n > 1$,

$$P(B_n) = \int_{\Omega_1} g_n^{(1)}(\omega_1) P_1(d\omega_1),$$

donde

$$\begin{aligned} g_n^{(1)}(\omega_1) &= \int_{\Omega_2} P(\omega_1, d\omega_2) \ldots \int_{\Omega_{n-1}} P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}) \\ & \int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n). \end{aligned}$$

Como $B_{n+1} \subset B_n$ entonces $B_{n+1} = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) \in B^{n+1}\}$ con $B^{n+1} \in \prod_{i=1}^{n+1} \mathfrak{F}_i$. Así $B^{n+1} \subset B^n \times \Omega_{n+1}$. De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} I_{B^{n+1}}(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) &\leq I_{B^n \times \Omega_{n+1}}(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) \\ &\leq I_{B^n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \cdot I_{\Omega_{n+1}}(\omega_{n+1}) \\ &\leq I_{B^n}(\omega_1, \ldots, \omega_n). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{n+1}} I_{B^{n+1}}(\omega_1,\ldots,\omega_{n+1})P(\omega_1,\ldots,\omega_n,d\omega_{n+1})\\ \leq\ &\int_{\Omega_{n+1}} I_{B^{n}}(\omega_1,\ldots,\omega_{n})P(\omega_1,\ldots,\omega_n,d\omega_{n+1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_n^{(1)}(\omega_1)$ es decreciente conforme n crece. Así existe una h_1 tal que para cada $\omega_1 \in \Omega_1$, $g_n^{(1)}(\omega_1) \to h_1(\omega_1)$. Luego, por el Teorema de la convergencia monótona (véase Apéndice A)

$$P(B_n) \to \int_{\Omega_1} h_1(\omega_1)P_1(d\omega_1).$$

Ahora, si $\lim_{n\to\infty} P(B_n) > 0$ entonces $h_1(\omega_1') > 0$ para algún $\omega_1' \in \Omega_1$. Además $\omega_1' \in B^1$, ya que de lo contrario $I_{B^n}(\omega_1',\omega_2,\ldots,\omega_n) = 0$ para todo n, entonces $g_n^{(1)}(\omega_1') = 0$ para todo n, y $h_1(\omega_1') = 0$, lo cual es una contradicción.

Ahora, para cada $n > 2$,

$$g_n^{(1)}(\omega_1') = \int_{\Omega_2} g_n^{(2)}(\omega_2)P(\omega_1', d\omega_2),$$

donde

$$g_n^{(2)}(\omega_2) = \int_{\Omega_3} P(\omega_1',\omega_2,d\omega_3)\ldots\int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1',\omega_2,\ldots,\omega_n)P(\omega_1',\ldots,\omega_{n-1},d\omega_n).$$

Usando el mismo argumento dado anteriormente se tiene que $g_n^{(2)}(\omega_2) \downarrow h_2(\omega_2)$, por lo tanto

$$g_n^{(1)}(\omega_1') = \int_{\Omega_2} h_2(\omega_2)P(\omega_1', d\omega_2).$$

Como $g_n^{(1)}(\omega_1') \to h_1(\omega_1') > 0$, se tiene que $h_2(\omega_2') > 0$ para algún $\omega_2' \in \Omega_2$ usando el mismo argumento de arriba, se obtiene que $(\omega_1',\omega_2') \in B^2$.

El proceso puede ser repetido inductivamente, para obtener $\omega_1', \omega_2', \ldots$, tales que para cada n, $(\omega_1',\ldots,\omega_n') \in B^n$. Pero entonces $(\omega_1',\omega_2',\ldots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Finalmente, para probar la existencia de la medida de probabilidad P, supóngase que Q es otra medida de probabilidad, entonces $P = Q$ en los cilindros medibles, por lo tanto $P = Q$ en $\mathfrak{F}$ por el Teorema de extensión de Carathéodory. ∎

Corolario 4.1.3 *Para cada $i = 1, 2, \ldots$, sea $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, P_i)$ un espacio de probabilidad. Sean $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ y $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$. Entonces existe una única medida de probabilidad P en $\mathfrak{F}$ tal que*

$$P\{\omega \in \Omega : \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i)$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$ y todo $A_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ a P le llamamos el producto de P_i, y lo denotamos por $P = \prod_{i=1}^{\infty} P_i$.

Demostración. En el Teorema 4.1.2, tómese

$$P(\omega_1, \ldots, \omega_i, B) = P_{i+1}(B),$$

para $B \in \mathfrak{F}_{i+1}$. Entonces $P_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i)$, y así la medida de probabilidad P del Teorema 4.1.2 tiene la propiedad deseada. Si Q es otra medida de probabilidad, entonces $P = Q$ en un álgebra de uniones disjuntas de rectángulos medibles, por lo tanto $P = Q$ en $\mathfrak{F}$ por el Teorema de extensión de Carathéodory. ■

4.2. Ejemplos

4.2.1. Construcción canónica de un proceso estocástico a tiempo discreto y con horizonte infinito

Un proceso estocástico a tiempo discreto es definido como una colección de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots\}$, donde cada X_i, son definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$. Supóngase que existe una sucesión $\{Q_t\}$ de probabilidades de transición con las características siguientes

(i) $Q_t(\cdot \mid \omega_t)$ es una medida de probabilidad en Ω para cada $\omega_t \in \Omega^t$, donde $\Omega^t = \{(\omega_1, \ldots, \omega_t) : \omega_i \in \Omega,\ i = 1, \ldots, t\}$

(ii) $Q_t(B \mid \cdot)$ es una función medible en $\mathfrak{F}$, para cada $B \in \mathfrak{F}$.

Ahora para cada $A \in \mathfrak{F}$, definamos

$$P_1(A) = Q(X_1 \in A)$$

y

$$\begin{aligned} P(\omega, B) &= \Pr(X_2 \in B \mid X_1 = \omega) \\ &= Q_1(B \mid \omega), \end{aligned}$$

para cada $\omega \in \Omega$ y $B \in \mathfrak{F}$.

Luego, si $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$ y $C \in \mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned} P((\omega_1, \omega_2), C) &= \Pr(X_3 \in C \mid X_1 = \omega_1, X_2 = \omega_2) \\ &= Q_2(C \mid \omega). \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} P((\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}), D) &= \Pr(X_n \in D \mid X_1 = \omega_1, \ldots, X_{n-1} = \omega_{n-1}) \\ &= Q_{n-1}(D \mid \omega), \end{aligned}$$

para cada $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega^{n-1}$ y $D \in \mathfrak{F}$.

El espacio producto está dado por $(\Omega^\infty, \mathfrak{F}^\infty)$ y por el Teorema de Ionescu-Tulcea existe una única medida de probabilidad P, tal que si $B^n \in \mathfrak{F}^n$ es un cilindro medible entonces

$$\begin{aligned} P(B^n) &= P_n(B^n) \\ &= \int_\Omega P_1(d\omega_1) \int_\Omega P(\omega_1, d\omega_2) \cdots \int_\Omega P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, d\omega_{n-1}) \\ &\quad \int I_{B^n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) P(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, d\omega_n). \end{aligned}$$

Cadenas de Markov

Sean $E \subseteq \mathbb{Z}$ y $\Omega = \{\omega = (x_0, x_1, \ldots) : x_i \in E\}$. En esta sección se construirá un proceso de Markov definido en el espacio de estados E y con probabilidad de transición Q (véase Ejemplo 4.2.1). Para ello en el Teorema de Ionescu-Tulcea considérese $\Omega_t = E$, $\mathfrak{F}_t = \sigma(E)$, $P_1 = \pi$ y $P(\cdot, B) = Q(B \mid \cdot)$ con $t = 1, 2, \ldots$ y $B \in \sigma(E)$.

Así se tiene que el espacio producto y la σ-álgebra producto son Ω^∞ y $\mathfrak{F}^\infty$, respectivamente. Ahora, considere las proyecciones $\xi_n(\omega) = \omega_n$, donde $\xi_n : \Omega^\infty \to E$, i. e. $\xi_n(x_0, \ldots, x_n, \ldots) = x_n$. Por lo tanto, existe una única medida de probabilidad P definida en el espacio medible $(\Omega^\infty, \mathfrak{F}^\infty)$. Entonces, para una trayectoria $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ de la sucesión $\{\xi_n\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& P\left(\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\right) \\
= & \int_{\Omega_1} \pi(x_0) \int_{\Omega_2} P(x_0, dx_1) \cdots \int_{\Omega_n} I_{\{\xi_0 = x_0, \ldots, \xi_n = x_n\}}(x_0, \ldots, x_n) P(x_{n-1}, dx_n) \\
= & \pi(x_0) Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

Nótese que la sucesión $\{\xi_n\}$ satisface la siguiente propiedad

$$\begin{aligned}
& \Pr\left(\xi_{n+1} = y \mid \xi_0 = x_0, \ldots, \xi_n = x\right) \\
= & \frac{\Pr(\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x, \xi_{n+1} = y)}{\Pr(\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x)} \\
= & \frac{\pi(x_0) Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x) Q(x, y)}{\pi(x_0) Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x)} \\
= & Q(x, y) = \Pr(\xi_{n+1} = y \mid \xi_n = x).
\end{aligned}$$

La propiedad anterior es conocida como propiedad de Markov y el proceso $((\Omega^\infty\ , \mathfrak{F}^\infty, P), \{\xi_n\})$ es llamado proceso de Markov estacionario a tiempo discreto.

4.2.2. Variables aleatorias Bernoulli, Binomial y Poisson

En está sección se probará que cuando tenemos n variables aleatorias Bernoulli, la suma es una variable aleatoria Binomial con parámetros n y p y que la suma de una infinidad numerable de variables aleatorias Binomiales resulta ser una variable aleatoria Poisson.

Sea $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\mathfrak{F}_1 = Pot(\Omega_1)$ y

$$P_1(\{\omega_1\}) = \begin{cases} p & \text{si } \omega_1 = 1 \\ 1 - p & \text{si } \omega_1 = 0 \end{cases}.$$

En general, para cada $A \in \mathfrak{F}_1$,

$$P_1(A) = \sum_{\omega_1 \in A} P_1(\{\omega_1\}).$$

Luego, sea $\Omega_2 = \{0,1\}$, $\mathfrak{F}_2 = Pot(\Omega_2)$ y

$$P_2(\{\omega_2\}) = \begin{cases} p & \text{si } \omega_2 = 1 \\ 1-p & \text{si } \omega_2 = 0 \end{cases}.$$

En general, para cada $B \in \mathfrak{F}_2$,

$$P_2(B) = \sum_{\omega_2 \in B} P_2(\{\omega_2\}).$$

Análogamente, para n se tiene que $\Omega_n = \{0,1\}$, $\mathfrak{F}_n = Pot(\Omega_n)$ y

$$P_n(\{\omega_n\}) = \begin{cases} p & \text{si } \omega_n = 1 \\ 1-p & \text{si } \omega_n = 0 \end{cases}.$$

y para cada $C \in \mathfrak{F}_n$,

$$P_n(C) = \sum_{\omega_n \in C} P_n(\{\omega_n\}).$$

Sea $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_i = 1 \text{ ó } \omega_i = 0, i = 1, 2, ...\}$ y $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$. Por el Teorema de Ionescu-Tulcea existe una única medida de probabilidad P definida en $(\Omega, \mathfrak{F})$. En particular, cuando se tiene un rectángulo medible:

$$P(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1)P_2(A_2)\cdots P_n(A_n).$$

Sea $\{X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ la sucesión de proyecciones, $X_i : \Omega \to \Omega_i$, definidas de la siguiente manera

$$X_i(\omega) = X_i(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots) = \omega_i = \begin{cases} 0 \text{ con probabilidad } 1-p \\ 1 \text{ con probabilidad } p \end{cases},$$

para algún $\omega \in \Omega$. Entonces, para $n \geq 1$

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \cdots \cdot P(X_n = x_n).$$

Observación 4.2.1 *Nótese que las variables aleatorias X_i tienen una distribución Bernoulli.*

Ahora, sería interesante preguntarnos cuál es la probabilidad de la variable $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$.

Procedamos por inducción. Primero calculemos para $n = 2$,

$$P(X_1 + X_2 = k)$$

si $k = 0$

$$P(X_1 + X_2 = 0) = (1-p)^2 = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2,$$

si $k = 1$

$$P(X_1 + X_2 = 1) = 2p(1-p) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1,$$

si $k = 2$

$$P(X_1 + X_2 = 2) = p^2 = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0.$$

Así para cada $k = 0, 1, 2$, se tiene que

$$P(X_1 + X_2 = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}.$$

Ahora, nótese que

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

De esta misma forma cualquier otro resultado para el cual $Y_n = k$ tendría probabilidad $p^k(1-p)^{n-k}$. Así el número total de resultados es igual a $\binom{n}{k}$ por lo que se debe elegir k posiciones (entre n) para los unos. Por lo tanto

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Supongamos que se cumple para n y demostremos para $n + 1$. Entonces, para $k = 0, 1, 2, ..., n + 1$

$$\begin{aligned}
& P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1} = k\right) = P(Y_n + X_{n+1} = k) \\
= \;& P(Y_n = k - X_{n+1}, X_{n+1} = 0) + P(Y_n = k - X_{n+1}, X_{n+1} = 1) \\
= \;& P(Y_n = k)P(X_{n+1} = 0) + P(Y_n = k - 1)P(X_{n+1} = 1) \\
= \;& \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}(1-p) + \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} p \\
= \;& \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k+1} + \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n-k+1} \\
= \;& p^k (1-p)^{n-k} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \\
= \;& \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

En resumen hemos obtenido que la suma de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p tienen una distribución Binomial con parámetros n y p.

Ahora, supóngase que se tiene una sucesión $\{p_n\} \subset (0, 1)$, las cuales denotan las probabilidades de éxito, y supóngase que $p_n \to 0$ y que $\lambda_n = np_n \to \lambda \in (0, \infty)$, cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k\right) \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda_n}{n})^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
= \;& \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(\frac{\lambda_n^k}{k!}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \\
= \;& \lim_{n\to\infty} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(\frac{\lambda_n^k}{k!}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k}\right) \\
= \;& \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda).
\end{aligned}$$

Con lo que se obtiene una distribución Poisson con parámetro λ.

4.2.3. Ley Débil de los Grandes Números y Teorema del Límite Central

Muy a menudo se tienen sucesiones de variables aleatorias X_1, X_2,...,X_n, donde n es suficientemente grande. Por lo tanto, es conveniente tener un sólo espacio de probabilidad sobre el cual podamos definir una sucesión infinita de variables aleatorias. Los resultados sobre medidas en espacios producto infinitos numerables, los cuales se discutieron en este capítulo provee las herramientas necesarias para solucionar dicho problema. En particular, se puede requerir que X_1, X_2,...,X_n sean independientes y que X_i tenga una función de distribución específica. Además, los X_i pueden ser elementos aleatorios con valores en un espacio medible arbitrario.

Para poder obtener dicha sucesión, sean $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, P_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ una sucesión arbitraria de espacios de probabilidad. Se requiere encontrar un sólo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ en el cual se pueda definir una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2,...,X_n y una sucesión de elementos aleatorios $X_i : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\Omega_i, \mathfrak{F}_i)$ tales que

$$P\{X_i \in B\} = P_i(B),$$

para todo $B \in \mathfrak{F}_i$ con $i = 1, 2, \ldots$.

Por el Corolario 4.1.3 se tiene que $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$ y $P = \prod_{i=1}^{\infty} P_i$. Ahora si $\omega = (\omega_1, \omega_1, \ldots) \in \Omega$, sea $X_i(\omega) = \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Si $B \in \mathfrak{F}_i$ entonces $\{\omega : X_i(\omega) \in B\} = \{\omega : \omega_i \in B\}$ es un rectángulo medible. De esto se sigue que $\{\omega : X_i(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$, así X_i es un elemento aleatorio. Luego, usando nuevamente el Corolario 4.1.3 se obtiene que

$$P\{X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i),$$

si $A_i \in \mathfrak{F}_i$ y $1 \leq i \leq n$.

Ahora, tómese $A_j = \Omega_j$ entonces $P\{X_i \in A_i\} = P_i(A_i)$ para todo $j \neq i$. Por lo tanto

$$P\{X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Esto también prueba la independencia de los elementos aleatorios.

En particular, para obtener una sucesión de variables aleatorias independientes con una función de distribución especifica F_1, F_2,..., se debe tomar $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ y P_i la medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a F_i.

Note que lo anterior nos proporciona la medida producto para las sucesiones de variables aleatorias de el Teorema Central del Límite y la Ley de los Grandes Números.

Teorema 4.2.2 *(Teorema del Límite Central) Sean X_1, X_2,...,X_n son variables aleatorias iid con media $\mu < \infty$ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Sea*

$$G_n(x) = P\left[\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \leq x\right]$$

y

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Entonces $G_n(x) \to \Phi(x)$, uniformemente en $x \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Véase [7], p. 139. ∎

Teorema 4.2.3 *(Ley débil de los grandes números) Sean X_i, $i = 1, \ldots, n$ son variables aleatorias iid con media $\mu < \infty$, entonces*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \mu.$$

Demostración. Véase [7], pp. 145-149. ∎

4.2.4. Un ejemplo en teoría de confiabilidad

En esta sección se analizará la probabilidad de vida de uso de los componentes de una máquina, dicho análisis se hará mediante el uso de la medida producto.

Primeramente se definirá la distribución de tiempos de fracaso. Sabemos que para que una máquina trabaje de forma óptima depende del funcionamiento de cada uno de sus componentes, así podemos definir para cada componente una variable aleatoria T no negativa, la cual indica el tiempo de falla de dicha componente. Luego, denotemos por F a la función de distribución de T, de esta forma

$$F_T(t) = P\left(T \leq t\right),$$

$t \in \mathbb{R}$, i.e. $F(t)$ es la probabilidad de que la máquina falle en t ó antes del tiempo t. Se denotará a la función de densidad de T por f. Nótese que cuando $t = 0$, se estará refiriendo al tiempo de manufactura, el tiempo de instalación ó a la primera vez de uso.

Definición 4.2.4 *La función de confiabilidad $R(t)$, con $t \geq 0$ es la probabilidad de que el componente deje de funcionar en el tiempo t. Dicha probabilidad está dada por $P\left\{T > t\right\}$ así $R(t) = 1 - F(t)$. A la función R se llama función de supervivencia (véase [11]).*

Definición 4.2.5 *La función de velocidad de falla ó función de riesgo se define como*

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t\right)}{\Delta t}.$$

Observación 4.2.6

$$P\left(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t\right),$$

$t \geq 0$, es la probabilidad de que una componente de t años experimente el evento en las próximas Δt unidades de tiempo. Entonces la función de riesgo es la razón o tasa de falla instantánea de una componente al tiempo t dado que la componente ha sobrevivido hasta ese momento t.

Considérese una componente con tiempo de falla T_1. Como sabemos este componente puede fallar en algún momento, así que debemos tener repuestos. Lo importante es preguntarnos cuántos repuestos debemos tener para que la probabilidad especificada asegure que la máquina no deje de funcionar. Asumamos que el original y los repuestos tienen la misma distribución de falla, con densidad f.

Primero veamos el caso, cuando sólo tenemos un repuesto, después para cuando tengamos $n - 1$ repuestos y con esta información generalizar para una infinidad de repuestos.

Caso I. Sea T_1 el tiempo en el que el repuesto original falla y T_2 el tiempo en que falla de la nueva componente instalada. Supóngase que el remplazamiento de dicho componente es inmediato entonces $T = T_1 + T_2$ representa el tiempo de funcionamiento de la máquina con dos repuestos. También supóngase que T_1 y T_2 son independientes.

Ahora, sean $\Omega_1 = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t),$$

$t \in \mathbb{R}$.

De la misma forma sean $\Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y

$$F_{T_2}(t) = P(T_2 \leq t).$$

Sea $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, usando el Teorema de la Medida Producto se garantiza que existe una única medida de probabilidad P definida en $(\Omega, \mathfrak{F})$. Entonces la función de distribución de T determinada por F_1 y F_2 esta dada por

$$\begin{aligned}
P\left(T_1 + T_2 < t\right) &= \int_{\Omega_1} I_{\{T_1+T_2<t\}}(\omega) dP(\omega) \\
&= \int_{\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 : t_1+t_2<t\}} d(F_1 \times F_2)(t_1, t_2) \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{t-t_1} dF_{T_1}(t_2) dF_{T_2}(t_2) \\
&= \int_0^{\infty} F_{T_1}(t - t_2) dF_{T_2}(t_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F_T(t) = \int_0^{\infty} F_{T_1}(t - t_2) dF_{T_2}(t_2).$$

Caso II. Para este caso, supóngase que tenemos $n - 1$ repuestos, ahora nuestro tiempo de falla será

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n,$$

luego sean $\Omega_1 = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t).$$

De la misma forma sean $\Omega_n = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t).$$

Sea $\Omega = \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, utilizando el Teorema de la Medida Producto se tiene que existe una única medida de probabilidad P la cual esta definida en $(\Omega, \mathfrak{F})$.

De la misma forma que en el caso anterior se tiene que la función de distribución de T esta dada por

$$\begin{aligned} & P\left(T_1 + T_2 + \cdots + T_n \leq t\right) \\ = & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{n-1}} I_{\{T_1+\cdots+T_n<t\}}(t_1, \ldots, t_n) dF_1(t_1) \cdots dF_n(t_n) \\ = & \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty F_1(t-t_1) \cdots F_{n-1}(t_{n-2}-t_{n-1}) dF_n(t_n) \cdots dF(t_1), \end{aligned}$$

para $t \in [0, \infty)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_T(t) = & \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} F_1(t-t_1) F_2(t_1-t_2) \cdots \\ & F_{n-1}(t_{n-2}-t_{n-1}) dF_n(t_n) dF_{n-1}(t_{n-1}) \cdots dF(t_1). \end{aligned}$$

Caso III. Ahora, supóngase que se tiene una infinidad de repuestos, así que nuestro tiempo de falla es de la forma

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i.$$

Se está suponiendo que la serie anterior es convergente, lo cual se cumple en distintos casos (véase ejemplo al final).

Usando el Teorema de Ionescu-Tulcea se garantiza que existe una única medida de probabilidad P definida en $(\Omega^\infty, \mathfrak{F}^\infty)$. Dicha medida es inducida por los espacios dados en los casos anteriores.

Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo y defínase para $n \geq 1$, $A_n = \{T_1 + T_2 + ... + T_n \leq t\}$. Los conjuntos medibles $A_n, n \geq 1$ forman una sucesión decreciente de conjuntos, los cuales convergen a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{T \leq t\}.$$

Entonces por la propiedad de continuidad de la medida de probabilidad P se tiene que

$$F_T(t) = \lim_{n\to\infty} P(T_1 + T_2 + \cdots + T_n < t).$$

En particular, si $T_1 \sim Exp(\beta_1)$ y $T_2 \sim Exp(\beta_2)$, donde $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ y $\beta_2 > \beta_1$. Entonces, $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{F}_1$=$\mathfrak{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Así $\Omega = \mathbb{R}^2$ y $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, luego si $T = T_1 + T_2$ entonces

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T_2}(t-t_1) f_{T_1}(t_1) dt_1 \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\beta_1}\left[\exp\left(\frac{1}{\beta_1}\right)\cdot \frac{1}{\beta_2}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\beta_2}\right)\right] dt_1 \\ &= \frac{\exp(-\frac{t}{\beta_2})}{\beta_2 - \beta_1}. \end{aligned}$$

Ahora, supóngase que $T_3 \sim Exp(\beta_3)$, $\beta_3 > 0$ y $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$ de la misma forma que arriba, se tiene que $\Omega_3 = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}_3 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Así $\Omega = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$, luego si $T = T_1 + T_2 + T_3$ entonces

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T_3}(t-t_1) f_{T_1+T_2}(t_1) dt_1 \\ &= \frac{\beta_2 \exp(-\frac{t}{\beta_3})}{(\beta_3-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)}. \end{aligned}$$

En general, para n variables aleatorias de la misma forma que la descrita arriba con $\beta_0 = 1 \le \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$, se tiene que $\Omega = \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T_n}(t-t_1) f_{T_1+\cdots+T_{n-1}}(t_1) dt_1 \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \beta_i \exp(-\frac{t}{\beta_n})}{\prod_{i=1}^{n-1}(\beta_{i+1}-\beta_i)}. \end{aligned}$$

Ahora, supóngase que se tiene una infinidad de repuestos de la misma forma que arriba, con $\beta_0 = 1 \le \beta_1 < \beta_2 < \cdots$. Así $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, $\mathfrak{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ y

$$\lim_{n\to\infty} f_T(t) = \frac{\prod_{i=0}^{\infty} \beta_i \exp(-\frac{t}{\beta_n})}{\prod_{i=1}^{\infty}(\beta_{i+1}-\beta_i)},$$

Nótese que el límite anterior existe ya que, la sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y positiva, de lo cual se tiene que $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ existe. Por lo tanto $\prod_{i=0}^{\infty}\beta_i < +\infty$. Además $\beta_{i+1}-\beta_i \leq \beta_{i+1}$, de donde se obtiene que $\lim_{n\to\infty}\big(\beta_{n+1}-\beta_n\big) \leq \lim_{n\to\infty}\beta_{n+1}$. Por lo tanto $\prod_{i=1}^{\infty}(\beta_{i+1}-\beta_i)$ es finito.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se estudió la medida producto y los teoremas relacionados a ella, se analizaron tanto en el caso finito como en el caso infinito numerable para una colección de espacios probabilísticos. En cada caso, se ilustró la teoría con una serie de ejemplos en el contexto de probabilidad del uso de la medida producto. Además, en cada uno de ellos se determinó de forma explícita el espacio de probabilidad.

El estudio de los teoremas de la medida producto (finito e infinito numerable) dan un preámbulo para el estudio de construcción de procesos estocásticos. En particular, en la tesis se abordó el caso Markoviano, pero estos mismos resultados permiten la construcción de otros procesos, por ejemplo: procesos Poisson, procesos controlados y procesos Gaussianos (en su versión continua del teorema de la medida producto), entre otros.

Una posible línea de investigación en trabajos futuros va a ser dirigida al estudio del Teorema de Kolmogorov. El cual consiste en encontrar la medida producto para el caso de una familia no numerable de espacios de medida. El teorema de Kolmogorov permitirá estudiar la construcción de procesos estocásticos a tiempo continuo, como procesos de Wiener, procesos de Levy, procesos de Markov, entre otros.

Apéndice A

Espacios de Medida

Definición A.0.7 *Sea Ω un conjunto. Una clase de subconjuntos de Ω es llamada un álgebra, la cual es denotada por $\mathfrak{U}$, si*

($\mathfrak{F}1$) $\mathfrak{U} \neq \emptyset$.

($\mathfrak{F}2$) Si $A \in \mathfrak{U}$, entonces $A' \in \mathfrak{U}$ (i.e. $\mathfrak{U}$ es cerrada bajo complementos).

($\mathfrak{F}3$) Si A_1, $A_2 \in \mathfrak{U}$ entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{U}$ (i.e. $\mathfrak{U}$ es cerrada bajo uniones finitas).

Ejemplos

1. $\mathfrak{U}_1 = \{\Omega, \emptyset\}$.
2. $\mathfrak{U}_2 = \{A : A \subset \Omega\}$, álgebra discreta.
3. $\mathfrak{U}_3 = \{\Omega, \emptyset, A, A'\}$ para algún $A \subset \Omega$.
4. Sea Ω un conjunto infinito y sea $\mathfrak{U}_4 = \{A \subset \Omega : A \text{ ó } A' \text{es finito}\}$.

Teorema A.0.8 *Sean I cualquier conjunto no vacío de índices y $\{\mathfrak{U}_i, i \in I\}$ una colección de álgebras. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \bigcap_{i \in I} \mathfrak{U}_i \\ &= \{A : A \in \mathfrak{U}_i, i \in I\}. \end{aligned}$$

es una álgebra.

Teorema A.0.9 *Sea $\mathfrak{C}$ una clase arbitraria de subconjuntos de Ω. Entonces existe una mínima álgebra única $\mathfrak{U}$ que contiene a $\mathfrak{C}$. En este caso se dice que $\mathfrak{U}$ es generada por $\mathfrak{C}$ y se denota por $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{C})$.*

Definición A.0.10 *Una clase de subconjuntos de Ω es llamada $\sigma-$álgebra, y es denotada por $\mathfrak{F}$, si es un álgebra y si ($\mathfrak{F}3$) es reemplazado por ($\mathfrak{F}3$)': Si $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, ...$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$ (i.e. $\mathfrak{F}$ es cerrado bajo uniones numerables).*

Propiedades

1. Si $A_i \in F$, $i = 1, 2, ...$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (i.e. F es cerrado bajo intersecciones numerables).
2. Por definición, una $\sigma-$álgebra es un álgebra, pero no toda $\sigma-$álgebra es un álgebra. En el ejemplo 4 de álgebras, tome $\Omega = (-\infty,\infty)$, y defina $A_i = \{\text{Todos los enteros en } [-i,i]\}$, $i = 0, 1, 2, ...$ Sea $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Como A y A' son conjuntos infinitos, se tiene que $A \notin F$.

Ejemplos

1. $\mathfrak{F}_1 = \{\Omega, \emptyset\}$.
2. $\mathfrak{F}_2 = \{A : A \subset \Omega\}$, $\sigma-$álgebra discreta.
3. $\mathfrak{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, A, A'\}$ para algún $A \subset \Omega$.
4. Sean Ω un conjunto no numerable y $\mathfrak{F}_4 = \{A \subset \Omega : A \text{ es numerable ó } A' \text{ es numerable}\}$.

Teorema A.0.11 *Sea I un conjunto de índices no vacío y sea $\{\mathfrak{F}_i, i \in I\}$ una colección de $\sigma-$álgebras. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \\ &= \{A : A \in \mathfrak{F}_i, i \in I\}. \end{aligned}$$

es una $\sigma-$álgebra.

Teorema A.0.12 *Sea $\mathfrak{C}$ una clase arbitraria de subconjuntos de Ω. Entonces existe una mínima $\sigma-$álgebra única $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathfrak{C}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{F}$ es generada por $\mathfrak{C}$ y se denota por $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{C})$.*

Ejemplo A.0.13 *Algunos casos especiales son los siguientes.*

1. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y defina $\mathfrak{C}_0$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_0 &= \{\text{Todos los intervalos en } \mathbb{R}\} \\ &= \{(-\infty, x),\ (-\infty, x],\ (x, \infty),\ [x, \infty),\ (x, y),\ (x, y],\ [x, y),\ [x, y]; \\ x,\ y &\in \mathbb{R},\ x < y\}. \end{aligned}$$

   Por el teorema A.0.14, existe una $\sigma-$álgebra $\mathfrak{F}$=$\sigma(\mathfrak{C}_0)$; a esta $\sigma-$álgebra la denotamos por $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ y es llamada la $\sigma-$álgebra de Borel.

   Teorema A.0.14 *Cada una de las siguientes clases genera la $\sigma-$álgebra de Borel.*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \{(x, y); x, y \in \mathbb{R},\ x < y\} \\ \mathfrak{C}_2 &= \{[x, y);\ x,\ y \in \mathbb{R},\ x < y\} \\ \mathfrak{C}_3 &= \{[x, y];\ x,\ y \in \mathbb{R},\ x < y\} \\ \mathfrak{C}_4 &= \{(x, y);\ x,\ y \in \mathbb{R},\ x < y\} \\ \mathfrak{C}_5 &= \{(x, \infty);\ x \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{C}_6 &= \{[x, \infty);\ x \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{C}_7 &= \{(-\infty, x);\ x \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{C}_8 &= \{(-\infty, x];\ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

2. Sea $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ y defina $\mathfrak{C}_0$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_0 &= \{\text{Todos los rectángulos en } \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(-\infty, x) \times (-\infty, x^{'}),\ (-\infty, x) \times (-\infty, x^{'}], \\ &\quad (-\infty, x] \times (-\infty, x^{'}),\ (-\infty, x] \times (-\infty, x^{'}], \\ &\quad (x, \infty) \times (x', \infty), \ldots,\ [x, \infty) \times [x', \infty), \ldots, \\ &\quad (x, y) \times (x', y^{'}), \ldots,\ [x, y] \times [x^{'}, y^{'}]; \\ x,\ y,\ x^{'},\ y^{'} &\in \mathbb{R},\ x < y,\ x^{'} < y\ \}. \end{aligned}$$

   La $\sigma-$álgebra generada por $\mathfrak{C}_0$ es denotada por $\mathfrak{B}^2$.

3. Sea $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^k$ y defina $\mathfrak{C}_0$ de forma análoga a la dada en el inciso anterior. La $\sigma-$álgebra generada por $\mathfrak{C}_0$ es denotada por $\mathfrak{B}^k$.

Lema A.0.15 *Sean $\mathcal{C} \in Pot(\Omega)$ y $B \subseteq \Omega$. Defínase*

$$\mathcal{C} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathcal{C}\}. \tag{A.1}$$

Entonces

$$\sigma(\mathcal{C} \cap B) = \sigma(\mathcal{C}) \cap B. \tag{A.2}$$

Demostración. Véase [10], P. 145. ■

Definición A.0.16 *Sea X un conjunto y $\mathfrak{F}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathfrak{F})$ es llamada espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible (o medible con respecto a $\mathfrak{F}$) si $A \in \mathfrak{F}$.*

Definición A.0.17 *Una medida en un álgebra $\mathfrak{U}$ es una función $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^+$ (donde $\mathbb{R}^+$ denota a los reales no negativos) tal que*

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) *Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{U}$ ajenos dos a dos y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{U}$ entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definición A.0.18 *Decimos que μ es una medida, si es una función definida sobre una $\sigma-$álgebra $\mathfrak{F}$, $\mu(\emptyset) = 0$ y*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

para alguna sucesión E_i, de conjuntos disjuntos medibles.

A la terna $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ se le llama espacio de medida. Además, si $\mu(X) = 1$, μ es llamada medida de probabilidad.

La propiedad (b) de la Definición A.0.17 se le conoce como aditividad numerable. En particular se tiene que μ es finitamente aditiva; es decir,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i),$$

para conjuntos disjuntos $E_i \in \mathfrak{F}$, ya que podemos tomar $E_i = \emptyset$ para $i > N$.

Teorema A.0.19 *Sea μ una función aditivamente numerable en el álgebra $\mathfrak{U}$.*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ *para todo* $A,\ B \in \mathfrak{U}$.

(c) *Si* $A,\ B \in \mathfrak{U}$ *y* $B \subset A$, *entonces* $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A - B)$

(por lo tanto $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$ *si* $\mu(B)$ *es finito, y* $\mu(A) \geq \mu(B)$ *si* $\mu(A - B) \geq 0$*).*

(d)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

para todo $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{U}$, *si* μ *es una medida,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

para todo $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{U}$ *tal que* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{U}$.

Definición A.0.20 *Una función μ definida en $\mathfrak{F}$ es llamada finita si y sólo si $\mu(A)$ es finita, para cada $A \in \mathfrak{F}$.*

Una medida μ es $\sigma-$finita si existen $\{X_i\} \subset \mathfrak{U}$ tal que $\mu(X_i) < +\infty$, para todo i, y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Teorema A.0.21 *Sea μ una función aditivamente numerable en la σ-álgebra $\mathfrak{F}$.*

(a) (Continuidad por abajo) Si $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{F}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$ cuando $n \to \infty$.

(b) (Continuidad por arriba) $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{F}$, $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1)$ es finita, entonces $\mu(A_n) \to \mu(A)$ cuando $n \to \infty$.

Teorema A.0.22 *Sea $\mathfrak{F}_0$ un álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathfrak{C}$ las clases monótonas de subconjuntos de Ω (i.e. si $A_n \in \mathfrak{C}$ y, $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$, entonces $A \in \mathfrak{C}$) si $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{C}$ entonces $\sigma(\mathfrak{F}_0) \subset \mathfrak{C}$ es la mínima σ-álgebra en $\mathfrak{F}_0$.*

Proposición A.0.23 *Si* $A, B \in \mathfrak{F}$ *y* $A \subset B$*, entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Proposición A.0.24 *Si* $E_i \in \mathfrak{F}$*,* $\mu(E_1) < +\infty$ *y* $E_{i+1} \subset E_i$ *entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Proposición A.0.25 *Si* $E_i \in \mathfrak{F}$ *entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Apéndice B

Teoremas de Convergencia

B.0.5. Definiciones y Ejemplos

Definición B.0.26 *Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, la función indicadora de A se define como*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}.$$

Definición B.0.27 *Sean $(X, \mathfrak{F})$ un espacio medible y $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función, φ es llamada una función simple si es Borel medible y sólo toma un número finito de valores distintos. Equivalentemente, φ es simple si y sólo si puede ser escrita como una suma finita de la forma siguiente: $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i I_{E_i}(x)$, $x \in X$ donde E_i son conjuntos disjuntos en $\mathfrak{F}$ y I_{E_i} es la indicadora de los conjuntos medibles E_i.*

Proposición B.0.28 *Sea f una función medible no negativa. Entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones simples con $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$, $n \geq 1$ tal que $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para cada $x \in X$.*

Definición B.0.29 *Una propiedad se cumple casi dondequiera (abreviada a.e.), si el conjunto de puntos donde ésta falla es un conjunto de medida cero. En particular, decimos que $f = g$ a.e. si f y g tienen el mismo dominio y $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Similarmente, decimos que f_n converge a g casi donde quiera si $\mu\{f_n(x) \nrightarrow g(x)\} = 0$.*

B.0.6. Integral de Lebesgue y Teoremas de Convergencia

Sea $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Si φ esta definida en un conjunto de medida finita, definimos la integral de φ por

$$\int \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i),$$

cuando φ tiene la representación canónica, i.e. $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{E_i}$, con $E_i = \{x \in X : \varphi(x) = c_i\}$, para $i = 1, ..., n$. En nuestro caso abreviaremos la expresión de esta integral por $\int \varphi$. Si $E \in \mathfrak{F}$, definimos

$$\int_E \varphi = \int \varphi \cdot I_E.$$

Lema B.0.30 *Sea $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{E_i}$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Supóngase que cada E_i es un conjunto de medida finita. Entonces*

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Proposición B.0.31 *Sea φ y ψ funciones simples definidas en un conjunto de medida finita. Entonces $\displaystyle\int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi$,*

y si $\varphi \geq \psi$ a.e. entonces

$$\int \varphi \geq \int \psi.$$

Definición B.0.32 *Si f es una función medible acotada en un conjunto medible E con $\mu(E) < +\infty$, definimos la integral (Lebesgue) de f sobre E por*

$$\int_E f(x) dx = \inf \int_E \psi(x) dx$$

para toda función simple $\psi \geq f$.

Proposición B.0.33 *Si f y g son funciones medibles y acotadas definidas en un conjunto E de medida finita entonces:*

i. $\int(af+bg) = a\int f + b\int g$.

ii. *Si* $f = g$ *a.e. entonces*

$$\int_E f = \int_E g.$$

iii. *Si* $f \leq g$ *a.e. entonces*

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

También

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|\,.$$

iv. *Si* $A \leq f(x) \leq B$ *entonces*

$$A\mu(E) \leq \int_E f \leq B\mu(E).$$

v. *Si* A *y* B *son dos conjuntos disjuntos de medida finita, entonces*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Proposición B.0.34 *(Teorema de la Convergencia Acotada) Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto* E *de medida finita, y supóngase que existe un número real* M *tal que* $|f_n(x)| \leq M$ *para todo* n *y para todo* x*. Si* $f(x) = \lim f_n(x)$ *para cada* x *en* E *entonces*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

Sea f una función medible no negativa definida en un conjunto medible E, definimos

$$\int_E f = \sup_{h\leq f} \int_E h,$$

donde h es una función medible acotada tal que $\mu\{x : h(x) \neq 0\}$ es finito.

Para una prueba de los siguientes resultados véase [1] y [8].

Proposición B.0.35 *Si* f *y* g *son funciones no negativas, entonces:*

i.
$$\int_E cf = c\int_E f,\ c > 0.$$

ii.
$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$$

iii. *Si $f \leq g$ a.e. entonces*
$$\int_E f \leq \int_E g.$$

Teorema B.0.36 *(Lema de Fatou) Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y $f_n(x) \to f(x)$ casi donde quiera en un conjunto E, entonces*
$$\int_E f \leq \underline{\lim}\int_E f_n.$$

Teorema B.0.37 *(Teorema de la Convergencia Monótona) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, y sea $f = \lim f_n$ a.e., y supóngase que $f_n \leq f$. Entonces*
$$\int f = \lim \int f_n.$$

Corolario B.0.38 **(a)** *Sea u_n una sucesión de funciones medibles no negativas, y sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Entonces*
$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n.$$

(b) *Sea f una función negativa y $\{E_i\}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Sea $E = \bigcup E_i$ entonces*
$$\int_E f = \sum \int_{E_i} f.$$

Definición B.0.39 *Una función f medible no negativa, se dice que es integrable sobre un conjunto medible E si*
$$\int_E f < \infty.$$

Proposición B.0.40 *Sean f y g dos funciones medibles no negativas. Si f es integrable sobre E y $g(x) < f(x)$ en E, entonces g también es integrable en E, y*

$$\int_E f - g = \int_E f - \int_E g.$$

Proposición B.0.41 *Sea f una función no negativa que es integrable sobre un conjunto E. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo conjunto $A \subset E$ con $\mu A < \delta$ tenemos*

$$\int_E f < \varepsilon.$$

Definición B.0.42 *La parte positiva f^+ de una función f es definida como $f^+ = f \vee 0$; i.e.*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$

$x \in X$.

Similarmente definimos la parte negativa f^- por $f^- = (-f) \vee 0$. Si f es medible, también lo son f^+ y f^-. Además se tiene que

$$f = f^+ - f^-$$

y

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Definición B.0.43 *Una función medible f se dice que es integrable sobre E, si f^+ y f^- son integrables sobre E. En este caso definimos*

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Proposición B.0.44 *Sean f y g funciones integrables sobre E. Entonces:*

i. *La función cf es integrable sobre E y $\displaystyle\int_E cf = c\int_E f$.*

ii. *La función $f + g$ es integrable sobre E y*

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$$

iii. *Si* $f \leq g$ *a.e., entonces* $\int_E f \leq \int_E g$.

iv. *Si* A *y* B *son conjuntos medibles disjuntos contenidos en* E, *entonces*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Teorema B.0.45 *(Teorema de la convergencia de Lebesgue) Sea* g *una función integrable sobre* E *y sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles tales que* $|f_n| \leq g$ *en* E *y para casi todo* x *tenemos que* $f(x) = \lim f_n(x)$. *Entonces*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

Bibliografía

[1] Ash R. B., Probability and Measure Theory, Academic Press, 2000.

[2] Billingsley P., Convergence of Probability Measures, J. Wiley, New York, NY, 1968.

[3] Casella G. Roger L. B., Statistical Inference, Duxbury Press, Second Edition, 2001.

[4] Hoel P. G., Introduction to Probability Theory, Houghton Mifflin Company, 1971.

[5] Mendenhall W. Wackerly D. D. Scheaffer R. L., Estadística Matemática con Aplicaciones, Thomson, 2002.

[6] Ross S., A First Course in Probability, New York: Academic Press, 5th edition, 1993.

[7] Roussas G. G., A First Course in Mathematical Statistics, Addison-Wesley, 1973.

[8] Royden, H.L., Real Analysis, New York: Macmillan. 2nd edition,1968.

[9] Shih Y. Teicher H., Probability Theory, Third Edition, Springer International London: Chapman & Hall, 2003.

[10] Shiryaev, A.N., Probability, New York: Springer Verlag, 1996.

[11] Tuckwell H. C., Elementary Applications of Probability Theory, 2st edition, 1995.